

MỤC LỤC

Chương 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ «NHÓM TOÁN VD»2



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa	2
2. Định lý, quy tắc	2
a. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị	2
b. Chú ý.....	2
c. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị	2



II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

1. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN.....	3
1.1.Dạng 1.Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng xét dấu, bảng biến thiên.	3
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	3
b. Các bài toán tự luận	7
1.2.Dạng 2: Tìm điểm cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số	8
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	9
b. Ví dụ minh họa: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:.....	12
1.3.Dạng 3.Tìm cực trị hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$	13
Chú ý.....	13
a. Các bài toán cơ bản.....	13
b. Các bài toán trắc nghiệm trong đề thi đại học	15
1.4.Dạng 4.Tìm cực trị của hàm số $y = f(u)$ dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$	20
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	20
1.5.Dạng 5.Các bài toán cực trị hàm số bậc 3.....	25
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	26
b. Các bài toán tự luận	30
1.6.Dạng 6.Các bài toán cực trị hàm số bậc 4.....	31
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	32
1.7.Dạng 7.Các bài toán cực trị hàm phân thức.....	34
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	34
2. CÁC DẠNG TOÁN NÂNG CAO.....	35
2.2.Dạng 6.Các bài toán cực trị hàm số bậc 3 chứa tham số.....	36



a. Các bài toán cơ bản.....	37
Chú ý.....	37
b. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	38
c. Các bài toán trắc nghiệm tương tự.....	39
2.3.Dạng 3. Các bài toán cực trị hàm số bậc 4 chứa tham số.....	44
Chú ý.....	44
a. Các bài toán cơ bản.....	45
b. Các bài toán minh họa.....	48
c. Các bài toán trắc nghiệm tương tự.....	49
2.4.Dạng 4. Các bài toán cực trị hàm số phân thức, lượng giác vô tỉ, hàm bậc cao.....	56
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	56
b. Các bài toán tự luận minh họa.....	58
2.5.Dạng 5. Các bài toán cực trị hàm chứa trị tuyệt đối.....	58
a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản.....	59





I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D ($D \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in D$.

• x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$.

• x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset D$ và

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$.

• Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

• Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị.

2. Định lý, quy tắc

a. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

b. Chú ý

• Đạo hàm $f'(x_0)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm x_0 .

• Hàm số có thể đạt cực trị tại một số điểm mà tại đó hàm số không tồn tại đạo hàm.

• Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm nằm trong tập xác định của hàm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không có đạo hàm. Những điểm như thế gọi là những "điểm tới hạn".

• Hàm số đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành.

c. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

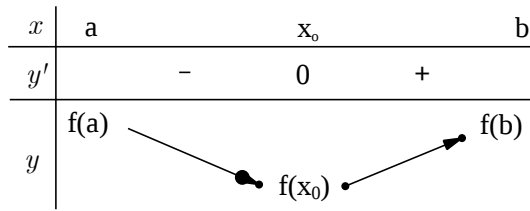
Định lý 2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó,



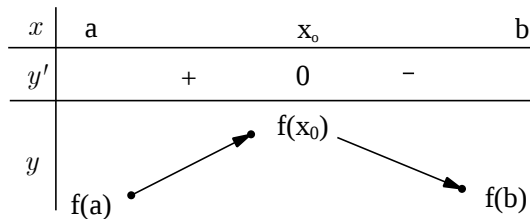
⊙ Nếu $\begin{cases} f'(x_0) < 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x_0) > 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nói một cách khác, nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .



⊙ Nếu $\begin{cases} f'(x_0) > 0, \forall x \in (a; x_0) \\ f'(x_0) < 0, \forall x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

Nói một cách khác, nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .



Định lý 3

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

⊙ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

⊙ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

1. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

1.1. Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng xét dấu, bảng biến thiên.

Phương pháp giải

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

⊙ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

⊙ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		0	0	
y	$-\infty$			$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = 3$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = -2$.

Lời giải:

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.
 C. $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số. D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải:

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$		

The graph shows a function with a local maximum at $x = -1$ and a local minimum at $x = 1$. The function values at the boundaries are $+\infty$ at $x = -\infty$ and $x = +\infty$. The function values at the critical points are -4 at $x = -1$ and -3 at $x = 1$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 0$. B. $(0; -3)$. C. $y = -3$. D. $x = -3$.

Lời giải:

Ví dụ 4

Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y									

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- C. Hàm số có đúng hai cực trị.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng

- A. Hàm số có 4 điểm cực trị.
- B. Hàm số có 2 điểm cực đại.
- C. Hàm số có 2 điểm cực trị.
- D. Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
y									

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. Có một điểm.
- B. Có ba điểm.
- C. Có hai điểm.
- D. Có bốn điểm.

Lời giải:

.....



Ví dụ 7

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗ 1 ↘	$+\infty$	↘ 5 ↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số đạt cực tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 5.

Lời giải:

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	$+\infty$		1	$+\infty$
			-2	

Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số có đúng một điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .
- C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Lời giải:

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				0			$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Đồ thị của hàm số có đúng 2 điểm cực trị.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -4 .
- D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3 hoặc 2 .

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị.

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
y'		+		- 0 + 0 +		- 0 +	
y		$+\infty$	$+\infty$		y_4		$+\infty$

$-\infty$ y_2

- A. 5.
- B. 3.
- C. 4
- D. 2.

Lời giải:

.....

.....

.....

b. Các bài toán tự luận

Ví dụ 11

Tìm hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $a \neq 0$ biết rằng hàm số có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2			2		
	$-\infty$				1			$-\infty$

Lời giải:

.....



Ví dụ 12

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

 Lời giải:

Ví dụ 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

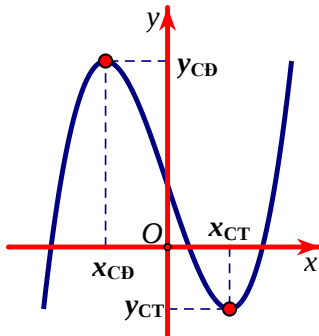
x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						
	$-\infty$		6		2	$+\infty$

 Lời giải:



1.2. Dạng 2: Tìm điểm cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số

Phương pháp giải



Hình vẽ minh họa

- Đồ thị đang đi lên sau đó đổi hướng đi xuống tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$

- Đồ thị đang đi xuống sau đó đổi hướng đi lên tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

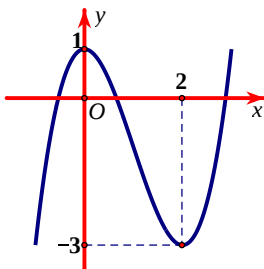
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực trị của hàm số $f(x)$

- Các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số
- Các điểm $M(x_0; f(x_0))$ của hàm số được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số trên đồ thị

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 14

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

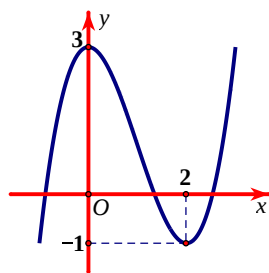


- A. $x = -3$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Lời giải:

Ví dụ 15

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.
 B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.
 C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Lời giải:

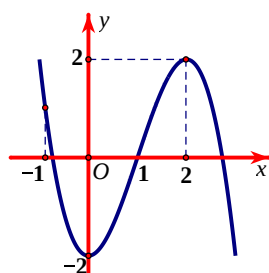
.....

.....

.....

Ví dụ 16

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 2$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $x = 3$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.

Lời giải:

.....

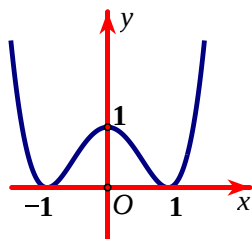
.....

.....

Ví dụ 17

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?





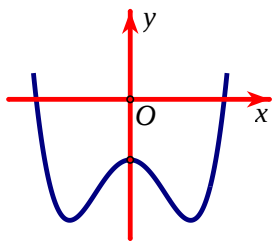
- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và tại $x=1$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và tại $x=1$.

Lời giải:

.....

