

CHƯƠNG 2: MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1: MẶT NÓN

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ là ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón). Khi đó:

- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón.
- Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh của mặt nón.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

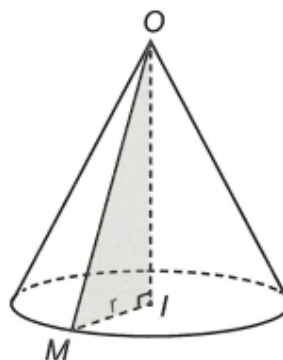
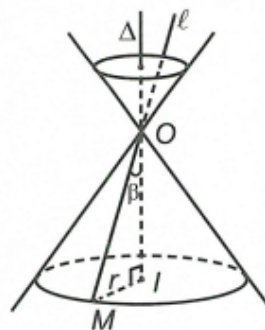
Nhận xét: Nếu M là một điểm tùy ý của mặt nón (N) khác với điểm O thì đường thẳng OM là đường sinh của mặt nón đó.

HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

Khi đó:

- Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Chú ý: Nếu cắt mặt nón (N) bởi hai mặt phẳng song song (P) và (Q) với (P) qua O và vuông góc với Δ thì phần mặt nón (N) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) và hình tròn giao tuyến của (Q) và mặt nón (N) là hình nón.

KHỐI NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

Các khái niệm tương tự như hình nón.

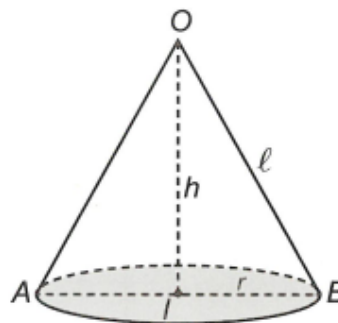
Xét khối nón có hình biểu diễn là hình bên thì ta có nhận xét:

- Nếu mp (P) chứa OI thì thiết diện của mp (P) và khối nón là một hình tam giác cân tại O .
- Nếu mp (P) vuông góc với OI (không chứa O) thì thiết diện của mp (P) và khối nón (nếu có) là một hình tròn. Hình tròn thiết diện này có diện tích lớn nhất khi mp (P) đi qua I .

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và độ dài đường sinh là ℓ thì có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r \ell$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$.
- Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



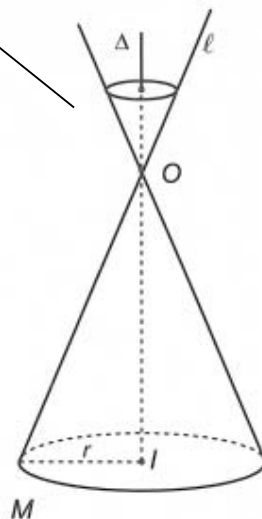
Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình nón hay khối nón ta thường vẽ như hình bên.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

MẶT NÓN

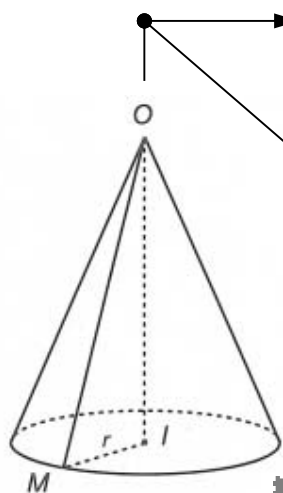
MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ và ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β . Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay.



HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OMI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay.



KHOẢNG NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

CÁC CÔNG THỨC

Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi r \ell$$

Diện tích đáy

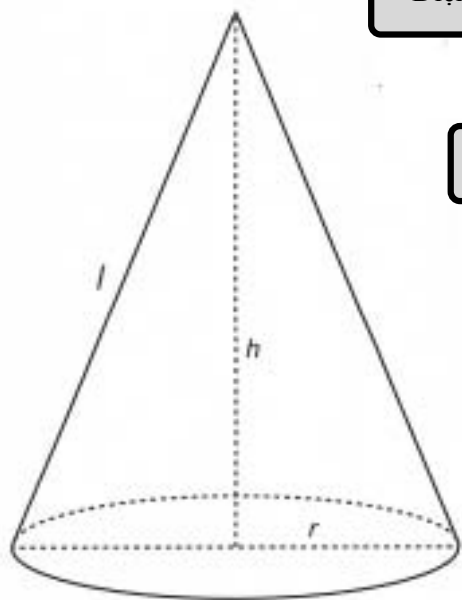
$$S_{ht} = \pi r^2$$

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$$

Thể tích

$$V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón

1. Phương pháp giải

Nắm vững các công thức về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích đáy. Biết sử dụng các kết quả của phân kiến thức quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác... để áp dụng vào tính toán.

Ví dụ: Tính diện tích xung quanh của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân diện tích bằng 2?

- A. $S = 2\sqrt{2}\pi$. B. $S = 4\pi$.
C. $S = 2\pi$. D. $S = 4\sqrt{2}\pi$.

Hướng dẫn giải

Tam giác OAB vuông cân diện tích bằng 2

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OA^2 = 2$$

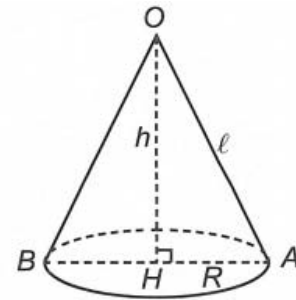
$$\Rightarrow OA = OB = 2$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow h = R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}\pi.$$

Chọn A.



2. Bài tập

Bài tập 1: Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

- A. $6\pi a^2$. B. $24\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $12\pi a^2$.

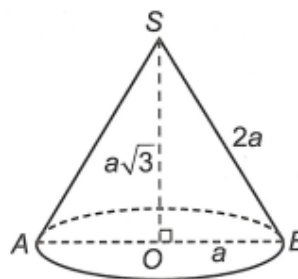
Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \ell = 2a, r = a.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2 = \pi a \cdot 2a + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$



Lưu ý: Diện tích tam giác

$$\text{đều cạnh } x \text{ là: } S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \text{ và}$$

độ dài chiều cao là:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Ở bài toán này $x = 2a$.

Bài tập 2: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 9π . Độ dài đường cao của hình nón bằng

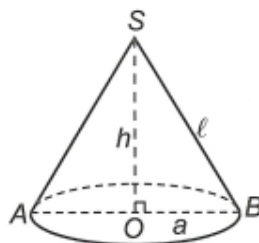
- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi r, ℓ, h lần lượt là bán kính đường tròn đáy, đường sinh, chiều cao của hình nón đã cho.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \pi r^2 = 9\pi \\ \ell = 2r \end{cases}$ nên $\begin{cases} r = 3 \\ \ell = 6 \end{cases}$.



Lại có $h = \sqrt{\ell^2 - r^2}$ do đó $h = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$.

Bài tập 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 1. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S của hình nón đó cắt đường tròn đáy tại M, N . Tính diện tích tam giác SMN , biết góc giữa (α) và đáy hình nón bằng 60° .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi O là tâm đường tròn đáy, H là trung điểm của MN .

Ta có MN là giao tuyến của đường tròn đáy và mặt phẳng (α) , lại có $OH \perp MN, SH \perp MN$.

Do đó góc giữa (α) và đáy hình nón là

$$\widehat{SHO} = 60^\circ.$$

Vì thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc

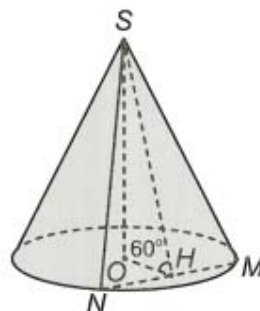
$$\text{vuông bằng } 1 \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOH \text{ vuông tại } O \text{ có } \sin 60^\circ = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } MN = 2\sqrt{SN^2 - SH^2} = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } SMN \text{ là } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2}SH.MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bài tập 4: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO , A và B là hai điểm thuộc



Lưu ý: Tam giác SMN là tam giác cân tại S và $SM = SN = 1$.

đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

$\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của AB , dựng $OH \perp SI$.

Ta có $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều.

Suy ra $SA = SB = AB$.

Mặt khác

$$\widehat{SAO} = 30^\circ \Rightarrow SO = SA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} SA$$

$$\text{và } OA = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{SA \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác SOI ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2 - AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)SA^2} + \frac{1}{\left(\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}SA\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{6}{SA^2} \Leftrightarrow SA = OH\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

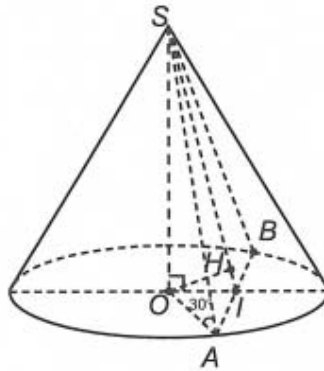
Bài tập 5: Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng $2a$ và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $2(1+\sqrt{5})a$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) là

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d = \frac{a}{2}$. C.
 $d = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử thiết diện là tam giác SAB , khi đó ta có



Lưu ý:

• Ta có: $OH \perp SI$ (1)

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$$

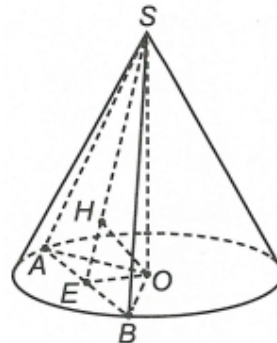
$$\Rightarrow AB \perp OH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$OH \perp (SAB)$, do đó

$$d(O; (SAB)) = OH.$$

• Có thể đặt $SA = x$.



$$\text{Do: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$SA + SB + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{5} + a\sqrt{5} + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow AB = 2a.$$

Gọi E là trung điểm AB , ta có $AB \perp SE$, mặt khác $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOE)$.

Kẻ $OH \perp SE$ tại H , ($H \in SE$).

Ta thấy $OH \perp AB$ vì $OH \subset (SOE) \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Vậy khoảng cách từ S đến (P) là OH (hay $d(O; (P)) = OH$).

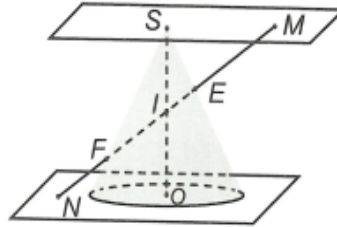
$$EB = \frac{1}{2}AB = a, OB = R = 2a, OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a,$$

$$OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 6: Cho hình nón tròn xoay nằm giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) như hình vẽ. Kẻ đường cao SO của hình nón và gọi I là trung điểm của SO . Lấy $M \in (P)$, $N \in (Q)$, $MN = a$ và đi qua I cắt mặt nón tại E và F đồng thời tạo với SO một góc β . Biết góc giữa đường cao và đường sinh của hình nón bằng 45° . Độ dài đoạn EF là



A. $EF = 2a$.

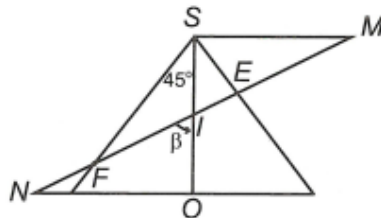
B. $EF = -\frac{a}{2} \tan 2\beta$.

