

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 90 phút)

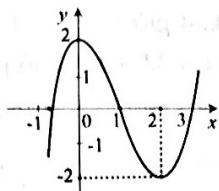
NGUYỄN THANH GIANG (GV THPT chuyên Hưng Yên)

Câu 1. Cho hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tính tổng

$$S = a + b + c + d.$$



- A. $S = 0$. B. $S = 6$. C. $S = -4$ D. $S = 2$.

Câu 2. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Khi đó, điểm I nằm

trên đường thẳng có phương trình:

- A. $x + y + 4 = 0$. B. $2x - y + 4 = 0$.
C. $x - y + 4 = 0$. D. $2x - y + 2 = 0$.

Câu 3. Trong không gian Oxy , cho điểm $M(3; 2; -1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm:

- A. $M_3(3; 0; 0)$. B. $M_4(0; 2; 0)$.
C. $M_1(0; 0; -1)$. D. $M_2(3; 2; 0)$.

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là:

- A. $y = -9x - 26$. B. $y = 9x - 26$.
C. $y = -9x - 3$. D. $y = 9x + 2$.

Câu 5. Cho hai biểu thức

$$M = \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right),$$

$$N = \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3).$$

Tính $T = \frac{M}{N}$

- A. $T = \frac{3}{2}$. B. $T = 2$. C. $T = 3$. D. $T = -1$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Rút gọn biểu thức $B = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a^5 \sqrt{a^3} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \sqrt[4]{a}}$, ta được kết quả là:

- A. $-\frac{91}{60}$. B. $\frac{60}{91}$. C. $\frac{16}{5}$. D. $-\frac{5}{16}$.

Câu 8. Có hai giá trị m_1, m_2 để đường thẳng $mx + y - 3 = 0$ hợp với đường thẳng $x + y = 0$ một góc 60° . Tổng $m_1 + m_2$ bằng

- A. -3 B. 3 C. 4 D. -4

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1; -2; 3)$ đến mp(P): $x + 3y - 4z + 9 = 0$ là

- A. $\frac{\sqrt{26}}{13}$. B. $\sqrt{8}$. C. $\frac{17}{\sqrt{26}}$. D. $\frac{4\sqrt{26}}{13}$.

Câu 10. Cho biểu thức $T = \frac{1}{5^{-x-1}} + 3 \cdot \sqrt{5}^{2x} - 25^{\frac{x-1}{2}}$.

Khi $5^x = \sqrt{7}$ thì giá trị của biểu thức T là:

- A. $\frac{9\sqrt{7}}{5}$. B. $\frac{7\sqrt{7}}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{7}}{5}$. D. $\frac{39\sqrt{7}}{5}$.

Câu 11. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông

góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- A. $M(-2; -4)$. B. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$.

- C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; 0)$.

Câu 12. Cho cặp số $(x; y)$ thỏa mãn: $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$. Khi đó biểu thức:

$P = x^2 - xy$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. 30. B. 40. C. 10. D. 20.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

- A. $2x - y - 1 = 0$. B. $-y + 2z - 3 = 0$.
C. $2x - y + 1 = 0$. D. $y + 2z - 5 = 0$.

Câu 15. Cho biết

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C.$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + 2b = 8$. B. $a + b = 8$.
C. $2a - b = 8$. D. $a - b = 8$.

Câu 16. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 2^x, \text{ thỏa mãn } F(0) = \frac{1}{\ln 2}. \text{ Tính giá trị biểu}$$

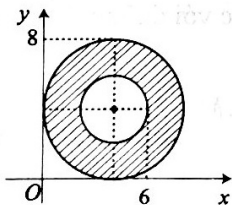
thức

$$T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2017) + F(2018) + F(2019).$$

- A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. B. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.
C. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. D. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Câu 17. Phần gạch trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây:

- A. $6 \leq |z| \leq 8$.
B. $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.
C. $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.
D. $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.



Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$

ng nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 19. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

- A. 246. B. 3480. C. 245. D. 3360.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{-x^2+4} - 2m + 3 = 0$ có nghiệm.

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 21. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc

trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$

(mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ B. 1 giờ C. 3 giờ D. 2 giờ

Câu 22. Cho 3 số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

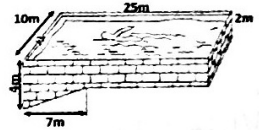
Câu 23. Các kích thước của

một bể bơi được cho trên hình vẽ (mặt nước có dạng hình chữ nhật). Hãy tính

xem bể chứa được bao

nhiêu mét khối nước khi nó đầy áp nước?