Ví dụ 18

Đường cong bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là số thực và $a \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



- A. Phương trình $y=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
 B. Phương trình $y=0$ có đúng một nghiệm thực.
 C. Phương trình $y=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
 D. Phương trình $y=0$ có vô số nghiệm thực.

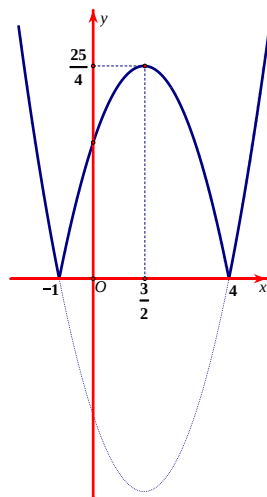
Lời giải:

.....

Ví dụ 19

Đường cong bên (nét đậm) là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x^2 - 3x - 4|$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

.....



A. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{25}{4}$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Giá trị cực đại bằng $\frac{3}{2}$.

D. Giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 20

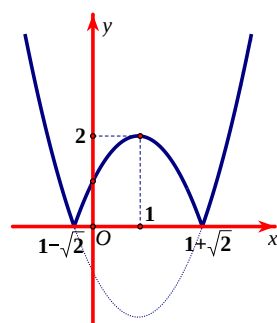
Đường cong bên (nét đậm) là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2x - 1|$. Xét các phát biểu sau đây có bao nhiêu phát biểu đúng?

(1): Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

(2): Giá trị cực đại bằng $f(1) = 2$ và giá trị cực tiểu $f(1 - \sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2}) = 0$.

(3): Hàm số chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu

(4): Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2} > 0$, loại điểm $x = 1 - \sqrt{2} < 0$.



A. 1 phát biểu đúng. B. 2 phát biểu đúng. C. 3 phát biểu đúng. D. 4 phát biểu đúng.

Lời giải:

.....

.....



b. Ví dụ minh họa: Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

Ví dụ 21

1. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

2. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

 Lời giải:

1.3. Dạng 3. Tìm cực trị hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$

Phương pháp giải

B1: Từ ĐTHS $y = f'(x)$ xác định dấu của $f'(x)$ trên từng khoảng xác định

B2: Lập trực xét dấu của hàm $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên của hàm số

B3: Kết luận

Chú ý

+) Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x = c$ thì $x = c$ được gọi là điểm cực đại của hàm số

Khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = c$ thì $x = c$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

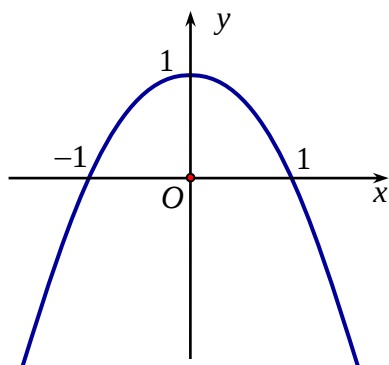
+) Nếu $x = c$ là điểm cực trị của hàm $y = f(x)$ thì $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không xác định, nhưng nếu $f'(c) = 0$ thì chưa chắc $x = c$ đã là điểm cực trị của hàm số.

a. Các bài toán cơ bản

Ví dụ 22

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.

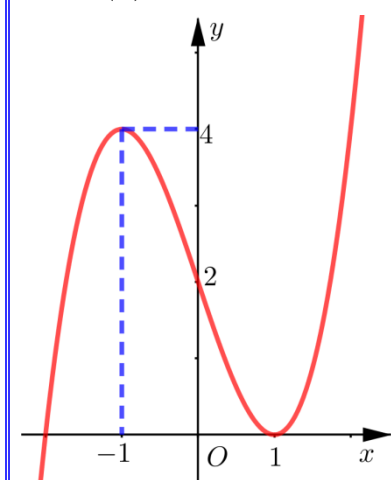
Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$



 Lời giải:

Ví dụ 23

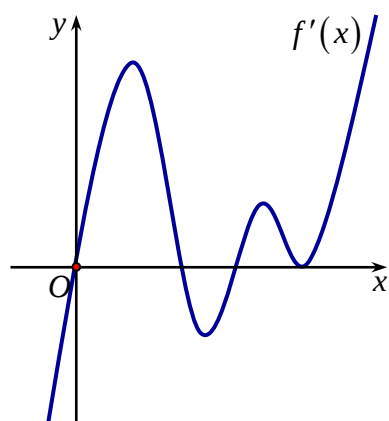
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Lời giải:

Ví dụ 24

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đã cho có mấy điểm cực tiểu?

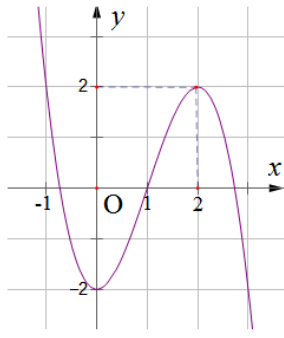


Lời giải:



Ví dụ 25

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x) = f(x) + x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải:

.....

.....

.....

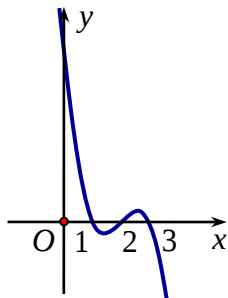
.....

b. Các bài toán trắc nghiệm trong đề thi đại học

Ví dụ 26

(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới:



Xét các khẳng định sau:

- (I) Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.
- (II) Phương trình $f(x) = m + 2018$ có nhiều nhất ba nghiệm.
- (III) Hàm số $y = f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Số khẳng định đúng là

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.

Lời giải:

.....

.....

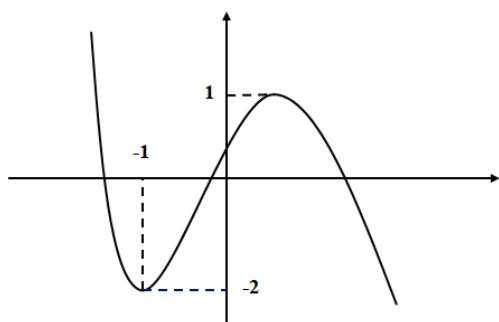
.....



Ví dụ 27

(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

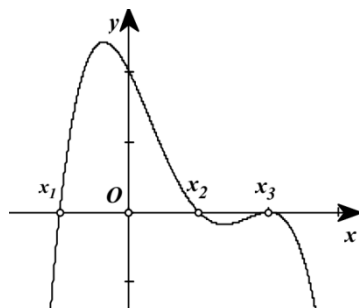
.....

.....

.....

Ví dụ 28

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định **đúng**?

(I). Trên K , hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3 .

(III). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 .

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

.....

.....

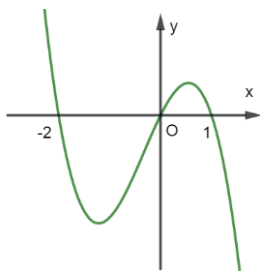
.....

Ví dụ 29





Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



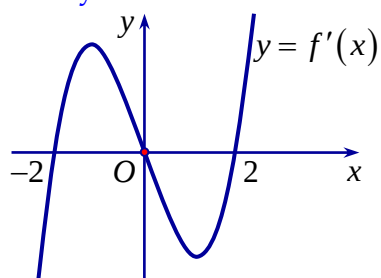
Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f(x)$ có một cực tiểu.
- B. $f(x)$ có hai cực đại.
- C. $f(x)$ có 3 điểm cực trị.
- D. $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Lời giải:

Ví dụ 30

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

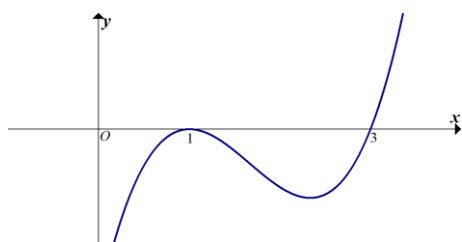
- A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- D. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = \pm 2$.

Lời giải:

Ví dụ 31

(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?



- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

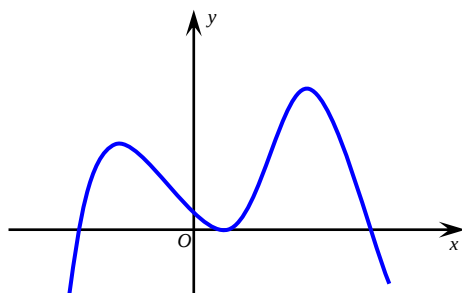
 Lời giải:



Ví dụ 32

(THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = f'(x)$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

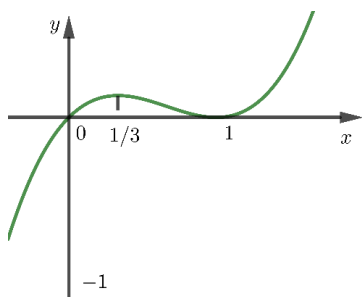


- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

 Lời giải:

Ví dụ 33

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào?



- A. $x_0 = 0$. B. $x_0 = 1$. C. $f(x) = 0$. D. $f(x) = 1$.

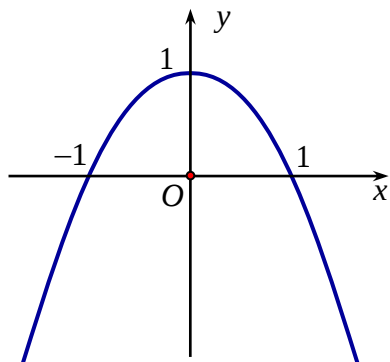
 Lời giải:



Ví dụ 34

(THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

- A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- D. $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải:

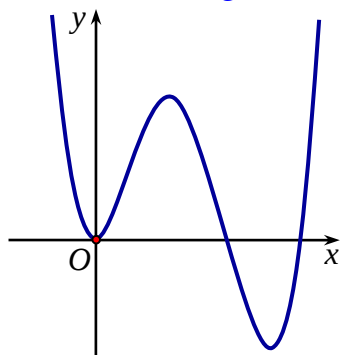


Ví dụ 35

(THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.

Mệnh đề nào đúng?



- A. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

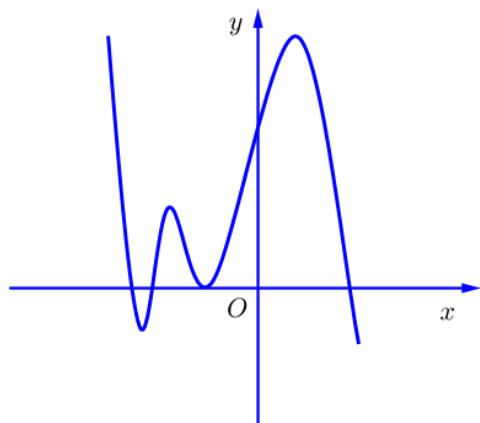
Lời giải:



Ví dụ 36

(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải:

.....

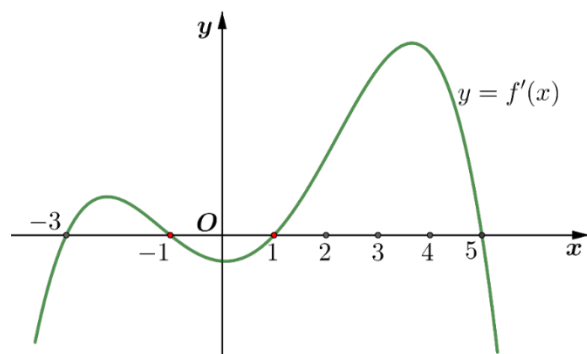
1.4. Dạng 4. Tìm cực trị của hàm số $y = f(u)$ dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Phương pháp giải

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 37

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Kết luận đúng về số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. Hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

B. Một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

C. Hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

D. Một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải:

.....

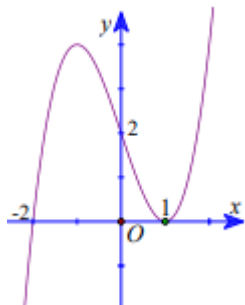
.....

.....

Ví dụ 38

(THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

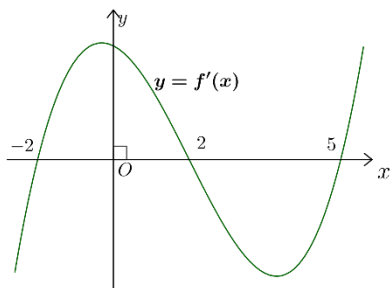
.....

.....

.....

Ví dụ 39

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới.



Hàm số $y = f(2x+2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

.....

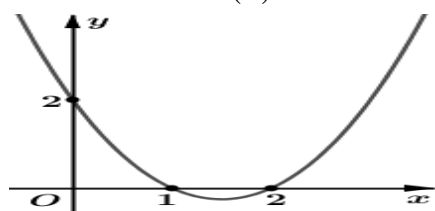
.....

.....



Ví dụ 40

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x^2) + 2019$ có mấy điểm cực trị?

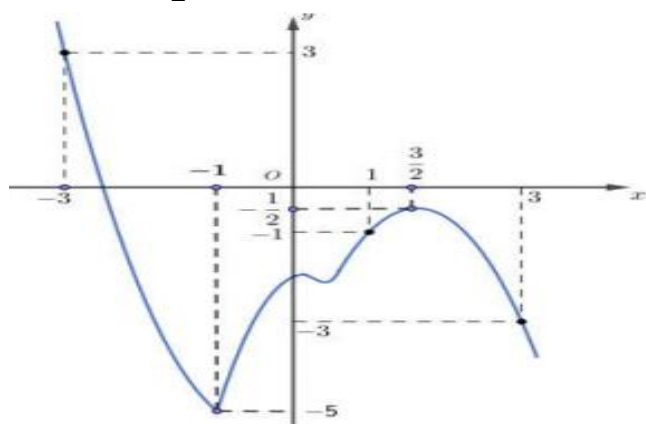
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải:

Ví dụ 41

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số

$$y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x.$$



- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

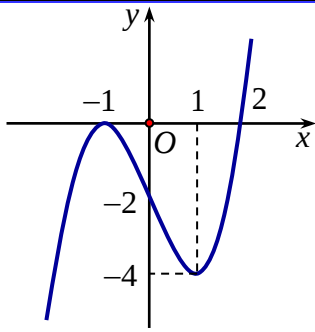
Lời giải:

Ví dụ 42

(Trích câu hỏi dẫn THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?





- A. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
- B. Hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
- C. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- D. Hàm số $g(x)$ 4 điểm cực trị.

Lời giải:

.....

.....

.....

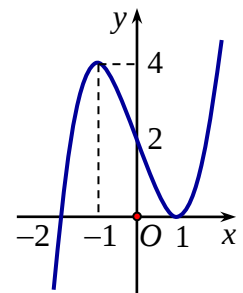


Ví dụ 43

(trích dẫn đề THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$. Kết luận đúng về cực đại của hàm số $g(x)$ là?

- A. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- B. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- D. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.



Lời giải:

.....

.....

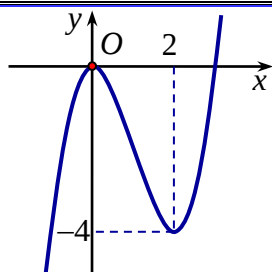
.....

Ví dụ 44

(THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018)

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.





A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải:

.....

.....

.....

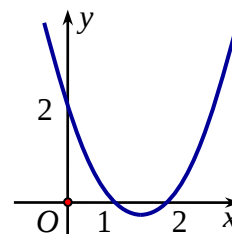
Ví dụ 45

(Theo đề THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Kết luận đúng về cực trị àm số $y = f(x - x^2)$ là:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{3}{2}$.B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 46

(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và các mệnh đề sau:

I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

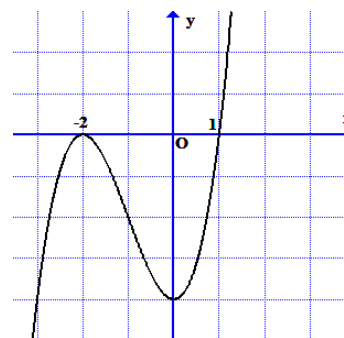
Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.



