

SỞ GD&ĐT ĐẮK LẮK
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có: **01 trang**)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: **TOÁN** - Lớp: **12** – Vòng: **1**
Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x \end{cases}$$
.

Bài 2. (3,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+x}{y+z} + \frac{1+y}{z+x} + \frac{1+z}{x+y} \leq 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

Bài 3. (4,0 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, luôn tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}.$$

Bài 4. (5,0 điểm) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (C) . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và CD , AD và BC , AC và BD . Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các tam giác ABN , BCM , CDN và ADM tương ứng với các đỉnh A, C, D và B .

a) Chứng minh các điểm I_1, I_2, I_3, I_4 đồng viên.

b) Gọi I là tâm đường tròn qua I_1, I_2, I_3, I_4 . Chứng minh PI vuông góc với MN .

Bài 5. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + f(y)) - f(f(x) - x) = f(y) - f(x) + 2x + 2y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

----- **HẾT** -----

<https://toanmath.com/>