C. $EF = -a \tan 2\beta$.

D. $EF = -2a \tan 2\beta$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Lưu ý:

$$S_{\Delta SFI} + S_{\Delta SEI} = S_{\Delta SFE} (*)$$

$$S_{\Delta SFI} = \frac{1}{2} SF \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SEI} = \frac{1}{2} SE \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SFE} = \frac{1}{2} SF \cdot SE \cdot \sin 90^\circ$$

Xét tam giác NIO có $OI = NI \cdot \cos \beta = \frac{a}{2} \cos \beta$, $NO = NI \cdot \sin \beta = \frac{a}{2} \sin \beta$

Thay vào (*) ta được

$$SI = \sqrt{2} \frac{SE \cdot SF}{SE + SF}.$$

Xét tam giác SEF vuông tại S có

$$\widehat{SEF} = \widehat{ESM} + \widehat{SME} = 45^\circ + 90^\circ - \beta = 135^\circ - \beta.$$

$$SF = SE \cdot \tan \widehat{SEF} = SE \cdot \tan (135^\circ - \beta) = SE \cdot \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}.$$

Vì SI là độ dài đường phân giác trong góc $\widehat{FSE}$ nên

$$SI = \sqrt{2} \cdot \frac{SE \cdot SF}{SE + SF} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cos \beta = \sqrt{2} \frac{SE \tan (135^\circ - \beta)}{1 + \tan (135^\circ - \beta)}$$

$$\Leftrightarrow SE = \frac{a \left[1 + \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1} \right] \cos \beta}{2\sqrt{2} \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}} = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{2} (1 + \tan \beta)}$$

Do đó

$$EF = \frac{SE}{\cos \widehat{SEF}} = \frac{SE}{\cos (135^\circ - \beta)} = \frac{a \sin \beta}{(1 + \tan \beta)(-\cos \beta + \sin \beta)} = -\frac{a}{2} \tan 2\beta.$$

Bài tập 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}.$

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}.$

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}.$

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm của tam giác ABC , khi đó $SO \perp (ABC)$.

Hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA , bán kính đường tròn đáy là OA .

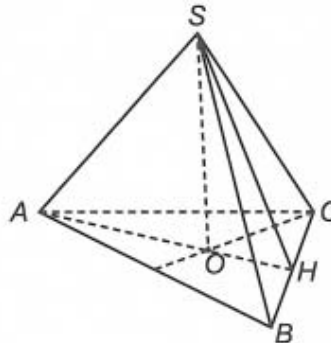
Gọi H là trung điểm của BC thì

$$(\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = \widehat{SHO} = 60^\circ.$$

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên

$$OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$OA = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Tam giác SOH vuông tại O và có $\widehat{SHO} = 60^\circ$ nên

$$SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$

Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$$

Dạng 2: Tính thể tích khối nón, bài toán cực trị

1. Phương pháp

Ví dụ: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$.

C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

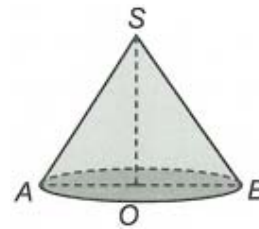
Hướng dẫn giải

Nhìn vào công thức tính thể tích khối nón

Chọn C

$$V_n = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ta thấy cần xác định chiều cao và diện tích đáy (bán kính đáy) của khối nón. Đối với bài toán cực trị ta thường tính toán đưa đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một biến sau đó dùng đánh giá (sử dụng bất đẳng thức, khảo sát hàm số...) để tìm ra kết quả.



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO.$$

$$\text{Ta có } \widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$$

Lại có

$$S_{xq} = \pi R \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA \cdot \sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$$

$$\Rightarrow OA \sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2$$

$$\Rightarrow OA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ, AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quay tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$

B. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$

C. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$

D. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = 1 \\ BC = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A .

Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin 105^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}.$$

Bài tập 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Thể tích V của khối nón (N) là

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$

B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{27}$

C. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$

D. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$

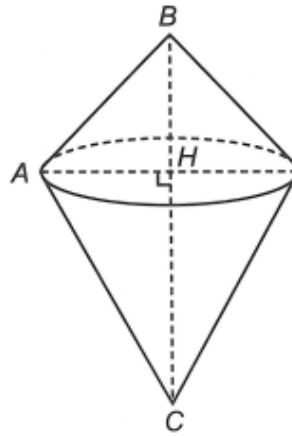
Hướng dẫn giải

Chọn D.

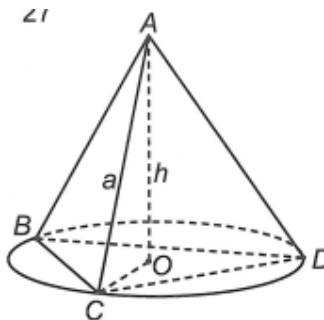
Gọi O là tâm của tam giác đều BCD .

Ta có $AO = h, OC = r$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Lưu ý: V chính là tổng thể tích của hai khối nón: Khối nón có chiều cao BH đường sinh AB và khối nón có chiều cao CH và đường sinh AC .



Suy ra

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}.$$

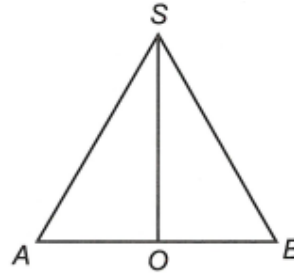
Bài tập 3: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Thể tích khối nón (N) là

A. $V = 3\sqrt{3}\pi$. B. $V = 4\sqrt{3}\pi$. C. $V = 3\pi$. D. $V = 6\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam giác SAB đều vì có $SA = SB$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle SAB$ là trọng tâm tam giác. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là $r = \frac{2}{3}SO = 2 \Leftrightarrow SO = 3$.



$$\text{Mà } SO = SA \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy bán kính đường tròn của khối nón là } R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

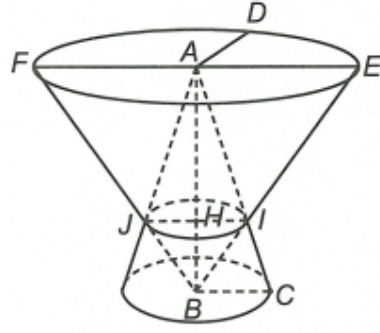
$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi.$$

Bài tập 4: Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B . Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. B. $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA , đáy là đường tròn bán kính $AE = 3\text{ cm}$. Gọi $I = AC \cap BE$, $IH \perp AB$, tại H .

Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH .

Ta có $\triangle IBC$ đồng dạng với $\triangle IEA \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow IA = 3IC$.

Mặt khác $IH \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow IH = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{4}$.

Gọi V_1 ; V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H .

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot AH; \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi IH^2 \cdot BH$$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} IH^2 \cdot AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9a^2}{16} \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}\pi.$$

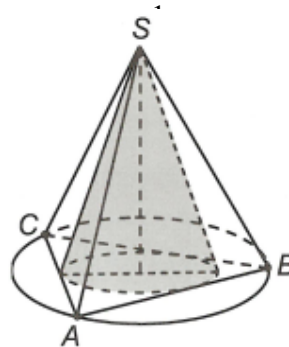
Bài tập 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hai hình nón có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích mặt đáy. Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp

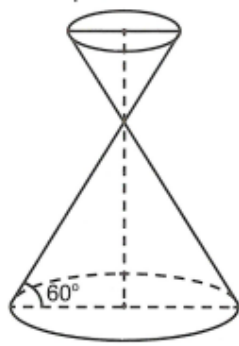


bằng $\frac{2}{3}$ đường cao của tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$

đường cao của tam giác.

$$\text{Suy ra } \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 6: Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (cm^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{27}$.

D. $\frac{1}{64}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi bán kính của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là x, y ($x > y$).

Suy ra chiều cao của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x\sqrt{3}, y\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 30 \\ \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot y\sqrt{3} = 1000\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10\sqrt{3} \\ x^3 + y^3 = 1000\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}, y = \frac{10\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Do hai hình nón đồng dạng nên tỉ số cần tính bằng $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Bài tập 7: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ . Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải

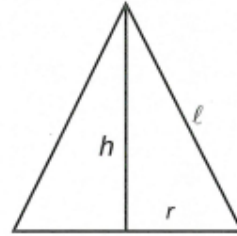
Chọn D.

Gọi h ($0 < h < \ell$) là chiều cao hình nón, suy ra

bán kính $r = \sqrt{\ell^2 - h^2}$.

Suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (\ell^2 h - h^3) = \frac{1}{3} \pi f(h).$$



Xét hàm $f(h) = \ell^2 h - h^3$ trên $(0; \ell)$.

$$f'(h) = \ell^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \\ h = -\frac{\ell}{\sqrt{3}} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được

h	0	$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$	ℓ
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

Ta thấy $\max f(h) = f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\ell^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 8: Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng S . Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r , ℓ lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón)

A. $\ell = 3r$. B. $\ell = 2\sqrt{2}r$. C. $\ell = r$. D. $\ell = 2r$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $S = \pi r \ell + \pi r^2 \rightarrow \ell = \frac{S - \pi r^2}{\pi r}$.

Thể tích

Lưu ý: điều kiện của

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\ell^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{(S - \pi r^2)^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{S(Sr^2 - 2\pi r^4)}.$$

biến khi khảo sát hàm.

Lập bảng biến thiên cho hàm $f(r) = Sr^2 - 2\pi r^4$ trên $(0; +\infty)$, ta thấy

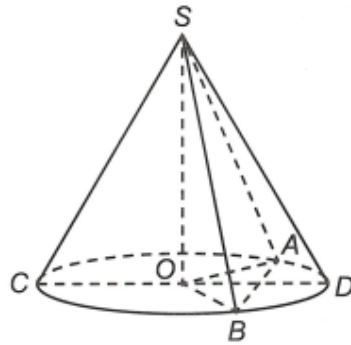
hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \rightarrow \ell = 3r$.

Bài tập 9: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O . Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng a và có diện tích là a^2 . Gọi A, B là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O) . Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



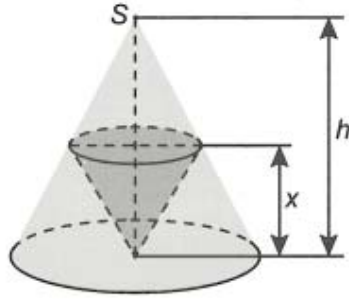
Tam giác cân SCD , có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CD.SO \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}a.SO \rightarrow SO = 2a$.

Khối chóp $S.OAB$ có chiều cao $SO = 2a$ không đổi nên để thể tích lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác OAB lớn nhất.

Mà $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2}r^2.\sin \widehat{AOB}$ (với r là bán kính đường tròn mặt đáy hình nón). Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất khi $\sin \widehat{AOB} = 1$. Khi đó

$$V_{\max} = \frac{a^3}{12}.$$

Bài tập 10: Cho hình nón (N_1) có đỉnh S , chiều cao h . Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_2) như hình vẽ.