Lời giải:

.....

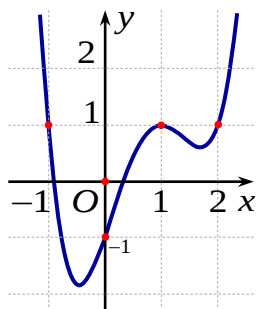
.....

.....

Ví dụ 47

(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x = 2$.

B. $x = 0$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải:

.....

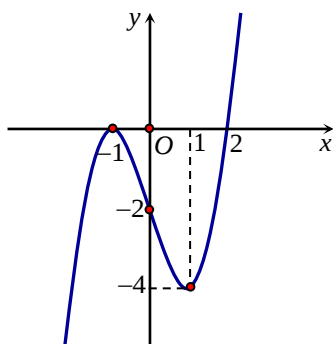
.....

.....

Ví dụ 48

(Trích theo đề THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Số điểm cực trị của hàm số là?



A. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

C. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

D. Hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Lời giải:

.....

.....



1.5. Dạng 5. Các bài toán cực trị hàm số bậc 3

Phương pháp giải

Bài toán 1: Xác định điểm cực trị, cực trị hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

- Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số

Bài toán 2: Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Cách 1: Tìm tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu A, B. Viết phương trình đường thẳng qua A, B

Để viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba, thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

$$+ \text{Phân tích (bằng cách chia đa thức } y \text{ cho } y') : y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}.$$

+ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $d : y = h(x)$.

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 49

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

 Lời giải:

Ví dụ 50

Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x - 2$. Các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số là

A. $y_{CD} = 0; y_{CT} = -4$. **B.** $y_{CD} = 4; y_{CT} = -4$. **C.** $y_{CD} = 0; y_{CT} = 4$. **D.** $y_{CD} = 0; y_{CT} = -6$

 Lời giải:

Ví dụ 51



Số điểm cực trị của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

 Lời giải:

Ví dụ 52

Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. $x_0 = 2$.

B. $x_0 = 1$.

C. $x_0 = -1$.

D. $x_0 = 3$.

 Lời giải:

Ví dụ 53

Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

A. 13.

B. 32.

C. 40.

D. 36.

 Lời giải:

Ví dụ 54

Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 2x$ là

A. $y_{CT} + y_{CD} = 0$.

B. $y_{CD} = y_{CT}$.

C. $2y_{CD} = 3y_{CT}$.

D. $y_{CD} = 2y_{CT}$.

 Lời giải:

Ví dụ 55

Trong các hàm số sau, hàm số nào có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$.



- A. $y = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$. B. $y = -2x^3 + 3x - 4$.
 C. $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$. D. $y = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 56

Tìm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực).

- A. 0. B. $-4 + m$. C. 2. D. m .

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 57

Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$. Giá trị $y_1 + y_2$ bằng

- A. 0. B. 3. C. -2. D. -4.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 58

Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2y_1 - y_2 = 6$. B. $y_1 - y_2 = -4$. C. $2y_1 - y_2 = -6$. D. $y_1 + y_2 = 4$.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 59



Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

A. $2x + y + 2 = 0$.

B. $2x + y - 2 = 0$.

C. $2x - y - 2 = 0$.

D. $2x - y + 2 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 60

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0; -1)$.

B. $Q(-1; 10)$.

C. $P(1; 0)$.

D. $N(1; -10)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 61

Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 5$

B. $S = \frac{10}{3}$

C. $S = 10$

D. $S = 9$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 62

ho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2019$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là điểm cực đại và cực tiểu của hàm số. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $(x_1 - x_2)^2 = 8$.

B. $x_2 - x_1 = 3$.

C. $x_1 x_2 = -3$.

D. $x_1 - x_2 = 4$.

Lời giải:

.....

.....

.....



Ví dụ 63

Biết rằng hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Tích $x_1 x_2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

 Lời giải:

Ví dụ 64

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{6}$.

C. $m = \frac{1}{6}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

 Lời giải:

Ví dụ 65

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9; -5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m = -1$.

B. $m = -5$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

 Lời giải:

Ví dụ 66

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{3}{4}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

 Lời giải:



b. Các bài toán tự luận

Ví dụ 67

Xác định các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

 Lời giải:

Ví dụ 68

Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

 Lời giải:

Ví dụ 69

Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

 Lời giải:

1.6. Dạng 6. Các bài toán cực trị hàm số bậc 4

Phương pháp giải

1. Tìm cực trị hàm số qua dấu của đạo hàm y'

+ Tìm TXĐ hàm số

+ Tìm y'

+ Lập bảng xét dấu y'

+ Dựa vào sự đổi dấu của y' để kết luận cực đại; cực tiểu.

2. Tìm cực trị hàm số qua bảng biến thiên

+ Quan sát bảng biến thiên (chiều chuyển động đi lên, đi xuống hoặc sự thay đổi dấu y')



+ y' đổi dấu từ “-” sang dấu “+” khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực tiểu tại x_0 tương ứng.

+ y' đổi dấu từ “+” sang dấu “-” khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực đại tại x_0 tương ứng.

+ y' không đổi dấu khi qua điểm x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số không đạt cực tại x_0 tương ứng.

3. Tìm cực trị hàm số qua đồ thị hàm $y = f(x)$

+ Quan sát đồ thị hàm số (chiều chuyển động đi lên, đi xuống hoặc đi xuống và đi lên)

+ Đồ thị đi xuống rồi đi lên khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực tiểu tại x_0 tương ứng.

+ Đồ thị đi lên rồi đi xuống khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực đại tại x_0 tương ứng.

+ Đồ thị chỉ đi xuống hoặc chỉ toàn đi lên khi qua điểm x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số không đạt cực tại x_0 .

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 70

Điểm cực tiểu của hàm số: $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là:

A. $x = 0$

B. $x = \pm\sqrt{2}$

C. $x = -\sqrt{2}$

D. $x = \sqrt{2}$

Lời giải:

Ví dụ 71

Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 10$. Khẳng định nào là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$

D. Hàm số có một cực trị tại $x = 0$

Lời giải:

Ví dụ 72

Giá trị cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là:

A. $y_{CD} = -3$

B. $x_{CD} = -3$

C. $y_{CD} = -4$

D. $x_{CD} = -4$

Lời giải:

Ví dụ 73

Cho hàm số: $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là?

A. $x_{CT} = \pm 1$

B. $x_{CT} = 0$

C. $y_{CT} = 3$

D. A(0;3)

Lời giải:

Ví dụ 74

Cho hàm số: $y = x^4 + 2x^2$. Khẳng định nào là đúng?



A. $x = 0$ là điểm cực tiểu

B. $x = 0$ là điểm cực đại

C. Hàm số có cực đại và cực tiểu

D. Hàm số không có cực tiểu, có cực đại

Lời giải:

Ví dụ 75

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-4		-3		-4		$+\infty$

Kết luận đúng về cực trị của hàm số là:

A. Có 1 cực tiểu, có 2 cực đại.

B. Có 2 cực tiểu, có 1 cực đại.

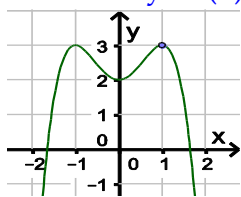
C. Có 1 cực tiểu.

D. Có 2 cực đại.

Lời giải:

Ví dụ 76

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Kết luận đúng về cực trị của hàm số là:



A. $y_{CD} = 0$.

B. $x_{CT} = \pm 1$.

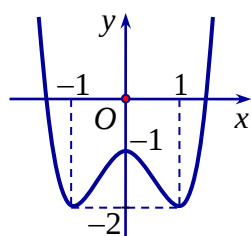
C. $x_{CD} = \pm 1$

D. $y_{CD} = 2$.

Lời giải:

Ví dụ 77

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có điểm cực đại là?



A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-1; 1)$.

