

Biên soạn: Nguyễn Tài Chung

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ

LÔGARIT

GIẢI TÍCH 12 CHƯƠNG 2
2020

Bài giảng toán 12 năm học 2020-2021

MỤC LỤC

CHƯƠNG 2 Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit		5
1	Lũy thừa	5
	A Tóm tắt lí thuyết	5
	B Phương pháp giải toán	6
	C Bài tập trắc nghiệm	10
2	Lôgarit	15
	A Tóm tắt lí thuyết	15
	B Phương pháp giải toán	16
	C Bài tập ôn luyện	20
	D Bài tập trắc nghiệm	22
3	Hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa.	28
	A Tóm tắt lí thuyết	28
	B Phương pháp giải toán	29
	C Bài tập ôn luyện	40
	D Bài tập trắc nghiệm	43
4	Phương trình, bất phương trình mũ	53
	A Một số dạng toán	53
	B Bài tập ôn luyện	58
	C Bài tập trắc nghiệm	59
5	Phương trình, bất phương trình lôgarit	65
	A Phương pháp giải toán	65
	B Bài tập ôn luyện	71

	C Bài tập trắc nghiệm	73
6	Hệ mũ và lôgarit	79
	A Một số dạng toán	79
	B Bài tập ôn luyện	82
	C Bài tập trắc nghiệm	83
	Ôn tập chương	85
	A Bộ đề số 1	85
	B Bộ đề 2	88
	C Bộ đề 3	91
	D Bộ đề 4	94

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

BÀI 1. LŨY THỪA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc n .

Định nghĩa 1. Căn bậc n (với $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$) của số thực a , ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$, là số thực b (nếu có) sao cho $b^n = a$.

Ví dụ. Số 3 là căn bậc 4 của 81 vì $3^4 = 81$, ta viết $\sqrt[4]{81} = 3$. Số -2 là căn bậc 5 của -32 vì $(-2)^5 = -32$, ta viết $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Tính chất 1. Với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, ta có

- $$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[2k]{a} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow a \geq 0; & (2) \quad \sqrt[2k]{a} \geq 0, \forall a \geq 0; \\ (3) \quad \sqrt[2k]{a} = b &\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^{2k} \end{cases}; & (4) \quad \sqrt[2k-1]{a} \text{ có nghĩa với mọi } a; \\ (5) \quad \sqrt[2k-1]{a} = b &\Leftrightarrow a = b^{2k-1}. \end{aligned}$$

Tính chất 2. Khi n lẻ ($n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$), mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n , đó là $\sqrt[n]{a}$, còn khi n chẵn ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$), mỗi số thực a có đúng hai căn bậc n , đó là $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$.

2. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Với số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \forall a > 0.$$

Ví dụ. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Chú ý 1. Khi xét lũy thừa với số mũ nguyên dương thì cơ số là tùy ý. Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0, khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

Các công thức.

- $$\begin{aligned} (1) \quad a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & (2) \quad \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; \\ (3) \quad (a^m)^n &= a^{m \cdot n}; & (4) \quad (ab)^n &= a^n b^n; \\ (5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; & (6) \quad a^0 &= 1; a^n = \frac{1}{a^{-n}}. \end{aligned}$$

(giả thiết rằng các số hạng có mặt trong các công thức trên đã có nghĩa).

3. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực. Xét $a > 0$. Khi đó

- $$\begin{aligned} (1) \quad a^x &> 0, \forall x \in \mathbb{R}; \\ (2) \quad \text{Nếu } a > 1 \text{ thì } a^x < a^y &\Leftrightarrow x < y; \\ (3) \quad \text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } a^x < a^y &\Leftrightarrow x > y; \\ (4) \quad \text{Nếu } a = 1 \text{ thì } a^x &= 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \\ (5) \quad \text{Nếu } a \neq 1 \text{ thì } a^x &= a^y \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Chú ý 2.

$$(1) \quad \sqrt[2k-1]{A^{2k-1}} = A; \quad (2) \quad \sqrt[2k]{A^{2k}} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0. \end{cases}$$

4. Công thức lãi kép. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì, thì sau n kì, số tiền người gửi thu được cả vốn lẫn lãi là

$$C = A(1 + r)^n.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức.

Phương pháp. Sử dụng các công thức:

$$\begin{aligned} (1) \quad a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & (2) \quad \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; \\ (3) \quad (a^m)^n &= a^{m \cdot n}; & (4) \quad (ab)^n &= a^n b^n; \\ (5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; & (6) \quad a^0 &= 1; a^n = \frac{1}{a^{-n}}. \end{aligned}$$

(giả thiết rằng các số hạng có mặt trong các công thức trên đã có nghĩa).

Lưu ý.

$$(1) \quad \sqrt[2k-1]{A^{2k-1}} = A; \quad (2) \quad \sqrt[2k]{A^{2k}} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0. \end{cases}$$

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau đây

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \sqrt{(a^2 - 12a + 36)^4}; & \textcircled{2} \quad & \sqrt{64a^6b^2}, \text{ với } b \leq 0; \\ \textcircled{3} \quad & \sqrt[8]{x^{16}(x+2)^8}, \text{ với } x \leq -2; & \textcircled{4} \quad & \sqrt[3]{x^5(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)}. \end{aligned}$$

Bài 2. Đơn giản các biểu thức (với a, b là những số dương cho trước)

$$\textcircled{1} \quad A = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{a^{12}b^6}}; \quad \textcircled{2} \quad B = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{-1}{3}}}.$$

Bài 3. Cho $a > 0$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^2 + a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3} + 1} - \frac{a - 1}{\sqrt{a} + 1}.$

Bài 4. Đơn giản các biểu thức

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad A &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}; & \textcircled{2} \quad B &= \frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}; \\ \textcircled{3} \quad C &= \left(\frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \right)^2. \end{aligned}$$

Bài 5. Đơn giản các biểu thức

$$\textcircled{1} a^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}} \right)^{\sqrt{2}+1};$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}.$$

Bài 6. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa một số với số mũ hữu tỉ và rút gọn.

$$\textcircled{1} \sqrt[6]{x^3 \sqrt[5]{x}} \quad (x > 0);$$

$$\textcircled{2} \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a \sqrt[5]{a}}} : a^{\frac{1}{60}} \quad (a > 0);$$

$$\textcircled{3} \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[4]{5}} \dots \sqrt[100]{\sqrt[99]{5}}.$$

Bài 7. Rút gọn biểu thức sau trong miền xác định của nó:

$$P = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - xy)^{\frac{2}{3}}} : \frac{x^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}.$$

Bài 8. Rút gọn biểu thức sau trong miền xác định của nó:

$$Q = a^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{a + \sqrt{ab}} \right]^5 \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}}.$$

Bài 9. Rút gọn biểu thức sau trong miền xác định của nó:

$$P = \left(x + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{2}{3}} : \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.

Phương pháp. Sử dụng các công thức:

$$(1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(3) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(4) \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$(5) \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$(6) \quad a^0 = 1; \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

(giả thiết rằng các số hạng có mặt trong các công thức trên đã có nghĩa).

Bài 10. Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh:

$$a) \quad \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) = a - b.$$

$$b) \quad \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)} = \frac{a^2 - b}{a^2 + b}.$$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} - 1} \cdot \sqrt[4]{a} - 1 = \sqrt{a}.$

Bài 12. Chứng minh rằng $\left(\sqrt{5} + 2 \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{5} - 2 \right)^{\frac{1}{3}}$ là số nguyên.

Bài 13. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{64}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{64}{27}}} = 1$.

Bài 14 (Malaysia National Olympiad 2010).

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên m, n ($n \neq 0$) sao cho

$$\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}.$$

Bài 15. Cho x, y thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Bài 16. Với mọi số thực x , ta kí hiệu

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Chứng minh rằng

- ① $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$;
- ② $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;
- ③ $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$;
- ④ $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$;
- ⑤ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$;
- ⑥ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Bài 17. Một cặp số cộng và một cặp số nhân có cùng các số hạng thứ $m + 1$, thứ $n + 1$ và thứ $p + 1$ là ba số dương a, b, c . Chứng minh hệ thức:

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

Bài 18. Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh rằng:

a) Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ thì $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$.

b) Nếu $ax^n = by^n = cz^n$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì:

$$\sqrt[n]{ax^{n-1}} + \sqrt[n]{by^{n-1}} + \sqrt[n]{cz^{n-1}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

Bài 19. Chứng minh rằng nếu $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ thì với mọi số nguyên dương n lẻ ta đều có:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a+b+c}.$$

Bài 20. Cho $x < 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2}}} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}.$$

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức.**Phương pháp.**

• Vận dụng tính chất:

- (1) Nếu $a > 1$ thì $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$;
 (2) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

• Bất đẳng thức Côsi:

- Với a, b không âm, ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- Với a, b, c không âm, ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 21 (ĐHSP Quy Nhơn-1997). Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta có bất đẳng thức:
 $3^{a^2-4} + 3^{4a+8} \geq 2$.

Bài 22. Cho hàm số: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 \frac{x}{2} + 5\cos x + 3}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Bài 23. Cho $a + b = c$, với $a > 0, b > 0$. Chứng minh $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$.

Bài 24. Với $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng $a^{\frac{3}{4}} + 2b^{\frac{3}{4}} > (a + 2b)^{\frac{3}{4}}$.

Bài 25. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} > (a + b + c)^{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

Bài 26 (Dự bị ĐH-2005B). Xét a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq 3.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 27 (Dự bị ĐH-2005A). Cho x, y, z là ba số thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 6.$$

Bài 28. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$9^a + 9^b + 9^c \geq 3^a + 3^b + 3^c.$$

Bài 29. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c.$$

Dạng 4. Các bài tập sử dụng công thức lãi kép.

Phương pháp. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì, thì sau n kì, số tiền người gửi thu được cả vốn lẫn lãi là $C = A(1+r)^n$.

Bài 30. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kì hạn một năm, với lãi suất 7,56%. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 31. Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thức lãi kép, với lãi suất 11% một năm. Hỏi sau 5 năm người đó mới rút lãi thì thu được bao nhiêu tiền lãi? (với giả sử rằng lãi suất không thay đổi hàng năm).

Dạng 5. Một số bài tập khác.

Bài 32. Tìm các số thực α thỏa mãn từng điều kiện sau:

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} (a^{2\alpha} + a^{-2\alpha}) = 1 \quad (a > 0); \quad \textcircled{2} 5^{|\alpha|} \leq 125.$$

Chú ý 3. Để làm các bài tập 33, 34 sau đây, cần nhớ lại công thức khai triển của Nhị thức Newton đã học ở lớp 11: với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (\text{quy ước } a^0 = b^0 = 1). \end{aligned}$$

Lưu ý rằng số hạng chứa a^k trong khai triển của nhị thức $(a+b)^n$ là

$$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Bài 33 (ĐH-2004D). Tìm số hạng không chứa x khi khai triển

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7 \quad \text{với } x > 0.$$

Bài 34 (Đề thi ĐH-2003A). Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5} \right)^n$ biết rằng $x > 0$ và

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \quad (n \text{ là số nguyên dương}).$$

Bài 35. Tìm các số hạng nguyên khi khai triển $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7} \right)^{36}$.

Bài 36. Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển nhị thức Newton (theo thứ tự số mũ giảm dần của x) của biểu thức $\left(\frac{2}{x^3} - \sqrt{x^5} \right)^n$, với $x > 0$, biết rằng trong khai triển này, tổng các hệ số của số hạng thứ 2 và số hạng thứ 3 bằng hệ số của số hạng cuối cùng.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Cho $a \neq 0, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$. Ta có: $\frac{a^m}{a^n}$ bằng:

- A. a^{m-n} . B. a^{m+n} . C. $m.n$. D. $\frac{m}{n}$.

Câu 2. Với $0 < a \neq 1, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$. C. $a^m + a^n = a^{m+n}$. D. $a^m + a^n = a^{m \cdot n}$.

Câu 3. Trong các khẳng định sau:

a) Với số thực a và các số nguyên m, n , ta có:

$$a^m \cdot a^n = a^{n+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m:n}.$$

b) Với hai số thực a, b cùng khác không và số nguyên n , ta có:

$$(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

c) Với hai số thực a, b thỏa mãn $0 < a < b$ và số nguyên n , ta có:

$$a^n < b^n.$$

d) Với số thực $a \neq 0$ và hai số nguyên m, n , ta có: Nếu $m > n$ thì

$$a^m > a^n.$$

Có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Xét mệnh đề: "Với các số thực x, a, b , nếu $0 < a < b$, thì $a^x < b^x$ ". Với điều kiện nào sau đây của x thì mệnh đề đó đúng?

- A. x bất kì. B. $x > 0$. C. $x < 0$. D. $x \neq 0$.

Câu 5. Cho $(b-1)^{-\frac{2}{3}} < (b-1)^{-\frac{1}{3}}$. Khi đó ta có thể kết luận gì về b ?

- A. $b > 2$. B. $b > 0$. C. $0 < b < 2$. D. $0 < b < 1$.

Câu 6. Cho $4^{|x|} < 256$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $-4 < x < 4$. B. $x > 4$. C. $x < 4$. D. $x = 4$.

Câu 7. Cho x là một số dương, biểu thức $x^3 \sqrt{x}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

- A. $x^{\frac{7}{2}}$. B. $x^{\frac{2}{7}}$. C. $x^{\frac{3}{2}}$. D. $x^{\frac{5}{2}}$.

Câu 8. Biểu thức $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

- A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{18}}$. B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Câu 9. Kết quả của phép tính $\left[(b^{12}b^3) : (b^4b^7)\right]^3$ là:

- A. b^{12} . B. b^{11} . C. b^5 . D. b^6 .

Câu 10. Tính $E = \left(3^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} \cdot 3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$ ta được:

- A. $81\sqrt{3}$. B. 81. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 11. Với a, b, c là những số khác không, rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-2}b(a^{-2}b^{-1})^3a^{-1}b}.$$

- A. a^7b^5 . B. a^8b^6 . C. a^5b^8 . D. a^8b^5 .

Câu 12. Với a, b, c là những số khác không, rút gọn biểu thức sau:

$$B = \frac{a^{-1} + (b+c)^{-1}}{a^{-1} - (b+c)^{-1}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) (a+b+c)^{-2}.$$

- A. $\frac{1}{2abc}$. B. $\frac{1}{abc}$. C. $\frac{1}{2bc}$. D. $\frac{1}{bc}$.

Câu 13. Cho $E = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} : \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$. Biểu thức rút gọn của E là:

- A. $\frac{1+a}{1-b}$. B. $\frac{1-a}{1+b}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. $(1+a)(1-b)$.

Câu 14. Cho $a = \sqrt{2\sqrt[3]{4}}$ và $b = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$. Hãy viết số a dưới dạng lũy thừa của số b .

- A. $b^{\frac{5}{4}}$. B. $b^{-\frac{5}{4}}$. C. $b^{\frac{5}{8}}$. D. $b^{-\frac{5}{8}}$.

Câu 15. Xét khẳng định sau đây: "Với số thực a và hai số hữu tỉ r, s , ta có $(a^r)^s = a^{rs}$ " Với điều kiện nào trong các điều kiện sau thì khẳng định trên đúng?

- A. a bất kì. B. $a \neq 0$. C. $a > 0$. D. $a < 0$.

Câu 16. Cho a, b là hai số thực dương. Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

- A. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. B. $\sqrt[3]{ab}$. C. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. D. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $K = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$.

- A. $K = x^2 + 1$. B. $K = x^2 + x + 1$. C. $K = x^2 - x + 1$. D. $K = x^2 - 1$.

Câu 18. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$. Tính giá trị biểu thức $K = \frac{8 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $\frac{4}{5}$. C. -4 . D. 2 .

Câu 19. Anh Việt muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Việt phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là:

- A. 397 triệu đồng. B. 396 triệu đồng. C. 395 triệu đồng. D. 394 triệu đồng.

Câu 20. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng Vietcombank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là 7,5% trên năm. Nếu anh Nam hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn tiền lãi (kết quả làm tròn đến hàng ngàn) là:

- A. 143.563.000 đồng. B. 2.373.047.000 đồng.
C. 137.500.000 đồng. D. 133.547.000 đồng.

Câu 21. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức

$$f(x) = A.e^{rx}.$$

Trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Số lượng vi khuẩn tăng gấp 25 lần sau khoảng thời gian là:

- A. 50 giờ. B. 25 giờ. C. 15 giờ. D. 20 giờ.

Câu 22. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là:

- A. 107.232.573 người. B. 107.232.574 người.
C. 108.049.810 người. D. 106.118.331 người.

Câu 23. Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

- A. 172 triệu đồng. B. 72 triệu đồng.
C. 104,907 triệu đồng. D. 167,3042 triệu đồng.

Câu 24. Anh Hưng đi làm được lương khởi điểm 5.000.000 đồng trên tháng. Cứ 3 năm, lương anh Hưng lại tăng được 7% một tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)

- A. 1.287.968.000 đồng. B. 1.931.953.000 đồng.
C. 2.575.937.000 đồng. D. 3.219.921.000 đồng.

Câu 25. Ông X gửi tiết kiệm 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi 0,5% một tháng. Do nhu cầu cần chi tiêu, cứ mỗi tháng sau đó, ông rút ra 1 triệu đồng từ số tiền của mình. Hỏi cứ như vậy thì tháng cuối cùng, ông X rút nốt được bao nhiêu tiền?

- A. 970926 đồng. B. 4879 đồng. C. 975781 đồng. D. 4903 đồng.

Câu 26. Tìm số nguyên lớn nhất và không vượt quá $\frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}}$.

- A. 80. B. 81. C. 96. D. 97.

Câu 27. Nhận xét về lời giải của bài toán sau: Rút gọn biểu thức

$$K = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{-3}{2}} \quad (\text{với } x > 0, y > 0, x \neq y).$$

Giải. Ta có

$$K = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(\left(\frac{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} \quad (\text{Bước 1})$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} \left(\left(y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} \quad (\text{Bước 2})$$

$$= y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} = y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} = y. \quad (\text{Bước 3})$$

- A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 3. D. Lời giải đúng.

Câu 28 (THPTQG 2020 - Mã đề 102). Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn điều kiện $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 6x + 4y$ bằng

- A. $\frac{65}{8}$. B. $\frac{33}{4}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

Câu 29 (THPTQG 2020 - Mã đề 101). Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn điều kiện $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng

- A. $\frac{33}{4}$. B. $\frac{65}{8}$. C. $\frac{49}{8}$. D. $\frac{57}{8}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	4 B	7 A	10 A	13 A	16 C	19 A	22 B	25 C	28 A
2 A	5 A	8 B	11 D	14 D	17 B	20 A	23 D	26 A	
3 A	6 A	9 A	12 C	15 C	18 C	21 D	24 D	27 C	29 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 2. LÔGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa.** Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

$\log_a b$ đọc là lôgarit cơ số a của b .

Chú ý 4. Để $\log_a b$ có nghĩa thì $0 < a \neq 1$ và $b > 0$.

2. **Các công thức.** Giả thiết rằng các công thức sau đã có nghĩa.

$$(1) \log_a 1 = 0;$$

$$(2) \log_a a = 1;$$

$$(3) \log_a a^b = b;$$

$$(4) a^{\log_a b} = b;$$

$$(5) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$(6) \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c;$$

$$(7) \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b;$$

$$(8) \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$$

$$(9) \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b;$$

$$(10) \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c;$$

$$(11) \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b};$$

$$(12) \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$(13) \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$(14) \log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c.$$

3. **So sánh hai lôgarit cùng cơ số.** Cho các số dương x và y .

☑ Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$.

☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$.

☑ Nếu $0 < a \neq 1$ thì $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$.

4. **Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên.** Cho $a > 0$. Khi đó:

☑ $\log_{10} a$ gọi là lôgarit thập phân của a , kí hiệu $\lg a$ hoặc $\log a$.

☑ $\log_e a$ gọi là lôgarit tự nhiên (hay lôgarit Nê-pe) của a , kí hiệu $\ln a$ với

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2,7183.$$

☑ Với số $x \geq 1$ tùy ý, viết x trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $n = 1 + [\log x]$.

5. **Công thức lãi kép liên tục (công thức tăng trưởng mũ).** Nếu một người gửi số tiền A theo thể thức lãi suất liên tục, với lãi suất r mỗi năm, thì sau n năm, số tiền người gửi thu được cả vốn lẫn lãi là $S = Ae^{nr}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 6. Tính toán, rút gọn về lôgarit.

Phương pháp. Sử dụng các công thức ở phần tóm tắt lí thuyết để biến đổi, tính toán.

Bài 1. Không dùng máy tính, hãy tính:

$$\textcircled{1} A = \log_2 4;$$

$$\textcircled{2} B = \log_{\frac{1}{4}} 2;$$

$$\textcircled{3} C = \log_5 \frac{1}{25};$$

$$\textcircled{4} D = \log_{27} 9.$$

Bài 2. Không dùng máy tính, hãy tính:

$$\textcircled{1} A = \log_{(2-\sqrt{3})} (2 + \sqrt{3});$$

$$\textcircled{2} B = \log_{(5\sqrt{2}+7)} (5\sqrt{2} - 7);$$

$$\textcircled{3} C = \log_{(2+\sqrt{3})} (7 - 4\sqrt{3});$$

$$\textcircled{4} D = \log_{(\sqrt{2}-1)} (\sqrt{2} + 1).$$

Bài 3. Không dùng máy tính, hãy tính:

$$\textcircled{1} A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20.$$

$$\textcircled{2} B = \frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}.$$

$$\textcircled{3} C = \frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}.$$

$$\textcircled{4} D = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}.$$

Bài 4 (Đề thi THPT Quốc gia 2016).

Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x.$$

Bài 5. Cho $a > b > 0$ và thỏa mãn $2 \log(a - b) = \log a + \log b + 1$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức:

$$A = \log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} + \log_{a-b} \sqrt{a^2 - b^2} - 2 \log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} \log_{a-b} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

với a, b sao cho biểu thức đã cho có nghĩa.

Bài 7. Cho $1 < a < b$. Rút gọn biểu thức: $B = \sqrt{\sqrt{\log_a^4 b + \log_b^4 a} + 2} - 2$.

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức.

Phương pháp. Sử dụng các công thức:

$$(1) \log_a 1 = 0;$$

$$(2) \log_a a = 1;$$

$$(3) \log_a a^b = b;$$

$$(4) a^{\log_a b} = b;$$

$$(5) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$(6) \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c;$$

$$(7) \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b;$$

$$(8) \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$$

$$(9) \quad \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b;$$

$$(10) \quad \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c;$$

$$(11) \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b};$$

$$(12) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$(13) \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$(14) \quad \log_{a^x} c = \frac{1}{x} \log_a c;$$

$$(15) \quad \ln x = \log_e x;$$

$$(16) \quad \log x = \lg x = \log_{10} x.$$

Bài 8. Chứng minh rằng:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b;$$

$$\textcircled{2} \quad \log_{\frac{a}{b}} N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N}{\log_b N - \log_a N}.$$

Bài 9. Chứng minh rằng:

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Bài 10. Chứng minh rằng nếu $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = 7ab$ thì:

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\lg a + \lg b).$$

Bài 11. Cho bốn số dương α, β, m, n thỏa điều kiện

$$m^2 \alpha^2 + n^2 \beta^2 = (m^2 + n^2) \alpha \beta.$$

Chứng minh rằng:

$$\log_a \left(\frac{m\alpha + n\beta}{m+n} \right) = \frac{\log_a \alpha + \log_a \beta}{2}, \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

Bài 12. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác vuông, trong đó c là cạnh huyền. Chứng minh rằng $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a$.