- A. 1000m^3 . B. 640m^3 . C. 570m^3 . D. 500m^3 .



Câu 24. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a - b$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{9}$. C. -1. D. $\frac{9}{8}$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$

với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm

bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = 15$. D. $R = 20$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết

$$F(-1) = 1 \text{ và } F(2) = 4.$$

- A. $I = 6$. B. $I = 10$. C. $I = 3$. D. $I = 9$.

Câu 27. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số lập được từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 6.

- A. $\frac{4}{27}$. B. $\frac{9}{28}$. C. $\frac{9}{25}$. D. $\frac{4}{9}$.

Câu 28. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

- A. $6 - \frac{15}{e}$. B. $4 - \frac{10}{e}$. C. $\frac{15}{e} - 4$. D. $\frac{10}{e}$.

Câu 29. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)dx = -2$ và $\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

- A. $P = -\frac{3}{4}$. B. $P = -\frac{4}{3}$. C. $P = \frac{4}{3}$. D. $P = \frac{3}{4}$.

Câu 30. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ đồng

thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$.

- A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 31. Biết m là số thực thỏa mãn

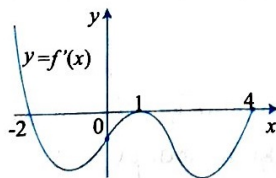
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m)dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \leq 0$. B. $0 < m \leq 3$.
C. $3 < m \leq 6$. D. $m > 6$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$

có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$



lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

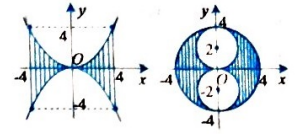
- A. 21. B. 9. C. 3. D. 2.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị

(C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

- A. $S = [8; 9)$. B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$.
C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$. D. $S = (0; 9]$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}$, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và (H_2) là hình gồm các điểm $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$, $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4$. Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?



- A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. C. $V_1 = 2V_2$. D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Câu 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3A'M$, $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'MN$, V_2 là thể tích của khối đa diện

$ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích cho hình chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường

thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 120° .

Câu 37. Cho hàm số

$$y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1.$$

Với giá trị nào của m thì $f'(x) - 6x > 0$ với mọi $x \geq 2$?

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m > 1$. D. $m \leq 0$.

Câu 38. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.

- A. $S = -\frac{7}{2}$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. $S = -3$. D. $S = 4$.

Câu 39. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?

A. 2448. B. 3600. C. 2324. D. 2592.

Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) được thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 41. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng đỉnh A đều bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$. B. $\frac{2}{11}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{11}$. D. $\frac{3}{11}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$ và đường thẳng

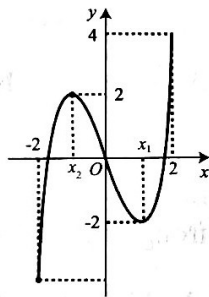
$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc

đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

A. 5. B. 3. C. 4. D. 10.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$

liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$.



A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 17 = 0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $2x - 2y + z + 7 = 0$. B. $2x - 2y + z + 17 = 0$.
C. $x - y + 2z - 7 = 0$. D. $2x - 2y + z - 17 = 0$.

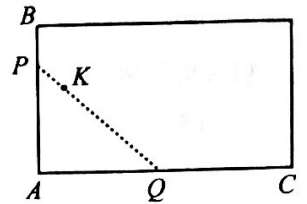
Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương

trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi

qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$. B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$.
C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$. D. $3x + z + 2 = 0$.

Câu 46. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1m và cách bờ AC là 8m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{71}}{4}$.

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$

có đồ thị (C) . Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:

A. $8\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 8. D. 16.

Câu 48. Cho phương trình

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - m = 0.$$

Để phương trình chỉ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc

khoảng $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $m \in (a; b)$. Giá trị $b - a$ là

A. $3\sqrt{3}$. B. $4 - 2\sqrt{3}$. C. 4. D. $4\sqrt{3} - 2$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V .

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$. B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$.