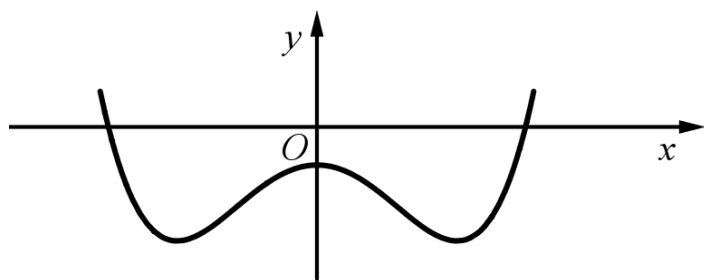
D. $(0; -1)$.

Lời giải:

Ví dụ 78

(Mã đề 103 BGD&ĐT NĂM 2018)

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải:

Ví dụ 79

Giá trị tham số m để hàm số: $y = mx^4 - (m+1)x^2 + (m^2-1)x$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là:

A. $m = -1$

B. $m = 3$

C. $m = -3$

D. $m = 1$

Lời giải:

Ví dụ 80

Số điểm cực trị của hàm số: $y = x(x-1)^2(x+1)$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải:

1.7. Dạng 7. Các bài toán cực trị hàm phân thức

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 81

Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Ví dụ 82

Hàm số nào dưới đây có hai điểm cực trị?

A. $y = x^4 + x^2 + 3$.

B. $y = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x+1}$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải:



Ví dụ 83

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^2}, \forall x \neq 0$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

 Lời giải:

Ví dụ 84

Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{(x-1)^3(x-2)^2}{\sqrt[3]{x}}, \forall x$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

 Lời giải:

2. CÁC DẠNG TOÁN NÂNG CAO

2.1. Dạng 1. Cực trị hàm số $f(u)$ dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$

Ví dụ 85

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

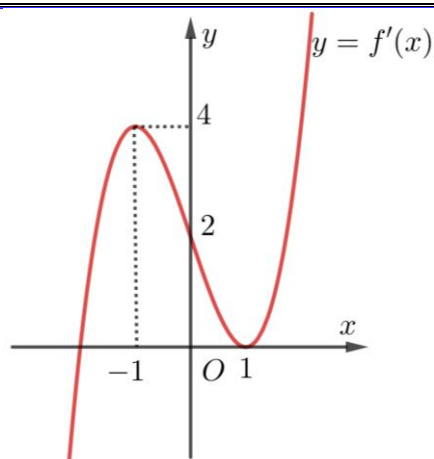
D. $x = -3$.

 Lời giải:

Ví dụ 86

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:





Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

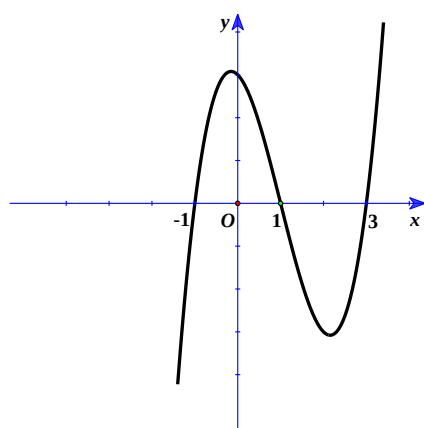
Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 87

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$ là



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:

.....

.....

.....

2.2. Dạng 6. Các bài toán cực trị hàm số bậc 3 chứa tham số

Phương pháp giải

Đây là dạng toán cơ bản nhất về cực trị, tuy nhiên xuất hiện rất nhiều trong các đề thi. Ở dạng toán này ta áp dụng các quy tắc sau đây.

Quy tắc 1: Dùng định lý 1



Bước 1. Tìm Tập xác định D

Bước 2. Tìm $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2: Dùng định lí 2

$$+) x_0 \text{ là điểm cực đại của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$+) x_0 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Chú ý: Hàm số bậc ba dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$$

Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

a. Các bài toán cơ bản

Bài toán 1

Tìm điều kiện để hàm số đạt cực trị tại 1 điểm

Bài toán 2

Viết phương trình đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Giả sử hàm bậc ba dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó ta thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} y_1 = f(x_1) = Ax_1 + B \\ y_2 = f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$$

Suy ra các điểm cực trị $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng $y = Ax + B$

Vậy để viết phương trình đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta làm như sau:

B1: Tính y'

B2: Thực hiện phép chia y cho y' được phần dư là $Ax + B$

B3: KL các điểm cực trị $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng $y = Ax + B$

Chú ý

Sau khi thực hiện phép chia trong trường hợp tổng quát thì phương trình đường thẳng đi qua

$$2 \text{ điểm cực trị của hàm số bậc 3 có dạng: } y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}$$



Bài toán 3

Tìm điều kiện để 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) nằm về hai phía của trục tung

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$

Để 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) nằm về hai phía của trục tung thì $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow \boxed{a \cdot c < 0}$

Bài toán 4

Tìm điều kiện để 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) thỏa mãn điều kiện K liên quan đến định lý Viet

Bài toán 5

Tìm điều kiện để 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = kx + c$

Do đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm uốn $I(x_1; y_1)$ làm tâm đối xứng nên 2 điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đối xứng nhau qua đường thẳng (d)

$$y = kx + c \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ k \cdot \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9} \right) = -1 \end{cases}$$

b. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản**Ví dụ 88**

Cho hàm số $y = f(x) = 3x^3 - 6mx^2 + 3m^2x$. Tìm các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

 **Lời giải:**

.....

.....

.....

Ví dụ 89

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 + 3x - 2$. Tìm các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

 **Lời giải:**

.....

.....

.....

Ví dụ 90

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$. Tìm các giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị.

 **Lời giải:**

.....



Ví dụ 91

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$ tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải:

Ví dụ 92

Cho hàm số $y = -x^3 + (3m-9)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung

Lời giải:

Ví dụ 93

Tìm giá trị m để 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ của hàm số $y = f(x) = x^3 - (m-1)x^2 - x + 2$ thỏa mãn $3(x_1 + x_2) = 2$

Lời giải:

Ví dụ 94

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$

Lời giải:

c. Các bài toán trắc nghiệm tương tự

Ví dụ 95

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = 2; m = 1$



 Lời giải:

Ví dụ 96

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực trị

- A.** $(0; 2)$ **B.** $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$ **C.** $[0; 8]$ **D.** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

 Lời giải:

Ví dụ 97

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$. Khẳng định nào sau đây sai

- A.** $\forall m < 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị. **B.** Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.
C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. **D.** $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị.

 Lời giải:

Ví dụ 98

Cho hàm số $y = f(x) = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$. Tìm các giá trị của m để hàm số không có cực trị

- A.** $m = 0$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 0; m = 3$

 Lời giải:

Ví dụ 99

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $d: y = 2x - 1$ khi:

- A.** $m = \frac{1}{2}$ **B.** $m = \frac{3}{2}$ **C.** $m = 6$ **D.** $m \in \emptyset$

 Lời giải:



Ví dụ 100

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + mx + 1$. Tìm các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

 Lời giải:

Ví dụ 101

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m+1)x^2 + (m^2+2)x + m$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $8(x_1^2 + x_2^2) = 81$

A. $m = \frac{7}{4}$ hoặc $m = -\frac{15}{4}$

B. $m = \frac{7}{4}$

C. $m = -\frac{15}{4}$

D. Không tồn tại m

 Lời giải:

Ví dụ 102

Cho hàm số $y = f(x) = mx^3 + 2mx^2 + (m+2)x - 5$. Tìm các giá trị của m để hàm số không có cực trị

A. $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$

B. $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$

C. $[0; 6]$

D. $(0; 6)$

 Lời giải:

Ví dụ 103

Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 2$ khi:

A. $m = 0$

B. $m = 2$

C. $m = -2$ hoặc $m = 0$

D. $m = 2$ và $m = 0$

 Lời giải:

Ví dụ 104



Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng

- A. $2mx + y - 2m - 2 = 0$ B. $2x + y = 0$ C. $-2x + y = 0$ D. $2mx + y = 0$

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 105

Cho hàm số $y = -x^3 + x^2 - (m^2 - 3m)x - 4$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung

- A. $0 \leq m \leq 3$ B. $0 \leq m \neq 3$ C. $m > 3$ D. $0 < m < 3$

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 106

Tìm giá trị m để 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ của hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-2)x + 2$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 + 10 = 0$

- A. $m = -12$ B. $m = 8$ C. $m = 12$ D. $m = -8$

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 107

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 + 2(1 - 3m^2)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 1$

- A. $m = 0$ hoặc $m = \frac{2}{3}$ B. $m = \frac{2}{3}$ C. $m = 0$ D. Không tồn tại m

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 108



Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1^2 + x_2^2) - x_1 \cdot x_2 = 7$

A. $m = \pm 2$

B. $m = \pm 3$

C. $m = \pm 1$

D. $m = \pm 4$

 Lời giải:

Ví dụ 109

Cho hàm số $y = (1-m)x^3 - 3x^2 + 3x - 5$. Tìm các giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị.