Bài 13. Chứng minh rằng $2019 = -\log_7 \left(\log_7 \underbrace{\sqrt[7]{\sqrt[7]{\dots \sqrt[7]{7}}}}_{2019 \text{ dấu căn}} \right)$.

Bài 14. Chứng minh rằng $\log_{\frac{4}{a^2 b^3}} \frac{16a^4}{b^9} = \frac{4 + 4\log_2 a - 9\log_2 b}{2 - 2\log_2 a - 3\log_2 b}$.

Bài 15. Giả sử rằng $f(x) + f(y) = f(z)$. Hãy xác định z theo x và y nếu:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Chú ý 5. Để giải hai bài tập 16, 17 sau đây, cần nhớ lại kiến thức về Cấp số cộng, Cấp số nhân đã học ở lớp 11:

$$\checkmark \text{ Ba số } a, b, c \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}.$$

☑ Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow b^2 = ac$.

Bài 16. Cho a, b, c , dương, khác nhau và khác 1. Cho $0 < N \neq 1$. Chứng minh rằng nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}.$$

Bài 17. Chứng minh rằng nếu a, b, c, x là những số dương khác 1 và $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ theo thứ tự, là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì $(ac)^{\log_a b} = c^2$.

Dạng 8. So sánh hai số ở dạng lôgarit. Bất đẳng thức chứa lôgarit.

Phương pháp. Sử dụng mục so sánh hai lôgarit cùng cơ số ở trang 15:

☑ Nếu $a > 1, x > 0, y > 0$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$.

☑ Nếu $0 < a < 1, x > 0, y > 0$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$.

☑ Nếu $0 < a \neq 1, x > 0, y > 0$ thì $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$.

Bài 18. Không dùng bảng số hay máy tính hãy so sánh

① $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$;

② $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

Bài 19. Không dùng bảng số hay máy tính hãy so sánh

① $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$ và 2;

② $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$ và $\log_5 \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \log_4 \sqrt{5}$.

Bài 20. Cho $1 < x < y$ và z là số dương khác 1. Chứng minh rằng:

① Nếu $z > 1$ thì $\log_x z > \log_y z$.

② Nếu $z < 1$ thì $\log_x z < \log_y z$.

Bài 21. Cho $a > 1, b > 1$. Chứng minh rằng $\log_a b + \log_b a \geq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 22. Giả sử $a > 1, b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \log_a \frac{a}{b} + \log_b \frac{b}{a}.$$

Bài 23. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{-x^2}} \right) < -\frac{7}{8}.$$

Bài 24. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < c$. Chứng minh:

$$\log_a (\log_a b) + \log_b (\log_b c) + \log_c (\log_c a) > 0.$$

Bài 25. Cho a, b là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\log_{1+a}(1+a+b+ab) + \log_{1+b}(1+a+b+ab) \geq 4. \quad (1)$$

Bài 26. Cho $0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1, 0 < c \neq 1$. Chứng minh:

$$\frac{\log_b^2 a}{a+b} + \frac{\log_c^2 b}{b+c} + \frac{\log_a^2 c}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Bài 27. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2). \quad (1)$$

Bài 28. Cho bốn số $x, y, z, t \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Chứng minh rằng:

$$\log_x\left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y\left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z\left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t\left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 8.$$

Dạng 9. Bài tập ứng dụng lôgarit thập phân.

Phương pháp.

☑ Sử dụng công thức lãi kép ở trang 6.

☑ Sử dụng quy tắc: Khi viết số $x \geq 1$ trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $1 + [\log x]$ (với $[\log x]$ là phần nguyên của $\log x$).

Bài 29. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi xuất không thay đổi)?

Bài 30. Một người gửi 350 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao lâu người đó có ít nhất nửa tỉ đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi xuất không thay đổi)?

Dạng 10. Bài tập ứng dụng công thức lãi kép liên tục.

Phương pháp. Sử dụng công thức lãi kép liên tục (công thức tăng trưởng mũ) ở trang 15: Nếu một người gửi số tiền A theo thể thức lãi suất liên tục, với lãi suất r mỗi năm, thì sau n năm, số tiền người gửi thu được cả vốn lẫn lãi là $S = Ae^{nr}$.

Bài 31. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% một năm. Số tiền lãi người đó thu được sau hai năm là bao nhiêu?

Bài 32. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép liên tục, với lãi suất r mỗi năm. Sau 5 năm thì số tiền thu được cả vốn lẫn lãi là 200 triệu đồng. Hỏi sau bao lâu người đó gửi 100 triệu đồng mà thu được 400 triệu đồng cả vốn lẫn lãi.

Bài 33. Trong một phòng thí nghiệm người ta nuôi một loại vi khuẩn. Lúc đầu có 200 con vi khuẩn, sau 1 giờ số vi khuẩn là 400 con. Giả sử vi khuẩn tăng theo công thức tăng trưởng mũ. Hỏi sau bao nhiêu giờ số vi khuẩn là 1000 con?

Dạng 11. Biểu diễn lôgarit theo các lôgarit cho trước.

Phương pháp. Đối với hàm số lôgarit có một dạng bài tập khá phức tạp là tính giá trị một biểu thức lôgarit, mũ theo một số điều kiện cho trước. Nếu không có phương pháp giải thì có thể mất khá nhiều thời gian mà chúng ta vẫn không nhận được lời giải. Sau đây chúng ta sẽ trình bày một phương pháp giải hiệu quả cho dạng bài tập này. Để hướng dẫn phương pháp giải chúng ta xét một số bài tập cụ thể sau đây.

Bài 34. Cho biết $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \right) = \alpha$. Tính $\log 40$ theo α .

Bài 35. Biết $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Tính $\log_{30} 8$ theo a và b .

Bài 36. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_{\sqrt{27}} 8 = b$. Tính $\log_{25} 45$ theo a và b .

Bài 37. Cho $a = \log 3$ và $b = \log 5$. Tính $\log_{75} \sqrt[3]{5\sqrt[5]{3}}$ theo a và b .

Bài 38. Biết $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$ và $x \neq 1$. Tính $\log_{abc} x$ theo α , β , γ .

Bài 39. Cho $\log_6 10 = a$, $\log_{12} 45 = b$. Tính $\log_{30} 54$ theo a và b .

Bài 40. Cho $\log_{12} 18 = \alpha$, $\log_{24} 54 = \beta$. Chứng minh

$$\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1.$$

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN**1. Đề bài**

Tính toán về mũ và lôgarit.

Bài 41. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị bằng số các biểu thức sau

$$\textcircled{1} \log_a a^{2015}; \quad \textcircled{2} \log_{a^4} a^{\frac{1}{7}}; \quad \textcircled{3} \log_{\frac{1}{a^2}} a^9; \quad \textcircled{4} \log_{a^5} a^5.$$

Bài 42. Tính giá trị các biểu thức

$$\textcircled{1} A = 8^{\log_2 3}; \quad \textcircled{2} B = 81^{\log_9 2}; \quad \textcircled{3} C = 25^{\log_{\sqrt{5}} 2}; \quad \textcircled{4} D = 4^{\log_8 27}.$$

Bài 43. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị bằng số các biểu thức sau

$$\textcircled{1} A = a^{\log_a 2015}; \quad \textcircled{2} B = a^{\log_{\sqrt[3]{a}} 4}; \quad \textcircled{3} C = a^{\log_{\sqrt{a}} 1}; \quad \textcircled{4} D = a^{9 \log_a 3^5}.$$

Bài 44. Hãy tính

$$\begin{aligned} \textcircled{1} A &= \log_{(5-2\sqrt{6})} (5+2\sqrt{6}); & \textcircled{2} B &= \log_{(7+\sqrt{48})} (7-\sqrt{48}); \\ \textcircled{3} C &= \log_{(\sqrt{5}+2)} (\sqrt{5}-2); & \textcircled{4} D &= \log_{(\sqrt{5}-2)} (9+4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Bài 45. Tính

$$A = 81^{\frac{1}{\log_5 3}} - 27^{\log_3 5} + 3^{\frac{4}{3 \log_8 9}}; \quad B = 16^{\frac{1}{\log_1 \frac{1}{3}^4}} - (3\sqrt{3})^{\log_{27} 4} + 5^{\frac{\log_7 \sqrt[7]{27}}{\log_7 \sqrt{5}}}.$$

Bài 46. Tính tổng $\frac{1}{\log_2(n!)} + \frac{1}{\log_3(n!)} + \dots + \frac{1}{\log_n(n!)}.$

Bài 47. Chứng minh rằng $\log_2 3$ là số vô tỉ.

Bài 48. Cho $\log 2 = a$ và $\log 3 = b$. Tính $\log_{18} 12$ theo a và b .

Bài 49. Cho $\log_6 15 = a, \log_{12} 18 = b$. Hãy tính $\log_{25} 24$ theo a, b .

Chứng minh đẳng thức.

Bài 50. Cho $x > 0, y > 0, 0 < a \neq 1, x^2 + 4y^2 = 12xy$. Chứng minh

$$\log_a(x + 2y) - 2\log_a 2 = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y).$$

Bài 51. Chứng minh rằng $\frac{1 + \frac{1}{4}\log_b a}{3\log_b a - 2} = \frac{\frac{1}{4} + \log_a b}{3 - 2\log_a b}.$

Bài 52. Chứng minh $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, với a, b, c là ba số thực dương và khác 1.

Bài 53. Cho $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}, z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$. Chứng minh $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Bài 54. Cho $0 < a \neq 1, 0 < x \neq 1$ và $k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2\log_a x}.$$

Bài 55. Chứng minh rằng

$$\frac{\log_2(a+b) + \log_2(a-b)}{1 - \log_2 a - \log_2 b} = \frac{1 + \log_{(a+b)}(a-b)}{\log_{(a+b)} 2 - \log_{(a+b)}(ab)}.$$

Bài 56. Chứng minh rằng các số $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $\log_b y = \frac{2\log_a x \log_c z}{\log_a x + \log_c z}$, với điều kiện biểu thức đã cho có nghĩa.

Bài 57. Cho các số x, y, z dương thoả mãn

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z}.$$

Chứng minh rằng $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$.

So sánh, bất đẳng thức lôgarit.

Bài 58. Hãy so sánh $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Bài 59. Với giá trị nào của x thì $\log_{0,3}(x^2 - 7) < \log_{0,3} 6x$.

Bài 60 (ĐH Đà Nẵng-1995). Cho $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Chứng minh

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}. \quad (1)$$

Bài 61. Cho a, b, c là ba số lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Bài 62 (ĐH PCCC-2001). Cho $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\log_{(b+c)} a + \log_{(c+a)} b + \log_{(a+b)} c > 1. \quad (1)$$

Bài 63. Chứng minh rằng với mọi $x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ ta có

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leq -\frac{\ln(1-|x|)}{|x|}. \quad (*)$$

Bài 64 (Malaysia National Olympiad 2010).

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số lớn hơn 1 thì

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b). \quad (1)$$

Bài 65 (India ISI Entrance Examination 2013).

Xét a, b, c là ba số lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a bc + \log_b ca + \log_c ab$$

Bài 66. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c lớn hơn 1, ta luôn có:

$$(\log_b a + \log_c a - 1)(\log_c b + \log_a b - 1)(\log_a c + \log_b c - 1) \leq 1.$$

2. Lời giải, hướng dẫn

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Cho $0 < a, b, u, v \neq 1$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. $\log_a \frac{u}{v} = \frac{\log_a u}{\log_a v}$. B. $\log_a \frac{1}{u} = \log_a 1 + \log_a u$.
C. $\log_a (u+v) = \log_a u \cdot \log_a v$. D. $\log_b u = \log_b a \cdot \log_a u$.

Câu 2. Cho $a > 0, a \neq 1$ và $u > 0, v > 0$. Khi đó ta có $\log_a (uv)$ bằng

- A. $\log_a u - \log_a v$. B. $\log_a u + \log_a v$. C. $\log_a u \cdot \log_a v$. D. $\frac{\log_a u}{\log_a v}$.

Câu 3 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

- A. $2 \log_5 a$. B. $2 + \log_5 a$. C. $\frac{1}{2} + \log_5 a$. D. $\frac{1}{2} \log_5 a$.

Câu 4 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 110).

Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \log_5 a$. B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$. C. $3 + \log_5 a$. D. $3 \log_5 a$.

Câu 5 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Với a là một số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

- A. $3\log_2 a$. B. $\frac{1}{3}\log_2 a$. C. $\frac{1}{3} + \log_2 a$. D. $3 + \log_2 a$.

Câu 6 (Đề chính thức THPTQG 2020 - Mã đề 101).

Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

- A. $5\log_a b$. B. $\frac{1}{5} + \log_a b$. C. $5 + \log_a b$. D. $\frac{1}{5}\log_a b$.

Câu 7 (THPTQG 2020 - mã đề 102). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $\frac{1}{2}\log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $2\log_a b$.

Câu 8 (THPTQG 2020 - mã đề 103). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

- A. $3 + \log_a b$. B. $3\log_a b$. C. $\frac{1}{3} + \log_a b$. D. $\frac{1}{3}\log_a b$.

Câu 9. Cho $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Khi đó $a^{\log_a b}$ bằng:

- A. a . B. b . C. $\log_a b$. D. $\log_b a$.

Câu 10. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\log_3 (2x - x^2)$ có nghĩa?

- A. $0 < x < 2$. B. $x > 0$. C. $0 < x < 1$. D. $x < 1$.

Câu 11. Cho $\ln 2 = a$. Biểu diễn $\ln(0,125)$ theo a :

- A. $-3a$. B. $3a$. C. a . D. 2 .

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \log_4 \sqrt[4]{8}$ là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 2 .

Câu 13 (Đề Minh họa lần 2 bộ GD-ĐT 2020).

Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3 (3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + 2b = 2$. B. $4a + 2b = 1$. C. $4ab = 1$. D. $2a + 4b = 1$.

Câu 14. Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ ($a > 0, a \neq 1$) bằng:

- A. 4 . B. 2 . C. 16 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 15. Giá trị $\log_5 x = 4$ thì x bằng:

- A. 4 . B. 625 . C. 5 . D. 652 .

Câu 16 (Đề TT-THPTQG, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam, năm học 2017-2018).

Biểu thức $\log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12}\right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12}\right)$ có giá trị bằng

- A. -2 . B. -1 . C. 1 . D. $\log_2 \sqrt{3} - 1$.

Câu 17. Giá trị của $81^{\log_9 2}$ bằng:

- A. 2 . B. 3 . C. 4 . D. 5 .

Câu 18 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con và tốc độ tăng trưởng là 15% trong 1 giờ. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu thời gian thì số lượng vi khuẩn sẽ tăng đến hơn 1000000 con (một triệu con)?

- A. 53 giờ. B. 100 giờ. C. 51 giờ. D. 25 giờ.

Câu 19. Giá trị của biểu thức $A = 49^{\log_7 2}$ là:

- A. 2 . B. 3 . C. 4 . D. 5 .

Câu 20 (Đề chính thức THPTQG 2019, mã 101).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 16. D. 8.

Câu 21 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 104).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

- A. 8. B. 6. C. 2. D. 3.

Câu 22 (Dự án đề thi THPTQG 2019 mã đề 110).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

- A. 4. B. 5. C. 32. D. 2.

Câu 23 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

- A. 8. B. 16. C. 4. D. 2.

Câu 24. Giá trị của $\log_a 1$ ($a > 0, a \neq 1$) là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 25 (HK1, Sở GD và ĐT tỉnh Hậu Giang 2017-2018).

Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

- A. $P = 8$. B. $P = \frac{1}{32}$. C. $P = \frac{1}{8}$. D. $P = 32$.

Câu 26. $\log_{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{x^7}$ ($0 < x \neq 1$) bằng:

- A. $-\frac{7}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. 4.

Câu 27 (Đề thi HKI, Sở GD Hậu Giang, năm 2018).

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 98ab$. Tính $P = \ln \left(\frac{a+b}{10} \right)$.

- A. $P = 2\ln(ab)$. B. $P = 2\ln(10ab)$. C. $P = \frac{1}{2}\ln(10ab)$. D. $P = \frac{1}{2}\ln(ab)$.

Câu 28. Cho $\log 2 = b$. Tính $\log 25$ theo b ?

- A. $2 + b$. B. $2(2 + 3b)$. C. $2(1 - b)$. D. $3(5 - 2b)$.

Câu 29. Với điều kiện biểu thức tồn tại. Khi đó kết quả rút gọn của

$$A = \left(\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a \right) (\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$$

là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 30. Rút gọn biểu thức $H = \log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$.

- A. $H = 3$. B. $H = \frac{12}{5}$. C. $H = \frac{9}{5}$. D. $H = 2$.

Câu 31. Cho $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$. Khi đó x bằng:

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 32. Cho $\log_3 5 = a$; $\log_3 10 = b$. Khi đó $\log_{\sqrt{3}} 50$ tính theo a và b là:

- A. $a - 1 + b$. B. $2(a + b)$. C. $a + b$. D. $a^2 + b^2$.

Câu 33. Nếu $\log_8 3 = p$ và $\log_3 5 = q$ thì $\log 5$ bằng:

- A. $\frac{1+3pq}{p+q}$. B. $\frac{3pq}{1+3pq}$. C. $p^2 + q^2$. D. $\frac{3p+q}{5}$.

Câu 34. Nếu $\log_2 v = 5\log_2 a + 4\log_2 b$ ($a > 0, b > 0$) thì v bằng:

- A. $a^5 b^4$. B. $a^4 b^5$. C. $5a + 4b$. D. $4a + 5b$.

Câu 35. Cho $\log_a b = 6, \log_c a = 3$. Tính $\log_{a^2} \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

- A. 3. B. 2,5. C. 6. D. -3.

Câu 36. Tìm số các chữ số của 2^{2008} khi viết trong hệ thập phân.

- A. 603. B. 604. C. 605. D. 606.

Câu 37. Cho a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b = 10$ và $a^{12} b^{2016}$ là một số tự nhiên có 973 chữ số. Cặp (a, b) thỏa mãn bài toán là:

- A. (5;5). B. (6;4). C. (8;2). D. (7;3).

Câu 38 (Câu 17 đề minh họa năm 2016).

Cho các số thực dương a, b , với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$. B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.
C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$. D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$.

Câu 39 (Câu 19 đề minh họa năm 2016).

Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$. B. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$.
C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$. D. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$.

Câu 40. Với ba số thực dương a, b, c bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 \frac{8 \cdot a^{b^2}}{c} = 3 + \frac{1}{b^2} \log_2 a - \log_2 c$. B. $\log_2 \frac{8 \cdot a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a + \log_2 c$.
C. $\log_2 \frac{8 \cdot a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a - \log_2 c$. D. $\log_2 \frac{8 \cdot a^{b^2}}{c} = 3 + 2b \log_2 a - \log_2 c$.

Câu 41. Cho $a = \log_{2-\sqrt{3}}(9^{50} + 10), b = \log_{2+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3^{100} + 11}\right)$. Khi đó:

- A. $a = b$. B. $a < b$. C. $a > b$. D. $a = b + 0,5$.

Câu 42. Cho $a = \log_2(4^{50} + 1), b = \log_{\sqrt{2}}(4^{101} - 2^{103} + 4)$. Hãy biểu diễn $\log_8 \frac{2^{202} - 4}{256}$ theo a và b .

- A. $\log_8 \frac{2^{202} - 4}{256} = \frac{b - 2a - 10}{3}$. B. $\log_8 \frac{2^{202} - 4}{256} = \frac{4a + b - 28}{12}$.
C. $\log_8 \frac{2^{202} - 4}{256} = \frac{6a - b - 2}{3}$. D. $\log_8 \frac{2^{202} - 4}{256} = \frac{3a + 2b - 30}{12}$.

Câu 43. Cho a, b, x là những số dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\log_{(ax)} bx = \frac{\log_b a + \log_b x}{1 + \log_a x}$. B. $\log_{(ax)} bx = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$.
C. $\log_{(ax)} bx = \frac{\log_a b - \log_a x}{1 + \log_a x}$. D. $\log_{(ax)} bx = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_b x}$.

Câu 44. Cho a, b, c, x là những số dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\frac{\log_a b}{1 + \log_a b + \log_a c} = \frac{\log_c b}{1 + \log_c a + \log_c b}$. B. $\frac{\log_a b}{1 + \log_a b + \log_a c} = \frac{\log_b c}{1 + \log_c a + \log_c b}$.
C. $\frac{\log_a b}{1 + \log_a b + \log_a c} = \frac{\log_c b}{1 + \log_c a + \log_a b}$. D. $\frac{\log_a b}{1 + \log_a b + \log_a c} = \frac{\log_c b}{1 + \log_b a + \log_c b}$.

Câu 45. Tính giá trị của biểu thức $\log_{\frac{1}{a}} a^3 + \log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}; 1 \neq a > 0$.

- A. $\frac{13}{4}$. B. $-\frac{11}{4}$. C. $-\frac{35}{4}$. D. $\frac{37}{4}$.

Câu 46. Cho $\log_2 b = 3, \log_2 c = -4$. Hãy tính $\log_2 (b^2 c)$.

- A. 2. B. 8. C. 6. D. 4.

Câu 47 (Thi thử THPTQG 2018, lần 2, Kinh Môn, Hải Dương).

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$. Đặt $T = \frac{a}{b}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $0 < T < \frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$. C. $-2 < T < 0$. D. $1 < T < 2$.

Câu 48. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$xy = 10^a, yz = 10^{3b}, xz = 10^{2c} (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Tính $P = \log x + \log y + \log z$.

- A. $P = a + 3b + 2c$. B. $P = \frac{a + 3b + 2c}{2}$. C. $P = 6abc$. D. $P = 3abc$.

Câu 49. Với x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn

$$x \log_{2016} 2 + y \log_{2016} 3 + z \log_{2016} 7 = 1.$$

Tính giá trị của biểu thức $Q = x + y + z$

- A. 10. B. 2017. C. 8. D. 2016.

Câu 50 (2019 AMC 12A). Cho các số thực dương $x \neq 1, y \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 x = \log_y 16$ và $xy = 64$. Tính $(\log_2 \frac{x}{y})^2$.

- A. $\frac{25}{2}$. B. 20. C. $\frac{45}{2}$. D. 25.

Câu 51 (2019 AMC 12A). Xét các số thực dương a, b thỏa mãn

$$\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} = 100$$

và bốn số hạng bên trái là những số nguyên dương. Tính ab .

- A. 10^{52} . B. 10^{100} . C. 10^{144} . D. 10^{164} .

Câu 52 (Thi thử THPT quốc gia lần 2 sở GD-ĐT Hà Nội 2020).

Xét x, y, z là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \frac{1}{4} \log_2^3 z$$
 bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{32}$.

Câu 53 (HK1, Sở GD và ĐT - Bình Thuận, 2019).

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log_a b = 2$ và $\log_b^2 c \leq 2(\log_a c - 2)$. Khi đó $\log_c(ab)$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 54 (TT Lần 1, SGD Ninh Bình, 2019).

Biết $\log_2 \left(\sum_{k=1}^{100} (k \times 2^k) - 2 \right) = a + \log_c b$ với a, b, c là các số nguyên và $a > b > c > 1$. Tổng $a + b + c$ là

- A. 203. B. 202. C. 201. D. 200.