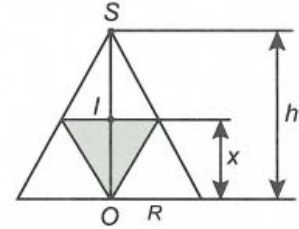
Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h}{3}$. C. $\frac{2h}{3}$. D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với O, I lần lượt là tâm đáy của hình nón $(N_1), (N_2)$; R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của $(N_1), (N_2)$.



Ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón (N_2) là

$$V_{(N_2)} = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 (h-x)^2}{h^2} x = \frac{\pi R^2}{3h^2} x (h-x)^2.$$

Xét hàm $f(x) = x(h-x)^2 = x^3 - 2hx^2 + h^2x$ trên $(0; h)$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ x = \frac{h}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; h)$ tại $x = \frac{h}{3}$.

Bài tập 11: Xét các hình nón có đường sinh với độ dài đều bằng 10cm.

Chiều cao của hình nón có thể tích lớn nhất là

- A. $5\sqrt{3}$ cm. B. $10\sqrt{3}$ cm. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Xét hình nón có chiều cao là x cm và bán kính đáy là y cm (x, y dương).

Ta có $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2$, ta có điều kiện $x, y \in (0; 10)$.

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (100 - x^2) x.$$

Xét hàm số $f(x) = (100 - x^2)x = 100x - x^3$, $x \in (0; 10)$;

$$f'(x) = 100 - 3x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

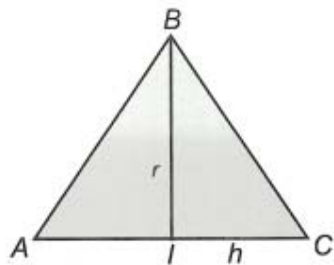
Ta thấy V lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất tại $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Bài tập 12: Giả sử đồ thị hàm số $y = (m^2 + 1)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A < x_B < x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(4; 6)$. B. $(2; 4)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



$$y' = 4(m^2 + 1)x^3 - 4mx = 4x[(m^2 + 1)x^2 - m].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x[(m^2 + 1)x^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} (m > 0) \end{cases}.$$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right); B(0; m^2 + 1);$$

$$C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right).$$

Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi BI^2 \cdot IC = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{m^2}{m^2 + 1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}}.$$

$$\text{Xét hàm } f(m) = \frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}.$$

$$\text{Ta có } f'(m) = \frac{m^8(9 - m^2)}{(m^2 + 1)^6}; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 3 (m > 0).$$

Ta có bảng biến thiên

m	0	3	$+\infty$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$			

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm.

Gọi M điểm di động trên cạnh BC sao cho MH vuông góc với AB tại H .

Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, thể tích lớn nhất của hình nón được tạo thành là

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{8\pi}{3}$.

D. 4π .

Hướng dẫn giải**Chọn C.**Đặt $AH = x \text{ (cm)}$, $0 < x < 6$.Khi đó $BH = 6 - x \text{ (cm)}$.Xét tam giác BHM vuông tại H .

Ta có $\tan \widehat{HBM} = \frac{HM}{BH}$

$$\Rightarrow HM = BH \cdot \tan \widehat{HBM} = (6 - x) \cdot \tan \widehat{HBM}.$$

Mà $\tan \widehat{HBM} = \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Do đó $HM = (6 - x) \cdot \frac{1}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo thành khi tam giác AHM quay quanh cạnh AH

là $V = \frac{1}{3} AH \cdot \pi \cdot HM^2 = \frac{\pi}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{4} (6 - x)^2 = \frac{\pi}{12} (x^3 - 12x^2 + 36x)$ (1).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$, ta có

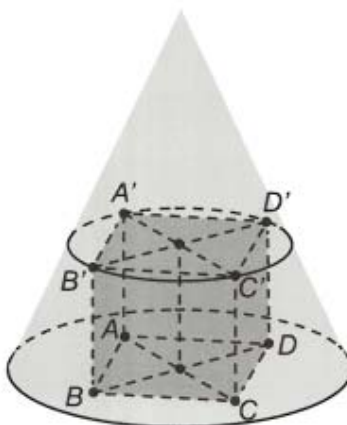
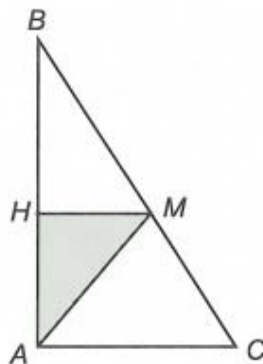
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$

x	0	2	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		32	

Từ (1) và bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của khối nón tạo thành là

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot 32 = \frac{8\pi}{3}.$$

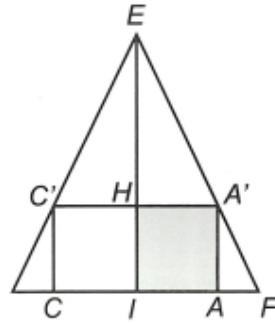
Bài tập 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1.Gọi (N) là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của

hình vuông $ABCD$, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{9\pi}{8}$. D. $\frac{9\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và đi qua mặt phẳng $(AA'C'C)$, kí hiệu như hình vẽ. Với I, H lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và đỉnh A' nằm trên đường sinh EF của hình nón.

Hình lập phương có thể tích bằng 1 nên $AA' = HI = 1, A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $EH = x (x > 0)$. Khi đó, ta có

$$\frac{EH}{EI} = \frac{A'H}{FI} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2FI} \rightarrow FI = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+1}{x} \right) = r.$$

Thể tích khối nón (N) là

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 EI = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 (x+1) = \frac{\pi (x+1)^3}{6x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$.

Lập bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

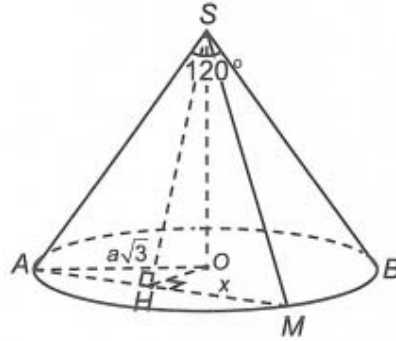
Ta được $\min_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{27}{4}$ tại $x = 2$. Suy ra $\min V_{(N)} = \frac{9\pi}{8}$.

Bài tập 15: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

- A. $\sqrt{3}a^2$. B. $2a^2$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. D. $2\sqrt{3}a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử $\triangle SAM$ là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM = x$ ($0 < x \leq 2a\sqrt{3}$).

Gọi H là trung điểm của AM

$\Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

$$\text{Vì } \widehat{ASB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = 2a \\ SO = \frac{AO}{\tan 60^\circ} = a \end{cases}.$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

$$S_{\triangle SAM} = \frac{1}{2} AM \cdot SH = \frac{1}{2} x \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Ta có

$$S' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \right] = \frac{16a^2 - 2x^2}{8\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}.$$

x	0	$2a\sqrt{2}$	$+\infty$
S'	+	0	-
S		$2a^2$	

$$\Rightarrow S_{\max} = 2a^2.$$

Bài tập 16: Cho mặt cầu (S) bán kính R . Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S) . Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là

- A. $\frac{32\pi R^3}{81}$. B. $\frac{32R^3}{81}$. C. $\frac{32\pi R^3}{27}$. D. $\frac{32R^3}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S' . Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \geq R$. Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là

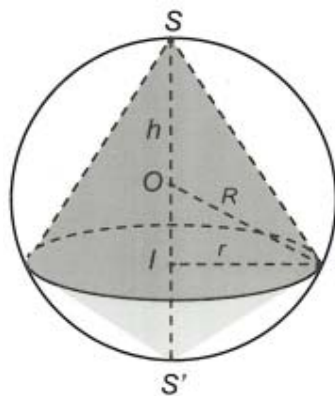
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}hS_{(C)} = \frac{1}{3}h\pi r^2 \\ &= \frac{1}{3}h\pi[R^2 - (h-R)^2] \\ &= \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R; 2R]$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ (loại) hoặc } h = \frac{4R}{3}.$$

Bảng biến thiên



Chú ý: Sau khi tính được

$$V = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R) \text{ ta}$$

có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R) \\ &= \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \\ &= \frac{\pi}{6}h.h(4R - 2h) \\ &\leq \frac{\pi}{6}\left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 \\ &= \frac{32\pi R^3}{81}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}.$$

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	R^3	$\frac{32R^3}{27}$	0

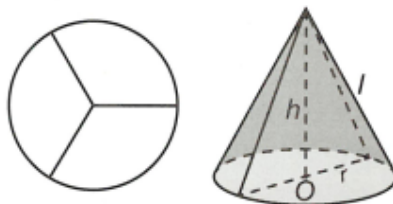
Ta có $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$ tại $h = \frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3 \text{ khi } h = \frac{4R}{3}.$$

Dạng 3 Bài toán thực tế về hình nón, khối nón

Bài tập 1: Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy uốn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. B. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. C. $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. D. $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đổi 60 cm = 6 dm.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $\ell = 6$ dm.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C = 2\pi R = 12\pi$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

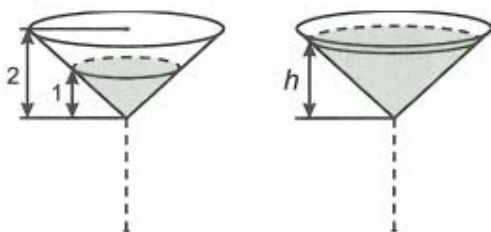
Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là $2\pi r = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi$ (dm) $\Rightarrow r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ (dm).

Đường cao của khối nón tạo thành là $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} (dm^3) = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ (lít).

Bài tập 2: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần

chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01dm).



- A. $h \approx 1,73$ dm. B. $h \approx 1,89$ dm. C. $h \approx 1,91$ dm. D. $h \approx 1,41$ dm.

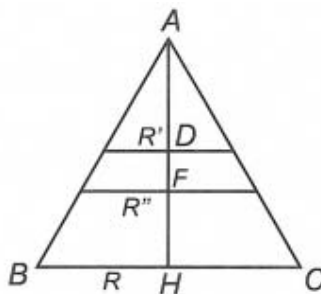
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất $AH = 2$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai $AD = 1$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai $AF = h$.



Theo Ta-lét ta có

$$\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}, \quad \frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2} \text{ suy ra } R' = \frac{R}{2}, \quad R'' = \frac{Rh}{2}.$$

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất $V = 2\pi R^2$.

$$\text{Thể tích phần nước ở ly thứ hai } V_1 = \pi R''^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}.$$

$$\text{Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất } V_2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

$$\text{Mà } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} = 1,91.$$

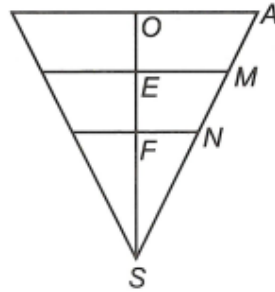
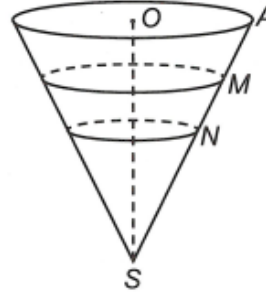
Bài tập 2: Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27$ mét. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh

S. Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm N thuộc SA thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN .

- A. $27(\sqrt[3]{2}-1)$ m.
- B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4}-1)$ m.
- C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)$ m.
- D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi V_1 , V_2 , V lần lượt là thể tích khối nón có đường sinh là SN , SM , SA .

Do $\triangle SEM$ đồng dạng với $\triangle SOA$ nên ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SE}{SO} = \frac{EM}{OA}$.

$$\text{Lại có } \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi EM^2 SE}{\frac{1}{3}\pi OA^2 SA} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SA}{SM}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SM}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SM = \sqrt[3]{13122}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{SN}{SA}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{SN}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SN = \sqrt[3]{6561}.$$

$$\text{Vậy } MN = SM - SN = \sqrt[3]{13122} - \sqrt[3]{6561}.$$

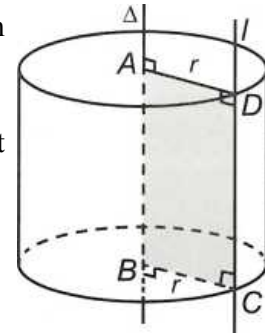
BÀI 2: MẶT TRỤ

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Trong mp (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay mp (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

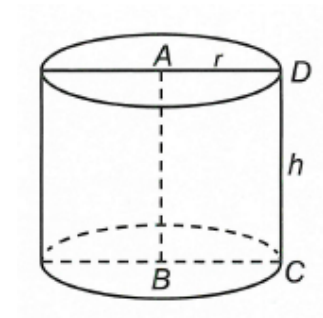
- Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ đó.



HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB , thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

- Đường thẳng AB được gọi là trục.
- Đoạn thẳng CD được gọi là độ dài đường sinh.
- Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ (độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ).
- Hình tròn tâm A , bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B , bán kính $r = BC$ được gọi là hai đáy của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.



KHOẢNG TRỤ TRÒN XOAY

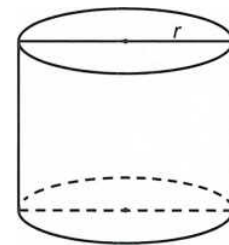
Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó ta gọi là khối trụ tròn xoay hay ngắn gọn là khối trụ.

Các khái niệm tương tự như hình trụ.

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Cho hình trụ có chiều cao là h , bán kính đáy r thì ta có:

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh$.
- Diện tích đáy (hình tròn) $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_D = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ $V_{kt} = B.h = \pi r^2 h$.



Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình trụ hay khối trụ ta thường vẽ như hình bên.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích thiết diện, chiều cao, bán kính đáy, diện tích đáy của hình trụ

Bài tập 1: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $6\pi\sqrt{3}$ B. $6\pi\sqrt{39}$ C. $3\pi\sqrt{39}$ D. $12\pi\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ và

$OO' \parallel (ABCD)$, gọi I là trung điểm của AB

Ta có

$OI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO'; (ABCD)) = d(O; (ABCD)) = OI = 1$

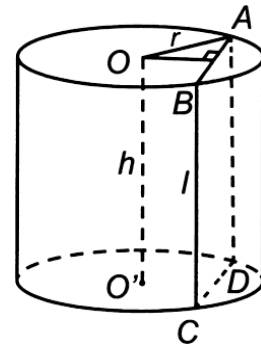
$S_{ABCD} = AB \cdot BC \Leftrightarrow AB \cdot 3\sqrt{3} = 18$

$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AI = \sqrt{3}$

$\Rightarrow r = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = 2$

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi rl = 12\pi\sqrt{3}$.



Bài tập 2: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{14}}{9}$

Hướng dẫn giải

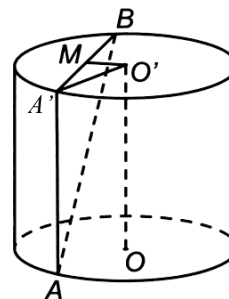
Chọn C.

Gọi r là bán kính đáy.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên độ dài đường sinh bằng $2r$.

Dựng đường sinh AA' .

Gọi M là trung điểm của $A'B$



Lưu ý:

+ $d(OO', AB) = O'M$.

+ Góc giữa AB và mặt đáy là góc $\widehat{ABA'}$.

+ Góc giữa AB và OO' là góc $\widehat{A'AB}$

$$\Rightarrow O'M \perp (AA'B)$$

$$\Rightarrow d(OO', AB) = O'M$$

$$\Rightarrow O'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có } A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{4a^2 - 4r^2}$$

$$\text{Mặt khác } A'M = \sqrt{O'A'^2 - O'M'^2} = \sqrt{r^2 - \frac{3a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 - 4r^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Bài tập 3: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$

C. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{2R}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của OO' .

Khi đó, mặt phẳng $(\alpha) = (IAB)$

Hạ $OH \perp AB, OK \perp IH$. Dễ thấy H là trung điểm của AB và

$OK \perp (IAB)$.

Suy ra

$$(OO', (\alpha)) = (IO, (IAB)) = (OI, KI) = \widehat{KIO} = 30^\circ \text{ (vì)}$$

ΔKIO vuông tại O)

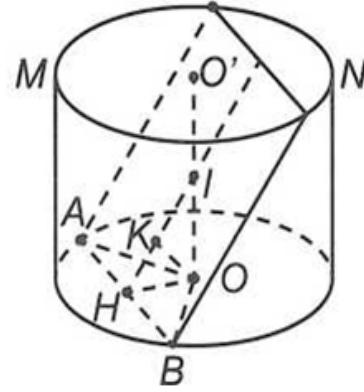
Khi đó $KO = \frac{1}{2}IO = \frac{R}{2}$. Vì ΔHIO vuông tại O nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OI^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{R^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{3}{R^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{R^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



Bài tập 4: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6$, diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60. Bán kính đáy của hình trụ là

A. 5.

B. $3\sqrt{2}$

C. 4

D. $5\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

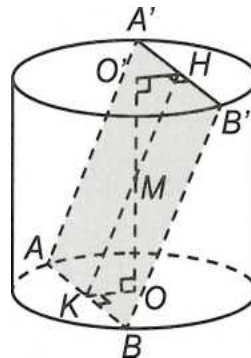
Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60 (cm^2)

$$\text{nên } AB.BB' = 60 \Leftrightarrow 6.BB' = 60 \Leftrightarrow BB' = 10$$

Ta có $MK = 5$

Chiều cao hình trụ bằng $6\sqrt{2}$ (cm) nên

$$MO = 3\sqrt{2}.$$



Lưu ý: Bài tập 5 và Bài tập 6 tuy đề cho khác nhau nhưng thiết diện giống nhau. Ở Bài tập 7 dưới đây thêm một cách hỏi khác nữa dù thiết diện vẫn là vậy.

$$OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7};$$

$$AB = 6 \Rightarrow KB = 3.$$

$$BO = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{7 + 9} = 4$$

Bài tập 5: Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Một hình vuông $ABCD$ có AB, CD là hai dây cung của 2 đường tròn đáy và mặt phẳng $ABCD$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$

B. $5a^2$

C. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{5a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $AB = AD = 2x \Rightarrow S_{ABCD} = 4x^2$.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt đáy của hình trụ.

Xét tam giác $AA'D$ vuông tại A' ta có

$$A'D = \sqrt{AD^2 - AA'^2} = \sqrt{4x^2 - a^2}$$

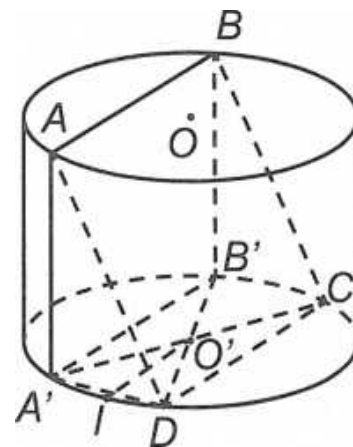
Mặt khác, gọi I là trung điểm của $A'D$ thì ta có:

$$A'D = 2A'I = 2\sqrt{O'A'^2 - O'I^2} = 2\sqrt{O'A'^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}2x\right)^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{4x^2 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - a^2 = 4(a^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = \frac{5a^2}{2}. \text{ Vậy } S_{ABCD} = \frac{5a^2}{2} \text{ (đvdt)}$$



Bài tập 1: Cắt một khối trụ bởi mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DCA} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$

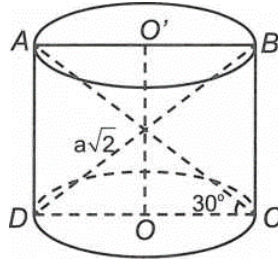
B. $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$

D. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.

Mặt khác xét tam giác ADC vuông tại D , ta có

$$AD = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ và}$$

$$CD = AC \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$\text{Nên } V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3.$$

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 3AB$. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh AB , V_2 là thể tích khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh AD . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là.

A. 9

B. 3

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay xung quanh cạnh AB có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_1 = AD = 3AB$; $h_1 = AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 9\pi AB^3$.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay xung quanh cạnh AD có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_2 = AB$; $h_2 = AD = 3AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 3\pi AB^3$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\pi AB^3}{3\pi AB^3} = 3$.

Bài tập 3: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2}a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành là

A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$

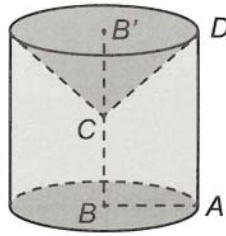
B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$

C. $V = \pi a^3$

D. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Thể tích $V = V_1 - V_2$. Trong đó V_1 là thể tích khối trụ có bán kính đáy là $BA = a$ và chiều cao $AD = 2a$; V_2 là thể tích khối nón có bán kính đáy là $B'D = a$ và chiều cao $CB' = a$

Khi đó $V = V_1 - V_2 = \pi a^2 \cdot 2a - \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Bài tập 4: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a . cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ bằng

A. $3\pi a^3$

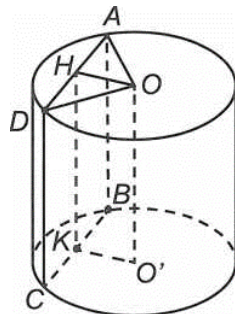
B. $\pi a^3 \sqrt{3}$

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$

D. πa^3

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử hình vuông $ABCD$ là thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) như hình vẽ.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AD, BC .

Ta có $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d(O; (P)) = OH \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$.

Do đó $AD = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $OO' = AB = AD = a\sqrt{3}$.

Vậy nên $V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \pi a^3 \sqrt{3}$.

Bài tập 5: Cắt một khối trụ cao 18cm bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8cm và 14cm . Tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn) là

A. $\frac{2}{11}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{11}$

D. $\frac{7}{11}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

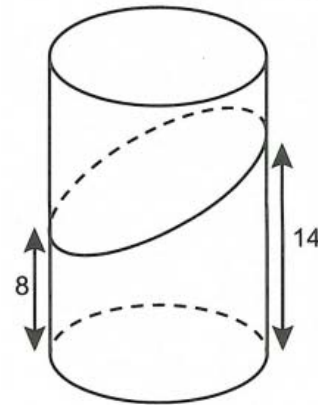
Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích khối nhỏ và khối lớn.

Ta có thể tích khối trụ là $V = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$

(với R là bán kính khối trụ).

Thể tích $V_2 = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{18\pi R^2 - 11\pi R^2}{11\pi R^2} = \frac{7}{11}$.



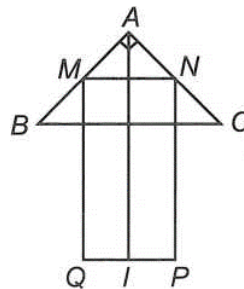
Bài tập 6: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật $MNPQ$ với $MQ = 3MN$ được xếp chồng lên nhau sao cho M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI , với I là trung điểm PQ .

A. $V = \frac{11\pi a^3}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

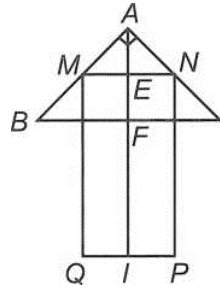
C. $V = \frac{11\pi a^3}{8}$.

D. $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow MN = a, MQ = 2a$.

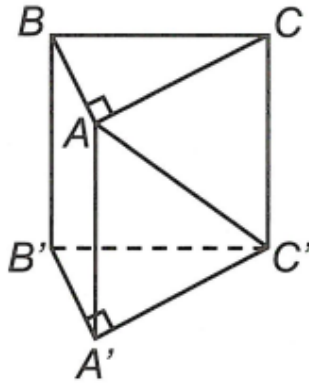
Gọi E, F lần lượt là trung điểm MN và BC .

$$AF = a, EF = \frac{a}{2} \Rightarrow IF = \frac{3}{2}a$$

Vậy thể tích cần tìm là tổng thể tích của khối nón có chiều cao là AF bán kính đáy FB và thể tích khối trụ có chiều cao IF bán kính IQ .

$$V = \frac{1}{3}\pi AF.FB^2 + \pi IF.IQ^2 = \frac{1}{3}\pi.a.a^2 + \pi.\frac{3}{2}a.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17}{24}\pi a^3.$$

Bài tập 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3

B. $2\pi a^3$

C. $4\pi a^3$

D. $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải

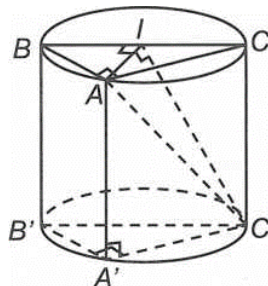
Chọn C.

Gọi bán kính của hình trụ là R .

Ta có $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$

Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A

nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa



AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có $IC' = \frac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$

Xét tam giác CIC' ta có $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Rightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

Bài tập 8: Trong tất cả các khối trụ có cùng thể tích 330, xác định bán kính đáy của khối trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

B. $\sqrt{\frac{165}{\pi}}$

C. $\sqrt[3]{\frac{330}{\pi}}$

D. $\sqrt{\frac{330}{\pi}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$V = 330 \Leftrightarrow h\pi R^2 = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi R^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của khối trụ là

$$S = h.2\pi.R + 2\pi R^2$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{330}{\pi R^2}.2\pi R + 2\pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{660}{R} + 2\pi R^2$$

Ta xem S là 1 hàm số ẩn R . Xét $S' = -\frac{660}{R^2} + 4\pi R$.

$$S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{660}{R^2} + 4\pi R = 0 \Leftrightarrow \frac{-660 + 4\pi R^3}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$$

Lập bảng biến thiên ta có

R	0	$\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$	$+\infty$
S'		- 0 +	
S			

CT

Bài toán hỏi về bán kính đáy nên ta xem bán kính đáy là ẩn, tính diện tích xung quanh theo bán kính đáy.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

Bài tập 9: Thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp hình cầu có bán kính R bằng

A. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

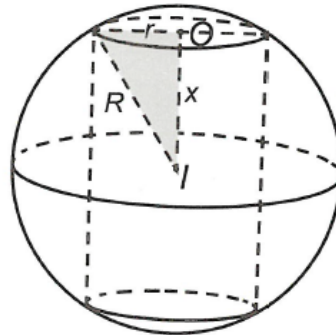
B. $\frac{8\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{8\pi R^3}{27}$

D. $\frac{8\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi X là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt đáy của hình trụ ($0 < X < R$). Bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2x = 2\pi(R^2 - x^2)x = f(x)$

$$f'(x) = 2\pi R^2 - 6\pi x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	R
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f_{\max}$	

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính R là

$$V_{\max} = f\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Dạng 3: Bài toán thực tế về khối trụ.

Ví dụ: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,5m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể

tích bằng tổng thể tích của hai bể trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 1,6 m.

B. 2,5 m.

C. 1,8 m

D. 2,1 m.

Hướng dẫn giải

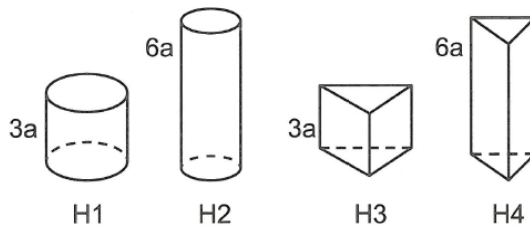
Chọn C.

Gọi r là bán kính bể dự định làm, h là chiều cao các bể.

Ta có: $\pi r^2 h = \pi (1^2 + 1,5^2) h \Rightarrow r = \sqrt{1 + 1,5^2} \approx 1,8 (m)$.

Bài tập 1. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a$, $6a$. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ dưới đây, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a$, $6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt $3a$, $6a$.

Lưu ý: Không phải cắt nhỏ tấm bìa để tạo ra 4 hình bên vì nếu vậy không thỏa đề bài mà lấy tấm bìa lần lượt tạo thành 4 hình trong đề bài.



Trong bốn hình H1, H2, H3, H4 lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là

A. H1, H4.

B. H1, H3.

C. H2, H3.

D. H2, H4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai hình trụ ở hình H1, H2.

C_1, C_2 lần lượt là chu vi đáy của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Ta có: $C_1 = 2\pi R_1 = 6a \Rightarrow R_1 = \frac{3a}{\pi}; C_2 = 2\pi R_2 = 3a \Rightarrow R_2 = \frac{3a}{2\pi}$

$$V_1 = 3a\pi \left(\frac{3a}{\pi} \right)^2 = \frac{27a^3}{\pi}; V_2 = 6a\pi \left(\frac{3a}{2\pi} \right)^2 = \frac{27a^3}{2\pi}$$

Do hai hình H3, H4 là hai hình lăng trụ tam giác đều nên ta có độ dài các cạnh đáy của hai hình H3, H4 lần lượt là $2a; a$.

Thể tích hình H3, H4 lần lượt là:

$$V_3 = 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}a^3; V_4 = 6a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$$

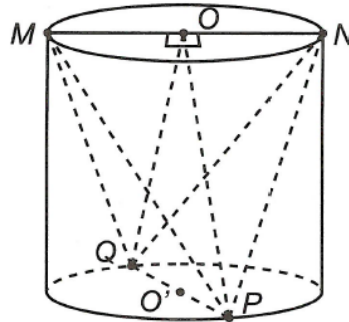
Từ đó ta có hai hình có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt theo thứ tự là H1, H4.

Bài tập 2. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30 dm^3 . Thể tích lượng đá cắt bỏ là bao nhiêu? (Làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- A. $101,3 \text{ dm}^3$. B. $111,4 \text{ dm}^3$.
C. $121,3 \text{ dm}^3$. D. $141,3 \text{ dm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm đáy trên và đáy dưới của hình trụ.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MN \perp (OPQ) &\Rightarrow V_{MNPQ} = 2V_{N.OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot NO \cdot S_{\triangle OPQ} \\ &= 2 \cdot S_{\triangle OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot 6 = 30 \Rightarrow OO' = 5. \end{aligned}$$

Ta có thể tích khối trụ là: $V_{KT} = OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 5 \cdot 3^2 \cdot \pi = 45\pi$.

Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ là: $45\pi - 30 \approx 111,4 (\text{dm}^3)$.

Bài tập 3. Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn

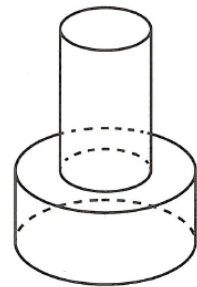
$r_2 = \frac{1}{2}r_1; h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3 , thể tích khối trụ (H_1) bằng

- A. 24cm^3 . B. 15cm^3 . C. 20cm^3 . D. 10cm^3 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là V , thể tích của khối dưới và khối trên lần lượt là V_1 và V_2 .



Ta có: $V = V_1 + V_2$

$$\text{Mà } r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1 \text{ nên } V_2 = h_2 \cdot \pi r_2^2 = 2h_1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}V_1$$

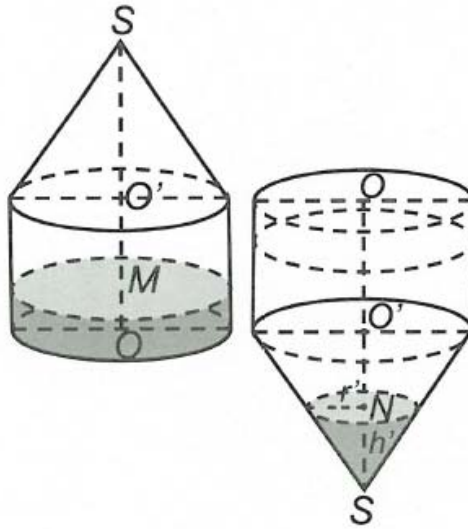
$$\Rightarrow 30 = V_1 + \frac{1}{2}V_1 \Rightarrow V_1 = 20.$$

Bài tập 4. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình sau. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng h . Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo h là

- A. $\frac{h}{8}$ B. $\frac{3h}{8}$ C. $\frac{h}{2}$ D. $\frac{h}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$$\text{Thể tích chất lỏng } V = \pi r^2 \cdot \frac{1}{24}h = \frac{1}{24}\pi r^2 \cdot h$$

$$\text{Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là } V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$

$$\text{Mà } \frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h} \cdot r. \text{ Do đó } V' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h'}{h} \cdot r\right)^2 \cdot h' = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2}$$

$$\text{Theo bài ra } V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}.$$

Bài tập 5. Công ty của ông Bình dự định đóng một thùng phi hình trụ (có đáy dưới và nắp đậy phía trên) bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1 m² thép không gỉ là 350000 đồng.

Với chi phí bỏ ra để làm cái thùng phi không quá 6594000 đồng, hỏi công ty ông Bình có thể có được một thùng phi đựng được tối đa bao nhiêu mét khối nước? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

- A. 12,56 B. 6,28
C. 3,14 D. 9,52.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi R, h lần lượt là số đo bán kính và chiều cao của thùng phi hình trụ.

Với giả thiết như trên thì diện tích thép không gỉ được dùng tối đa là

$$A = \frac{6594000}{350000} = \frac{471}{25} (\text{m}^2)$$

$$\text{Ta có } S_{\text{tp}} = 2\pi R(R + h) = A \Rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - R$$

Thể tích của thùng phi là $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \left(\frac{A}{2\pi R} - R \right) = \frac{A}{2} R - \pi R^3$ (coi V là hàm số biến R).

$$V' = \frac{A}{2} - 3\pi R^2; V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}, (R > 0)$$

Bảng biến thiên

R	0	$\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$	$+\infty$
V'	+	0	-
V		$\frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có, giá trị lớn nhất của thể tích là

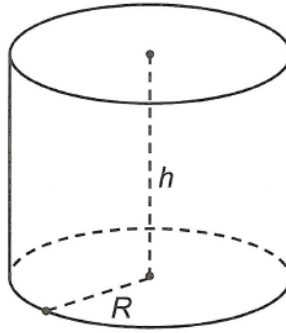
$$\max V = \frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \approx 6,28 \text{ m}^3.$$

Bài tập 6. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r . Tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu Sản xuất thùng là nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ B. $\frac{h}{r} = 2$ C. $\frac{h}{r} = 6$ D. $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$$\text{Ta có } V = \pi h \cdot r^2 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3}$$

Giá thành vật liệu để làm chiếc thùng là

$$T = (2\pi r h + 6\pi r^2) \cdot A = \left(\frac{2V}{r} + 6\pi \cdot r^2 \right) \cdot A = \left(\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 6\pi r^2 \right) \cdot A, \text{ trong đó } A \text{ là giá của một đơn}$$

vị diện tích vật liệu làm mặt xung quanh của thùng. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số

$$\text{dương } \frac{V}{r}, \frac{V}{r}, 6\pi r^2 \text{ được } T \geq 3\sqrt[3]{6\pi V^2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{V}{r} = 6\pi r^2 \Leftrightarrow \frac{V}{\pi r^3} = 6$$

Vậy chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất khi $\frac{h}{r} = 6$.

BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu là: $S(O; R)$. Khi đó $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$.

- Khối cầu hay hình cầu $S(O; R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \leq R$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và một điểm

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A . Nếu:

- +) $OA = R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; R)$.
- +) $OA > R$ thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$.
- +) $OA < R$ thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu $S(O; R)$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ hay $d(I; \Delta) = IH$.

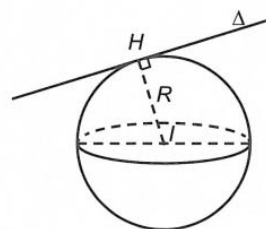
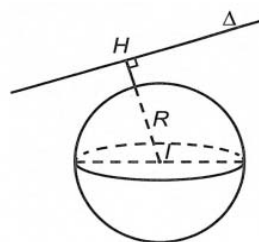
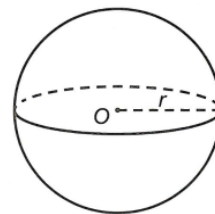
Nếu:

+) $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu hay mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ không có điểm chung.

+) $IH = R$ thì Δ với mặt cầu $S(I; R)$ có một điểm chung duy nhất là H . Ta nói Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I; R)$ và H là tiếp điểm.

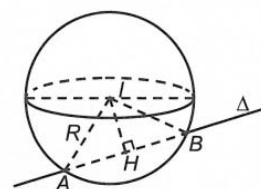
+) $IH < R$: Δ cắt mặt cầu $S(I; R)$ tại hai điểm phân biệt.

Ta thường vẽ hay biểu diễn một mặt cầu hay khối cầu như hình sau:



Nhận xét:

+) $\triangle IAB$
 I , điểm H là
điểm của



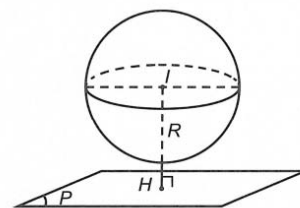
cân tại
trung
 AB và

$$R^2 = IH^2 + AH^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

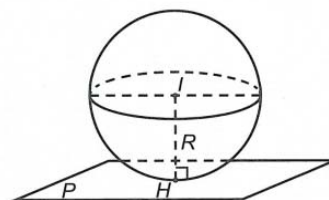
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) hay $d(I; (P)) = IH$. Nếu:

+) $IH > R$: Mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) không có điểm chung.



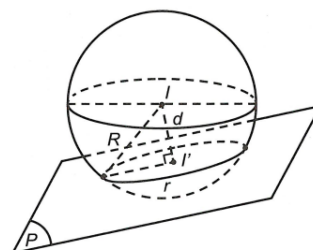
+) Nếu $IH = R$: Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu $S(I; R)$. Lúc này ta nói mặt phẳng (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.



Lưu ý: $IH \perp (P)$

+) Nếu $IH < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' ($I' \equiv H$) và bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - I'I^2}.$$



Nhận xét: Đường tròn giao tuyến có diện tích lớn nhất khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu $S(I; R)$. Đường tròn này ta gọi là đường tròn lớn.

Công thức cần nhớ

Cho mặt cầu $S(I; R)$.

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Các khái niệm cần lưu ý:

- **Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện:** là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- **Trục của đa giác:** là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

Phương pháp giải

Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

Bài tập: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a$, với $0 < a \in R$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

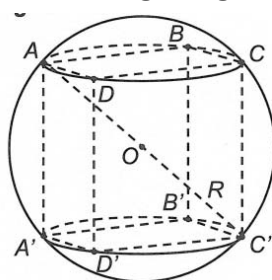
A. $6a$.

B. $4a$.

C. $3a$.

D. $2a$.

Hướng dẫn giải



Giả sử hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$. Dễ thấy điểm O là trung điểm của AC' là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{2} \sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a. \end{aligned}$$

Chọn C.

Bài tập mẫu

Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là điểm I với

- A. I là trung điểm của đoạn thẳng SD .
- B. I là trung điểm của đoạn thẳng AC .
- C. I là trung điểm của đoạn thẳng SC .
- D. I là trung điểm của đoạn thẳng SB .

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ \quad (1).$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$CD \perp SD \Rightarrow \widehat{SDC} = 90^\circ \quad (2).$$

$$\text{Do } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^\circ \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đường kính SC nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm I của đoạn thẳng SC .

Chọn C.

Bài tập 2. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

- A. $V = 3\pi a^3 \sqrt{6}$.
- B. $V = \pi a^3 \sqrt{6}$.
- C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.
- D. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{2},$$

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC$, nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

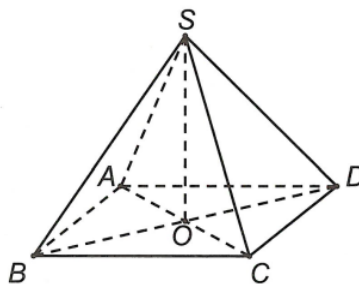
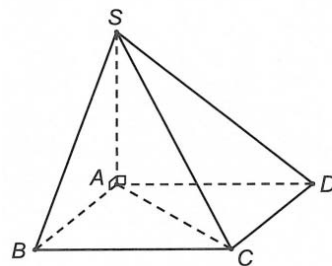
$$\text{Vậy thể tích khối cầu cần tìm là } V = \frac{4}{3}\pi \cdot SO^3 = \pi a^3 \sqrt{6} \quad (\text{đvtt})$$

Chọn B.

Lưu ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều:

$$R = \frac{a^2}{2h}$$



với a : độ dài cạnh bên, h : chiều cao hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh tương tự như Bài tập 2 ta được kết quả

$\Rightarrow$ Ba đỉnh A, B, D đều nhìn cạnh SC dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm SC và

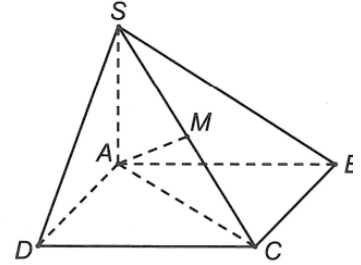
bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn B.



Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\triangle ABC, \triangle BCD$ đều cạnh bằng 2 nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C .

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} (ACD) \perp (ADB) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \\ CI \perp AD \end{cases}$$

$$\Rightarrow CI \perp IB \text{ (do } IB \subset (ABD)) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \triangle ACD = \triangle ABD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow CI = IB \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \triangle CIB \text{ vuông cân tại } I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC.$$

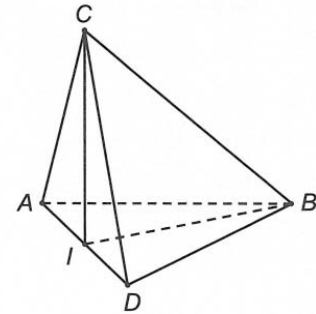
$$\triangle DIB \text{ vuông tại } I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}.$$

Xét $\triangle ADB$ có $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B .

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ.$$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là $R = ID = \sqrt{2}$.

Chọn B.



Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = 4a, AB = 2a, BC = 4a$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

- A. $3a$. B. $2a$. C. a . D. $6a$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$$

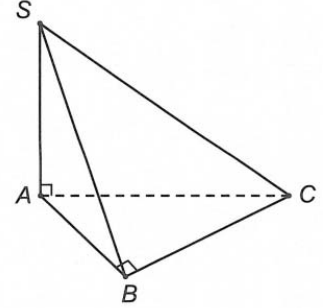
Suy ra hai điểm A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm SC , bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$.

$$\text{Ta có } AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 16a^2 = 20a^2$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 20a^2} = 6a$$

$$\begin{cases} (\alpha) // BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = EF \end{cases} \Rightarrow BD // EF. \text{ Vậy } R = 3a.$$

Chọn A.



Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{3}, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Trong tam giác vuông } ABC \text{ có } AB = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $AB' \cap (ABC) = \{A\}$ và hình chiếu của B lên mặt phẳng (ABC) là B nên góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB' và AB , và bằng góc $\widehat{B'AB}$ (vì tam giác $AB'B$ vuông tại B). Do đó $\widehat{B'AB} = 60^\circ$.

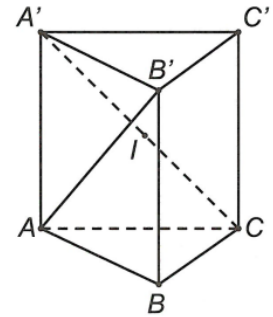
Trong tam giác vuông $AB'B$ có

$$BB' = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'C$ có

$$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}a.$$

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, suy ra $BC \perp A'B$ hay $\widehat{A'BC} = 90^\circ$. Mà $\widehat{A'AC} = 90^\circ$, suy ra hai điểm A, B cùng nhìn $A'C$ dưới một góc vuông.



Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}a$.

Chọn A.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (α) qua A và M đồng thời song song với đường thẳng BD cắt SB , SD lần lượt tại E , F . Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a .

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AM và SO .

Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC và I, E, F thẳng hàng.

$$\text{Lại có } \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SF = \frac{2}{3}SD$$

$$\Rightarrow SF \cdot SD = \frac{2}{3}SD^2 = \frac{2}{3}(SA^2 + AD^2) = 2a^2$$

$$\Rightarrow SF \cdot SD = SA^2.$$

Xét tam giác vuông SAD có $SF \cdot SD = SA^2 \Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF \perp SF$.