A. $m < 1$

B. $m > -1$

C. $0 < m \neq 1$

D. $m > 0$

 Lời giải:

Ví dụ 110

Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+1)x^2 - (m^2 - m - 6)x$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung

A. $m > 2$

B. $-2 < m < 3$

C. $-2 < m < 1$

D. $m < 4$

 Lời giải:

Ví dụ 111

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

B. $m = \pm 1$

C. $m = 1$

D. $m \neq 0$

 Lời giải:

Ví dụ 112

Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$. Tính giá trị của $a+b+c$

A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

 Lời giải:

.....

.....

.....

2.3. Dạng 3. Các bài toán cực trị hàm số bậc 4 chứa tham số

Phương pháp giải

Đây là dạng toán cơ bản nhất về cực trị, tuy nhiên xuất hiện rất nhiều trong các đề thi. Ở dạng toán này ta chỉ áp dụng các tính chất sau đây.

Qui tắc 1: Dùng định lí 1

Bước 1. Tìm Tập xác định D

Bước 2. Tìm $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Qui tắc 2: Dùng định lí 2

+) x_0 là điểm cực đại của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

+) x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Chú ý

Xét hàm bậc bốn trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

Nếu $-\frac{b}{2a} \leq 0$ tức là a, b cùng dấu hoặc $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$. Khi đó, hàm số chỉ có một điểm cực trị $x = 0$.

Nếu $-\frac{b}{2a} > 0$ tức là a, b trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số của a, b khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị

Tức là nếu $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:



$$A(0; c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

(Chứng minh:

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) &= a\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4 + b\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2 + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; \quad BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

a. Các bài toán cơ bản

Bài toán 1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0; c)$ luôn nằm trên trục Oy và cách đều hai điểm B, C nên tam giác ABC là tam giác vuông cân tại **A**. Điều này tương đương với $AB \perp AC$ (do $AB=AC$ sẵn có)

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right); \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right)$$

Do $AB \perp AC$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -8$$

Bài toán 2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB=AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB=BC$

$$\text{Mặt khác } AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; \quad BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\text{Do vậy } AB = BC \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -24$$

Bài toán 3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0 .

Gọi H là trung điểm của BC thì H nằm trên đường thẳng chứa đoạn BC (hình vẽ).

$$\text{Lúc này } H\left(0; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(0; -\frac{b^2}{4a}\right).$$

Diện tích tam giác ABC sẽ là:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2 \left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{16a^2} \cdot \frac{-2b}{a} \Leftrightarrow S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$$

Bài toán 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Ở bài toán 3 ta có $S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ tìm $\text{Max}\left(-\frac{b^5}{32a^3}\right)$

Bài toán 5

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α .

Ta có: $\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right) \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} - AB^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 8a(1 + \cos \alpha) + b^3(1 - \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$$

Bài toán 6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r .

Ta có: $S_0 = p \cdot r$

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB + BC + AC} = \frac{2\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4|a|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$$

Bài toán 7

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R .

Ta có: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC , khi đó AH là đường cao của tam giác ABC (hình vẽ).

Lúc này diện tích tam giác ABC sẽ là:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Leftrightarrow 2 \cdot R \cdot AH = AB^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot R \cdot \frac{b^2}{4|a|} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Rightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8|a| \cdot b}$$



Bài toán 8

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 điểm cực tạo thành tam giác:

- Nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.
- Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.
- Nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

a. Nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Ta có:

$$A(0; c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Nên với $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 0 = 0 + \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) + \sqrt{-\frac{b}{2a}} \\ 3 \cdot 0 = c + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{b^2}{2a} + 3c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6c = 0$$

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác ABC cân tại A , mà A nằm trên trục Oy nên AO luôn vuông góc với BC . Do vậy để O là trực tâm của tam giác ABC thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB \perp AC$ hoặc:

$$OB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \left(-\frac{b^2}{4a}\right) = 0 \Leftrightarrow b^4 + 8ab - 4ab^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a - 4abc = 0$$

c. Nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để O làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA = OB = OC$. Mà $OB = OC$ nên để O là tâm đường tròn ngoại tiếp thì

$$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{2b^2c}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0 \Leftrightarrow b^3 - 8a - 8abc = 0$$

Bài toán 9

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB, AC với trục hoành.

Ta có: $\triangle AMN$ đồng dạng $\triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AO}{AH}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành

hai phần có diện tích bằng nhau)

$$\Rightarrow AH = \sqrt{2} \cdot AO \Leftrightarrow b^2 = 4\sqrt{2} \cdot |ac|$$

Chú ý: Sau khi tìm được m cần thử lại xem $ab < 0$ để đồ thị hàm số có 3 cực trị hay không.



b. Các bài toán minh họa

Ví dụ 113

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 3$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

Ví dụ 114

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 115

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 5$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 116

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + 3m - 5$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 117

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có góc ở đỉnh cân bằng 45° .

 Lời giải:

.....

.....

.....



Ví dụ 118

Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là 1.

 Lời giải:

Ví dụ 119

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1.

 Lời giải:

Ví dụ 120

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + (1-m)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác:

- Nhận O làm trọng tâm
- Nhận O làm trực tâm
- Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp

 Lời giải:

Ví dụ 121

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2\sqrt{m}x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

 Lời giải:

c. Các bài toán trắc nghiệm tương tự

Ví dụ 122

Cho hàm số $y = -mx^4 + 2mx^2 + m^2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác đều?

- A. $m = \pm\sqrt{3}; m = 0$. B. $m = \pm\sqrt{3}$. C. $m = 0$. D. $m = \sqrt{3}$.

 Lời giải:

Ví dụ 123

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-1)x^2 + m^2$. Tìm các giá trị của m để hàm số có 3 cực trị?

- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m \leq 1$. D. $m = 1$

 Lời giải:

Ví dụ 124

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+17)x^2 + m^2 - 18$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

- A. $m = -16$. B. $m = 18$. C. $m = -18$. D. $m = 16$.

 Lời giải:

Ví dụ 125

Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm các giá trị của m để hàm số có đúng một cực trị

- A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \leq 0$. D. $m < 0$.

 Lời giải:

Ví dụ 126

Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - (m-2)x^2 - 4m^2 + 9m + 3$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có đường kính đường tròn nội tiếp là 4.

- A. $m = -1; m = 2$. B. $m = 0; m = -1; m = 2$. C. $m = 1; m = 2; m = 4$. D. $m = 4$.

 Lời giải:

Ví dụ 127

Cho hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 + m^2 - 2018$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác đều?

- A. $m = 2015$. B. $m = 2016$. C. $m = 2017$. D. $m = 2018$.

 Lời giải:



Ví dụ 128

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 9$. Tìm tập các giá trị của m để hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

- A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(0; +\infty)$.

 Lời giải:

Ví dụ 129

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$

 Lời giải:

Ví dụ 130

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 1$. Tìm các giá trị của m để hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

- A. $m > 3$. B. $-3 < m < 0$. C. $m < -3$. D. $0 < m < 3$

 Lời giải:

Ví dụ 131

Cho hàm số $y = 3x^4 - 2mx^2 + 2017m^2 - 2018$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3?