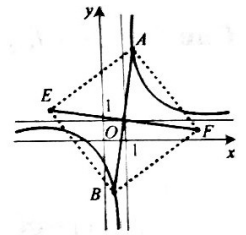
C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$. D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Câu 50. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị

của $A = M + 15m$ là:

A. $A = 17 - 2\sqrt{6}$. B. $A = 17 + \sqrt{6}$.
C. $A = 17 + 2\sqrt{6}$. D. $A = 17 - \sqrt{6}$.



ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

1A	2B	3C	4B	5B	6D	7A	8D	9D	10D
11D	12B	13C	14C	15D	16D	17C	18B	19A	20D
21B	22C	23B	24A	25D	26A	27A	28C	29B	30B
31D	32C	33B	34A	35B	36C	37B	38A	39A	40D
41A	42D	43C	44A	45D	46B	47C	48B	49A	50A

Câu 1. Ta có

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Khi đó $f(0) = 2 \Leftrightarrow d = 2; f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0; f(2) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -1.$$

Tính được $a = 1; b = -3 \Rightarrow S = 0.$ Chọn A.

Câu 2. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x = -1$, tiệm cận ngang là $y = 2$, do đó $I(-1; 2)$ thay vào các phương trình thì I thuộc đường thẳng $2x - y + 4 = 0.$ Chọn B.

Câu 3. $M_1(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của điểm

$$M \text{ lên trục } Oz \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(0; 0; -1). \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 6. } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SA$$

$$= \frac{1}{3} a \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 8. Ta có

$$(\Delta, d) = 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_d) \right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_d|}{|\vec{n}_\Delta| \cdot |\vec{n}_d|} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+1|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|m+1| = \sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = -\frac{b}{a} = -4. \text{ Chọn D.}$$

Câu 10.

$$T = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x-1} = \left(5 + 3 - \frac{1}{5}\right) \cdot 5^x = \frac{39}{5} \cdot 5^x = \frac{39\sqrt{7}}{5}.$$

Chọn D.

Câu 11. Gọi $M\left(x_0; \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}\right)$. Do tiếp tuyến tại

M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên ta

có hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = 3$. Ta có $y' = x^2 - 1$. Theo đề bài ta có phương trình

$$x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Theo đề bài điểm M có hoành độ âm nên $M(-2; 0)$.

Chọn D.

Câu 12. Ta có: $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$

$$\Leftrightarrow y + (2x - 3y)i = 3 + 7i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$$

Khi đó biểu thức: $P = 40$. Chọn B.

Câu 13. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -2)$, bán kính $R = 2$. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi: $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|11 - m|}{5} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 21 \end{cases}$

Chọn C.

Câu 15. Ta có

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 8. \text{ Chọn D.}$$

Câu 16. Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Mà

$$F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \frac{1}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} T &= F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2017) \\ &\quad + F(2018) + F(2019) \\ &= \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} \\ &= \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}. \text{ Chọn D.} \end{aligned}$$

Câu 17. Ta có $|z - 4 - 4i|$ là khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến điểm biểu diễn số phức $z = 4 + 4i$, do đó $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$. Chọn C.

Câu 18. - Với $m = 1$ ta có: $y = -x + 4$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Với $m = -1$ ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là hàm số bậc hai, không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Với $m \neq \pm 1$ ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1 \Rightarrow m = 0.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m . Chọn B.

Câu 19. Có 3 trường hợp xảy ra:

TH1: Lấy được 5 bóng đèn loại I: có 1 cách

TH2: Lấy được 4 bóng đèn loại I, 1 bóng đèn loại II: có $C_5^4 \cdot C_7^1$ cách

TH3: Lấy được 3 bóng đèn loại I, 2 bóng đèn loại II: có $C_5^3 \cdot C_7^2$ cách

Theo quy tắc cộng, có: $1 + C_5^4 \cdot C_7^1 + C_5^3 \cdot C_7^2 = 246$. Chọn A.

Câu 20. Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2}$
 $\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$, ĐK: $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$.

Phương trình trở thành:

$$t + 2 \frac{t^2 - 4}{2} + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2m - 1 = 0. \quad (*)$$

Lập BBT của hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$ ta thấy phương trình (*) có nghiệm thỏa $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ khi

$$5 \leq 2m \leq 7 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq \frac{7 + 2\sqrt{2}}{2} \approx 4,91,$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên dương là $m = 3, m = 4$.

Chọn D.