Chứng minh tương tự ta có $AE \perp SB$.

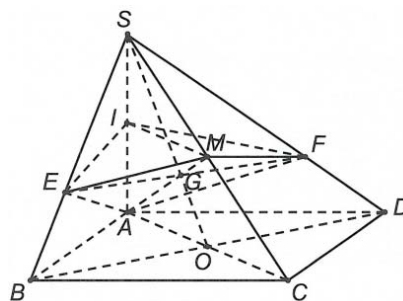
Tam giác $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp SM \\ AF \perp SF \\ AE \perp SE \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, E, M, F có tâm là trung điểm SA và bán kính

$$\text{bằng } \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn C.

Chú ý: Ta có thể làm như sau



Do $EF = (\alpha) \cap (SBD)$ và $(\alpha) \parallel BD$ nên $EF \parallel BD$.

Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$.

Tam giác SAC có $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên $AM \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AMEF) \Rightarrow SC \perp AE$ (1).

Lại có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF \perp SD$. Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên

Chú ý: Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

Bài tập 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (S) bằng

A. $\frac{32\pi a^3}{81}$.

B. $\frac{32\pi a^3}{77}$.

C. $\frac{64\pi a^3}{77}$.

D. $\frac{72\pi a^3}{39}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là tâm của tam giác ABC , SH là trục của đường tròn ngoại tiếp ABC , mặt phẳng trung trực của SA qua E là trung điểm của SA và cắt SH tại I . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Xét trong tam giác SAH ta có

$$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SEI$ và $\triangle SHA$

$$\text{Ta có } \frac{SI}{SA} = \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA \cdot SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2a}{3}.$$

Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (S) bằng $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$.

Chọn A.

Bài tập 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

A. $\frac{7\pi a^2}{5}$.

B. $\frac{7\pi a^2}{3}$.

C. $\frac{7\pi a^2}{6}$.

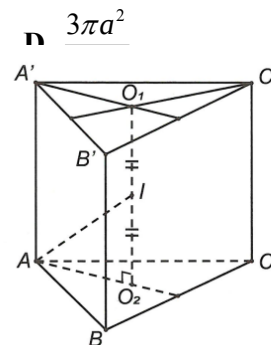
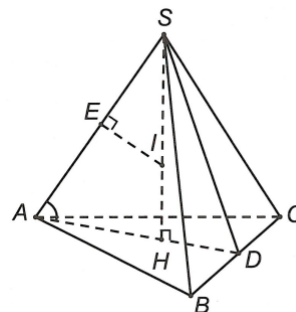
Hướng dẫn giải

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow O_1O_2$ là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi I là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.

Suy ra trung điểm I của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính



$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(a \cdot \sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

Chọn B.

Lưu ý:

Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt O_1O_2 tại I là trung điểm của O_1O_2 .

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là

A. $R = \frac{25}{2}$.

B. $R = \frac{5}{2}$.

C. $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC, SA

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA , cắt d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Dễ thấy tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5},$$

$$IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Chọn B.

Lưu ý: có thể thay mặt phẳng trung trực của SA bằng đường trung trực của SA xét trong mặt phẳng (SAM) .

Bài tập 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

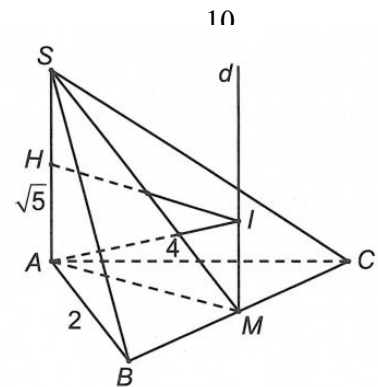
A. $a\sqrt{2}$.

B. a .

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $2a$.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vậy SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

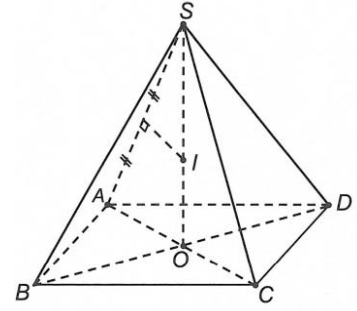
Trong (SAC) gọi (d) là trung trực của SA và I là giao điểm của (d) với SO

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SO) \\ I \in (d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$$

$$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS.$$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn C.

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $S_{mc} = \frac{25\pi a^2}{3}.$

B. $S_{mc} = \frac{32\pi a^2}{3}.$

C. $S_{mc} = \frac{8\pi a^2}{3}.$

D. $S_{mc} = \frac{a^2}{12}.$

Hướng dẫn giải

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là SO . Mặt phẳng trung trực của SB cắt SO tại I , cắt SB tại K thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi H là trung điểm BC thì $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông SHO , ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{SO}{OH} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}.$$

Ta có $\triangle SKI \sim \triangle SOB (g.g).$

$$\Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \frac{SK \cdot SB}{SO} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{75a^2}{36} = \frac{25\pi a^2}{3}.$$

Chọn A.

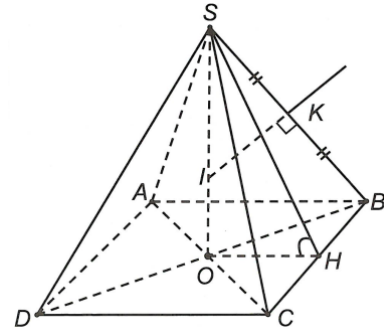
Bài tập 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMNPQ$.

A. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

B. $R = a.$

C. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

D. $R = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$



Hướng dẫn giải

Ta có $(ABCD) // (MNPQ)$. Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.

Mà $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Nên SO là trục của hai đáy $(ABCD)$ và $(MNPQ)$.

Trong mặt phẳng (SAO) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng AM cắt SA , SO tại H , I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCDMNPQ$ và bán kính là IA .

Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$

$$AB = BC = CD = DA = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Lại có } SH = \frac{3}{4}SA = \frac{3}{4}.2a = \frac{3a}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{4}SA = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AO = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle SHI \sim \triangle SOA (g.g) \Rightarrow \frac{HI}{OA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow HI = \frac{OA \cdot SH}{SO} = \frac{a \cdot \frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu cần tìm là } R = AI = \sqrt{HI^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.$$

Chọn B.

Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD , $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{16\pi a^2}{9}$.

C. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

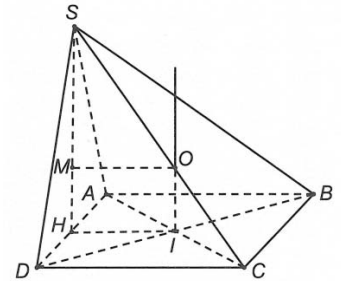
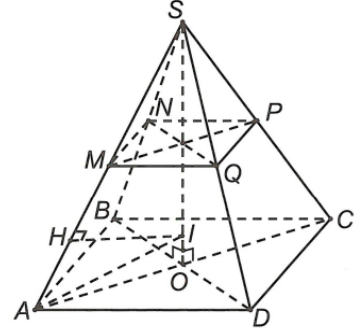
Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AC và BD , qua I dựng đường thẳng d song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABCD)$.

Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD , qua M kẻ đường thẳng d' vuông góc với $mp(SAD)$, d' cắt d tại $O \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính bằng $R = OS = \sqrt{MO^2 + MS^2}$.

Với $OM = IH = \frac{AB}{2} = a, MS = r$ (r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB).

Lại có, $\triangle SAD$ cân tại A , cạnh $AD = a$, đường cao $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra



tam giác SAD đều $r = AM = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R^2 = \frac{4a^2}{3}$ (R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$).

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $S = 4\pi R^2 = \frac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn A.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Biết $\widehat{BAC} = \alpha, BC = a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

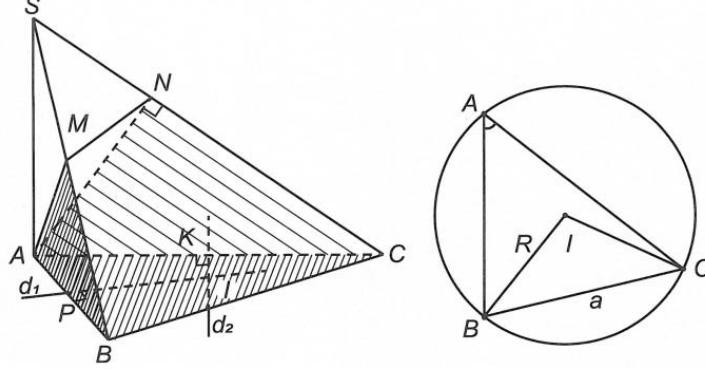
A. $\frac{\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$.

B. $\frac{\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$.

C. $\frac{4\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$.

D. $\frac{4\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$.

Hướng dẫn giải



+) Gọi K, P lần lượt là trung điểm của AC và AB .

$\triangle ACN$ vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACN$.

$\triangle ABM$ vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.

+) Hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$ vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến AB nên gọi d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ thì d_1 qua $P, d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB$. Tương tự, gọi d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACN$ thì d_2 qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC$.

+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (ABC) thì $d_1 d_2$ lần lượt là đường trung trực của các cạnh AB, AC nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, bán kính R của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

+) Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$ ta được $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$.

Chọn B.

Lưu ý:

Cách 2: Vẽ đường kính AE của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó A, M, N, B, C cùng nhìn AE góc 90° .

Áp dụng định lý sin cho ΔABC ta được

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}.$$

Dạng 2. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

Mặt cầu nội tiếp khối đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối đa diện.

Phương pháp giải

Xác định được và hiểu rõ khoảng cách từ tâm của mặt cầu nội tiếp khối đa diện tới các mặt của khối đa diện chính là bán kính của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Từ đó có thể tính được bán kính, diện tích xung quanh của mặt cầu, thể tích của khối cầu và giải được các bài toán liên quan.

Ví dụ: Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

A. $\frac{\pi}{12}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các hình vuông là các mặt của hình lập phương.

Suy ra bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$.

Chọn D.

Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

A. $V = \frac{64\pi a^3}{3}$.

B. $V = \frac{8\pi a^3}{3}$.

C. $V = \frac{32\pi a^3}{3}$.

D. $V = \frac{16\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$, suy ra cạnh hình lập phương là $4a$.

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ cạnh hình lập phương $\Rightarrow R = 2a$.

Vậy $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{3}$.

Chọn C.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và SA vuông góc với $mp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{16}{9}\pi$.

B. $\frac{625}{81}\pi$.

C. $\frac{256}{81}\pi$.

D. $\frac{25}{9}\pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Khi đó

$$V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SBC} + V_{I.SAB} + V_{I.SAC} = \frac{1}{3}r(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC}) = \frac{r.S_{TP}}{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.8.6 = 48;$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle SAB} = 24; S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SAC} = 30 \Rightarrow S_{TP} = 108.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}} = \frac{3.48}{108} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{mc} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{256}{81}\pi.$$

Chọn C.

Dạng 3. Bài toán cực trị**1. Phương pháp giải**

Tương tự như bài toán cực trị về hình nón, hình trụ ta thường đánh giá trực tiếp dựa vào hình hoặc biểu diễn hay quy đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một yếu tố sau đó đánh giá tìm ra đáp án.

Ví dụ: Cho mặt cầu bán kính $R = 5\text{cm}$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $8\pi\text{cm}$. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C) , điểm D thuộc (S) ($D \notin (C)$) và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $20\sqrt{3}\text{cm}^3$.

B. $32\sqrt{3}\text{cm}^3$.

C. $60\sqrt{3}\text{cm}^3$.

D. $96\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng $8\pi\text{cm}$.

$$\text{Suy ra bán kính đường tròn } R = \frac{8\pi}{2\pi} = 4(\text{cm}).$$

$$\text{Suy ra cạnh của tam giác } ABC \text{ bằng } 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

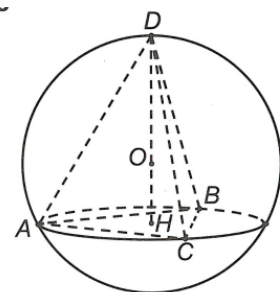
$$\text{Suy ra } S_{\triangle ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}(\text{cm}^2) \text{ không đổi}$$

Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d(D, (ABC))$ lớn nhất

$\Leftrightarrow D$ và O nằm cùng phía SO với mặt phẳng (P) và D, O, H thẳng hàng

$$\Leftrightarrow DH = DO + OH = DO + \sqrt{OA^2 - AH^2}$$

$$= 5 + \sqrt{25 - 16} = 8.$$



$$\text{Khi đó } V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng tâm I và bán kính lần lượt là 2 và $\sqrt{10}$. Các điểm A, B thay đổi thuộc (S_1) còn C, D thay đổi thuộc (S_2) sao cho có tứ diện $ABCD$. Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 3. C. $\sqrt{5}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Để có tứ diện $ABCD$ thì AB và CD không đồng phẳng.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các mặt cầu (S_1) và $(S_2) \Rightarrow R_1 = 2; R_2 = \sqrt{10}$.

Gọi K là trung điểm của CD và h là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Ta $CD = 2CK, AB \leq 2R_1 = 4, \sin(AB, CD) \leq 1$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin(AB, CD) \cdot d(AB, CD) \leq \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot CD \cdot h \\ &\stackrel{\text{Co-si}}{\leq} \frac{4}{3} \sqrt{h^2 + CK^2} \leq \frac{4}{3} \sqrt{IK^2 + CK^2}. \end{aligned}$$

Xét $\triangle ICK$ vuông tại K có $IK^2 + CK^2 = CI^2 = R_2^2$.

$$\text{Khi đó } V_{ABCD} \leq \frac{4}{3} R_2 = \frac{4}{3} \sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp CD \\ AB = 4 \\ h = IK = CK = \sqrt{5} \end{cases}$$

Chọn C.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d , H là trực tâm tam giác SBC . Biết rằng khi S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường (C) . Trong số các mặt cầu chứa đường (C) , bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm BC suy ra $AM \perp BC; SM \perp BC$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , vì tam giác ABC đều cạnh a nên

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MG = \frac{1}{3} MA = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ suy ra } MG \cdot MA = \frac{a^2}{4}.$$

Mặt khác H trực tâm tam giác SBC nên tam giác BMH và tam giác SMC là hai tam giác đồng dạng nên

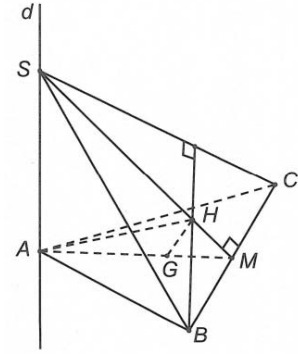
$$\frac{BM}{SM} = \frac{MH}{MC} \Leftrightarrow MH \cdot MS = BM \cdot MC = \frac{a^2}{4}.$$

Do đó $MH \cdot MS = MG \cdot MA$ hay $\frac{MH}{MG} = \frac{MA}{MS}$ nên tam giác MHG và tam giác MAS đồng dạng suy ra $GH \perp SM$.

Vì H thuộc (SAM) cố định khi S thay đổi trên d và $GH \perp SM$ nên (C) là một phần của đường tròn đường kính GM do đó trong các mặt cầu chứa (C) , mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nhận GM làm đường kính nên bán kính mặt cầu

$$R = \frac{GM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn C.



Dạng 4. Bài toán thực tế

1. Phương pháp giải

Nắm vững kiến thức các dạng toán trên để giải bài toán thực tế liên quan đến mặt cầu.

$$EV_0 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi (cm^3)$$

Bài tập: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính bằng 3cm vào một cái ly dạng hình trụ đang chứa nước. Người ta thấy viên bi chìm xuống đáy ly và chiều cao của mực nước dâng lên thêm 1cm. Biết rằng chiều cao của mực nước ban đầu trong ly bằng 7,5cm. Tính thể tích V của khối nước ban đầu trong ly (kết quả lấy xấp xỉ).

A. $V = 282,74cm^3$.

B. $V = 848,23cm^3$.

C. $V = 636,17cm^3$.

D. $V = 1272,35cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi V_0 là thể tích của viên bi.

Gọi R là bán kính của cái ly (không tính vỏ).

Theo bài ra ta có thể tích của cột nước dâng lên 1cm bằng thể tích viên bi nên ta có $\pi R^2 \cdot 1 = 36\pi \Rightarrow R = 6(cm)$

Suy ra thể tích V của khối nước ban đầu trong ly $\pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 36 \cdot 7,5 = 848,23(cm^3)$

Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh là 4, 2 và 3. Tính bán kính của ba hình cầu trên là

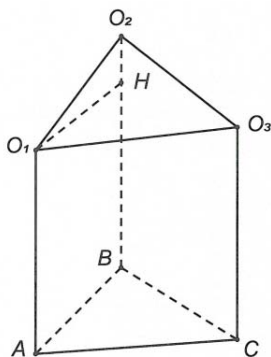
A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 9.

Hướng dẫn giải



Gọi $(O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3)$ lần lượt là 3 hình cầu thỏa mãn. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của O_1, O_2, O_3 trên mặt phẳng. Giả sử $AB = 4, BC = 2, AC = 3$.

Ta có $O_1A = r_1; O_2B = r_2; O_3C = r_3; O_1O_2 = r_1 + r_2; O_2O_3 = r_2 + r_3; O_3O_1 = r_3 + r_1$.

Kẻ $O_1H \perp BO_2 (H \in BO_2) \Rightarrow BH = r_1; O_2H = r_2 - r_1$.

Theo định lý Py-ta-go ta có

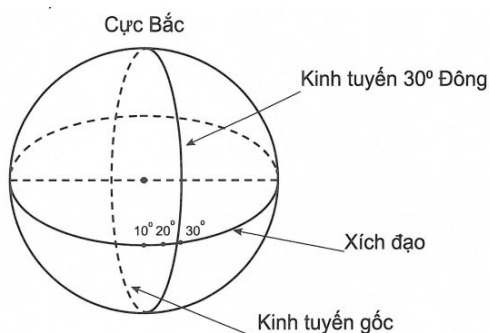
$$O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2 \Leftrightarrow (r_1 + r_2)^2 = AB^2 + (r_2 - r_1)^2 \Leftrightarrow r_1r_2 = \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Tương tự ta có } r_2r_3 = \frac{BC^2}{4}; r_3r_1 = \frac{AC^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } r_1r_2r_3 = \sqrt{\frac{AB^2BC^2CA^2}{64}} = 3.$$

Chọn B

Bài tập 2. Cho quả địa cầu có độ dài đường kinh tuyến 30° Đông là 40π cm (tham khảo hình vẽ).



Độ dài đường xích đạo là:

A. $40\sqrt{3}\pi$ cm.

B. 40π cm.

C. 80π cm.

D. $\frac{80\pi}{\sqrt{3}}$ cm.

Hướng dẫn giải

Đường xích đạo là đường vĩ tuyến lớn nhất. Độ dài đường xích đạo gấp hai lần đường kinh tuyến 30° Đông.

Vậy độ dài đường xích đạo là: $2.40\pi = 80\pi$ (cm).

Chọn C.

Bài tập 3. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là 68,5cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích 49,83cm². Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. ≈ 40 (miếng da).

B. ≈ 20 (miếng da).

C. ≈ 35 (miếng da).

D. ≈ 30 (miếng da).

Hướng dẫn giải

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là 68,5cm, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có

$$2\pi R = 68,5 \Rightarrow R = \frac{68,5}{2\pi}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu: } S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{68,5}{2\pi} \right)^2 \approx 1493,59 (cm^2).$$

Vì mỗi miếng da có diện tích 49,83cm² nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\frac{1493,59}{49,83} \approx 29,97$. Vậy phải cần ≈ 30 miếng da.

Chọn D.

Dạng 5. Dạng toán tổng hợp

1. Phương pháp giải

Sử dụng kiến thức về hình nón, hình trụ, hình cầu ở các dạng toán trên để giải bài toán tổng hợp.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm của BC . Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM , ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{4}$.

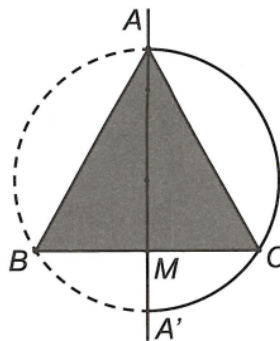
B. 49

C. $\frac{27}{32}$.

D. $\frac{9}{32}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi a là cạnh $\triangle ABC$ đều, suy ra $BM = \frac{a}{2}$; $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi B M^2 \cdot AM}{\frac{4}{3} \pi \cdot I A^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \frac{9}{32}.$$

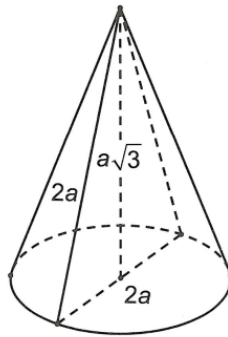
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2 . Khi đó tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



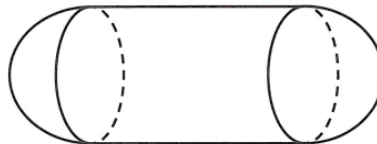
Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$

$$\Rightarrow I = 2a, R = a, h = a\sqrt{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \pi a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^3;$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}.$$

Bài tập 2. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ).



Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\frac{128\pi}{3} m^3$. Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2 .

- A. $48\pi m^2$. B. $50\pi m^2$. C. $40\pi m^2$. D. $64\pi m^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính hình cầu.

Ta có $l_t = 2d_c = 4R_c = 4R_t = 4x$.

Thể tích của bể nước là

$$V = V_t + V_c = \pi R_t^2 l_t + \frac{4}{3} \pi R_c^3 = \pi x^2 \cdot 4x + \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{128\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Diện tích xung quanh của bể nước là

$$S = 2\pi R_t l_t + 4\pi R_c^2 = 2 \cdot 2\pi \cdot 8 + 4\pi \cdot 2^2 = 48\pi \left(m^2\right).$$