- A. $m = 3$. B. $m = \sqrt[5]{972}$. C. $m = -3$. D. $m = -4$.

 Lời giải:

Ví dụ 132

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Giá trị nào của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$. D. $(-1; 0)$.



 Lời giải:

Ví dụ 133

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác đều?

A. $m = \sqrt[3]{3}$.

B. $m = -\sqrt[3]{3}$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = -2$.

 Lời giải:

Ví dụ 134

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 2)x^2 + 2$. Tìm tập các giá trị của m để hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

A. $(-\infty; -\sqrt{2})$ hoặc $(0; \sqrt{2})$.

B. $(-\sqrt{2}; 0)$.

C. $(\sqrt{2}; +\infty)$.

D. $(0; \sqrt{2})$.

 Lời giải:

Ví dụ 135

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$?

A. $m = -2$.

B. $m = 2$

C. $m = 4$.

D. $m = -4$.

 Lời giải:

Ví dụ 136

Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2 + 4\sqrt{m} - m)x^2 + m^2 - 9$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất?

A. $m = 2$

B. $m = 4$

C. $m = -2$

D. $m = -4$

 Lời giải:



Ví dụ 137

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + m^2 - 9$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m = -2$.

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

 Lời giải:

Ví dụ 138

Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có góc ở đỉnh cân bằng 45° .

A. $m = 3 + 2\sqrt{2}$

B. $m = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$

C. $m = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + 2$

D. $m = 2 - \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$

 Lời giải:

Ví dụ 139

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 9$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

A. $m = 4$.

B. $m = 0; m = -2$.

C. $m = 2; m = 0$.

D. $m = -4$.

 Lời giải:

Ví dụ 140

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác nhận O làm trực tâm.

A. $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

B. $m = 2, 3; m = -1$

C. $m = -1; m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

D. $m = 3; m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

 Lời giải:



Ví dụ 141

Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2017 - m^4)x^2 + m^2 - 5m + 2018$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất?

A. $m = 2017$

B. $m = \sqrt{2017}$

C. $m = -\sqrt{2017}$

D. $m = 0$

 Lời giải:

Ví dụ 142

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$

B. $m = 5 - \sqrt[3]{3}$

C. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$

D. $m = 5 + \sqrt[3]{3}$

 Lời giải:

Ví dụ 143

Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \sqrt[3]{m}x^2 + 2017m^2 - 2018$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có góc ở đỉnh cân bằng 30° .

A. $m = 14 + 8\sqrt{3}$

B. $m = 14 - 8\sqrt{3}$

C. $m = -14 + 8\sqrt{3}$

D. $m = -14 - 8\sqrt{3}$

 Lời giải:

Ví dụ 144

Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 8m^2 - 25$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là 2

A. $m = 0; m = -2 \pm 2\sqrt{2}$

B. $m = -2 \pm 2\sqrt{2}$

C. $m = -2 + 2\sqrt{2}$

D. $m = -2 - 2\sqrt{2}$

 Lời giải:

Ví dụ 145





Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{3}{2}$

A. $m = -1; m = 2$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

Lời giải:

Ví dụ 146

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{2}x^4 + 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau

A. $m = 0; m = 2$ B. $m = 0; m = -2$ C. $m = -2$ D. $m = 0; m = \pm 2$

Lời giải:

Ví dụ 147

Cho hàm số $y = x^4 + 2(m^2 + m - 1)x^2 + m^2 - 9$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất?

A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

Lời giải:

Ví dụ 148

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^4 - 2x^2 + (1 - m)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $m = 2$ B. $m = 0; m = 2$ C. $m = 0$ D. Đáp án khác

Lời giải:



Ví dụ 149

Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1?

- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = \pm 3$. D. $m = \pm 2$.

 Lời giải:

2.4. Dạng 4. Các bài toán cực trị hàm số phân thức, lượng giác vô tỉ, hàm bậc cao.

Phương pháp giải

Đây là dạng toán cơ bản nhất về cực trị, tuy nhiên xuất hiện rất nhiều trong các đề thi. Ở dạng toán này ta chỉ áp dụng các tính chất sau đây.

Qui tắc 1: Dùng định lí 1

Bước 1. Tìm Tập xác định D

Bước 2. Tìm $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Qui tắc 2: Dùng định lí 2

$$+) x_0 \text{ là điểm cực đại của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$+) x_0 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 150

Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

 Lời giải:

Ví dụ 151

Hàm số $y = \frac{x^2-3}{x-2}$ đạt cực đại tại

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = 0$.



Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 152

Hàm số $y = x^5 + 2x^3 - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 153

Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 154

Trên khoảng $(0; \pi)$, hàm số $f(x) = x + 2\cos x$ đạt cực tiểu tại

A. $x = \frac{\pi}{6}$.

B. $x = \frac{\pi}{3}$.

C. $x = \frac{5\pi}{6}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3}$.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 155

Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

.....

.....

.....



Ví dụ 156

Hàm số $y = \sin 2x - x$ đạt cực tiểu tại

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{6}$.

D. $\frac{7\pi}{6}$.

 Lời giải:

.....

.....

.....

b. Các bài toán tự luận minh họa

Ví dụ 157

Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Tính gần đúng bán kính của đường (C)?

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 158

Cho hàm số $y = \sin x + 2$. Tìm giá trị cực đại của hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 159

Cho hàm số $y = \frac{\cos x + 2}{\cos x - 1}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $\left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

 Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 160

Hàm số $y = \sin^6 \frac{x}{4} + \cos^6 \frac{x}{4}$ đạt cực đại tại các điểm nào?

 Lời giải:

.....

.....



2.5. Dạng 5. Các bài toán cực trị hàm chứa trị tuyệt đối

Phương pháp giải

1. Cực trị hàm $y = |f(x)|$

* Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tiến hành:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục Ox gọi là phần (C_1) .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị còn lại nằm phía dưới trục Ox qua trục Ox , đồng thời bỏ phần đồ thị nằm phía dưới trục Ox gọi là phần (C_2) .

* Từ đó ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm có 2 phần (C_1) và (C_2) đều nằm phía trên Ox :

+ Đồ thị đi xuống rồi đi lên khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực tiểu tại x_0 tương ứng.

+ Đồ thị đi lên rồi đi xuống khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực đại tại x_0 tương ứng.

+ Đồ thị chỉ đi xuống hoặc chỉ toàn đi lên khi qua điểm x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

2. Cực trị hàm $y = f(|x|)$

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$. Từ đồ thị

+ Lấy phần đồ thị (C_1) nằm bên phải Oy .

+ Lấy phần (C_2) là phần đối xứng phần bên phải Oy qua trục Oy .

+ Đồ thị đi xuống rồi đi lên khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực tiểu tại x_0 tương ứng.

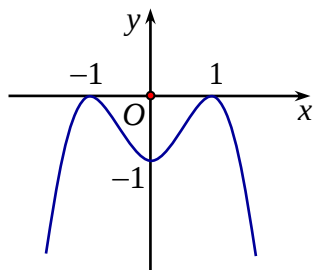
+ Đồ thị đi lên rồi đi xuống khi qua x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số đạt cực đại tại x_0 tương ứng.

+ Đồ thị chỉ đi xuống hoặc chỉ toàn đi lên khi qua điểm x_0 $\Rightarrow$ Kết luận hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

a. Các bài toán trắc nghiệm cơ bản

Ví dụ 161

Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số $y = f(x)$. Kết luận đúng về cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là:



A. Hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

B. Hàm số có 1 cực tiểu và 2 cực đại

C. Hàm số có 6 điểm cực trị

D. Hàm số có 4 điểm cực trị

Lời giải:

.....

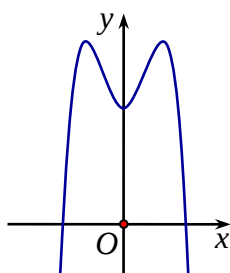
.....

.....