Câu 21. Với $t > 0$, ta có $t^2 + 1 \geq 2t$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow t = 1. \text{ Do đó, } c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \leq \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max_{(0; +\infty)} c(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 1$. Chọn B.

Câu 22. Ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \Rightarrow A = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = \frac{8}{3} \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases}$$

Chọn C.

Câu 23. Thể tích bể bơi phần hình hộp chữ nhật phía trên: $10.25.2 = 500 \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích bể bơi phần hình lăng trụ tam giác phía dưới: $2.7.10 = 140 \text{ (m}^3\text{)}.$

Bể chứa được lượng nước là: $500 + 140 = 640 \text{ (m}^3\text{)}.$ Chọn B.

Câu 24. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+\sqrt{4x-3})(x-3)x}{(x+1+\sqrt{5x+1})(x-3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \frac{9}{8}.$$

Suy ra $a = 9; b = 8 \Rightarrow a - b = 1$. Chọn A.

Câu 25. Ta có $w + 2i = (3 + 4i)z$

$$\Rightarrow |w + 2i| = |(3 + 4i)z| = |(3 + 4i)||z|$$

$$= 5[(m+1)^2 + 4] \geq 20.$$

$$\Rightarrow |w + 2i| \geq 20.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$. Vậy đường tròn có bán kính nhỏ nhất $R = 20$ với tâm $I(0; -2)$. Chọn D.

Câu 26. $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx = F(x)|_{-1}^2 + x^2|_{-1}^2$
 $= F(2) - F(-1) + (4 - 1) = 4 - 1 + 3 = 6$. Chọn A.

Câu 27. Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$, và chia hết

cho 6 $\Rightarrow \begin{cases} d = \{2, 4, 6, 8\} \\ a + b + c + d : 3 \end{cases}$. Khi đó, chọn d có 4 cách

chọn, b và c đều có 9 cách chọn (từ 1 $\rightarrow$ 9). Ta có $4.9.9 = 324$ số dạng $\overline{bcd}$. Xét mỗi số trong số 324 số dạng $\overline{bcd}$ đó:

- Nếu $b + c + d : 3$ thì $a = \{3, 6, 9\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a .

- Nếu $b + c + d : 3$ dư 1 thì $a = \{2, 5, 8\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a .

- Nếu $b + c + d : 3$ dư 2 thì $a = \{1, 4, 7\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a .

Như vậy với mỗi số trong 324 số dạng $\overline{bcd}$ chỉ có đúng 3 cách chọn $a \Rightarrow$ có $324.3 = 972$.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{972}{9^4} = \frac{4}{27}$. Chọn A.

Chú ý: Chọn d đầu tiên, việc chọn a, b, c ở các bước tiếp theo không phụ thuộc vào thứ tự chọn.

Câu 28. Ta có: $I = \int f(x) dx = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$ khi đó

$$I = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3 \int e^t t^2 dt.$$

Đặt $\begin{cases} t^2 = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = du \\ e^t = v \end{cases}$
 $\Rightarrow I = 3(e^t t^2 - 2 \int e^t t dt) = 3e^t t^2 - 6 \int e^t t dt.$

Tính $\int e^t t dt$. Đặt $\begin{cases} t = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ e^t = v \end{cases}$
 $\Rightarrow \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t.$

Vậy $\Rightarrow I = 3e^t t^2 - 6(e^t t - e^t) + C$
 $\Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) + C.$

Theo giả thiết ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C = -4$

$\Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) - 4$

$\Rightarrow F(-1) = \frac{15}{e} - 4$. Chọn C.

Câu 29. Ta có

$\int_0^d f(x) dx = \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^d = \frac{a}{3} d^3 + \frac{b}{2} d^2 + cd.$

Do đó:

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \\ \int_0^2 f(x) dx = -2 \\ \int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Vậy $P = a + b + c = -\frac{4}{3}$. Chọn B.

Câu 30. Đặt $a = \int_1^3 f(x) dx$, $b = \int_1^3 g(x) dx$. Khi đó

$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow a + 3b = 10,$

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2a - b = 6.$

Do đó: $\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = a + b = 6$. Chọn B.

Câu 31.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = I + J.$

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow$

$I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = mx^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} m$. Suy ra

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \frac{\pi^2}{4} m + \frac{\pi}{2} - 1$. Ta có:

$\frac{\pi^2}{4} m + \frac{\pi}{2} - 1 = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow m = 8$. Chọn D.

Câu 32. Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = 9$ và

$\int_1^4 |f'(x)| dx = 12$. Dựa vào đồ thị ta có:

$\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-2}^1 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-2}^1 = -f(-1) + f(-2)$
 $\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9.$

Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$. Như vậy

$[-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3$
 $\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3$
 $\Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$. Chọn C.

Câu 33. ĐK: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}$

Ta có $12 + \sqrt{4x - x^2} \neq 0 \forall x$ nên đề (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình

$\sqrt{x^2 - 6x + 2m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2m = 0$ (*)

có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 4]$.

Đề phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thì

$\Delta' = 9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}.$

Gọi 2 nghiệm phân biệt của (*) là $x_1 < x_2$, ta có $0 \leq x_1 < x_2 \leq 4$. Theo định lý Viète ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$. Khi đó

$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) \geq 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 \geq 0 \\ (x_1 + x_2) - 8 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ 6 \geq 0 \\ 2m - 24 + 16 \geq 0 \\ 6 - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Kết hợp nghiệm ta có: $4 \leq m < \frac{9}{2}$. Chọn B.

Câu 34. • Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$.

• Thể tích hình giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y = 4$ quay quanh Oy là:

$$\Rightarrow V_{(P)} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 32\pi.$$

Suy ra thể tích (H_1) là:

$$V_1 = V - 2V_{(P)} = 128\pi - 2 \cdot 32\pi = 64\pi.$$

• Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$ là:

$$V_L = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{256}{3} \pi.$$

• Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$ là:

$$V_N = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{32}{3} \pi.$$

Suy ra thể tích (H_2) là:

$$V_2 = V_L - 2V_N = \frac{256\pi}{3} - \frac{2 \cdot 32\pi}{3} = 64\pi.$$

Vậy $V_1 = V_2$. Chọn A.

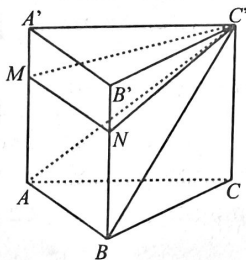
Câu 35. Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có

$$V_{C'.ABC} = \frac{1}{3} V$$

$$\Rightarrow V_{C'.A'B'BA} = \frac{2}{3} V.$$

$$\text{Mà } S_{A'B'NM} = \frac{1}{3} S_{A'B'BA}.$$

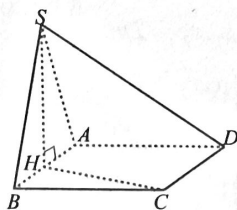


$$\text{Do đó } V_{C'.A'B'NM} = \frac{1}{3} V_{C'.A'B'BA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{2}{9} V.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCMNC'} = \frac{7}{9} V. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 36. Gọi H là trung điểm AB . Ta có: $S_{ABCD} = a^2$,

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$$



$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}; HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, HC}) = \widehat{SCH};$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \frac{a\sqrt{15}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ.$$

Chọn C.

Câu 37. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 6m - 3$.

$$f'(x) - 6x > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 6m - 3 - 6x > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 - 2x > 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 2} > m, \forall x \geq 2$$

$$\Rightarrow m < \min_{x \geq 2} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 2} = -\frac{1}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 38. Ta có $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Với $x \in [0; 3]$ thì

$f'(x) \geq 0$. Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Suy ra GTNN $m = f(0) = -1$ và GTLN

$$M = f(3) = -\frac{1}{2}. \text{ Từ đây ta tính được}$$

$$S = 2m + 3M = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 39. Số cách chọn 3 chữ số chẵn trong các chữ số 0, 2, 4, 6 là C_4^3 .

Số cách chọn 2 chữ số lẻ trong các chữ số 1, 3, 5, 7 là C_4^2 .

Số cách sắp xếp 5 chữ số được chọn là $5!$.

Theo tắc nhân có $C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot 5!$ số.

Trong các số trên có cả các số bắt đầu bằng 0, ta xem

có bao nhiêu số bắt đầu bằng 0: $0abcd$

Trong số này có 1 số chẵn rồi, ta chỉ cần chọn thêm 2

số chẵn khác 0 và 2 số lẻ. Số cách chọn là $C_3^2 \cdot C_4^2$,

sau đó đem hoán vị 4 phần tử đã chọn là $4!$ cách.