Câu 55. Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

- A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{8}{7}$. C. $\frac{10}{9}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 56 (Đề thi thử Sở GD-ĐT Hưng Yên, 2018).

Xét hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Câu 57. Xét x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - |y|$ là:

- A. $\min P = \frac{17\sqrt{15}}{15}$. B. $\min P = -\sqrt{15}$.
C. $\min P = \sqrt{15}$. D. $\min P = -\frac{17\sqrt{15}}{15}$.

Câu 58 (KSCL 12 lần 2 năm 2017 - 2018, Phan Chu Trinh, Đắk Lắk).

Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng bao nhiêu?

- A. 234. B. 229. C. 333. D. 292.

Câu 59. Biết rằng một số nguyên dương n viết trong hệ cơ số m —phân sẽ có $[\log_m n] + 1$ chữ số, trong đó $[x]$ là ký hiệu phần nguyên của số x . Cho hai số nguyên $x > 1, y > 1$. Biết rằng số $x^y - 1$ viết trong hệ x phân có 22 chữ số, còn số $y^x - 1$ viết trong hệ y phân có 33 chữ số. Tính tổng $x + y$.

- A. 54. B. 55. C. 56. D. 57.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D	7 B	13 D	19 C	25 A	31 A	37 D	43 B	49 C	55 B
2 B	8 D	14 C	20 A	26 A	32 B	38 C	44 A	50 B	56 A
3 A	9 B	15 B	21 D	27 D	33 B	39 C	45 D	51 D	57 C
4 D	10 A	16 B	22 B	28 C	34 A	40 C	46 A	52 B	58 A
5 A	11 A	17 C	23 C	29 A	35 B	41 C	47 D	53 B	59 B
6 D	12 B	18 C	24 A	30 A	36 C	42 B	48 B	54 B	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa và tính chất.

Định nghĩa 1.

- ☑ Hàm số mũ cơ số a là hàm số $y = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số, $0 < a \neq 1$).
- ☑ Hàm số lôgarit cơ số a là hàm số $y = \log_a x, \forall x > 0$ (với a là hằng số, $0 < a \neq 1$).
- ☑ Hàm số lũy thừa là hàm số $y = x^\alpha$ (với α là hằng số).

Chú ý 6.

- ☑ Hàm số mũ $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$.
- ☑ Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- ☑ Hàm số $y = a^x$ và hàm số $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Chú ý 7. Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ có tập xác định tùy thuộc vào α .

- ☑ Nếu α nguyên dương thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $\alpha = 0$ hoặc α nguyên âm thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \neq 0$.
- ☑ Nếu α không nguyên thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x > 0$.

2. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

3. Đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa, hàm số chứa căn. Cho a là hằng số, $0 < a \neq 1$, $u = u(x)$, α là hằng số. Khi đó:

- | | |
|---|---|
| (1) $(e^x)' = e^x;$ | (7) $(e^u)' = u'e^u;$ |
| (2) $(a^x)' = a^x \ln a;$ | (8) $(a^u)' = u'a^u \ln a;$ |
| (3) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ | (9) $(\ln u)' = \frac{u'}{u};$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ | $(\ln u)' = \frac{u'}{u};$ |
| (4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$ | (10) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$ |
| (5) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$ | (11) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u';$ |
| (6) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}};$ | (12) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}.$ |

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 12. Tìm tập xác định của hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm số lũy thừa.

Phương pháp.

- ☑ Hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) xác định khi $x > 0$.
- ☑ Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ có tập xác định tùy thuộc vào α .
 - Nếu α nguyên dương thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$
 - Nếu $\alpha = 0$ hoặc α nguyên âm thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \neq 0$.
 - Nếu α không nguyên thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x > 0$.

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

① $y = \log(3 - 2x)$; ② $y = \log_2(x^2 - 5x + 4)$; ③ $y = \log_{0,2} \frac{2x + 4}{3 - x}$.

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số

① $y = (2x - 5)^{-2017}$; ② $y = (-x^2 + 7x - 6)^{-4}$;
 ③ $y = (2x^2 - 9x)^{\sqrt{3}}$; ④ $y = \left(\frac{3x - 1}{x + 4} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số

① $y = \sqrt{2x - x^2}$; ② $y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$;
 ③ $y = \sqrt[5]{x^2 - 7x + 10}$; ④ $y = (x^2 - 7x + 10)^{\frac{1}{5}}$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \cos(2\pi \log_5 x)$.

- a) Tìm tập xác định D của hàm số.
- b) Chứng minh rằng: $f(5x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Bài 5. Cho hai hàm số:

$$f(x) = \log_3(x^2 - 4), \quad g(x) = \log_3(x - 2) + \log_3(x + 2).$$

- a) Tìm tập xác định của hai hàm số đã cho.
- b) Khi nào thì $f(x) = g(x)$.

Dạng 13. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm số lũy thừa.

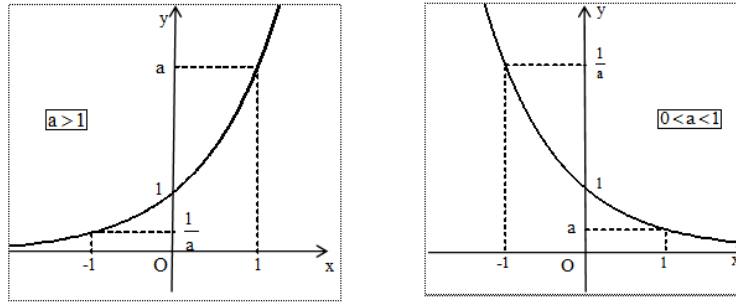
Phương pháp.

- ☑ Tập xác định.

- ☑ Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.
- ☑ Lập bảng một số giá trị.
- ☑ Vẽ các điểm theo bảng giá trị, từ đó vẽ đồ thị hàm số.

Bài 6. Vẽ đồ thị hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

Chú ý 8. Cho hàm số $y = a^x$ (với $0 < a \neq 1$). Khi $a > 1$ hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ và khi $0 < a < 1$ hàm số giảm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox , qua các điểm $(0; 1)$, $(1; a)$ và nằm phía trên trục hoành. Đồ thị hàm số có hai dạng sau:



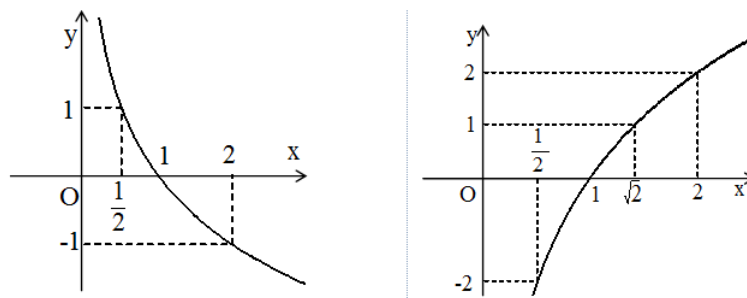
Bài 7. Thực hiện các yêu cầu sau:

- a) Vẽ đồ thị hàm số (C) : $y = 2^x$ và đường thẳng (d) : $y = 6 - x$ trên cùng một hệ trục.
- b) Dựa vào câu a) hãy suy ra nghiệm của phương trình và bất phương trình sau:

$$2^x = 6 - x \quad (1); \quad 2^x > 6 - x \quad (2).$$

Chú ý 9. Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

- ☑ Khi $a > 1$ hàm số tăng trên D , khi $0 < a < 1$ hàm số giảm trên D .
- ☑ Đồ thị có tiệm cận đứng là trục Oy , qua các điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$, $(\frac{1}{a}; -1)$ và nằm ở bên phải trục tung. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có hai dạng sau:



Bài 8. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$.

Bài 9. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- ① $y = x^{-3}$;
- ② $y = x^{\frac{5}{2}}$.

Dạng 14. Chứng minh đẳng thức hàm.

Bài 10. Cho hàm số: $f(x) = e^{ax+b}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = x^{\sqrt{7}}$. Chứng minh rằng:

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)}, \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = a \log_3 x + \beta$. Chứng minh rằng:

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Bài 13. Cho hàm số $f(x) = 5^{\frac{3}{x}+a}$. Chứng minh rằng:

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \forall x, y, x+y \neq 0. \quad (1)$$

Dạng 15. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số mũ, lôgarit, lũy thừa.

Phương pháp. Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D .

☑ Hàm số f gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

☑ Hàm số f gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Bài 14. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

$$\textcircled{1} f(x) = 3^x + 3^{-x}; \quad \textcircled{2} g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

Bài 15. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}; \quad \textcircled{2} g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Bài 16. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$.

Dạng 16. Tính giới hạn.

Phương pháp. Sử dụng các kết quả:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bài 17. Tìm các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3 - e^{2x+3}}{x}; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{7x}}{x}.$$

Bài 18. Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Bài 19. Với mọi số thực x , ta kí hiệu

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Tính

① $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh x;$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}.$

Bài 20. Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2009x} - 1}{e^{2008x} - 1} + \frac{\ln(2010x + 1)}{x} \right).$

Bài 21. Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x - 1 + \log_3(7x + 1)}{x} \right).$

Bài 22. Tính các giới hạn

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan 2x} - e^{\tan x}}{x};$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx^2} \cos 2nx - 1}{x^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

Bài 23. Tính

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{\cos 2x + \sqrt[3]{1+3x}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\cos 3x + 3 \cos x - \ln(1+x)^4}{4}}}{x}.$$

Dạng 17. Tính đạo hàm.

Phương pháp. Cho a là hằng số, $0 < a \neq 1$, $u = u(x)$, α là hằng số. Khi đó:

(1) $(e^x)' = e^x;$

(7) $(e^u)' = u'e^u;$

(2) $(a^x)' = a^x \ln a;$

(8) $(a^u)' = u'a^u \ln a;$

(3) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

(9) $(\ln u)' = \frac{u'}{u};$

$(\ln |x|)' = \frac{1}{x};$

$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u};$

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$

(10) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$

(5) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$

(11) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u';$

(6) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}};$

(12) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}.$

Bài 24. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = e^x \sin x;$

② $y = x2^x;$

③ $y = \frac{\ln x}{x} + \ln(x^2 + 1);$

④ $y = \log_{\frac{1}{3}}(\cos x);$

⑤ $y = (x+1)x^{\sqrt{5}};$

⑥ $y = e^{\tan x};$

⑦ $y = \sqrt{\ln x} - \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}};$

⑧ $y = \lg^5 x;$

⑨ $y = \log_x 7;$

⑩ $y = x^x.$

Bài 25. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ (a là hằng số khác không).

Bài 26 (HV Ngân Hàng-1998). Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2x}(3x + 1)$.

Bài 27. Tính đạo hàm của các hàm số $y = (\sin x)^x$.

Bài 28. Cho hàm số $y = \frac{(x^2 + 1)(3 + \sin x)}{(2 + \cos x)(3x^8 + 5)}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$.

Dạng 18. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm.

Bài 29. Cho hàm số $y = xe^{-x}$. Chứng minh rằng $xy' = (1 - x)y$.

Bài 30. Cho hàm số $y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + C}$, với C là hằng số. Chứng minh rằng:

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$$

Bài 31. Cho hàm số $y = e^{x-x^2} + e^{-x^2}$. Chứng minh rằng

$$y' + 2xy - e^{x-x^2} = 0.$$

Bài 32. Cho hàm số $y = e^{-x} \sin x$. Chứng minh $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Bài 33. Cho hàm số $y = \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Chứng minh rằng:

$$2(x^2 + 1)y' + x = e^{2y}.$$

Bài 34. Cho hàm số $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. Chứng minh rằng

$$y + xy' + x^2y'' = 0.$$

Bài 35. Cho hàm số $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})^{2015}$. Chứng minh rằng

$$(e^{2x} + 1)y'' - y' = 0.$$

Dạng 19. Chứng minh đẳng thức chứa vi phân.

Phương pháp.

☑ Tính vi phân của hàm số từ công thức: $dy = y'dx$.

☑ Thay vào đẳng thức để suy ra điều phải chứng minh.

Lưu ý. Đây là dạng toán tương đối xa lạ và hiếm gặp đối với đa số học sinh, nhưng các em cần phải được rèn luyện nhiều để sau này tìm nguyên hàm và tích phân được thuận tiện hơn.

Bài 36. Cho hàm số $y = Cx + x \ln|x|$, với C là hằng số.

a) Tìm tập xác định.

b) Chứng minh rằng: $xdy = (x + y)dx$.

Bài 37. Cho hàm số $y = e^{Cx^3 - x^2}$, với C là hằng số. Chứng minh rằng:

$$(x^2 + 3 \ln y) y dx = x dy.$$

Bài 38. Cho hàm số $y = x \tan(\ln x)$. Chứng minh rằng:

$$x^2(dy - dx) = (x + y) y dx.$$

Bài 39. Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{1}{e^{x^2} + 1}}$. Chứng minh rằng:

$$dy + (xy - xy^3) dx = 0.$$

Dạng 20. Xét tính đơn điệu của hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm số lũy thừa.

Phương pháp.

☑ Giả sử K là một khoảng, một đoạn, hoặc một nửa khoảng và f là hàm số xác định trên K .

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

☑ Cho hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số f đồng biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I .

☑ Hàm số $y = a^x$ và hàm số $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Bài 40. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = x^\alpha$ trong các trường hợp $\alpha > 0, \alpha < 0$.

Bài 41. Chứng minh rằng trên $(1; +\infty)$ thì:

a) Hàm số $g(x) = x \ln x$ đồng biến.

b) Hàm số $f(x) = \log_x(x + 1)$ nghịch biến.

Bài 42. Cho hai số dương phân biệt a, b . Chứng minh rằng:

a) Hàm số $h(x) = \frac{b-a}{a+x} + \ln \frac{a+x}{b+x}$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

c) Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b}\right)^b, \forall x > 0$.

Bài 43. Chứng minh rằng với mọi bộ số dương $\{a, b, c\}$ cho trước, hàm số

$$f(t) = \frac{a^t}{b^t + c^t} + \frac{b^t}{c^t + a^t} + \frac{c^t}{a^t + b^t}$$

đồng biến trên $[0; +\infty)$

Dạng 21. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

Phương pháp.

- ☑ Sử dụng các công thức tính đạo hàm.
- ☑ Lập bảng biến thiên để kết luận.
- ☑ Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, ta tiến hành như sau:

- **Bước 1.** Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$$

mà tại đó f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

- **Bước 2.** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- **Bước 3.** Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất, bé nhất trong các số trên. Khi đó

$$\max_{[a; b]} f(x) = M, \min_{[a; b]} f(x) = m.$$

Bài 44 (Đề thi tốt nghiệp THPT-2009).

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$.

Bài 45. Cho hàm số $f(x) = x \ln x - x \ln 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$.

Bài 46 (Đề thi ĐH-2004B). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Bài 47. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 2]$ của hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$.

Bài 48. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right).$$

Bài 49 (ĐH Ngoại Thương-1999). Xét $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3^x + 9^y$.

Bài 50 (ĐH Tổng Hợp TP. HCM-1994).

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$y = (2 + \sqrt{3})^{2x} - 8 \left[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x \right] + (2 - \sqrt{3})^{2x}.$$

Bài 51 (THPT Quốc gia 2016). Xét các số thực x, y thỏa mãn:

$$x + y + 1 = 2 \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} \right). \quad (*)$$

a) Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$.

b) Tìm m để $3^{x+y-4} + (x + y + 1) 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq m$ đúng với mọi số thực x, y thỏa mãn (*).

Dạng 22. Một số bất đẳng thức được chứng bằng cách khảo sát hàm số mũ, hàm số lôgarit.

Phương pháp.

☑ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0).$$

☑ Nếu đạo hàm có dấu không đổi thì f là hàm số đơn điệu. Ta sử dụng:

◦ f là hàm đồng biến trên $(a; b)$ thì:

$$a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

◦ f là hàm nghịch biến trên $(a; b)$ thì:

$$a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

☑ Nếu đạo hàm $f'(x)$ có dấu thay đổi thì lập bảng biến thiên, để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 52. Chứng minh rằng: $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 53. Chứng minh bất đẳng thức $\ln(1 + x) \leq x, \forall x > -1$.

Bài 54. Chứng minh rằng với $0 < x \neq e$ thì: $\ln x < \frac{x}{e}$.

Bài 55. Chứng minh rằng: $x \leq e^{\frac{x}{e}}, \forall x \in [0; e]$.

Bài 56. Chứng minh rằng $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x, \forall x > 0$.

Bài 57. Cho trước $\alpha \in (0; 1)$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha, \forall x \in (0; +\infty).$$

Bài 58. Chứng minh rằng $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1), \forall x \in (-1; 0)$.

Bài 59. Chứng minh rằng $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$. (1)

Bài 60. Cho $3 \leq n \in \mathbb{N}$ và $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\sin^n x + \cos^n x \geq 2^{\frac{2-n}{2}}.$$

Bài 61. Chứng minh rằng: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Bài 62. Chứng minh rằng:

a) $(x-1) \ln(x-1) < x \ln x, \forall x \geq 3$. (1)

b) $\ln^2 n > \ln(n-1) \ln(n+1), \forall n > 1, n \in \mathbb{N}$. (2)

Bài 63. Cho $0 < x < 1, 0 < y < 1, y > x$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4.$$

Bài 64. Cho hai số dương phân biệt x và y . Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}. \quad (1)$$

Bài 65. Cho hai số dương phân biệt x, y . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y}. \quad (1)$$

Bài 66. Cho $p > 1, q > 1$ thỏa mãn $p+q = pq$ và a, b là hai số dương. Chứng minh rằng:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bài 67. Cho hai số dương a, b có $a+b=1$. Chứng minh rằng:

$$e^{ax+by} \leq ae^x + be^y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bài 68. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x \geq y \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & (2020^x - 2020^y) \left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \right) \\ & \geq (x-y) \left(2019\sqrt{1+x^2} - x + 2019\sqrt{1+y^2} - y \right). \end{aligned}$$

Bài 69. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}. \quad (1)$$

Bài 70. Cho ba số thực a, b, c .

a) Chứng minh rằng: $(a - b) \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b} \right) \leq 0.$ (1)

b) Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 1$ thì:

$$3 \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \right) \leq \frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c}. \quad (2)$$

Bài 71 (T9/487 Toán học & tuổi trẻ số 487, tháng 1 năm 2018).

Cho số nguyên dương n và các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tìm số thực λ sao cho :

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n + \lambda x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dạng 23. Chứng minh bất đẳng thức bằng cách lôgarit hóa.

Phương pháp. Ta thường sử dụng các kết quả sau:

✓ $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, với $0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$.

✓ $\log_a b^a = a \log_a b$, với $0 < a \neq 1, b > 0$.

✓ Hàm số $f(x) = \log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$.

✓ Khi lôgarit hóa hai vế, ta thường sử dụng cơ số e để việc tính đạo hàm được đơn giản nhất.

Bài 72. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$, ta có

$$n^{n+1} > (n+1)^n. \quad (*)$$

Bài 73. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 7$, ta có

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Bài 74 (Đề thi ĐH-2007D). Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a} \right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b} \right)^a. \quad (1)$$

Bài 75. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $a^b b^a \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{a+b}. \quad (1)$

Bài 76. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq \frac{125}{64}.$$

Bài 77. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Bài 78. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c). \quad (1)$$

Dạng 24. Bất đẳng thức Becnuli.

Phương pháp. Để so sánh x^α và x (sau này tổng quát hơn là so sánh x^α và x^β), ta cần sử dụng bất đẳng thức Becnuli:

$$\begin{aligned} x^\alpha &\leq \alpha x + 1 - \alpha, \forall x \in (0; +\infty) \quad (\alpha \in (0; 1) \text{ cho trước}). \\ x^\alpha &\geq \alpha x + 1 - \alpha, \forall x \in (0; +\infty) \quad \left(\alpha \text{ cho trước, } \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha < 0. \end{cases} \right). \end{aligned}$$

Còn chứng minh của hai bất đẳng thức này bạn đọc hãy xem ở Bài tập 57 (ở trang 36) và bài tập 103 (ở trang 41).

Bài 79. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = ab$. Chứng minh rằng $a^b + b^a > 6$.

Bài 80. Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng: $a^b + b^a > 1$. (1)

Bài 81. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \frac{a^{2009}}{b^{2009}} + \frac{b^{2009}}{c^{2009}} + \frac{c^{2009}}{a^{2009}} &\geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \\ \frac{a^{2009}}{b^{2009}} + \frac{b^{2009}}{c^{2009}} + \frac{c^{2009}}{a^{2009}} &\geq \frac{a^{2008}}{b^{2008}} + \frac{b^{2008}}{c^{2008}} + \frac{c^{2008}}{a^{2008}}. \end{aligned}$$

Bài 82. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x + y + z$.

Bài 83. Xét A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\tan \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}}.$$

Bài 84. Cho n ($n \in \mathbb{N}^*, n > 2$) số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thay đổi và thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Chứng minh rằng:

$$a_1^{a_2} + a_2^{a_3} + \dots + a_{n-1}^{a_n} + a_n^{a_1} + a_1 + a_2 + \dots + a_n > n^3 + n.$$

Dạng 25. Dùng đạo hàm để tính giới hạn dạng $\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Phương pháp. Biến đổi biểu thức tính giới hạn $f(x)$ (hoặc một bộ phận nào đó của nó) thành $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, sau đó sử dụng

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Bài 85. Tính: $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Bài 86 (ĐHQG Hà Nội -2000). Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$.

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 87. Tìm $a > 0, b > 0$ sao cho $\begin{cases} a^a = b \\ b^b = a. \end{cases}$

Bài 88. Cho hàm số $f(x) = e^{ax^2+b}$ (a, b là hằng số). Chứng minh:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Bài 89. Cho hàm số $f(x) = x(3 + 5\log_2 x)$. Chứng minh:

$$\sqrt{xy}f(\sqrt{xy}) = \frac{yf(x) + xf(y)}{2}, \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Bài 90. Cho $f(x) = \frac{4^{x+2}}{4^x + 2}$.

a) Chứng minh rằng: $f(x) + f(1-x) = 16, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Tính tổng: $f(0) + f\left(\frac{1}{2014}\right) + f\left(\frac{2}{2014}\right) + \dots + f\left(\frac{2013}{2014}\right) + f(1)$.

Bài 91. Cho hàm số $f(x) = 2x + m + \log_2(mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1)$. Tìm m để $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Tính đạo hàm và chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm.

Bài 92. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = e^x + 5^x + \ln x + \log_7 x$;

b) $y = e^{\sin x} + 5^{\cos x} + \ln(x^2 + 1) + \log_7(2x - 1)$.

Bài 93. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

① $y = (3x - 1)^\pi$;

② $y = \sqrt[3]{\ln 3x}$;

③ $y = \sqrt[5]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

④ $y = \left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0, b > 0$.

Bài 94. Cho hàm số $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$. Chứng minh rằng

$$xy' = y[y \ln x - 1].$$

Chứng minh bất đẳng thức bằng cách khảo sát hàm.

Bài 95. Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì $\ln x < \sqrt{x}$.

Bài 96. Chứng minh rằng $x < -\ln(1-x), \forall x \in (0;1)$. (1)

Bài 97. Chứng minh rằng $\frac{2x}{x+2} < \ln(x+1), \forall x > 0$.

Bài 98. Chứng minh rằng $e^y > \frac{1}{2}y^2, \forall y \geq 0$. (1)

Bài 99. Chứng minh rằng: $e^x > \frac{x}{x^2-2x+2}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Bài 100. Chứng minh rằng: $e^x - e^{-x} \geq 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \forall x \geq 0$.

Bài 101. Cho $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng:

$$\ln \frac{x+y}{x} > \frac{2y}{2x+y}. \quad (1)$$

Bài 102. Tìm $a > 0$ để $a^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Bài 103. Cho trước $\alpha \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^\alpha - \alpha x$.

a) Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{2011}}{b^{2011}} + \frac{b^{2011}}{c^{2011}} + \frac{c^{2011}}{a^{2011}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Bài 104. Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng: $a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a$. (1)

Bài 105. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a \cdot b^b \cdot c^c. \quad (1)$$

Bài 106. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$a) (a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}. \quad (1)$$

$$b) (a^a b^b c^c)^2 \left(a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)} \right)^3 \geq 27. \quad (2)$$

Bài 107. Cho $x, y \in (0;1)$ thỏa mãn $x+y=1$. Chứng minh rằng:

$$x^x + y^y \geq \sqrt{2}.$$

Bài 108. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xyz = 3$. Chứng minh rằng:

$$x^{\frac{1}{x}} \cdot y^{\frac{1}{y}} \cdot z^{\frac{1}{z}} \leq 3^{\frac{xy+yz+zx}{9}}. \quad (1)$$

Bài 109. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực dương và t là một số thực dương, thì:

$$x^t (x - y) (x - z) + y^t (y - z) (y - x) + z^t (z - y) (z - x) \geq 0.$$

Bài 110 (T9/488 Toán học & tuổi trẻ số 488, tháng 2 năm 2018).

Cho 6 số thực dương a, b, c, x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$ax + by + cz \geq a^x \cdot b^y \cdot c^z.$$

Bài 111 (T9/493 Toán học & tuổi trẻ số 493, tháng 7 năm 2018).

Cho các số dương a, b . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)} \right]^2 \leq \frac{b - a}{a} - \ln b + \ln a \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\max(a, b)}{\min(a, b)} - 1 \right]^2.$$

Bài 112. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b + c} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c + a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a + b} \right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}.$$

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{4a + b + c}} + \sqrt{\frac{b}{4b + c + a}} + \sqrt{\frac{c}{4c + a + b}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Bài 114. Cho A, B, C dương và $A.B.C \geq 1$. Chứng minh rằng hàm số $f(t) = A^t + B^t + C^t$ đồng biến trên $[0, +\infty)$.

Bài 115. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b + c - a} \right)^t + \left(\frac{b}{c + a - b} \right)^t + \left(\frac{c}{a + b - c} \right)^t \geq 3, \forall t \geq 1$$

Bài 116. Cho tam giác ABC và $0 < k < 1$. Chứng minh rằng

$$\cos^k \frac{A}{2} + \cos^k \frac{B}{2} + \cos^k \frac{C}{2} \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k.$$

Bài 117. Xét các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện cho $a + b + c = 100$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$e^a + e^b + e^c + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài 118. Xét các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq y \geq z > 0 \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$.

Bài 119. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a + b + c) - 9 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)^b \left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right)^c \left(c + \sqrt{c^2 + 1}\right)^a.$$

Bài 120. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1. \quad (1)$$

Bài 121. Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn: $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1).$$

Bài 122 (T9/489 Toán học & tuổi trẻ số 489, tháng 3 năm 2018).

Cho biểu thức $P = \sqrt[60]{3} \cdot \sqrt[120]{4} \dots \sqrt[n^3-n]{n-1}$, với n là số tự nhiên và $n \geq 4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[24n^2+24n]{3^{n^2+n-12}} \leq P \leq \sqrt[8]{3}.$$

Tính giới hạn nhờ đạo hàm.

Bài 123 (ĐH GTVT-1998). Tính: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}.$

Bài 124. Tính: $I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$

Bài 125. Tính: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2008) \sqrt[9]{1-5x} - 2008}{x}.$

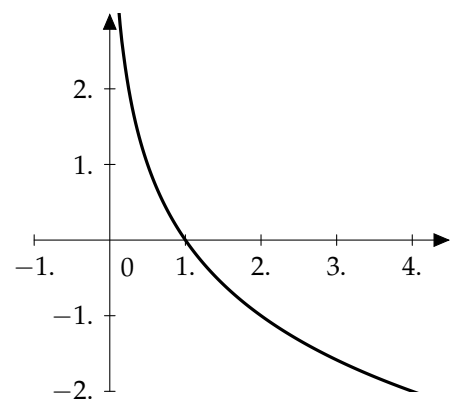
2. Lời giải, hướng dẫn

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

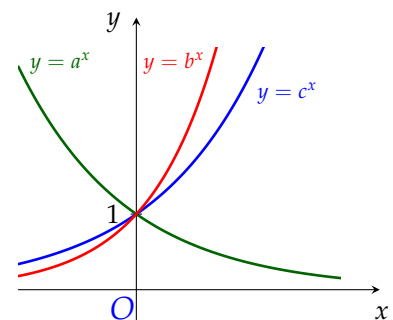
Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số cho ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 2^x$. B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
C. $y = \log_2 x$. D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



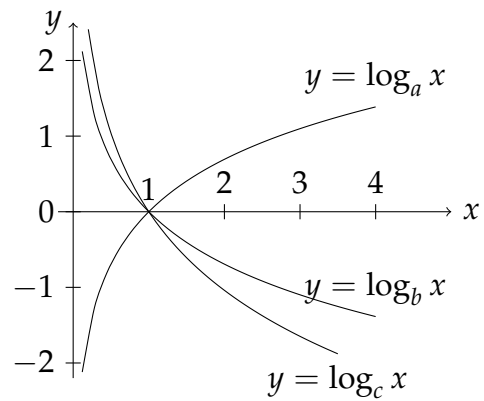
Câu 2. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $a > 1, b < 1, c > 0$. B. $a < 1, b > 1, c > 1$.
C. $b > c > a$. D. $b^x > c^x > a^x, \forall x > 0$.



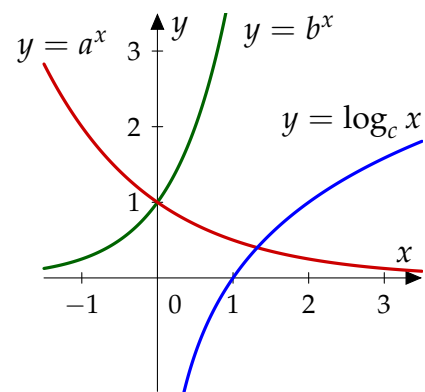
Câu 3. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $b < c < a$. B. $c < a < b$.
C. $a < c < b$. D. $a < b < c$.



Câu 4. Trong hình vẽ bên dưới có đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

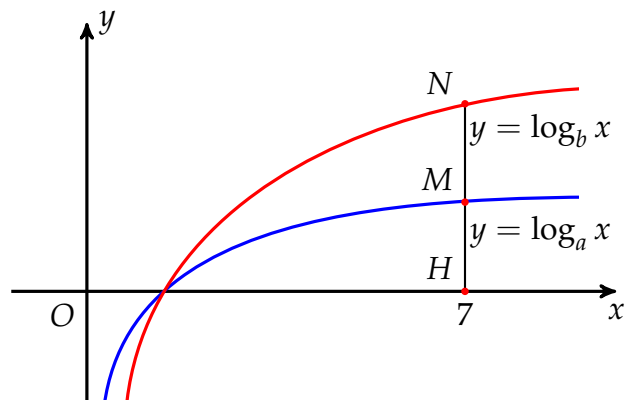
- A. $c < a < b$. B. $a < c < b$.
C. $b < c < a$. D. $a < b = c$.



Câu 5.

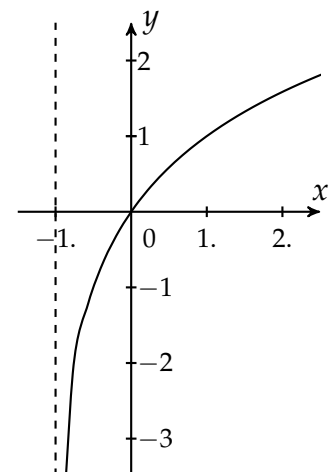
Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $\log_b x$ lần lượt tại H, M và N . Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 7b$. B. $a = b^2$.
C. $a = b^7$. D. $a = 2b$.

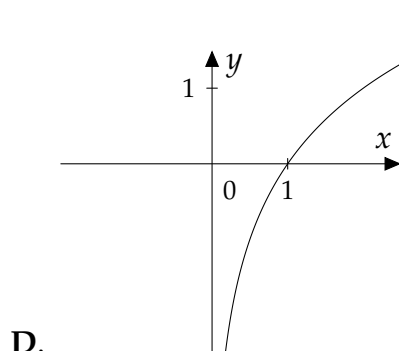
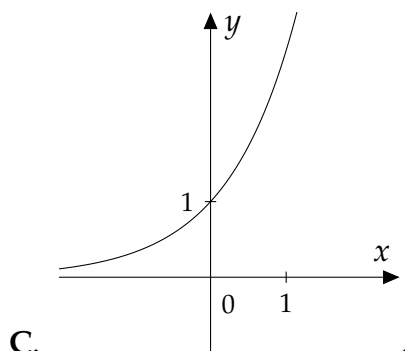
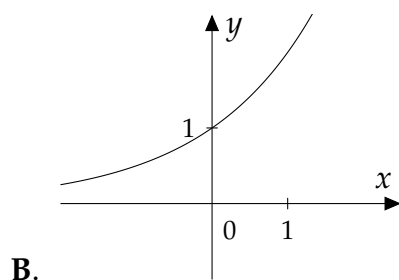
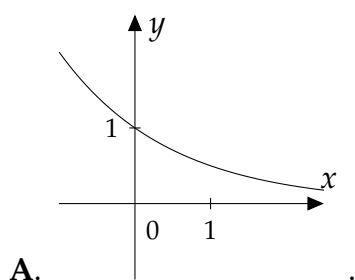


Câu 6. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = \log_3 x$. B. $y = \log_2 x + 1$.
C. $\log_2(x + 1)$. D. $\log_3(x + 1)$.

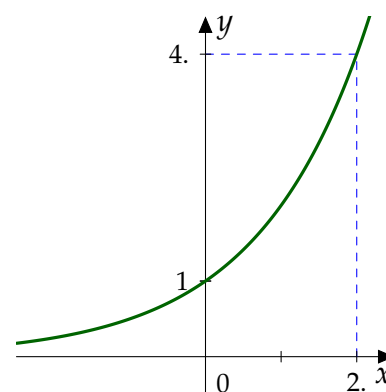


Câu 7. Đồ thị nào sau đây là đồ thị hàm số $y = 3^x$?



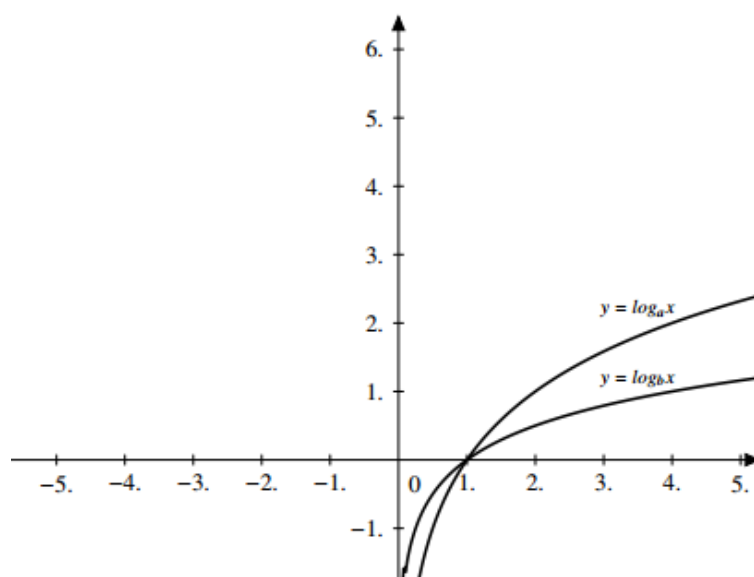
Câu 8. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ?

- A. $y = 2^{-x}$. B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.
C. $y = e^x$. D. $y = e^{-x}$.



Câu 9. Cho a và b là hai số thực dương và $a \neq 1, b \neq 1$. Đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ trong hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $a > b > 1$. B. $1 > a > b$.
C. $a > 1 > b$. D. $b > a > 1$.



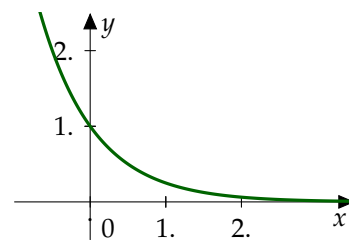
Câu 10. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

B. $y = 4^x$.

C. $y = -4^x$.

D. $y = -4^{-x}$.



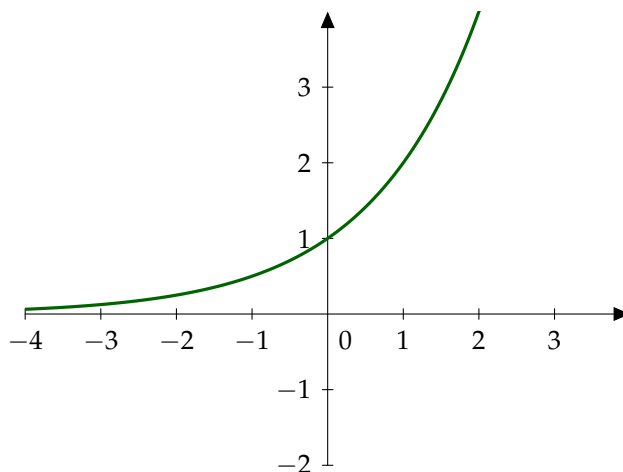
Câu 11. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = 2^x$.

B. $y = 2^{-x}$.

C. $y = \log_2 x$.

D. $y = -\log_2 x$.



Câu 12.

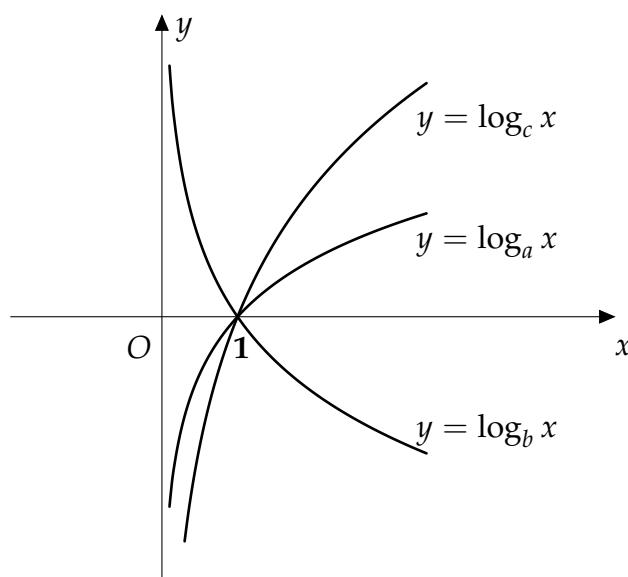
Cho ba số thực a, b, c dương, khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $c > a > 1 > b$.

B. $a > c > 1 > b$.

C. $a > b > 1 > c$.

D. $a > b > c > 1$.



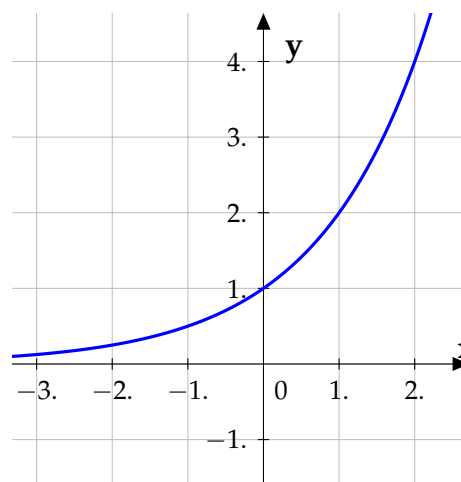
Câu 13. Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = 2^x$.

B. $y = 3^x$.

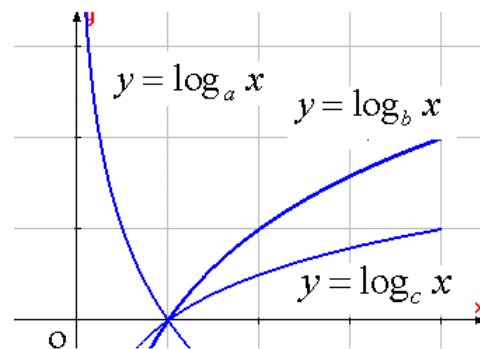
C. $y = 4^x$.

D. $y = 2x^2$.



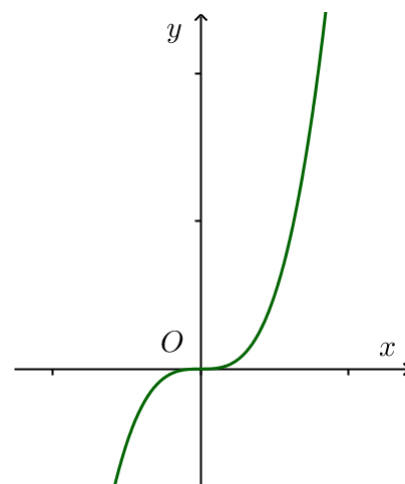
Câu 14. Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $a > b > c$. B. $b > c > a$.
C. $c > b > a$. D. $c > a > b$.



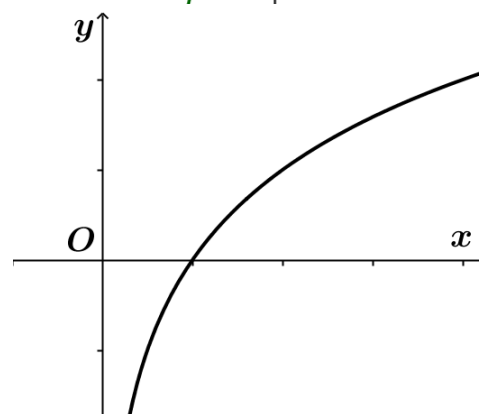
Câu 15. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên?

- A. $y = x^3$. B. $y = x^{\frac{1}{5}}$. C. $y = \sqrt{x}$. D. $y = x^4$.



Câu 16. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên?

- A. $y = e^x$. B. $y = \log_{0,5} x$.
C. $y = e^{-x}$. D. $y = \log_{\sqrt{7}} x$.



Câu 17. Tìm tập xác định của hàm số $y = (1 - x^2)^{\sqrt{3}}$?

- A. $(-1; 1)$. B. $[-1; 1]$.
C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Khẳng định nào đúng?

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(-8) = -\frac{1}{3}$. C. $f'(8) = \frac{1}{3}$. D. $f'(1) = \frac{3}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = e^{\sin 2x} - e^{\sin x}$. Khi đó $f'(0)$ gần nhất với số nào sau đây?

- A. 0,99. B. 0,016. C. 0,017. D. 1.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = e^{x \ln 8} + x \ln 8 - 8^x$. Tính $f'(17)$.

- A. 0. B. $3 \ln 2$. C. $2 \ln 8$. D. $\ln 2$.

Câu 21. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_2(4 - x) - 1}$.

- A. $(-\infty; 4)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $[2; 4)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b biết $f'(0) = -22$.

- A. $3a + b = 22$. B. $3a - b = 22$. C. $3a - b = -22$. D. $3a - 2b = 22$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \cos(\log x)$. Khi đó biểu thức

$$T = f(x)f(y) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy) \right]$$

có giá trị bằng

- A. $T = x - y$. B. $T = 0$.
C. $T = (x - 1)^2$. D. $T = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$.

Câu 24. Chỉ ra đâu không phải là hàm số lũy thừa:

- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. B. $y = x^{\frac{1}{2}}$. C. $y = x^3$. D. $y = x^{-\sqrt{3}}$.

Câu 25. Tìm tập xác định của hàm số: $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

- A. $\mathbb{R}$. B. $[-1; 1]$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 26. Tìm tập xác định của hàm số: $y = (4 - 2x)^{-5}$

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 27. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \left(\frac{5 - x}{2x - 1}\right)^{-3}$

- A. $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 28. Tìm tập xác định của hàm số $y = (3x + 1)^{2017}$

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 29. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \left(\frac{4 - 5x}{x + 1}\right)^{10}$

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 30. Tìm tập xác định của hàm số: $y = (x^2 - 6x + 9)^{\frac{\pi}{2}}$

- A. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $(3; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 31. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x)$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [0; 4]$.
C. $\mathcal{D} = (0; 4)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 32 (Câu 17 đề minh họa của Bộ năm học 2016-2017).

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_5(x^2 - 2x - 3)$.

- A. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $[-1; 3]$.
C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 33. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số: $y = \log_5(x^3 - x^2 - 2x)$.

- A. $\mathcal{D} = (0; 1)$. B. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (0; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 34. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = 2^x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Trục Oy là tiệm cận ngang của (C). B. Đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.
C. Đồ thị C đi qua điểm (0; 1). D. Trục Ox là tiệm cận ngang của (C).

Câu 35. Đạo hàm của hàm số $y = x^{-5}$ trên từng khoảng xác định của nó là:

- A. $y' = -5x^{-4}$. B. $y' = -5x^{-6}$. C. $y' = x^{-6}$. D. $y' = -5x^6$.

Câu 36. Đạo hàm của hàm số $y = x^7$ là:

- A. $y' = 7x^8$. B. $y' = x^8$. C. $y' = 7x^6$. D. $y' = x^6$.

Câu 37. Đạo hàm của hàm số $y = x^{-e}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $y' = -ex^{-e+1}$. B. $y' = ex^{-e-1}$. C. $y' = ex^{-e+1}$. D. $y' = -ex^{-e-1}$.

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$.

- A. $y' = 5x^4$. B. $y' = -5x^{-8}$. C. $y' = -5x^4$. D. $y' = -5x^8$.

Câu 39 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$. B. $2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$.
C. $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x}$. D. $(x^2-3x) \cdot 2^{x^2-3x-1}$.

Câu 40 (Dự án đề thi THPTQG 2019 mã đề 110).

Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3)3^{x^2-3x}$. B. $3^{x^2-3x} \ln 3$.
C. $(x^2-3x)3^{x^2-3x-1}$. D. $(2x-3)3^{x^2-3x} \ln 3$.

Câu 41 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.
C. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Câu 42 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 104).

Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. B. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$.
C. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 43 (Dự án đề thi THPTQG 2019 mã đề 110).

Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3)3^{x^2-3x}$. B. $(x^2-3x)3^{x^2-3x-1}$.
C. $3^{x^2-3x} \ln 3$. D. $(2x-3)3^{x^2-3x} \ln 3$.

Câu 44 (HK 1, 2017 - 2018, Sở Đà Nẵng).

Cho hàm số $y = \ln(3x^2 - 2x - 1)$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 45 (HK 1, 2017 - 2018, Sở Đà Nẵng).

Cho hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' \geq 0$ là

- A. $S = (-1; 1] \cup (3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1) \cup [1; 3)$.
C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 46. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 3)^4$.

- A. $y' = 8(x-1)(x^2-2x+3)^3$. B. $y' = 8(x-1)(x^2-2x+3)^5$.
C. $y' = 4(x^2-2x+3)^3$. D. $y' = 4(x^2-2x+3)^5$.

Câu 47 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

- A. $y' = -2xe^x$. B. $y' = (2x-2)e^x$. C. $y' = x^2e^x$. D. $y' = (x^2+2)e^x$.