Ví dụ 162

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ sau đây. Kết luận đúng về cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là:



A. Hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

B. Hàm số có 1 cực tiểu và 2 cực đại.

C. Hàm số có 3 cực đại và 2 cực tiểu.

D. Hàm số có 3 cực tiểu và 2 cực đại.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 163

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Kết luận đúng về cực tiểu của hàm số $y = |-x^3 + 3x^2 + 1|$ là:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 3$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 164

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		-2		$+\infty$

Tổng số điểm cực đại của hàm số $y = |f(x)|$ là:

A. Có 2 điểm cực đại **B.** Có 5 điểm cực đại

C. Có 3 điểm cực đại **D.** Có 4 điểm cực đại

Lời giải:

.....

.....

.....



Ví dụ 165

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Mệnh đề nào đúng về đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$?

- A. Hàm số có 2 cực tiểu và 1 cực đại
B. Hàm số có 1 cực đại và 1 cực tiểu
C. Hàm số có 1 cực tiểu và 2 cực đại
D. Hàm số có 3 điểm cực tiểu

 Lời giải:

Ví dụ 166

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 7
B. 3
C. 5
D. 9

 Lời giải:

Ví dụ 167

Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 1$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x - 1|$ là:

- A. Hàm số có 3 điểm cực trị
B. Hàm số có 1 điểm cực trị
C. Hàm số có 4 điểm cực trị
D. Hàm số có 2 điểm cực trị

 Lời giải:

Ví dụ 168

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							

$-\infty$

6

2

$+\infty$

$-\infty$

6

2

$+\infty$

$-\infty$

6

2

$+\infty$

$-\infty$

6

2

$+\infty$

$-\infty$

6

2

$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.

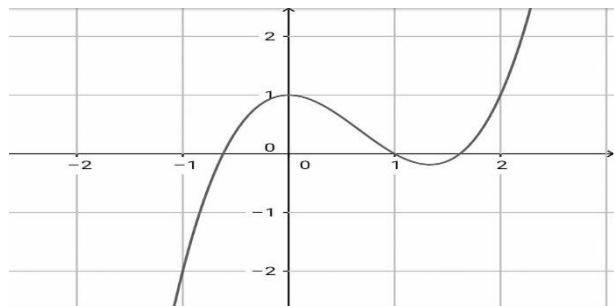
 Lời giải:



Ví dụ 169

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

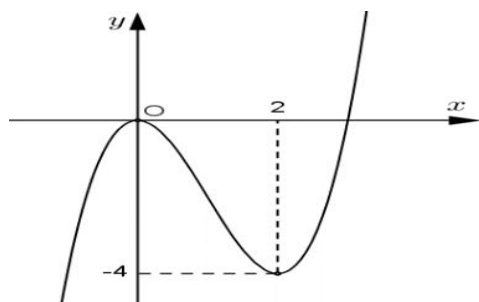


- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Lời giải:

Ví dụ 170

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.

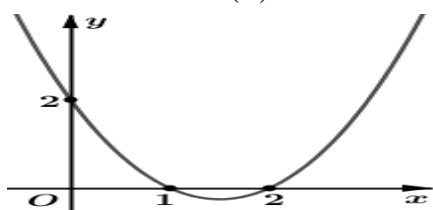


- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải:

Ví dụ 171

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x^2) + 2019$ có mấy điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

.....

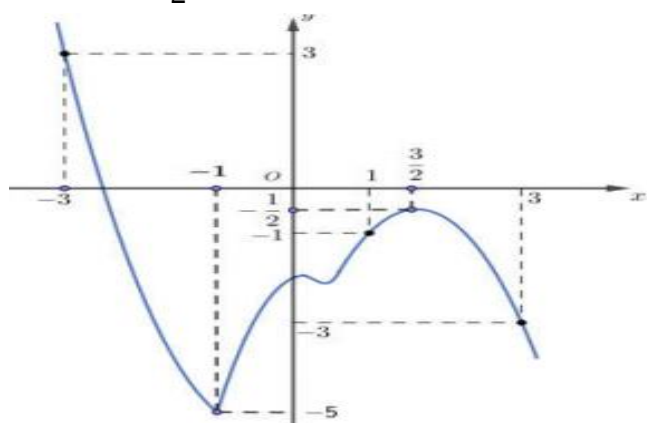
.....

.....

Ví dụ 172

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số

$$y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x.$$



A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

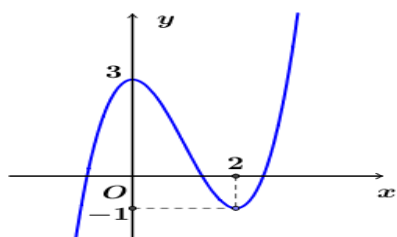
Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 173

Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 3|$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

.....

.....

.....



Ví dụ 174

Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $c > 2019$, $a + b + c - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019|$

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

✍️ Lời giải:

Ví dụ 175

Số nguyên bé nhất của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - 2mx^2 + 5|x| - 3$ có 5 điểm cực trị là:

A. -2.

B. 2.

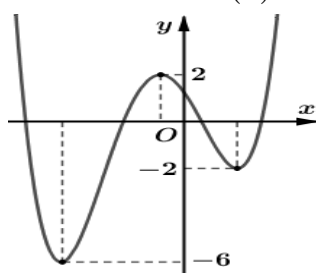
C. 5.

D. 0.

✍️ Lời giải:

Ví dụ 176

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2019) + 3 - 2m|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 1.

B. 5.

C. 10.

D. 13.

✍️ Lời giải:

Ví dụ 177

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

✍️ Lời giải:



Ví dụ 178

Cho $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

 Lời giải:

Ví dụ 179

Cho hàm số $y = f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Tổng số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

A. 3.

B. 9.

C. 5.

D. 7.

 Lời giải:

Ví dụ 180

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Hỏi hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$ có bao nhiêu cực trị.

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

 Lời giải:

Ví dụ 181

Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m|$ có 7 điểm cực trị bằng

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

 Lời giải:

Ví dụ 182

Cho hàm số $y = |x^4 - 8x^2 + m|$. Với những giá trị nào của tham số m hàm số có 5 điểm cực trị.



A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq 0$.

D. $m \leq 0$.

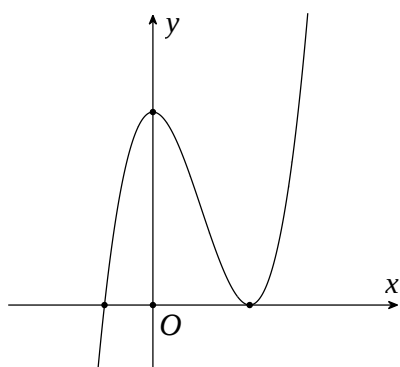
Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 183

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới:



Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

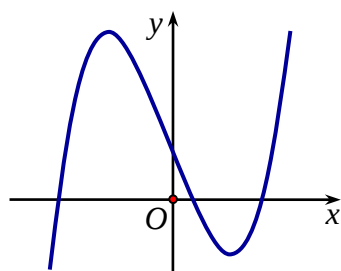
Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 184

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

.....

.....

Ví dụ 185

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi đồ thị hàm số



$y = f(|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 186

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$y = f(x)$	$+\infty$		5		$+\infty$
		-4		-4	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 3.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Lời giải:

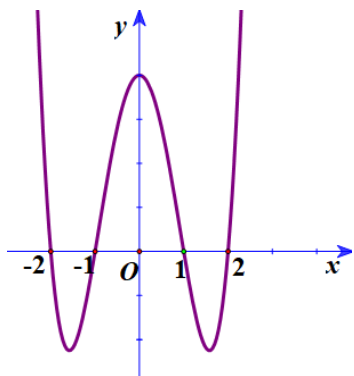
.....

.....

.....

Ví dụ 187

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

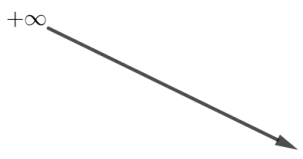
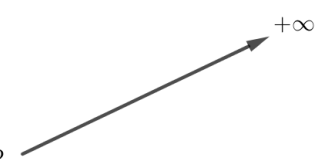
D. 3.



 Lời giải:

Ví dụ 188

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				
			-2		

Hỏi hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

 Lời giải:

