

Bài 1. (5 điểm)

1. Tìm tham số b, c sao cho hàm số $y = f(x) = x^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường parabol với đỉnh là $I(-2; 5)$.

2. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x - 3 + |2x - 4|$. Từ đó hãy tìm tham số m sao cho phương trình $x + |2x - 4| = m$ có nghiệm duy nhất.

Bài 2. (4 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x + 1} + (x - 1)(\sqrt{2x - 1} - 1)$.

2. Biết $f(x) = x^2 - 2mx + n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tham số m, n để biểu thức $P = 5m + n + \sqrt{n}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. (2 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 2y^2 = -3 \\ \sqrt{x + 2} + 2y = 3 \end{cases}$$

Bài 4. (8 điểm)

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , I và G lần lượt là trung điểm của CD và OB .

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ và $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $AI \perp IG$.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 37$.

2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $\angle BAC = 60^\circ$. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau tại trọng tâm G . Tính theo a diện tích tam giác ABC .

Bài 5. (1 điểm)

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 3 và độ dài 3 cạnh của tam giác là a, b, c .

Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 27$.

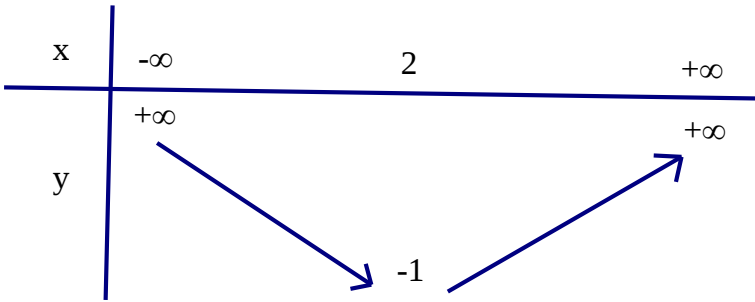
.....**HẾT**

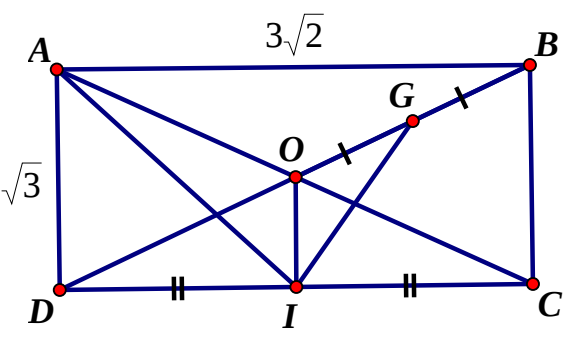
Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN 10
KÌ THI OLYMPIC LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT THANH XUÂN-CẦU GIẤY,
MÊ LINH-SÓC SƠN, ĐÔNG ANH HÀ NỘI

Năm học: 2020-2021

.....o0o.....

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 1 (5 đ)	1.1. Vì parabol có đỉnh $I(-2;5)$ nên $\frac{-b}{2} = -2$	1,0
	và $f(-2) = 5$ (hoặc $\frac{-\Delta}{4a} = 5$)	1,0
	Khi đó: $\begin{cases} b = 4 \\ 4 - 2b + c = 5 \end{cases}$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 9 \end{cases}$. Vậy $b=4, c=9$.	0,75
	1.2. Ta có: $y = x - 3 + 2x - 4 = \begin{cases} x - 3 + 2x - 4 & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 3 + 4 - 2x & \text{khi } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 7 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$	0,5
	-Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.	0,5
	-BBT 	
	-Ta có: $PT \Leftrightarrow x - 3 + 2x - 4 = m - 3$, từ BBT ta thấy PT có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m - 3 = -1 \Leftrightarrow m = 2$.	0,5
	2.1. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.	0,5
	$PT \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1}-1) = (x-1)(\sqrt{2x-1}-1)$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x+1}-x+1) = 0$	
	+) $\sqrt{2x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=1 \Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1(TM)$.	0,5
	+) $\sqrt{2x+1}-x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1=(x-1)^2 \end{cases}$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 4(TM) \\ x = 4 \end{cases}$	0,5
Bài 2 (4đ)	Vậy: $x \in \{1; 4\}$.	
	2.2. Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và hệ số $a=1>0$ nên $\Delta' = m^2 - n \leq 0 \Leftrightarrow n \geq m^2$.	0,5
	Ta có: $P = 5m + n + \sqrt{n} \geq 5m + m^2 + m$	0,25
	Ta lại có: $m^2 + 5m + m = m^2 + 4m + 4 + (m + m) - 4 = (m + 2)^2 + (m + m) - 4$	0,25
	Vì $(m + 2)^2 \geq 0$	0,25
	và $m \geq -m \Rightarrow m + m \geq 0 \Rightarrow P \geq -4$. Dấu “=” khi $\begin{cases} m = -2 \\ m \leq 0 \\ n = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 4 \end{cases}$.	0,25
	Vậy Min $P = -4$ khi $m = -2$ & $n = 4$.	
	ĐK: $x \geq -2$. Ta có: $\sqrt{x+2} = 3-2y$	0,5
Bài 3 (2đ)	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2y \geq 0 \\ x+2 = (3-2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ x = 4y^2 - 12y + 7 \end{cases}$	0,5
	Thế x theo y vào PT còn lại ta được: $4y^2 - 12y + 7 - 2y^2 = -3 \Leftrightarrow 2y^2 - 12y + 10 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1(TM) \\ y = 5(KTM) \end{cases}$. Với $y=1$ thì $x = -1$. Vậy $(x; y) = (-1; 1)$.	0,5
	4.1a. 	
	-Ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.	1
	-Ta có: $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \overrightarrow{DB}$	1

Bài 4 (8đ)	$= \frac{-1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AD}.$	1
	4.1 b. Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$	0,5
	$\Rightarrow \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right)$	0,5
	Vì $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, theo giả thiết $AB = 3\sqrt{2}$; $AD = \sqrt{3}$	0,5
	nên $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{8} AB^2 - \frac{3}{4} AD^2 = \frac{1}{8} \cdot 18 - \frac{3}{4} \cdot 3 = 0 \Rightarrow AI \perp IG.$	0,5
	4.1c Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$	0,25
	nên $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2$	0,25
	$= 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4MO^2 + 4.OA^2$	0,25
	$= 4.OM^2 + 4.OA^2 = 4.OM^2 + AC^2 = 4.OM^2 + 21 = 37 \Leftrightarrow OM^2 = 4 \Leftrightarrow OM = 2.$	0,25
	Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính bằng 2.	
	4.2 Đặt $AB=c$, $AC=b$. Theo định lý Pytago, ta có: $BC^2 = BG^2 + CG^2$	0,5
	$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9} (m_b^2 + m_c^2) = \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{9} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$	0,5
	Theo định lý cosin trong tam giác ABC, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ = 5a^2 - bc \Rightarrow bc = 4a^2.$	0,5
	Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4a^2 \cdot \sin 60^\circ = a^2 \sqrt{3}.$	0,5
Bài 5 (1đ)	Ta có: $E = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 27abc = 4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 27abc$ $= 12(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 27abc.$	0,25
	Chúng minh được: $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$	0,25
	Mà $a+b+c=3$ nên $abc \geq (3-2a)(3-2b)(3-2c)$ $\Leftrightarrow abc \geq 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc$ $\Leftrightarrow 9abc \geq 12(ab+bc+ca) - 27 \Leftrightarrow 3abc \geq 4(ab+bc+ca) - 9.$	0,25
	Do đó: $E \geq 12(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 9[4(ab+bc+ca) - 9] = 12(a+b+c)^2 - 81 = 27.$ Dấu “=” khi $a=b=c=1$.	0,25