Câu 48. Tính đạo hàm của hàm số $y = (5-x)^{\sqrt{5}}$

- A. $y' = \sqrt{5}(5-x)^{\sqrt{5}-1}$. B. $y' = x\sqrt{5}(5-x)^{\sqrt{5}-1}$.
C. $y' = \sqrt{5}(5-x)^2$. D. $y' = -\sqrt{5}(5-x)^{\sqrt{5}-1}$.

Câu 49. Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x + 1)^e$

- A. $y' = e(3x + 1)^{e+1}$. B. $y' = 3e(3x + 1)^{e-1}$.
C. $y' = 3e(3x + 1)^{e+1}$. D. $y' = e(3x + 1)^{e-1}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \log_3(3^x + x)$, biết $y'(1) = \frac{a}{4} + \frac{1}{b \ln 3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $a + b$.

- A. 7. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 51. Cho hàm số: $f(x) = 2^x + |2^x - 4|$. Xét các mệnh đề sau:

- (I) $f'(4) = 32 \ln 2$; (II) $f'(1) = 0$;
(III) $f'(2) \approx 2,7726$; (IV) $f'(2) = 4 \ln 2$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 52. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^x + 2^{4-x}$ bằng 8.
B. Hàm số $y = 11^{12-1984x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số $\log_{2017}(2x + 1)$ đồng biến trên tập xác định. .
D. Hàm số $y = e^{x^2+2017}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 53. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$:

- A. $y' = \frac{3}{2}(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. B. $y' = \frac{3}{2}x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.
C. $y' = 3x(2 - x^2)^{\frac{5}{2}}$. D. $y' = -3x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 54. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$:

- A. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. B. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$. D. $y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

Câu 55. Đối với hàm số $y = \sqrt[3]{\sqrt{\cos x}}$ thì:

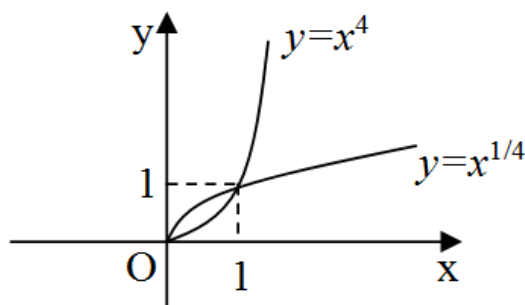
- A. $6y' \cot x = \sqrt[6]{\cos x}$. B. $6y' \cot x = -\sqrt[6]{\cos x}$.
C. $y' \cot x = \sqrt[6]{\cos x}$. D. $y' \cot x = -\sqrt[6]{\cos x}$.

Câu 56. Hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 57. Dưới đây là hình vẽ đồ thị của 2 hàm số $f(x) = x^4, g(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $f(0,5) < g(0,5)$. B. $f(1) = g(1)$.
C. $f\left(\frac{5}{3}\right) > g\left(\frac{5}{3}\right)$. D. $f\left(\frac{1}{3}\right) > g\left(\frac{1}{3}\right)$.



Câu 58. Chọn khẳng định **sai** về hàm số $y = x^{-2}$

- A. Hàm số xác định với mọi $x \neq 0$.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.
C. Trên tập xác định, hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 và không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 59. Hàm số $y = x^{\frac{1}{3}}$ có:

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' > 0, \forall x > 0$. D. $y' < 0, \forall x > 0$.

Câu 60. Hàm số $y = x^{-3}$ có:

- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \neq 0$. C. $y' > 0, \forall x \neq 0$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 61. Thứ tự tăng dần của dãy số $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, (1,9)^\pi, \sqrt{2}^\pi, \pi^\pi$ là:

- A. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, (1,9)^\pi, \sqrt{2}^\pi, \pi^\pi$. B. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, \sqrt{2}^\pi, (1,9)^\pi, \pi^\pi$.
C. $\sqrt{2}^\pi, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, (1,9)^\pi, \pi^\pi$. D. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, (1,9)^\pi, \pi^\pi, \sqrt{2}^\pi$.

Câu 62. Thứ tự tăng dần của dãy số:

$$(0,5)^{-\frac{2}{3}}, (1,3)^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}, \pi^{-\frac{2}{3}}.$$

- A. $(0,5)^{-\frac{2}{3}}, (1,3)^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}, \pi^{-\frac{2}{3}}$. B. $(0,5)^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}, (1,3)^{-\frac{2}{3}}, \pi^{-\frac{2}{3}}$.
C. $\pi^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}, (1,3)^{-\frac{2}{3}}, (0,5)^{-\frac{2}{3}}$. D. $\pi^{-\frac{2}{3}}, (1,3)^{-\frac{2}{3}}, (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}, (0,5)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 63. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $(e)^{2016} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2016}$. B. $(\pi)^{2016} > \left(\frac{7}{3}\right)^{2016}$.
C. $(e)^{2016} < \left(\frac{5}{2}\right)^{2016}$. D. $(\pi)^{2016} < \left(\frac{7}{2}\right)^{2016}$.

Câu 64. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $(\pi)^{-\pi} > (3,14)^{-\pi}$. B. $(\pi)^{-\pi} < (3,14)^{-\pi}$.
C. $(3)^{-e} < (\pi)^{-e}$. D. $(3)^{-e} < (3,14)^{-e}$.

Câu 65. Tìm giá trị cực đại y_0 của hàm số $y = x^2 + 4 \ln(3-x)$

- A. $y_0 = 1 + 4 \ln 2$. B. $y_0 = 2$. C. $y_0 = 4$. D. $y_0 = 1$.

Câu 66. Cho hàm số $y = \left(\frac{a}{1+a^2}\right)^{x-1}$ với $a > 0$ là một hằng số. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}$.
B. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 67. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2^x - 1} - \log(x-2)^2$.

- A. $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$. B. $D = [0; +\infty) \setminus \{2\}$.
C. $D = (2; +\infty)$. D. $D = [0; +\infty)$.

Câu 68. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$.

- A. $L = 1$. B. $L = -1$. C. $L = 2$. D. $L = -2$.

Câu 69 (Đề minh họa lần 2 năm học 2019-2020).

Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 70. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $y = 0$, các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = 2\log_a x$, $y = 3\log_a x$. Tìm a .

- A. $a = \sqrt[6]{3}$. B. $a = \sqrt{3}$. C. $a = \sqrt[3]{6}$. D. $a = \sqrt{6}$.

Câu 71. Xét hai số thực a, b thỏa mãn $1 > a \geq b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau: $T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36}$.

- A. $T_{\min} = 16$. B. $T_{\min}$ không tồn tại.
C. $T_{\min} = 19$. D. $T_{\min} = 13$.

Câu 72. Xét hai số thực dương a, b thỏa mãn $4^{ab} \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = ab + 2ab^2$ thuộc tập hợp nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[0; 1]$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 73 (THPTQG 2020 - Mã đề 103). Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn điều kiện $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.

Câu 74 (Toán Học Tuổi Trẻ-Lần 6-2018).

Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$, với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 10.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D	9 D	17 A	25 C	33 C	41 D	49 B	57 D	66 D
2 A	10 A	18 C	26 D	34 A	42 D	50 A	58 C	67 B
3 A	11 A	19 D	27 C	35 B	43 D	51 B	59 C	68 A
4 B	12 B	20 B	28 B	36 C	44 A	52 D	60 B	69 D
5 B	13 A	21 C	29 A	37 D	45 C	53 D	61 B	70 A
6 C	14 C	22 B	30 A	38 A	46 A	54 A	62 C	71 A
7 C	15 A	23 B	31 D	39 A	47 C	55 B	63 C	72 C
8 B	16 D	24 A	32 C	40 D	48 D	56 A	65 C	73 D
								74 D
								75 D

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Khi giải phương trình, bất phương trình mũ thì các công thức sau đây thường xuyên được sử dụng

$$\begin{array}{ll} (1) & a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ (2) & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \\ (3) & (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \\ (4) & (ab)^n = a^n b^n; \\ (5) & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \\ (6) & a^0 = 1; a^n = \frac{1}{a^{-n}}. \end{array}$$

(giả thiết rằng các số hạng có mặt trong các công thức trên đã có nghĩa).

A. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 26. Đưa về cùng một cơ số.

Phương pháp. Sử dụng các công thức sau:

- (1) Với a là hằng số và $0 < a \neq 1$ ta có $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- (2) Với a là hằng số và $a > 1$ ta có $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.
- (3) Với a là hằng số và $0 < a < 1$ ta có $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.
- (4) $a^{\log_a b} = b$, $\log_a a^b = b$, $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Bài 1. Giải các phương trình và bất phương trình sau đây:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} 3^{\frac{1}{x}} = 9^{-2}; & \textcircled{2} 3^{\frac{1}{x}} \leq 9^{-2}; \\ \textcircled{3} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{\frac{2x}{x+1}}; & \textcircled{4} \left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}. \end{array}$$

Bài 2. Giải các phương trình và bất phương trình sau đây:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} (0,4)^{x-2} > (6,25)^{3-7x}; & \textcircled{2} \sqrt{3^x} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225; \\ \textcircled{3} 3^{\frac{1}{x}} = 7; & \textcircled{4} 4^{x-2} = 7^{3-2x}; \\ \textcircled{5} (0,8)^{x+1} < (1,5625)^{3-5x}. \end{array}$$

Bài 3 (Olympic Toán Kosovo năm 2013, vòng 11).

Tìm số thực $x \in [0, 2\pi)$ thỏa mãn

$$27 \cdot 3^{3 \sin x} = 9^{\cos^2 x}.$$

$$\text{Bài 4. Giải bất phương trình: } \left(\sqrt{5} + 2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (1)$$

$$\text{Bài 5 (Dự bị ĐH-2004B). Giải bất phương trình: } \frac{2^{x-1} + 4x - 16}{x - 2} > 4.$$

Bài 6. Giải phương trình: $9^{(x^2-3x+2)} = 27^{\sqrt{x^3+8}}$.

Dạng 27. Đặt ẩn phụ.

Phương pháp. Mục đích của việc đặt ẩn phụ là đưa về phương trình mới đơn giản hơn. Khi đặt $u = a^x$ (với $0 < a \neq 1$) thì có điều kiện $u > 0$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

① $4^x + 3.2^x - 10 = 0;$

② $25^{\frac{1}{x}} - 23.5^{\frac{1}{x}} - 50 = 0.$

Bài 8 (Dự bị ĐH-2006B). Giải phương trình:

$$9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0. \quad (*)$$

Bài 9 (ĐH-2003D). Giải phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3.$

Bài 10 (ĐH-2007B). Giải phương trình

$$(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0.$$

Bài 11. Giải các bất phương trình sau:

① $3^{2+x} + 3^{2-x} \leq 30;$

② $3^{2(x+1)} - 71.3^x - 8 > 0.$

Bài 12. Giải bất phương trình sau: $\frac{3^{2x}}{100^x} < 2.(0,3)^x + 3.$

Bài 13. Giải bất phương trình $(5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x \geq 10.$

Chú ý 10. Đối với những phương trình mũ có 3 cơ số (hoặc nhiều hơn), chẳng hạn chứa a^x , b^x , c^x thì ta chia cả hai vế của phương trình cho a^x hoặc b^x hoặc c^x , để giảm xuống còn hai cơ số. Đối với những phương trình mũ có hai cơ số thì ta đưa về cùng một cơ số hoặc lôgarit hai vế.

Bài 14. Giải các phương trình sau:

① $9^x + 6^x = 4^{x+1};$

② $8^x + 27^x + 12^x - 3.18^x = 0.$

Chú ý 11. Xét phương trình dạng $A.a^{2x} + B.b^{2x} + C(ab)^x = 0$. Chia hai vế phương trình cho $b^{2x} \neq 0$ ta được

$$A \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B + C \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ ta được $At^2 + Ct + B = 0$. Tùy thuộc vào việc chọn a, b mà ta thu được các phương trình có độ phức tạp khác nhau. Chẳng hạn chọn $a = 2$ và $b = 3$ được bài tập 14a, chọn $a = (3 + \sqrt{5})$, $b = (3 - \sqrt{5})$ được bài tập 15.

Bài 15. Giải phương trình $2.(3 + \sqrt{5})^{2x} - (3 - \sqrt{5})^{2x} + 4^x = 0.$

Bài 16. Giải bất phương trình $16^x + 3.25^x < 4.20^x.$

Bài 17 (Dự bị ĐH-2008B). Giải bất phương trình:

$$3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \leq 0. \quad (1)$$

Dạng 28. Phương pháp hàm số.**Phương pháp.**

- ☑ Nhắm nghiệm $x = a$ của phương trình.
- ☑ Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất bằng cách xét hai trường hợp $x > a$ và $x < a$.
- ☑ Có khi ta phải khảo sát hàm số, lập bảng biến thiên mới suy ra được kết quả.

Chú ý 12. Sử dụng các công thức sau:

- (1) Với a là hằng số và $0 < a \neq 1$ ta có $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- (2) Với a là hằng số và $a > 1$ ta có $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.
- (3) Với a là hằng số và $0 < a < 1$ ta có $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

Bài 18 (Câu d là đề ĐHQG Hà Nội-1997).

Giải các phương trình sau:

- ① $2007^x + 2^x = 2009^x$;
- ② $4^x + 5^x + 7^x = 16^x$;
- ③ $1 + 26^{\frac{x}{3}} = 3^x$;
- ④ $8^x + 18^x = 2.27^x$.

Bài 19 (ĐH-2006A). Giải phương trình $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$.

Bài 20. Giải các bất phương trình sau:

- ① $5^x + 12^x < 13^x$;
- ② $1 + 31^{\frac{x}{5}} \geq 2^x$;

Bài 21. Giải bất phương trình $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1$.

Bài 22 (ĐH Tài Chính Kế Toán HN-1997).

Giải phương trình

$$25^x - 2(3 - x)5^x + 2x - 7 = 0. \quad (1)$$

Bài 23 (Chọn đội tuyển Ninh Bình năm học 2010-2011).

Giải phương trình

$$3^{2x^3-x+2} - 3^{x^3+2x} + x^3 - 3x + 2 = 0. \quad (1)$$

Bài 24. Thực hiện các yêu cầu sau:

- a) Giải phương trình: $3.2^x = 7x + 3$. (1)
- b) Giải bất phương trình: $3.2^x > 7x + 3$. (2)
- c) Giải bất phương trình: $3.2^x \geq 7x + 3$. (3)

Bài 25. Giải phương trình: $27^{x^2} = (6x^2 - 4x + 1) 9^x$.

Bài 26. Giải phương trình: $x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^x$. (1)

Dạng 29. Phương trình dạng hiệu các hàm đơn điệu.**Phương pháp.**

☑ Đoán một nghiệm $x = a$.

☑ Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất bằng cách xét hai trường hợp $x > a$ và $x < a$.

Bài 27. Giải phương trình: $2^{2x+1} - 2^{3x-1} = x - 2$. (1)

Bài 28. Giải phương trình: $2^{x+2} + 3^{x+1} = 3^{2x} + 2^{2x+1}$. (1)

Bài 29. Giải phương trình: $\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} = 2^{x^2-1}$. (1)

Dạng 30. Phép đặt ẩn phụ bậc hai $u = \frac{(ab)^x}{A.a^{2x} + B.b^{2x}}$.

Phương pháp. Khi gặp những phương trình có ba, bốn cơ số hoặc nhiều hơn mà những phương pháp giải trước đây thất bại thì ta chú ý trong phương trình có số hạng $A.a^{2x} + B.b^{2x}$, khi đó ta cố gắng tạo ra số hạng $(ab)^x$, sau đó tạo ra số hạng $\frac{(ab)^x}{A.a^{2x} + B.b^{2x}}$

Bài 30. Giải phương trình:

$$36^x + 54^x = 24^x + 2(9^x - 4^x)^2. \quad (1)$$

Bài 31. Giải phương trình:

$$10^{2x} + 250^x = 40^x + 6(25^x - 4^x)^2. \quad (1)$$

Dạng 31. Phương pháp đánh giá hai vế (phương pháp bất đẳng thức).

Phương pháp.

☑ Dùng bất đẳng thức để đánh giá hai vế. Gọi vế trái và vế phải của phương trình lần lượt là VT, VP . Giả sử ta thu được:

$$\begin{cases} VT \geq A \\ VP \leq A \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} VT = A \\ VP \leq A \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} VT = A \\ VP \geq A \end{cases}$$

Khi đó ta có sự tương đương: $VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} VT = A \\ VP = A \end{cases}$.

☑ Khi đánh giá hai vế nên chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ: Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 32. Giải phương trình: $3^{x^2-6x+10} + x^2 - 6x + 6 = 0$. (1)

Bài 33. Giải phương trình: $7^{-x^2+4x-3} = |x| + \frac{4}{|x|} + 3$. (1)

Bài 34. Giải phương trình: $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$. (1)

Bài 35. Giải phương trình: $2^{x+1} - 4^x = x - 1$. (1)

Bài 36. Giải phương trình: $2^{\cos x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$. (1)

Bài 37. Giải phương trình: $2^{|x|} + 2^{|y|} + y^2 - 2y = 0$. (1)

Dạng 32. Phương trình, bất phương trình mũ chứa tham số.**Phương pháp.**

- ☑ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $f(x)$.
- ☑ Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ (đường thẳng $y = m$ cùng phương với Ox).
- ☑ Xem chú ý 13 (ở trang 57).

Chú ý 13. Sau đây là một số lưu ý thêm khi giải toán. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định D và d là đường (đoạn) thẳng $y = m$ trên tập xác định D của hàm số f . Khi đó:

- ☑ $f(x) < m, \forall x \in D \Leftrightarrow (C)$ nằm hoàn toàn phía dưới d .
- ☑ $f(x) \leq m, \forall x \in D \Leftrightarrow (C)$ không có điểm phía trên d .
- ☑ $f(x) > m, \forall x \in D \Leftrightarrow (C)$ nằm hoàn toàn phía trên d .
- ☑ $f(x) \geq m, \forall x \in D \Leftrightarrow (C)$ không có điểm phía dưới d .
- ☑ Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\exists x \in D$ để điểm $M(x; f(x))$ nằm phía dưới d .
- ☑ Bất phương trình $f(x) > m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\exists x \in D$ để điểm $M(x; f(x))$ nằm phía trên d .
- ☑ Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\exists x \in D$ để điểm $M(x; f(x))$ nằm phía dưới d hoặc nằm trên d .
- ☑ Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\exists x \in D$ để điểm $M(x; f(x))$ nằm phía trên d hoặc nằm trên d .
- ☑ Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\min_D f(x) \leq m$ (nếu $\min_D f(x)$ tồn tại).
- ☑ Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\max_D f(x) \geq m$ (nếu $\max_D f(x)$ tồn tại).
- ☑ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số f trên D .
- ☑ $f(x) \leq m, \forall x \in D \Leftrightarrow \max_D f(x) \leq m$ (nếu $\max_D f(x)$ tồn tại).
- ☑ $f(x) \geq m, \forall x \in D \Leftrightarrow \min_D f(x) \geq m$ (nếu $\min_D f(x)$ tồn tại).

Bài 38. Cho phương trình

$$(\sqrt{5} + 1)^x + a(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x. \quad (1)$$

- a) Giải phương trình (1) khi $a = \frac{1}{4}$.
- b) Tìm a để phương trình (1) có nghiệm.

Bài 39. Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

Dạng 33. Phương trình đưa được về dạng tích.

Phương pháp. Dạng phương trình này khá khó. Bạn đọc lưu ý các phép biến đổi sau đây:

$$au + bv = ab + uv \Leftrightarrow (u - b)(v - a).$$

$$Aa^x + Bb^x = AB + (ab)^x \Leftrightarrow (a^x - B)(b^x - A) = 0.$$

Bài 40. Giải phương trình: $5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x = 10 + 21^x$.

Bài 41. Giải phương trình: $5^{x+1} - 2^x = 5 - 10^x$. (1)

Bài 42. Giải phương trình:

$$3(3 + \sqrt{5})^x + 2(3 - \sqrt{5})^x = 6 + 4^x. \quad (1)$$

Bài 43. Giải phương trình: $25 \cdot 3^x + 10^x = 25 \cdot 2^x + 15^x$.

Bài 44. Giải phương trình $3^{x^2+5x+1} - 50 \cdot 9^{x^2+x} - 81^{2x-1} = 0$.

B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 45 (Dự bị ĐH-2005D). Giải bất phương trình:

$$9^{x^2-2x} - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{2x-x^2} \leq 3.$$

Bài 46 (Dự bị ĐH-2008D). Giải bất phương trình:

$$2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0. \quad (1)$$

Bài 47. Giải bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} \leq 2$.

Bài 48. Giải các phương trình

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{9^x + 2 \cdot 6^x}{3}} = 2^x;$$

$$\textcircled{2} 3^x = \sqrt[3]{2 \cdot 8^x - 12^x}.$$

Bài 49. Giải các phương trình:

$$\textcircled{1} 3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}; \quad \textcircled{2} (5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x = 2^{x+3}.$$

Bài 50. Giải bất phương trình $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$.

Bài 51. Giải bất phương trình $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$. (1)

Bài 52. Giải phương trình $121^x - (10 - x)11^x + 2x - 24 = 0$.

Bài 53. Giải phương trình $9^x + (x - 12).3^x + 11 - x = 0$.

Bài 54. Giải phương trình: $(x + 1)^3 + 2^{\sqrt{x+2}} = 8x^3 + 2^{\sqrt{2x+1}}$. (1)

Bài 55. Giải phương trình: $2^{x-4} - 2^{x^2-3x} = (x - 2)^2$. (1)

Bài 56. Giải bất phương trình: $3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4} + 3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8} \leq 2\cos^2 x$. (1)

Bài 57. Giải phương trình: $5^{2x+1}.3^x + 2^x = 5^{2x+1} + 6^x$.

Bài 58 (ĐH-2006D). Giải phương trình:

$$2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0. \quad (*)$$

Bài 59 (ĐH-2010D-Phần Chung). Giải phương trình:

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}.$$

Bài 60. Giải phương trình:

$$\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Bài 61. Giải phương trình: $2^{(x-1)(2x-9)} = 8^{\sqrt[3]{4x-4}-4}$. (1)

Bài 62. Cho phương trình: $4^x - 4m(2^x - 1) = 0$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để (1) có nghiệm.

Bài 63. Giải phương trình $3^{2x^3-x+2} - 3^{x^3+2x} + x^3 - 3x + 2 = 0$. (1)

2. Lời giải, hướng dẫn

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1 (THPTQG 2019 mã đề 110). Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = 5$. D. $x = 4$.

Câu 2 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 1$.

Câu 3 (THPTQG 2019 mã đề 110). Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 5$. D. $x = 4$.

Câu 4 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

- A. $x = 5$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 5. Tìm số nghiệm của phương trình $x^{\pi+2016} = 5$:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 6 (HK1, Sở GD Bến Tre, 2018). Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 7. Giải bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$.

- A. $1 < x < 2$. B. $0 < x < 2$. C. $\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$. D. $2 < x < 4$.

Câu 8. Tính tổng các nghiệm của phương trình $0,6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

- A. -8. B. 0,5. C. 1. D. 0.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2^{3x^2+5x-1} = 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. (4.

Câu 10 (Đề HKI-12, Sở GD-ĐT tỉnh Hậu Giang, năm 2018).

Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{1-x} + 5^x - 6 = 0$.

- A. $S = \{0; 1\}$. B. $S = \{1; 2\}$. C. $S = \{0; -1\}$. D. $S = \{1\}$.

Câu 11 (Đề HKI, Sở GD Hậu Giang, 2018).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = m - 1$ có nghiệm thực.

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 12. Tìm số nghiệm thực của phương trình $3^{3x-1} = 9\sqrt{x}$.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 13 (TT-THPTQG, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam 2018).

Cho hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x$ có đồ thị như hình vẽ sau Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

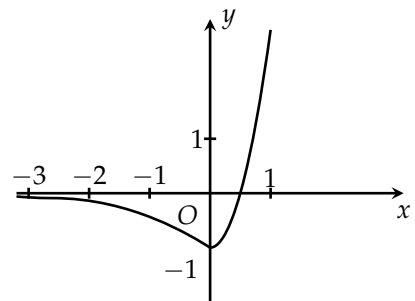
(1) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại điểm có hoành độ là $x = \log_3 2$.

(2) Bất phương trình $f(x) \geq -1$ có nghiệm duy nhất.

(3) Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $(-\infty; \log_3 2)$.

(4) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại 2 điểm phân biệt.

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.



Câu 14. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình

$$8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x.$$

Tính giá trị $P = 3x_1 - 5x_2$.

- A. -8. B. -6. C. 5. D. -4.

Câu 15 (HK1, Sở GD Bến Tre, 2018). Biết phương trình $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $x_1 + x_2$.

- A. $x_1 + x_2 = -\frac{17}{4}$. B. $x_1 + x_2 = 4$. C. $x_1 + x_2 = 1$. D. $x_1 + x_2 = 2$.

Câu 16 (HK 1, năm học 2017 - 2018, Sở GD-ĐT Đà Nẵng).

Tập nghiệm S của phương trình $9^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 6^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$ là

- A. $S = \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \{1\}$. D. $S = \{0\}$.

Câu 17. Tìm tập hợp nghiệm thực của phương trình $3^x 2^{x^2} = 1$.

- A. $S = \{0; \log 6\}$. B. $S = \{0\}$. C. $S = \left\{0; \log_2 \frac{1}{3}\right\}$. D. $S = \{0; \log_2 3\}$.

Câu 18 (Đề tham khảo 2018, bộ GD-ĐT, lần 1, Câu 13).

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

Câu 19. Giải bất phương trình $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} < 2^{\frac{2-x}{2x+1}} + 1$.

- A. $-\frac{1}{2} < x < 2$. B. $x > 2$. C. $\begin{cases} x > 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$. D. $x < -\frac{1}{2}$.

Câu 20 (HK 1, năm học 2017 - 2018, Sở GD-ĐT tp Đà Nẵng).

Tập nghiệm của phương trình $49^{x+1} + 7 \cdot 7^x - 56 = 0$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{0; 1\}$. D. $S = \{0\}$.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} - 1)^{x+2017} = (3 - 2\sqrt{2})^{x^2+1008}$ là:

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 1, x = 2$. D. $x = 1, x = -\frac{1}{2}$.

Câu 22 (HK 1, năm học 2017 - 2018, Sở GD-ĐT tp Đà Nẵng).

Tập nghiệm S của phương trình $2^{\cos^2 x} + 2^{2\sin^2 x + \cos^2 x} = 5$ là

- A. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $S = \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 23 (Đề minh họa lần 2 bộ GDĐT 2020).

Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 24 (Câu 34, đề tham khảo lần 1 bộ GD-ĐT, 2018).

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m - 2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm dương?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 25. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x - m \cdot 3^x - m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

- A. $m > 2$. B. $m > 2$ hoặc $m < -6$.
C. $m < 2$. D. $-6 < m < 2$.

Câu 26 (Thi thử THPTQG 2018, lần 1, THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai).

Tìm tập nghiệm S của phương trình $(x - 1)(x - 2)(x^x + 1) = 0$.

- A. $S = \{1; 2; -1\}$. B. $S = \{1; -1\}$. C. $S = \{1; 2\}$. D. $S = \{2; -1\}$.

Câu 27. Tìm số nghiệm thực của phương trình $(x - 2)^{x^2+3x} = 1$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 28. Tìm a để bất phương trình sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$:

$$a \cdot 9^x + (a - 1)3^{x+2} + a - 1 > 0.$$

- A. $0 < a < 1$. B. $a \geq 1$. C. $a > 1$. D. $0 \leq a < 1$.

Câu 29. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$(4^x - 8)^3 + (2^x - 64)^3 = (4^x + 2^x - 72)^3.$$

- A. $\frac{45}{2}$. B. 27. C. 18. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 30 (Đề Minh họa lần 2 bộ GD-ĐT 2020).

Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phải phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

- A. 202. B. 203. C. 206. D. 207.

Câu 31. Tìm m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 1 - 2m \geq 0$ luôn nghiệm đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq 1$. C. $m \leq \frac{1}{2}$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x + (2 - m)2^x + 5 - m = 0$ có nghiệm thực thuộc $(-1; 1)$.

- A. $m \in \left[4; \frac{13}{3}\right)$. B. $m \in [4; +\infty)$.
C. $m \in \left(\frac{25}{6}; \frac{13}{3}\right)$. D. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Câu 33 (HK1, Sở GD và ĐT - Bình Thuận, 2019).

Giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $4^{|x|} + m \cdot 2^{|x|} + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(2; 3)$. D. $(1; 2)$.

Câu 34 (Đề KSCL Toán 12 lần 2 năm 2017 - 2018, Phan Chu Trinh, Đắk Lắk).

Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau

$$4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$$

có nghiệm là $m \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tổng $S = a + b$ bằng

- A. $S = 13$. B. $S = 15$. C. $S = 9$. D. $S = 11$.

Câu 35. Cho phương trình $4^x - (10m + 1)2^x + 32 = 0$. Biết rằng phương trình này có hai nghiệm là x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = 1.$$

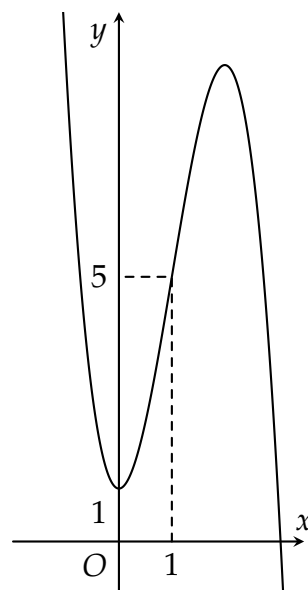
Khi đó, khẳng định nào sau đây về m là đúng?

- A. $0 < m < 1$. B. $1 < m < 2$. C. $2 < m < 3$. D. $-1 < m < 0$.

Câu 36 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét phương trình $8^{f(x)-1} + 4^{f(x)-1} - (m+3) \cdot 2^{f(x)} + 4 + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình đã cho có nghiệm $x \in (0; 1)$?

- A. 285. B. 284. C. 141. D. 142.



Câu 37. Biết α là một số thực sao cho bất phương trình $9^{\alpha x} + (\alpha x)^2 \geq 18x + 1$ đúng với mọi số thực x , mệnh đề nào dưới đây đúng?

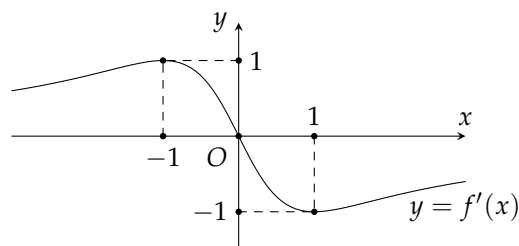
- A. $\alpha \in (12; +\infty)$. B. $\alpha \in (2; 6]$. C. $\alpha \in (0; 2]$. D. $\alpha \in (6; 10]$.

Câu 38. Tìm tham số m để bất phương trình $2^x + 3^x + 5^x - mx - 3 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \in (12; +\infty)$. B. $m \in (2; 6]$. C. $m \in (0; 2]$. D. $m \in (6; 10]$.

Câu 39. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) \leq e^{-\cos \pi x} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(1) - e$. B. $m \geq f(0) - \frac{1}{e}$.
C. $m \geq f(1) - \frac{1}{e}$. D. $m \geq f(0) - e$.



Câu 40 (Thi thử THPT quốc gia lần 2 sở GD-ĐT Hà Nội 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để phương trình

$$4^{(x-1)^2} - 4m \cdot 2^{x^2-2x} + 3m - 2 = 0$$

có bốn nghiệm phân biệt.

- A. 2018. B. 2020. C. 2022. D. 2016.

Câu 41 (Thi thử THPT Quốc gia lần 2 sở GD-ĐT Hà Nội 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$(3^{x^2-x} - 9)(2^{x^2} - m) \leq 0$$

có 5 nghiệm nguyên?

- A. 65022. B. 65024. C. 65021. D. 65023.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	6 A	11 A	16 B	21 D	26 C	31 C	36 D	41 B
2 B	7 C	12 C	17 C	22 A	27 D	32 A	37 D	
3 A	8 B	13 C	18 B	23 B	28 B	33 B	38 B	
4 C	9 C	14 A	19 A	24 B	29 B	34 A	39 B	
5 A	10 A	15 C	20 D	25 C	30 B	35 B	40 A	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Khi giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit thì các công thức sau đây thường xuyên được sử dụng:

- | | |
|--|--|
| (1) $\log_a 1 = 0;$ | (2) $\log_a a = 1;$ |
| (3) $\log_a a^b = b;$ | (4) $a^{\log_a b} = b;$ |
| (5) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$ | (6) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$ |
| (7) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b;$ | (8) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$ |
| (9) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b;$ | (10) $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c;$ |
| (11) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b};$ | (12) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$ |
| (13) $\log_a b \cdot \log_b a = 1;$ | (14) $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c;$ |
| (15) $\lg a = \log a = \log_{10} a;$ | (16) $\ln a = \log_e a.$ |

Chú ý 14. Khi đặt điều kiện để phương trình có nghĩa ta cần nhớ rằng:

- (1) Đối với hàm số mũ a^x , điều kiện của cơ số a là $0 < a \neq 1$, còn x tùy ý.
- (2) Đối với $\log_a b$ thì điều kiện của cơ số a là $0 < a \neq 1$, còn điều kiện của b là $b > 0$.
- (3) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ có tập xác định tùy thuộc vào số mũ α . Nếu α nguyên dương thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $\alpha = 0$ hoặc α nguyên âm thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x \neq 0$. Nếu α không nguyên thì $y = x^\alpha$ xác định với mọi $x > 0$.

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 34. Đưa về cùng một cơ số.

Phương pháp.

Sử dụng các công thức sau:

- (1) Nếu $0 < a \neq 1$ thì:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x > 0. \end{cases}$$

- (2) Nếu $a > 1$ thì $(a^u > a^v \Leftrightarrow u > v)$ và

$$\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \\ u > v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > v \\ v > 0. \end{cases}$$

- (3) Nếu $0 < a < 1$ thì $(a^u > a^v \Leftrightarrow u < v)$ và

$$\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \\ u < v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < v \\ u > 0. \end{cases}$$

Bài 1 (THPT Quốc gia năm 2015). Giải phương trình:

$$\log_2(x^2 + x + 2) = 3. \quad (1)$$

Bài 2 (ĐH 2014D). Giải phương trình:

$$\log_2(x - 1) - 2\log_4(3x - 2) + 2 = 0. \quad (1)$$

Bài 3. Giải phương trình $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2} \sqrt{3}$.

Bài 4 (ĐH Huế-2001). Giải phương trình

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1).$$

Bài 5 (Dự bị ĐH-2008A). Giải phương trình

$$3 + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x \left(9x - \frac{6}{x}\right). \quad (1)$$

Bài 6 (Dự bị ĐH-2002D). Giải phương trình

$$16 \log_{27x^3} x - 3 \log_{3x} x^2 = 0.$$

Bài 7 (Dự bị ĐH-2006B). Giải phương trình

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) = \log_8(x-1)^3. \quad (1)$$

Bài 8 (Dự bị ĐH-2002A). Giải phương trình

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x). \quad (*)$$

Bài 9. Giải phương trình

$$\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3. \quad (1)$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$16 \log_4(\sqrt{5x-1} + x) = \log_{\sqrt{2}}(7 - \sqrt{x+2})^4. \quad (1)$$

Bài 11. Giải phương trình

$$\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_{32}(x^2 + 7x + 12)^5 = 3 + \log_4 9. \quad (1)$$

Bài 12 (ĐH 2013D). Giải phương trình

$$2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2). \quad (1)$$

Bài 13. Giải phương trình $\log_2^2 x + \log_2 \frac{x}{4} = 5 \log_x 8 + 25 \log_x^2 2$. (1)

Bài 14. Giải phương trình

$$\log_3^2 x - 8 \log_3 \frac{x}{\sqrt[4]{3}} + 13 = 49 \log_x^2 3 - 7 \log_x 9. \quad (1)$$

Bài 15. Giải các bất phương trình sau

① $\log_3(3x - 1) < 1;$

② $\log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) > 0;$

③ $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) \geq -1;$

④ $\log_3 \frac{1+2x}{x} \leq 0.$

Bài 16. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{0,8} \frac{2x+1}{x+5}} - 2.$

Bài 17 (Đề ĐH 2008-B). Giải bất phương trình $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0.$

Bài 18 (Dự bị ĐH 2008A). Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x+1} \right) \geq 0.$

Bài 19. Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} \right) > \log_4 \left(\log_3 \frac{x-1}{x+1} \right). \quad (1)$$

Bài 20. Giải bất phương trình:

$$2 + \log_{\frac{1}{4}} \left(\sqrt{2x+17} - \sqrt{2x+1} \right)^2 \leq 2\log_{16} x. \quad (1)$$

Bài 21. Giải phương trình:

$$\log_4 (\log_2 x) + \log_2 (\log_4 x) = 2. \quad (1)$$

Bài 22 (ĐH-2011D, phần Chung). Giải phương trình

$$\log_2(8 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Dạng 35. Phương pháp hàm số.

Phương pháp (tương tự dạng 28 ở trang 55).

- ☑ Nhắm nghiệm $x = a$ của phương trình.
- ☑ Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất bằng cách xét hai trường hợp $x > a$ và $x < a$.
- ☑ Sử dụng các công thức sau: Cho các số dương x và y . Khi đó:
 - Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$.
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$.

Bài 23. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

① $\log_5(x+2) = \frac{6}{x+3};$

② $\ln \left(1 + 7^{\frac{x}{2}} \right) \geq x \ln 2\sqrt{2}.$

Bài 24. Giải phương trình: $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0.$

Bài 25. Giải phương trình:

$$(3x-5)\log_3^2 x + (9x-19)\log_3 x - 12 = 0. \quad (1)$$

Bài 26. Giải phương trình $x + \log(x^2 - x - 6) = 4 + \log(x + 2)$.

Bài 27. Giải phương trình $x = 2^{\log_5(x+3)}$.

Bài 28. Giải phương trình:

$$4(x-1) [\log_3(x+1) + \log_4(x+2)] = 5x - 2. \quad (1)$$

Bài 29 (HSG Thái Bình năm học 2010-2011).

Giải phương trình

$$\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5. \quad (1)$$

Bài 30. Giải phương trình $7^{x-1} = 1 + 2\log_7(6x-5)^3$. (1)

Bài 31. Giải phương trình: $11^x = 2\log_{11}(10x+1)^5 + 1$.

Bài 32. Giải phương trình: $\log_3(3\sqrt{x^2+1}) = 3^{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Bài 33. Giải phương trình: $2^{\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 4^x \log_2(3x)$.

Dạng 36. Phương trình dạng hiệu các hàm đơn điệu.

Phương pháp.

- ☑ Đoán một nghiệm $x = a$.
- ☑ Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất bằng cách xét hai trường hợp $x > a$ và $x < a$.

Lưu ý. Bạn đọc hãy xem lại dạng 29 (ở trang 55) trước khi giải các bài tập ở dạng 36.

Bài 34. Giải phương trình: $\log_2^3(x+2) - \log_2^3(2x-1) = x-3$. (1)

Bài 35. Giải phương trình: $\frac{x^2+10}{2x^2+6} = 5^{\log_7 \frac{3x^2}{x^2+8}}$. (1)

Bài 36. Giải phương trình: $\log_{2x^2+1}(x^2+2) = 2^{x^2-1}$. (1)

Dạng 37. Phương trình $\log_a f(x) = \log_b g(x)$, với $a \neq b$.

Phương pháp.

- ☑ Nếu $(a-1)(b-1) < 0$, tức là trong hai số a và b có một số lớn hơn 1 và có một số bé hơn 1, thì ta dùng phương pháp hàm số (nhẩm nghiệm và chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất).
- ☑ Nếu $(a-1)(b-1) > 0$, tức là hai số a và b cùng lớn hơn 1 hoặc cùng bé hơn 1, thì ta đặt $u = \log_a f(x)$ (cũng có nghĩa là $u = \log_b f(x)$), sau đó mũ hoá, đưa về phương trình mũ.

Bài 37. Giải các phương trình:

a) $\log_{\sqrt{3}+2}(x+2) = \log_{\sqrt{3}-1}(x-1);$

b) $\log_5 x = \log_7(x+2)$ (ĐHQG HN-2000).

Bài 38. Giải phương trình $\log_2 \frac{3}{x^2} = \log_3 2x$.

Bài 39. Giải bất phương trình $\log_{11}(5x+6) > \log_2(x+1)$. (1)

Bài 40. Giải phương trình: $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$.

Dạng 38. Sử dụng công thức đổi cơ số, phương pháp logarit hóa.

Phương pháp.

- ☑ Khi gặp những phương trình mũ mà có hai cơ số khó đưa về cùng được thì ta logarit hóa hai vế. Khi logarit hóa hai vế ta thường dùng các công thức sau:

$$\log_a a^x = x, \log_a b^x = x \log_a b, b = a^{\log_a b}.$$

- ☑ Khi gặp những phương trình logarit mà có các cơ số khó đưa về cùng được thì ta dùng công thức đổi cơ số để đưa về cùng một cơ số:

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b \text{ hay } \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

Bài 41. Giải các phương trình

① $5^x 8^{\frac{x-1}{x}} = 500;$

② $3^x 8^{\frac{x}{x+1}} = 36.$

Bài 42 (ĐH Y HN-1999). Giải phương trình

$$\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \log_9 225.$$

Bài 43 (HV Ngân Hàng-2001). Giải phương trình

$$\log_2 x + 2 \log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x.$$

Bài 44. Giải phương trình: $\log_x(2x+1) = \log_{2x^3+x^2}(4x^3+4x^2+x)$.

Dạng 39. Sử dụng công thức $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Bài 45. Giải phương trình $8^{\log_3 x} + x^{\log_3 2} = 2$.

Bài 46. Giải phương trình: $x^{2+\log_5 3} = 5$. (1)

Bài 47. Giải phương trình $49^{\log_x 2^9} + 4^{\log_{\sqrt{x}} \sqrt{7}} = 5^{\log_3 49 \cdot \log_x 2^9}$.

Dạng 40. Phương pháp đánh giá hai vế (phương pháp bất đẳng thức).

Phương pháp.

- ☑ Dùng bất đẳng thức để đánh giá hai vế. Gọi vế trái và vế phải của phương trình lần lượt là VT, VP . Giả sử ta thu được:

$$\begin{cases} VT \geq A \\ VP \leq A \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} VT = A \\ VP \leq A \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} VT = A \\ VP \geq A \end{cases}$$

Khi đó ta có sự tương đương: $VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} VT = A \\ VP = A. \end{cases}$

- ☑ Khi đánh giá hai vế nên chú ý đến tính đơn điệu của hàm số logarit: Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 48. Giải phương trình: $\log_3(x^2 - 6x + 18) = -x^2 + 6x - 7.$ (1)

Bài 49. Giải phương trình: $\log_{0,3}\left(x^2 - 4x + \frac{409}{100}\right) = x^2 - 4x + 7.$ (1)

Bài 50. Giải phương trình: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2.$ (1)

Bài 51. Giải phương trình: $2^x + 2^{-x+2} = \log_2(15 + 2x - x^2).$ (1)

Bài 52. Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) + 2 = 2^{|x|}.$ (1)

Bài 53. Giải phương trình: $\log_2\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) + 2x^3 = \log_2 x + 3x^2.$ (1)

Dạng 41. Phương trình, bất phương trình lôgarit chứa tham số.

Phương pháp.

- ☑ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $f(x)$.
 ☑ Xem lại chú ý 13 (ở trang 57).

Bài 54 (Đề ĐH-2002A). Cho phương trình:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
 b) Tìm m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Bài 55 (Dự bị ĐH-2003B). Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$:

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0.$$

Bài 56. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2. \quad (1)$$

Bài 57. Cho bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - m) > -3 \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

- a) Giải bất phương trình (1) khi $m = 0$.
 b) Tìm m để (1) có nghiệm.

B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 58. Giải phương trình $\log_3^2 x^3 - 20 \log_3 \sqrt{x} - 19 = 0$.

Bài 59. Giải phương trình $2 \ln(x-1) = \frac{1}{2} \ln x^5 - \ln \sqrt{x}$.

Bài 60. Giải các bất phương trình sau

$$\textcircled{1} \log_7(3x-1) < 1;$$

$$\textcircled{2} \log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq 0.$$

Bài 61. Giải phương trình $2 \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$.

Bài 62 (Đề thi ĐH-2008A). Giải phương trình

$$\log_{2x-1} (2x^2 + x - 1) + \log_{x+1} (2x-1)^2 = 4. \quad (1)$$

Bài 63. Giải phương trình $\sqrt{(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2}$.

Bài 64. Giải phương trình:

$$\log_3 (6 + 2\sqrt{4-x^2}) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}) = 1. \quad (1)$$

Bài 65 (THPT Quốc gia 2016). Giải phương trình:

$$3 \log_3^2 (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 2 \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) \log_3 (9x^2) + (1 - \log_{\frac{1}{3}} x)^2 = 0. \quad (1)$$

Bài 66 (Đề thi ĐH 2007A). Giải bất phương trình

$$2 \log_3 (4x-3) + \log_{\frac{1}{3}} (2x+3) \leq 2.$$

Bài 67 (ĐH-2008D). Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$.

Bài 68 (Đề thi ĐH 2002B). Giải bất phương trình

$$\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1. \quad (1)$$

Bài 69 (Đề dự bị thi ĐH-2003D). Cho hàm số

$$f(x) = x \log_x 2 \quad (x > 0, x \neq 1).$$

Hãy tính $f'(x)$ và giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

Bài 70 (Đề dự bị thi ĐH-2004A). Giải bất phương trình

$$\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 (x + \sqrt{2x^2 - x}) \right] < 0.$$

Bài 71 (Đề thi ĐH-2006B). Giải bất phương trình

$$\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1).$$

Bài 72. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16} (\log_4^3 x - \log_4^2 x + \log_4 x - 1) \geq 0. \quad (1)$$

Bài 73 (ĐH Y Hà Nội-1997). Giải bất phương trình $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$.

Bài 74. Giải phương trình: $\log_{2x} \frac{2}{x^2} + \log_{\frac{2}{x}} 4x^3 = 3$. (1)

Bài 75 (Đề dự bị ĐH-2004A). Giải bất phương trình $2x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2} \log_2 x}$.

Bài 76 (Dự bị thi ĐH-2003D). Giải phương trình: $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$.