Vậy có $C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 432$ số có dạng $0abcd$.

Vậy có $C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot 5! - C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 2448$. Chọn A.

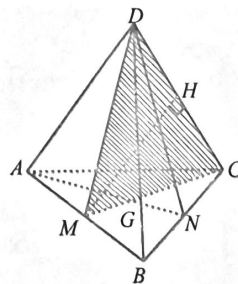
Câu 40. Thiết diện là tam giác

cân MCD trong đó M là trung

điểm AB . Ta có

$$DM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CD = a.$$

Gọi H là trung điểm CD , suy ra



$$MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} MH \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 41. Ta có $A.A'BD$ là chóp đều có tất cả các cạnh bằng 1 $\Rightarrow V_{A'.ABD} = V_{A.A'BD} = \frac{\sqrt{2}}{12} = V_{B'.ABC} = V_{B.B'AC}$.

Ta có

$$\begin{aligned} h &= d(AB', A'C') \\ &= d(A'C', (ACB')) \\ &= d(A', (ACB')) \end{aligned}$$

$$= d(B, (ACB')) = \frac{3V_{B'.B'AC}}{S_{\Delta B'AC}}.$$

$\Delta AB'C$ có $B'C = A'D = 1$;

$AC = AB' = \sqrt{3}$ (do $ABCD$ là hình thoi cạnh 1 có $\widehat{BAD} = 60^\circ$).

Do đó $S_{\Delta B'AC} = \frac{\sqrt{11}}{4}$. Vậy $h = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$. Chọn A.

Câu 42. Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \cdot d(M; AB) \cdot AB$ nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất khi $d(M; AB)$ nhỏ nhất. Gọi Δ là đường vuông góc chung của d, AB . Khi đó $M = \Delta \cap d$. Gọi $N = \Delta \cap AB$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 0)$,

phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases}$

Do $N \in AB \Rightarrow N(s; -1 + 2s; 2), M \in d$

$\Rightarrow M(-1 + t; t; 1 + t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (t - s - 1; t - 2s + 1; t - 1)$.

Mà $MN \perp d, MN \perp \Delta$ nên

$$\begin{cases} t - s - 1 + 2t - 4s + 2 = 0 \\ t - s - 1 + t - 2s + 1 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 5s = -1 \\ 3t - 3s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ s = 1 \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ hay $T = a + 2b + 3c = 10$. Chọn D.

Câu 43. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số: $y = |f(x) - 1|$ như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(x) - 1| = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ và đường thẳng $y = 2$. Từ đồ

thị ta có phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có 4 nghiệm phân biệt trên $[-2; 2]$. Chọn C.

Câu 45. Gọi $K(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên d . Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x + 1 = y - 1 \\ y - 1 = -z + 1 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow K(1; 1; 1).$$

Ta có $d((d), (P)) = d(K, (P)) = KH \leq KA = \sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A

và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$. Chọn D.

Câu 46. Đặt $AP = a, AQ = b$ ($a, b > 0$). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC . Suy ra $KE = 1, KF = 8$. Ta có:

$$\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}; \frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1 \text{ hay } \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Ta có: $PQ^2 = a^2 + b^2$. Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8k}{a} + \frac{k}{b} = k \forall k > 0$.

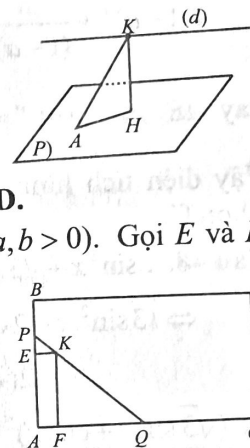
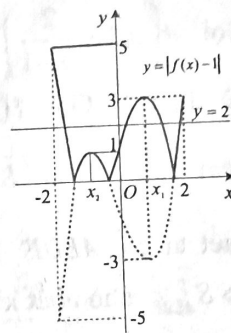
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + k &= \left(a^2 + \frac{8k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{b}\right) \\ &= \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b}\right) \geq 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}. \end{aligned}$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4k}{a} \\ b^2 = \frac{2k}{b} \\ \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$. Chọn B.

Câu 47. Ta có $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.



Gọi $A\left(a; 1 + \frac{2}{a-1}\right)$, $a \neq 1$ là một điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C). Gọi $I(1;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận, ta có $IA^2 = (1-a)^2 + \frac{4}{(1-a)^2}$. Theo giả

thiết ta có $AEBF$ là hình vuông nên $S_{AEBF} = AE^2 \Rightarrow S_{AEBF}$ nhỏ nhất khi AE^2 nhỏ nhất. Với

$$AE = AI\sqrt{2} \Rightarrow AE^2 = 2AI^2 = 2(1-a)^2 + \frac{8}{(1-a)^2}.$$

Mặt khác ta lại có

$$2(1-a)^2 + \frac{8}{(1-a)^2} \geq 2\sqrt{2(1-a)^2 \cdot \frac{8}{(1-a)^2}} = 8.$$

hay $AE^2 \geq 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (1-a)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$.

Vậy diện tích hình vuông $AEBF$ nhỏ nhất bằng 8. Chọn C.

Câu 48. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - m = 0$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x) - 2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2 - 2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - m - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ thì phương trình được viết lại là $t^2 - 2t = m + 1$ (*). Do $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$t = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1; 2].$$

Do với mỗi $t \in [-1; \sqrt{3})$ thì tương ứng sẽ cho một nghiệm thuộc khoảng $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ và mỗi $t \in [\sqrt{3}; 2]$

thì sẽ cho hai nghiệm thuộc khoảng $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để phương trình (*) "có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $[-1; \sqrt{3})$ " hoặc "chỉ có 1 nghiệm thuộc $[\sqrt{3}; 2]$ và không có nghiệm thuộc $[-1; \sqrt{3})$." Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ trên $[-1; 2]$ thì ta tìm được kết quả

$$-1 < m + 1 < 3 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow -2 < m < 2 - 2\sqrt{3}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 49. Gọi O là tâm hình bình hành. Gọi $I = MP \cap SO \Rightarrow N = AI \cap SC$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{SP}{SD} \cdot \frac{SM}{SB} = \frac{S_{\Delta SPM}}{S_{\Delta SDB}} = \frac{S_{\Delta SPI} + S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SDB}} = \frac{S_{\Delta SPI}}{2S_{\Delta SDO}} + \frac{S_{\Delta SMI}}{2S_{\Delta SBO}} \\ &= \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SP}{SD} + \frac{SM}{SB} \right) = \frac{7}{12} \cdot \frac{SI}{SO} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{SN}{SC} &= \frac{S_{\Delta SAN}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{S_{\Delta SAI} + S_{\Delta SNI}}{S_{\Delta SAC}} \\ &= \frac{S_{\Delta SAI}}{2S_{\Delta SAO}} + \frac{S_{\Delta SNI}}{2S_{\Delta SAO}} \\ &= \frac{SI}{2SO} + \frac{SI}{2SO} \cdot \frac{SN}{SC} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{SN}{SC} \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{2}{5}. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.AMNP}}{V} &= \frac{V_{S.AMP} + V_{S.MNP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.BCD}} \\ &= \frac{SA \cdot SM \cdot SP}{2SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{2SB \cdot SC \cdot SD} = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V. \text{ Chọn A.}$$

Câu 50. Ta có $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^2y^2 + 2xy + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 = -x^2y^2 + 2xy + 1.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{-x^2y^2 + 2xy + 2}{xy + 2}.$$

$$\text{Lại có } x^2 + y^2 = 1 + xy \geq 2xy \Rightarrow xy \leq 1;$$

$$x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = 1$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 1 + 3xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq \frac{-1}{3}.$$

$$\text{Đặt } xy = t \Rightarrow P = \frac{-t^2 + 2t + 2}{2 + t}, \text{ với } t \in \left[\frac{-1}{3}; 1\right].$$

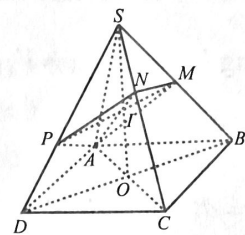
$$\text{Ta có } P' = \frac{-t^2 - 4t + 2}{(2 + t)^2} \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + \sqrt{6} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -2 - \sqrt{6} \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Ta có } P\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{11}{15};$$

$$P(1) = 1; P(-2 + \sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}. \text{ Do đó}$$

$$m = \min P = \frac{11}{15}; M = \max P = 6 - 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } A = 6 - 2\sqrt{6} + 11 = 17 - 2\sqrt{6}. \text{ Chọn A.}$$



NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)