Bài 77 (ĐH Ngoại Thương-2001). Giải phương trình:

$$\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2.$$

Bài 78. Giải phương trình $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $-0,5 < x \neq 1$, ta có

$$2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = \log_2 \frac{2x + 1}{2(x - 1)^2}.$$

Bài 79. Giải các phương trình

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \log_2(x^2 - 1) &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{4x - 11}{8}; & \textcircled{2} \log_3 x &= \log_7(2x + 1); \\ \textcircled{3} 3\log_3(x + 2) &= 2\log_2(x + 1); & \textcircled{4} \log_2(5\sin^2 x) &= \log_3(5\cos^2 x). \end{aligned}$$

Bài 80. Giải bất phương trình $\log_3 x < \log_7(2x + 1)$.

Bài 81. Giải phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x$.

Bài 82 (HV Kỹ thuật Mật mã-1999). Giải phương trình

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad (1)$$

Bài 83 (ĐHSP Vinh-2001). Giải phương trình

$$\log_4(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_{20}(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Đáp số. $x = 1, x = \frac{1}{2}(5^{\log_{20} 4} + 5^{-\log_{20} 4})$.

Bài 84. Giải phương trình:

$$\log_{(x^2+8)} 49 \cdot \log_7(4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x}) = 2. \quad (1)$$

Bài 85 (ĐHNT-1998). Giải bất phương trình

$$\log_2 x + \log_3 x < 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x. \quad (1)$$

Bài 86. Giải bất phương trình $\log_x 3 < \log_{\frac{x}{3}} 3$.

Bài 87. Giải phương trình:

$$\log_5((x - 3)^4 - 40) = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{42 - (x - 5)^4}. \quad (1)$$

Bài 88. Giải phương trình: $\log_x(2 - 2x) + \log_{1-x}(2x) = 0$. (1)

2. Lời giải, hướng dẫn

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1 (HK1, Sở GD Bến Tre, 2018). Giải phương trình $\log_3(x-1) = 3$, ta có nghiệm là

- A. $x = 28$. B. $x = 81$. C. $x = 82$. D. $x = 29$.

Câu 2 (Đề chính thức THPTQG 2019, mã 101).

Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Câu 3 (THPTQG 2019 mã đề 110). Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 4 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 5 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 104).

Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$ là

- A. $x = 4$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 6 (THPTQG 2019 mã đề 110). Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$.

- A. $S = (3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (1; 4)$. D. $S = (-1; 2)$.

Câu 8. Phương trình $\log_2(3x-2) = 3$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{10}{3}$. B. $x = \frac{16}{3}$. C. $x = \frac{8}{3}$. D. $x = \frac{11}{3}$.

Câu 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}(3x-11) > 0$.

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = \left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$. C. $S = (4; +\infty)$. D. $S = \emptyset$.

Câu 10. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2\log_2(x-1) + \log_2(x-3)^2 = 0$.

- A. 4. B. $4 + \sqrt{2}$. C. $2 - \sqrt{2}$. D. $2 + \sqrt{2}$.

Câu 11 (HK 1, năm học 2017 - 2018, Sở GD-ĐT tp Đà Nẵng).

Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(-x) - \log_2(8x^2) + 1 = 0$ là

- A. $S = \left\{-\frac{1}{4}; 0\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$. C. $S = \emptyset$. D. $S = \{0; 4\}$.

Câu 12 (HK1, Sở GD-ĐT Bến Tre, năm học 2017-2018).

Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$.

- A. $S = \left\{\frac{11}{2}\right\}$. B. $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{61}}{2}; \frac{3 - \sqrt{61}}{2}\right\}$.
C. $S = \{6\}$. D. $S = \{-3; 6\}$.

Câu 13. Tích hai nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0$ bằng

- A. 8. B. 90. C. 6. D. 729.

Câu 14 (HK1, Sở GD Bến Tre, 2018). Phương trình $\log_3^2 x - \log_3(9x) = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó $3x_1 + x_2$ bằng

- A. $\frac{28}{9}$. B. 3. C. $\frac{8}{9}$. D. 10.

Câu 15 (HK 1, năm học 2017 - 2018, Sở GD-ĐT tp Đà Nẵng).

Tập nghiệm S của phương trình $\log_5(3x^2 - 2x + 1) = \log_5(x + 1)$ là

- A. $S = \{1\}$. B. $S = \{0\}$. C. $S = \{0; 1\}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 16 (HK1, Sở giáo dục đào tạo tỉnh Hậu Giang, năm 2018).

Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x + 1) + \log_3(x + 1) = 1$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 17. Gọi a là nghiệm của phương trình $\log_3(x - 1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x - 1) = 2$. Khi đó a^5 có chữ số hàng chục là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Giải phương trình $\log_2(4^{50} + x) = 100$.

- A. $x = 1$. B. $x = 4^{50}$. C. $x = 4^{100}$. D. Kết quả khác.

Câu 19 (Đề KSCL Toán 12 lần 2 năm 2017 - 2018, Phan Chu Trinh, Đắk Lắk).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$.

- A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $S = (-1; 2)$. C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2)$.

Câu 20 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Bất phương trình $\log_{0,5}(5x - 1) > -2$ có tập nghiệm là

- A. $\left[\frac{1}{5}; 1\right)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$.

Câu 21. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\pi}(3x - 1) < \log_{\pi}(x^2 + x)$.

- A. $S = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. B. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
C. $S = (-\infty; +\infty)$. D. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

Câu 22 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \geq 0$ có tập nghiệm S là

- A. $S = (-\infty; 0] \cup [\log_2 5; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.
C. $S = (0; 2] \cup [8; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$.

Câu 23 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. Vô số.

Câu 24 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 110).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 6. B. 5. C. Vô số. D. 7.

Câu 25 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 103).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. Vô số. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 26 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 104).

Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 5. B. 3. C. Vô số. D. 4.

Câu 27 (Đề HKI-12, Sở GD Hậu Giang, 2018).

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 2m \log_2 x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 < 64$.

- A. $m \in (-\infty; 6)$. B. $m \in (-\infty; 3)$.
C. $m \in (-\infty; 6) \setminus \{1\}$. D. $m \in (-\infty; 3) \setminus \{1\}$.

Câu 28 (Câu 42, đề tham khảo 2018, lần 1, Bộ giáo dục và đào tạo).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1} - 2 \log u_{10} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

- A. 247. B. 248. C. 229. D. 290.

Câu 29. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \log_{\frac{1}{4}}(x - 1) + \log_2 6 \leq 0$$

có dạng $[a; +\infty)$. Tính $T = a + \frac{3}{a}$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 4. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 30. Biết rằng x là nghiệm của phương trình $\log_2(4 \log_4(8 \log_2 x)) = 8$. Tính $\ln x$.

- A. $2^{125} \ln 2$. B. $2^{126} \ln 2$. C. $2^{127} \ln 2$. D. $2^{128} \ln 2$.

Câu 31. Gọi a là nghiệm của phương trình $\log_x 2 + \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$. Tính $T = a^3 + \frac{1}{a^3}$.

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{26}{5}$. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 32. Giải phương trình $\log_2(4^{x+1008} + 1) - \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2^x + 2} = -1$.

- A. $x = -\frac{8068}{7}$. B. $x = -\frac{8086}{7}$.
C. $x = -1008$. D. $x = -\frac{8068}{7}, x = -\frac{8086}{7}$.

Câu 33. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a + b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\frac{a}{b} \in (6; 8)$. C. $\frac{a}{b} \in \left(2; \frac{5}{2}\right)$. D. $\frac{a}{b} \in (8; 9)$.

Câu 34. Phương trình $\sqrt[4]{16 - x^2} \log(16 - 2x - x^2) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 35 (TT Sở GD Bắc Ninh, 2018). Cho phương trình

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 1) + \log(x + 11) = 2 - \log 4.$$

Tính S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình.

- A. $S = -6 - 5\sqrt{2}$. B. $S = -12$. C. $S = -6$. D. $S = -12 + 5\sqrt{2}$.

Câu 36. Tính tổng các nghiệm của phương trình:

$$\log_{2x^2+3}(x^2 + 12) = \log_{x^2+14}(2x^2 + 5).$$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 37. Gọi t là nghiệm của phương trình: $\log_2 x = \log_3 (1 - x + x^{\log_2 6})$. Tính $A = 6^t - 3^t - 2^t$.

- A. -1 . B. $\log_2 3$. C. $\log_3 2$. D. $\sqrt[3]{2}$.

Câu 38. Gọi t là tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\log_3 (3 - |\sin x|) = 2^{|\pi - x|}$. Tính phần nguyên của t (phần nguyên của t là số nguyên lớn nhất không vượt quá t , kí hiệu là $[t]$).

- A. $[t] = 2$. B. $[t] = 3$. C. $[t] = 4$. D. $[t] = 5$.

Câu 39. Gọi A là nghiệm của phương trình $\log_2 (\log_2 x) = \log_3 (\log_3 x)$. Tính $\log_2 A$.

- A. $\log_{\frac{2}{3}} (\log_3 2)$. B. $-\log_{\frac{4}{3}} (\log_2 3)$. C. $\log_{\frac{2}{3}} (\log_2 3)$. D. $-\log_{\frac{4}{3}} (\log_3 8)$.

Câu 40. Gọi A là nghiệm của phương trình $\log_2 (\log_3 x) = \log_3 (\log_2 x)$. Tính $\log_2 (\log_3 A)$.

- A. $\log_{\frac{2}{3}} (\log_3 2)$. B. $\log_{\frac{2}{3}} (\log_2 3)$. C. $-2\log_{\frac{2}{3}} (\log_3 4)$. D. $-\log_{\frac{4}{3}} (\log_3 2)$.

Câu 41 (Thi thử THPTQG lần 2, Kinh Môn, Hải Dương, 2018).

Tìm giá trị của a để phương trình

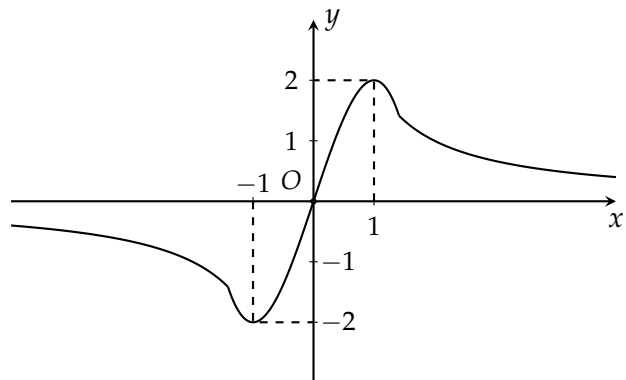
$$(2 + \sqrt{3})^x + (1 - a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 , thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có a thuộc khoảng

- A. $(-\infty; -3)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 42 (Toán Học Tuổi Trẻ-Lần 6-2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.



- A. $m > 1$. B. $0 < m < 1$.
C. $m < 0$. D. $0 < m < 2$.

Câu 43. Cho phương trình $\log_2 (x^2 + mx) = \log_2 (x - 5)$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm thực trên nửa khoảng $[6; +\infty)$.

- A. $m = -\frac{47}{7}$. B. $m = -\frac{35}{6}$. C. $m = -\frac{119}{22}$. D. $m = -\frac{61}{8}$.

Câu 44. Biết rằng bất phương trình $\log_2 (5^x + 2) + 2\log_{5^x+2} 2 > 3$ có tập nghiệm $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = a + 3b$.

- A. $P = 14$. B. $P = 7$. C. $P = 15$. D. $P = 11$.

Câu 45. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_5 (1 + 2\sqrt{x^2 - x + 2}) + \log_9 (x^2 - x + 7) \leq 2$$

là đoạn $[a; b]$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Câu 46. Biết bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$ có tập nghiệm $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 5 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + b$.

- A. $P = 7$. B. $P = 8$. C. $P = 9$. D. $P = 10$.

Câu 47. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{16\log_3 x}{\log_3 x^2 + 3} - \frac{3\log_3 x^2}{\log_3 x + 1} < 0$ là

- A. $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \sqrt{3})$. B. $(0; 1) \cup (3; +\infty)$.
C. $\left(\frac{1}{3}; \sqrt{3}\right) \cup (3; +\infty)$. D. $\left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \sqrt{3}\right)$.

Câu 48. Biết rằng bất phương trình $\frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$ có tập nghiệm là khoảng $(a; b)$. Tính $P = b - a$.

- A. $P = 6$. B. $P = \frac{7}{3}$. C. $P = \frac{3}{7}$. D. $P = 5$.

Câu 49. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$m^2(x^5 - x^4) - m(x^4 - x^3) + x - \ln x - 1 \geq 0$$

thỏa mãn với mọi $x > 0$. Tính tổng các giá trị của m trong tập S .

- A. 2. B. 0. C. 1. D. -2.

Câu 50. Đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 2x$ và $y = e^x$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 51 (HK2, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2020).

Xét các số thực a, b, c với $a > 1$ thỏa mãn phương trình $\log_a^2 x - 2b \log_a \sqrt{x} + c = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 đều lớn hơn 1 và $x_1 \cdot x_2 \leq a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{b(c+1)}{c}$.

- A. $6\sqrt{2}$. B. 4. C. 5. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 52 (Đề minh họa lần 2 năm học 2019-2020).

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 53 (THPTQG 2019, Mã đề 110). Cho phương trình

$$(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2) \sqrt{3^x - m} = 0 \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 79. B. 80. C. Vô số. D. 81.

Câu 54 (THPTQG 2019, Mã đề 101). Cho phương trình

$$(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5) \sqrt{7^x - m} = 0 \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 49. B. 47. C. Vô số. D. 48.

Câu 55 (THPTQG 2019, Mã đề 103). Cho phương trình

$$(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1) \sqrt{5^x - m} = 0 \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 123. B. 125. C. Vô số. D. 124.

Câu 56 (THPTQG 2019, Mã đề 104). Cho phương trình

$$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right) \sqrt{4^x - m} = 0.$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. Vô số. B. 62. C. 63. D. 64.

Câu 57 (Thi thử lần 3, Trường THPT Chuyên Thái bình, 2020).

Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

- A. 35. B. 36. C. 34. D. Vô số.

Câu 58 (Đề Minh họa lần 1 bộ GD-ĐT 2020).

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

- A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.

Câu 59. Cho dãy số (a_n) như sau: $a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{6}$ và

$$\log_3(a_n) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(2a_{n-2} - a_{n-1}) = \log_9(a_{n-2} \cdot a_{n-1})^2, \forall n = 3, 4, \dots$$

Giả sử rằng $a_{2021} = \frac{p}{q}$ với p và q là những số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $p + q$.

- A. 2829. B. 2830. C. 2831. D. 2832.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	7 D	13 D	19 A	25 C	31 B	38 B	44 D	50 A	56 B
2 D	8 A	14 D	20 D	26 B	32 A	39 C	45 B	51 C	
3 C	9 C	15 C	21 D	27 B	33 A	40 A	46 B	52 B	57 B
4 A	10 B	16 D	22 C	28 B	34 A	41 B	47 A	53 A	58 D
5 A	11 B	17 C	23 A	29 C	35 D	42 C	48 A	54 B	
6 D	12 C	18 D	24 B	30 A	36 D	43 B	49 C	55 A	59 C

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 6. HỆ MŨ VÀ LÔGARIT

Khi giải hệ mũ và lôgarit, ta thường dùng các phương pháp sau:

- ☑ Phương pháp thế: rút x theo y hoặc rút y theo x , thay vào phương trình còn lại.
- ☑ Biến đổi hoặc đặt ẩn phụ để đưa về các hệ đã biết cách giải như hệ đối xứng loại 1, hệ đối xứng loại 2,...

A. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 42. Một số hệ giải được bằng phương pháp thế.

Phương pháp. Từ một phương trình nào đó của hệ (hoặc từ cả hai phương trình của hệ), ta biến đổi để rút x theo y hoặc y theo x , sau đó thế vào phương trình còn lại.

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^y = 5 \\ x - y = 2. \end{cases}$

Bài 2 (ĐH-2002D). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y & (1) \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y. & (2) \end{cases}$

Bài 3 (ĐH 2013B). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 & (1) \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0. & (2) \end{cases}$$

Bài 4 (ĐH-2005B). Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3. & (2) \end{cases}$

Bài 5 (ĐH-2010D-Phần riêng Nâng cao).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 6 (Dự bị ĐH-2004D). Giải hệ $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x & (1) \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y & (2) \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 & (1) \\ \log_3 y = \sqrt{x}. & (2) \end{cases}$

Bài 8 (ĐH Tài Chính Kế Toán HN-2000).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 & (1) \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 & (2). \end{cases}$$

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + y)2^{y-x^2} = 1 \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$

Bài 10 (ĐH Thủy Lợi-2000). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} & (1) \\ x \cdot \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3}. & (2) \end{cases}$$

Bài 11 (Dự bị ĐH-2003A). Giải hệ $\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y & (1) \\ 2^x + 2^y = 3 & (2) \end{cases}$

Bài 12 (Học viện Ngân hàng-1999). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 2^x - 2^y = 2. & (2) \end{cases}$$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \frac{1}{\log_y 2} & (1) \\ 4x^4 + 8x^2 + xy = 16x^2 \sqrt{4x + y}. & (2) \end{cases}$

Dạng 43. Hệ mũ, lôgarit đối xứng loại 1, đối xứng loại 2.

Phương pháp.

☑ Hệ đối xứng loại một đối với x và y là hệ mà khi thay x bởi y và y bởi x , từng phương trình trong hệ vẫn không đổi.

- Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ (với điều kiện $S^2 \geq 4P$).
- Tìm S và P .
- Khi đó x và y là nghiệm của phương trình $u^2 - Su + P = 0$.

☑ Hệ đối xứng loại hai đối với x và y là hệ mà nếu ta thay x bởi y và y bởi x thì phương trình này biến thành phương trình kia và ngược lại.

- Lấy hai phương trình của hệ trừ nhau được

$$(x - y)f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

- Sau đó lần lượt thay $x = y$, $f(x, y) = 0$ vào một trong hai phương trình của hệ và giải tiếp.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2. \end{cases}$

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^x + 3^{x+y} + 3^y = 49 \\ 9^x + 9^y - 4 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^y = 45. \end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (3 + 2\sqrt{2})^x + (1 + \sqrt{2})^y = 4 \\ (3 + 2\sqrt{2})^y + (1 + \sqrt{2})^x = 4. \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} & (1) \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12. & (2) \end{cases}$

Bài 18 (Dự bị ĐH-2002D). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_x (x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y (y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Bài 19 (Dự bị ĐH-2007A). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y. \end{cases}$

Dạng 44. Hệ có yếu tố đẳng cấp.

Bài 21 (Đề thi ĐH-2009A-Nâng cao).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81. \end{cases}$$

Bài 22 (ĐHQG Hà Nội-1995). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y). \end{cases}$$

Dạng 45. Một số hệ không mẫu mực.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 2^y = 18. \end{cases}$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1 + \log_2^2 x} + \frac{\log_2 y}{1 + \log_2^2 y} = \frac{9}{10} \\ (1 + \log_x 2 \cdot \log_y 2) \log_2(xy) = \frac{9}{2}. \end{cases}$

Dạng 46. Hệ có tham số.

Phương pháp. Sử dụng chú ý 13 (ở trang 57).

Bài 26. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4-5x} \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Bài 27. Xác định m để hệ sau có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (1) \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) + m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5. & (2) \end{cases}$$

Dạng 47. Giải hệ bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số.**Phương pháp.**

☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ và $x, y \in (a; b)$ thì

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

☑ Nếu f là hàm đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = k$ (k là hằng số) có không quá 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

☑ Nếu f và g là hai hàm đơn điệu ngược chiều trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có không quá 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

Bài 28 (HSG quốc gia-1994-bảng B).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x + 1) = y & (i) \\ y^2 + 3y + \ln(2y + 1) = x. & (ii) \end{cases}$$

Bài 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 4x + 2\ln(3x + 1) = 2y \\ 3y^2 + 4y + 2\ln(3y + 1) = 2x. \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} & (1) \\ 3\log_2(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1. & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Bài 31 (HSG Tp Hồ Chí Minh, năm học 2003-2004).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 & (1) \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2. & (2) \end{cases}$$

Bài 32 (HSG quốc gia năm học 2005-2006, bảng A).

Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \log_3(6 - x) = z. \end{cases}$$

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + \ln(x^2 - 3x + 3) = y \\ y^3 - 3y^2 + 6y - 6 + \ln(y^2 - 3y + 3) = z \\ z^3 - 3z^2 + 6z - 6 + \ln(z^2 - 3z + 3) = x \end{cases}$

B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN**1. Đề bài**

Bài 34 (Dự bị ĐH-2002B). Giải hệ $\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0. & (2) \end{cases}$

Bài 35 (ĐH Đà Nẵng-2001). Giải hệ
$$\begin{cases} \log_x(6x + 4y) = 2 \\ \log_y(6y + 4x) = 2. \end{cases}$$

Bài 36 (ĐH Công Đoàn-1997). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2 \\ \log_y(3y + 2x) = 2. \end{cases}$$

Bài 37 (Đề dự bị thi HSG các trường Chuyên khu vực DHBB năm 2010). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

Bài 38. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 8xy - 8x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ (1 + \log_2 x) [\log_2(1 - y)] + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Bài 39. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{\log_3 x} = \log_3 y - \frac{1}{\log_3 y} & (1) \\ \frac{1}{3} \log_2(3x) - \log_2 y = 0. & (2) \end{cases}$$

Bài 40. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 10x + 2 \ln(3x + 4) = 2y - 5 \\ 3y^2 + 10y + 2 \ln(3y + 4) = 2x - 5. \end{cases}$$

Bài 41. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 x = \log_3 \frac{4 + y^2}{y^2} & (1) \\ 4\sqrt{x+1} + xy\sqrt{4+y^2} = 0. & (2) \end{cases}$$

Bài 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y & (a) \\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x & (b) \end{cases} \quad (1)$$

2. Lời giải, hướng dẫn

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Nếu $\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8$, $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$ với x, y là các số thực, thế thì xy bằng:

- A. 6. B. $\frac{12}{5}$. C. 12. D. 4.

Câu 2. Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2(3y - 1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Khi đó giá trị của $x + y$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 3. Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$
 Khi đó $x_0 - y_0$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 0,5. D. -0,3.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D 2 A 3 A

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

ÔN TẬP CHƯƠNG

A. BỘ ĐỀ SỐ 1

1. Đề bài

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(2x - x^2)$, với $0 < x < 2$.

A. $y' = \frac{2-2x}{2x-x^2}$.

B. $y' = (2-2x)(2x-x^2)$.

C. $y' = \frac{1}{2x-x^2}$.

D. $y' = 2x - x^2$.

Câu 2.

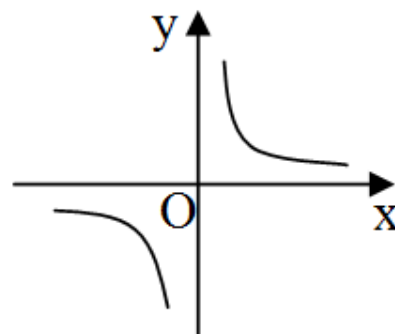
Cho hàm số lũy thừa $y = x^a$ có dạng đồ thị như hình vẽ. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}^*$.

C. Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$.

D. Hàm số có tập xác định là $[0; +\infty)$.



Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{9x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}$.

D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}$.

Câu 4. Cho a, b dương và $a \neq 1$. Các khẳng định nào sau đây đúng:

A. $\log_{a^3}(ab) = 3 + 3\log_a b$.

B. $\log_{a^3}(ab) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_a b$.

C. $\log_{a^3}(ab) = \frac{1}{3}\log_a b$.

D. $\log_{a^3}(ab) = 3\log_a b$.

Câu 5. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 10^x$ là

A. $y'' = 10^x$.

B. $y'' = 10^x \ln 10^2$.

C. $y'' = 10^x (\ln 10)^2$.

D. $y'' = 10^x \ln 20$.

Câu 6. Cho hàm số $y = e^{2x}$. Hệ thức giữa y và y'' không phụ thuộc vào x là:

A. $y'' - 4y = 0$.

B. $y'' - y = 0$.

C. $y'' - 2y = 0$.

D. $4y'' - y = 0$.

Câu 7. Phương trình $\log x - 3 + \log x - 2 = 1 - \log 5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x = (3-2\sqrt{2})^{x+3}$ là:

A. $x = 2018$.

B. $x = 2$.

C. $x = 2018, x = -6$.

D. $x = -6$.

Câu 9. Tập nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}+1)^{x^2+x} = 551614(7+5\sqrt{2})^x$ là:

A. $\{5\}$.

B. $\{-3\}$.

C. $\{5; -3\}$.

D. Kết quả khác.

Câu 10. Giải phương trình $\log_2(x+1) + \log_4(x+1)^2 = \frac{5}{4}$.

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = \sqrt[8]{32} - 1$.

D. Kết quả khác.

Câu 11. Cho $a = \log_{\sqrt{2}-1} (4^{50} + 1)$, $b = \log_{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{2^{100} + 2} \right)$. Khi đó:

- A. $a = b$. B. $a > b$. C. $a < b$. D. $a = b + 1$.

Câu 12. Giải phương trình $\log_3(x-1) = 3$. Ta có nghiệm là

- A. $x = 29$. B. $x = 28$. C. $x = 82$. D. $x = 81$.

Câu 13. Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$ và $A = \log_m(8m)$. Mối quan hệ giữa A và a là:

- A. $A = \frac{3+a}{a}$. B. $A = (3+a)a$. C. $A = \frac{3-a}{a}$. D. $A = (3-a)a$.

Câu 14. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$. B. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.
C. $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. D. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Câu 15. Cho $a > 0, a \neq 1$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là tập $\mathbb{R}$.
B. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ ($x > 0$) là tập $\mathbb{R}$.
C. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0; +\infty)$.
D. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là tập $\mathbb{R}$.

Câu 16. Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} - \ln(x^2 - 1)$ có tập xác định là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$. D. $(1; 2)$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{x^2+x} > 0,09$ là:

- A. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. B. $(-2; 1)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 18. Giải bất phương trình $3^{x^2+3x} \leq 81$ có nghiệm là

- A. $-4 \leq x \leq 1$. B. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -4 \end{cases}$. C. $1 \leq x \leq 4$. D. $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Câu 19. Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là:

- A. -1 . B. 2 . C. 0 . D. 1 .

Câu 20. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ là:

- A. 0 . B. 1 . C. 9 . D. 11 .

Câu 21. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất kép theo quý là 2%. Hỏi sau 2 năm người đó lấy lại cả gốc và lãi là bao nhiêu tiền.

- A. 17,1 triệu. B. 16 triệu. C. 117,1 triệu. D. 116 triệu.

Câu 22. Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

- A. 1000 lần. B. 10 lần. C. 2 lần. D. 100 lần.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho phương trình

$$9^x - 2 \cdot 3^x + 2 - m = 0$$

có nghiệm $x \in (-1; 2)$?

- A. 43. B. 44. C. 63. D. 64.

Câu 24. Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền người đó gửi hàng tháng gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

- A. 635.000. B. 535.000. C. 613.000. D. 643.000.

Câu 25. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12% trên năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{1,01^3}{1,01^3 - 1}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng). D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	4 B	7 A	10 C	13 A	16 C	19 A	22 D	25 B
2 B	5 C	8 D	11 B	14 B	17 B	20 C	23 D	
3 A	6 A	9 D	12 B	15 B	18 A	21 C	24 A	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

B. BỘ ĐỀ 2

1. Đề bài

Câu 1. Với $0 < a \neq 1, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. B. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. C. $a^{m \cdot n} = (a^n)^m$. D. $a^m \cdot b^n = (a \cdot b)^{m+n}$.

Câu 2. Hãy chọn mệnh đề đúng:

- A. Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. B. Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.
C. Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$. D. Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m < a^n \Leftrightarrow m \geq n$.

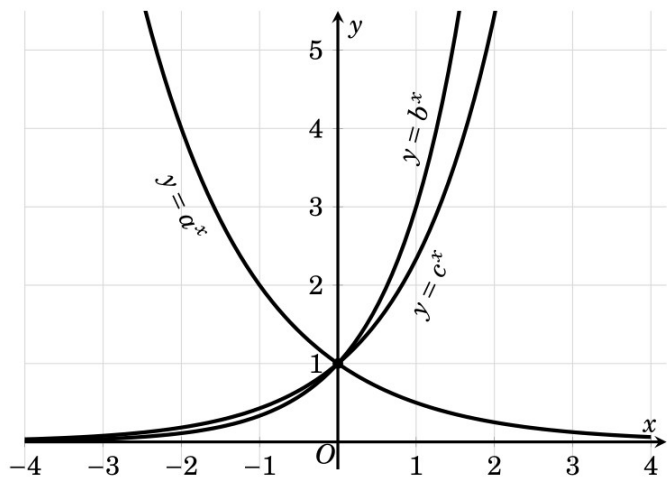
Câu 3. Tập xác định của hàm số $f(x) = x^\alpha$ (α không nguyên) là:

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = (-\infty; 0)$. C. $D = (-\infty; 0]$. D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 4.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

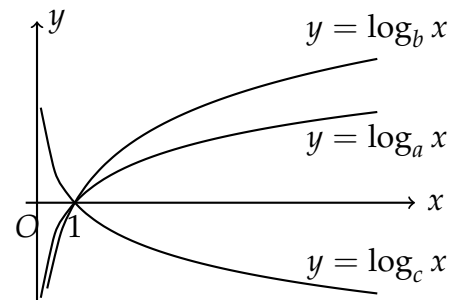
- A. $c > b > a$. B. $b > a > c$.
C. $c > a > b$. D. $b > c > a$.



Câu 5.

Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
B. $\log_b x < 0 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty)$.
C. Hàm số $y = \log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
D. $a > b > c$.



Câu 6. Biểu thức $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

- A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{12}}$. C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 2^x$. Biểu thức $f(a+1) - f(a)$ bằng:

- A. 2^a . B. 1. C. 2. D. $2^a - 1$.

Câu 8. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ (a là hằng số khác không) ta được kết quả:

- A. $f'(x) = \frac{1 + 2\sqrt{x^2 + a^2}}{2\sqrt{x^2 + a^2}(x + \sqrt{x^2 + a^2})}$. B. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.
C. $f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$. D. $f'(x) = x + \sqrt{x^2 + a^2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$. Kết quả $f'(0)$ là:

- A. $f'(0) = \frac{1}{5}$. B. $f'(0) = -\frac{1}{5}$. C. $f'(0) = \frac{2}{5}$. D. $f'(0) = -\frac{2}{5}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = (x+2)^{-2}$. Hệ thức giữa y và y'' không phụ thuộc vào x là:

- A. $y'' + 2y = 0$. B. $y'' - 6y^2 = 0$. C. $2y'' - 3y = 0$. D. $(y'')^2 - 4y = 0$.

Câu 11. Với giá trị nào của x thì hàm số $y = -\log_3^2 x + \log_3 x$ có giá trị lớn nhất?

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 12. Một người vay ngân hàng 20 triệu đồng theo thể thức lãi kép và lãi xuất là 1,5% một tháng. Hỏi sau 6 tháng người đó mới trả cả vốn lẫn lãi thì phải trả bao nhiêu cho ngân hàng (giả sử lãi suất hàng tháng không thay đổi).

- A. 21,78 triệu đồng. B. 21,87 triệu đồng. C. 21,97 triệu đồng. D. 21,79 triệu đồng.

Câu 13. Một người gửi tiết kiệm 500.000.000 đồng vào một ngân hàng theo mức kỳ hạn 6 tháng tính lãi một lần, với lãi suất 0,65% một tháng. Hỏi sau 10 năm, người đó nhận được bao nhiêu tiền (cả vốn và lãi) ở ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ trước đó.

- A. 1074684427 đồng. B. 1074687613 đồng.
C. 1074235227 đồng. D. 1059638216 đồng.

Câu 14. Giả sử nghiệm của phương trình $2\log_2^2 x - 14\log_4 x + 3 = 0$ là x_1, x_2 . Khi đó:

- A. $x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{4}$. B. $x_1^2 + x_2^2 = 68$. C. $x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{2}$. D. $x_1^2 + x_2^2 = 66$.

Câu 15. Giá trị thực của tham số m để phương trình $2^x = 3m + 1$ có nghiệm là:

- A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \geq -\frac{1}{3}$. D. $m > -\frac{1}{3}$.

Câu 16. Phương trình $9^{2x+3} = 27^{4-x}$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $7x - 6 = 0$. B. $x - 6 = 0$. C. $7x + 6 = 0$. D. $x + 6 = 0$.

Câu 17. Giả sử x, y, z là những số dương thỏa mãn: $\log_9 x = \log_{15} y = \log_{25}(x+2y)$. Tính giá trị của tỉ số $\frac{y}{x}$.

- A. $2 + \sqrt{2}$. B. $3 + 2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} + 1$. D. $\sqrt{2} - 1$.

Câu 18. Giải phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$.
Một học sinh làm như sau: (1)

$$\checkmark \text{ Bước 1: Điều kiện } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

☒ Bước 2: Phương trình (1) tương đương:

$$\log_2 (x+1) + \log_2 4 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x).$$

☒ Bước 3: Hay là

$$\begin{aligned} 4(x+1) &= (4-x)(4+x) \Leftrightarrow 4x+4 = 16-x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 3. D. Lời giải đúng.

Câu 19. Nếu $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$ ($a > 0, b > 0$) thì x bằng:

- A. $a^5 b^4$. B. $a^4 b^5$. C. $5a + 4b$. D. $4a + 5b$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2 (2x + 1)$ là:

- A. $\emptyset$. B. $(1; 3)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.2} (x + 1) > \log_{0.2} (3 - x)$ là:

- A. $(-1; 3)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 22. Giải bất phương trình: $\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2$ ta được tập nghiệm là:

- A. tập rỗng. B. $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 23. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$. Khi đó $(3^{x_1} - 1)(3^{x_2} - 1)$ có giá trị bằng:

- A. -6 . B. $\frac{280}{27}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Câu 24. Cho phương trình $\log(x^2 + 10x + m) = 2\log(2x + 1)$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m > -2$. B. $-2 < m < \frac{19}{4}$. C. $m \geq -2$. D. $-2 < m \leq \frac{19}{4}$.

Câu 25 (THPTQG 2017). Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_3 \frac{1 - xy}{x + 2y} = 3xy + x + 2y - 4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

- A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} - 19}{9}$. B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.
C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11} - 29}{21}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D	4 D	7 A	10 B	13 A	16 A	19 A	22 B	25 D
2 A	5 D	8 B	11 C	14 D	17 C	20 A	23 C	
3 D	6 A	9 C	12 B	15 D	18 B	21 D	24 B	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

C. BỘ ĐỀ 3

1. Đề bài

Câu 1 (Mã đề 103, THPT.QG - 2018). Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là

- A. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$. B. $\{-4; 4\}$. C. $\{4\}$. D. $\{-4\}$.

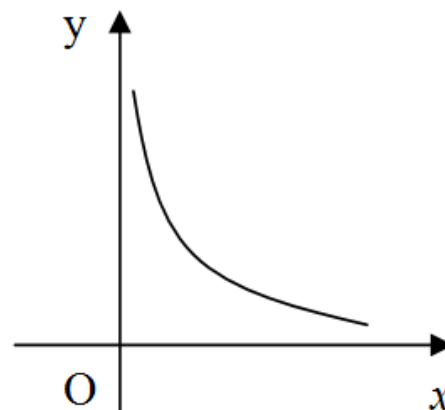
Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(x - 2)$ là :

- A. $[2; +\infty)$. B. $[0; 2]$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

Câu 3.

Hình vẽ sau là dạng đồ thị của hàm số nào trong số các hàm số sau đây:

- A. $y = x^{-2}$. B. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. C. $y = x^{\sqrt{3}}$. D. $y = x^{\frac{1}{2}}$.



Câu 4 (THPT Quốc Gia năm 2018). Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

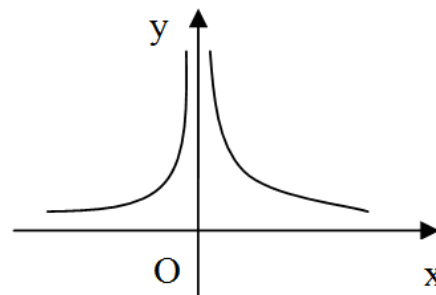
- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 5.

Cho hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ có dạng đồ thị như hình vẽ.

Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. α là số nguyên.
B. α là số nguyên âm.
C. α là số nguyên âm chẵn.
D. α là số nguyên chẵn.



Câu 6. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$ là :

- A. $\frac{1}{3} < x < 3$. B. $x > 3$. C. $x < 3$. D. $x > \frac{10}{3}$.

Câu 7. Cho biểu thức $P = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$; $x > 0; y > 0$. Biểu thức rút gọn của P là:

- A. x . B. $2x$. C. $x + 1$. D. $x - 1$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_3(x^2 - 5x + 6)$ là

- A. $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $D = (2; 3)$.
C. $D = [2; 3]$. D. $D = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Câu 9 (THPTQG 2017). Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $2t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 + t - 3 = 0$. C. $4t - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Câu 10. Cho $\log_{140} 63 = \frac{x \log_x 3 \cdot \log_7 x + 1}{\log_x 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_7 x + x \log_7 x + 1}$. Xác định x .

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Câu 11. Cho $\log_2 5 = m$; $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là:

- A. $\frac{1}{m+n}$. B. $\frac{mn}{m+n}$. C. $m+n$. D. $m^2 + n^2$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$ là:

- A. $(-\infty; 1)$. B. $[0; 2)$. C. $[0; 1) \cup (2; 3]$. D. $[0; 2) \cup (3; 7]$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}(x^2 + x) < \log_{0,8}(-2x + 4)$ là:

- A. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. B. $(-4; 1)$.
C. $(-\infty; -4) \cup (1; 2)$. D. Một kết quả khác.

Câu 14. Mỗi tháng ông Minh gửi tiết kiệm 580 000đ với lãi suất 0,7% tháng, theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 10 tháng thì ông Minh nhận về cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

- A. 6028055,598 (đồng). B. 6048055,598 (đồng).
C. 6038055,598 (đồng). D. 6058055,598 (đồng).

Câu 15. Biết $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính $3^x + 3^{-x}$.

- A. 10. B. 5. C. 25. D. $\sqrt{5}$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

- A. $\sin x \cdot e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$. B. $2 \sin x \cdot e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$. C. $\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$. D. $\cos x \cdot e^{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Câu 17 (Đề TT THPT Quốc gia tháng 6, 2017 - 2018, cụm Tp. Vũng Tàu).

Xét hai số thực dương a, b làm cho hai hàm số $y = a^{bx}$ và $y = (\log_a b)^x$ đều đồng biến trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $1 < a < b$. B. $1 < b < a$. C. $a < b < 1$. D. $b < a < 1$.

Câu 18. Tập nghiệm của phương trình $\log_3 x + \log_x 9 = 3$ là:

- A. $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$. C. $\{1; 2\}$. D. $\{3; 9\}$.

Câu 19 (Mã đề 103, THPT.QG - 2018).

Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

Câu 20. Tìm hàm số dạng $f(x) = a + bc^x$ ($0 < c \neq 1$) biết rằng:

$$f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90.$$

Khi đó giá trị của $a + b + c$ bằng:

- A. 10. B. 7. C. 17. D. $\sqrt{15}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{-x}{e^{2x}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' - 4y = 4e^{2x}$. B. $y'' - 4y = 4e^{-x}$. C. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$. D. $y'' - 4y = 2e^{-x}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $xy' = (1 - x)y$. B. $xy' = (1 + x^2)y$. C. $xy' = (1 + x)y$. D. $xy' = (1 - x^2)y$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $xy' + 1 = e^y$. B. $xy' + 1 = e^{-y}$. C. $xy' + 1 = e^x$. D. $xy' + 1 = e^{2y}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$. Nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b)$ có giá trị là:

- A. 2. B. 1,5. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + \cdots + f\left(\frac{2014}{2015}\right).$$

A. 1007.

B. 2014.

C. 2015.

D. 1.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	4 C	7 A	10 A	13 C	16 C	19 D	22 D	25 A
2 C	5 C	8 A	11 B	14 A	17 A	20 C	23 A	
3 B	6 B	9 D	12 C	15 B	18 D	21 C	24 D	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

D. BỘ ĐỀ 4

1. Đề bài

Câu 1. Tính chất nào đúng của hàm số $y = x^\alpha$ trên $(0; +\infty)$?

- A. Hàm số luôn đồng biến.
- B. Hàm số luôn nghịch biến.
- C. Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(1; 1)$.
- D. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0; 0)$.

Câu 2 (Đề 103, THPT.QG - 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

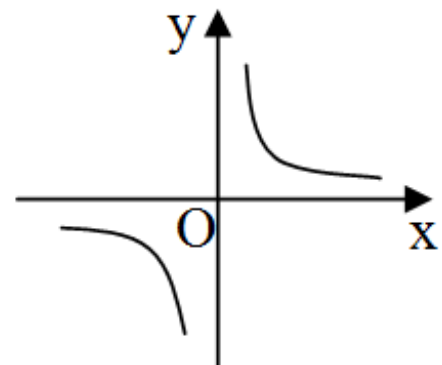
- A. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$.
- B. $\frac{\ln 7}{\ln 3}$.
- C. $\ln \frac{7}{3}$.
- D. $\ln(4a)$.

Câu 3.

Cho hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ có dạng đồ thị như hình vẽ.

Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.
- B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- C. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
- D. α là số nguyên âm lẻ.



Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$ bằng :

- A. $2017^{x-1} \ln 2017$.
- B. $x \cdot 2017^{x-1}$.
- C. 2016^x .
- D. $2017^x \cdot \ln 2017$.

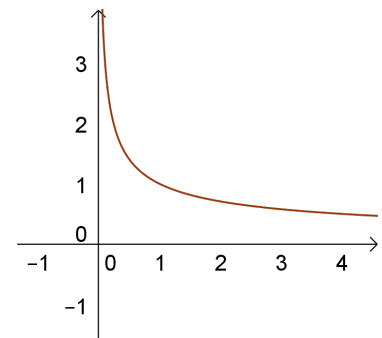
Câu 5. Cho hàm số $y = \log_a x$, giá trị của a để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ là:

- A. $a < 1$.
- B. $a \geq 1$.
- C. $a > 1$.
- D. $0 < a < 1$.

Câu 6.

Hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Chọn đáp án **đúng**.

- A. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
- B. $y = \log_2 x$.
- C. $y = x^{-2}$.
- D. $y = 2^{-x}$.



Câu 7. Biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}}$, với $a > 0$ viết dưới dạng lũy thừa là:

- A. $P = a$.
- B. $P = a^4$.
- C. $P = a^3$.
- D. $P = a^{\frac{5}{3}}$.

Câu 8 (THPTQG năm học 2016-2017).

Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A. $I = \frac{1}{2}$.
- B. $I = 0$.
- C. $I = -2$.
- D. $I = 2$.

Câu 9. Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab$ ($a, b > 0$). Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$.
- B. $2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$.

D. $4\log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 10. Cho biết $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}}$ và $\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{3}{4}$. Khi đó có thể kết luận:

A. $a > 1, b > 1$.

B. $a > 1, 0 < b < 1$.

C. $0 < a < 1, b > 1$.

D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

Câu 11. Tập xác định của $y = \log_5(x+7)$ là

A. $(0; +\infty)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $(-7; +\infty)$.

D. $(1; +\infty)$.

Câu 12. Gọi $M = \log_{0,3}(0,07)$ và $N = \log_3(0,2)$. Bất đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $M > 0 > N$.

B. $M > N > 0$.

C. $0 > N > M$.

D. $N > 0 > M$.

Câu 13. Tìm số các chữ số của 2^{2018} khi viết trong hệ thập phân.

A. 606.

B. 607.

C. 608.

D. 609.

Câu 14 (THPTQG năm học 2017-2018).

Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

A. $m = -4$.

B. $m = 4$.

C. $m = 81$.

D. $m = 44$.

Câu 15. Gọi a là nghiệm của phương trình

$$\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0.$$

Tính $T = (5 \cdot 4^a - 13 \cdot 2^a)^2$.

A. 1.

B. 4.

C. 16.

D. 36.

Câu 16 (THPTQG 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

B. $S = [2; 16]$.

C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 17. Gọi $M = \log \frac{5}{13}$ và $N = \log \frac{5}{3}$. Bất đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $M > 0 > N$.

B. $M > N > 0$.

C. $0 > N > M$.

D. $N > 0 > M$.

Câu 18. Gọi $M = 3^{\log_{0,5} 4}$ và $N = 3^{\log_{0,5} 13}$. Bất đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $N < M < 1$.

B. $M < 1 < N$.

C. $M < N < 1$.

D. $N < 1 < M$.

Câu 19. Cho $\log_2 5 = a$. Khi đó giá trị của $\log_4 500$ tính theo a là:

A. $3a + 2$.

B. $\frac{1}{2}(3a + 2)$.

C. $2(5a + 4)$.

D. $6a - 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = 3e^{-x} - 2017e^{-2x}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $y'' + 3y' + 2y = 3$.

B. $y'' + 3y' + 2y = 2017$.

C. $y'' + 3y' + 2y = 5$.

D. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = e^x (\ln |x| + C)$, với C là hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $(xy + e^x) dx - x dy = -1$.

B. $(xy + e^x) dx - x dy = 0$.

C. $(xy + e^x) dx - x dy = 1$.

D. $(xy + e^x) dx - x dy = x$.

Câu 22. Giá trị rút gọn của biểu thức $M = \left(\sqrt[7]{\frac{a}{b}} \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{35}{4}}$ ($a, b \neq 0$) là:

A. $\frac{a}{b}$.

B. $\frac{b}{a}$.

C. $\frac{b^2}{a}$.

D. $\frac{a}{b^2}$.

Câu 23. Giá trị rút gọn của biểu thức $M = \left(1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{a}{b}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ ($a > 0, b > 0$) là:

- A. $\frac{a}{b}$. B. $\frac{1}{b}$. C. $\frac{b}{a}$. D. $\sqrt{b}$.

Câu 24. Nếu $\log_a x = \frac{1}{2}(\log_a 9 - 3\log_a 4)$ ($a > 0, a \neq 1$) thì x bằng:

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{9}{64}$. D. $\frac{64}{9}$.

Câu 25. Ông A mua một chiếc xe Ô tô với giá 690 triệu đồng theo hình thức trả góp. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất Ông A trả 20 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,7%/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng Ông A trả hết số tiền trên?

- A. 42 tháng. B. 38 tháng. C. 40 tháng. D. 36 tháng.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 C	4 D	7 A	10 C	13 C	16 C	19 B	22 A	25 C
2 C	5 C	8 D	11 C	14 B	17 D	20 D	23 B	
3 A	6 A	9 B	12 A	15 D	18 A	21 B	24 A	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM