

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP.

A. LỜI MỞ ĐẦU

Bài toán mặt cầu ngoại tiếp hình chóp xuất hiện nhiều trong các đề kiểm tra, các đề thi vào đại học. Qua thực tế giảng dạy chúng tôi thấy rằng: Nhiều học sinh tỏ ra lúng túng khi gặp các bài toán có liên quan đến mặt cầu.

Bài viết này cùng trao đổi với các em và bạn đồng nghiệp một vài kỹ thuật giải toán thông qua các ví dụ về mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Các vấn đề thường gặp liên quan đến bài toán mặt cầu ngoại tiếp hình chóp kiểu như: Chứng minh các điểm nào đó cùng nằm trên một mặt cầu? Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp? Hay tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp hay thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp?....

B. NỘI DUNG

I. Cơ sở lý thuyết.

Định lý:

Điều kiện cần và đủ để hình chóp $SA_1A_2\dots A_n$ có mặt cầu ngoại tiếp là đa giác đáy $A_1A_2\dots A_n$ phải là đa giác nội tiếp.

Chứng minh:

1. Điều kiện cần:

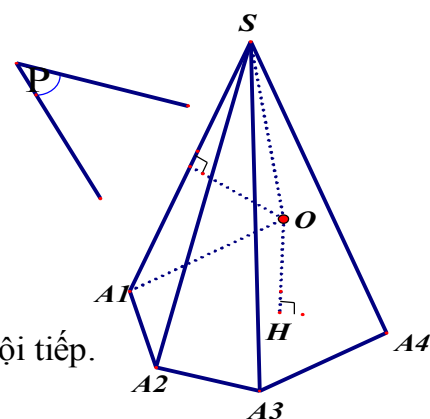
Giả sử tồn tại mặt cầu tâm O ngoại tiếp hình chóp

$SA_1A_2\dots A_n$, tức là ta có $OS=OA_1=OA_2=\dots=OA_n$ (1)

Kẻ OH vuông góc mặt phẳng đáy $(A_1A_2\dots A_n)$

$\Rightarrow HA_1=HA_2=\dots=HA_n$ (2)

Đẳng thức (2) chứng tỏ đáy $A_1A_2\dots A_n$ là một đa giác nội tiếp.



2. Điều kiện đủ

Giả sử $A_1A_2\dots A_n$ là một đa giác nội tiếp. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Qua H dựng đường thẳng Δ vuông góc $(A_1A_2\dots A_n)$. Vẽ mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bất kì của hình chóp (chẳng hạn cạnh SA_1).

Do Δ không song song (P) nên giả sử $\Delta \cap (P) = O$

Khi đó ta thấy $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$, $OA_1=OS$.

Từ đó suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đa giác $SA_1A_2\dots A_n$.

Chú ý: Từ định lí trên ta rút ra các kết luận sau:

Nói riêng mọi hình chóp tam giác (tứ diện), mọi hình chóp đều, đều có mặt cầu ngoại tiếp

II. Các phương pháp xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài toán: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SA_1A_2\dots A_n$.

Phương pháp 1: Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SA_1A_2\dots A_n$.

- Xác định tâm O đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2\dots A_n$
- Dựng trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2\dots A_n$. (Δ là đường thẳng đi qua tâm O đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.)
- Vẽ mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên bất kì của hình chóp.
- Giả sử $I = \Delta \cap (P)$ khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp cần dựng.

Lưu ý:

- a) trong trường hợp sau đây mặt phẳng trung trực có thể thay bằng đường trung trực.
 - + Khi hình chóp đều (vì Δ đi qua đỉnh S)
 - + Khi hình chóp có một cạnh vuông góc với mặt phẳng đáy
- b) Có thể phát hiện trục Δ dựa vào tính chất của một số hình chóp đặc biệt rồi chứng minh thay vì dựng Δ .
- c) Khi dựng mặt phẳng trung trực của cạnh bên nên chọn cạnh bên của hình chóp đồng phẳng với trục Δ để dễ dàng tính toán bán kính R .

Phương pháp 2: Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SA_1A_2\dots A_n$.

- Dựng trục Δ_1 của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2\dots A_n$. (Δ là đường thẳng đi qua tâm O đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.)
- Dựng trục Δ_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác của mặt bên sao cho Δ_1 Δ_2 đồng phẳng
- Giả sử $I = \Delta_1 \cap \Delta_2$, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Phương pháp 3:

Ta chứng minh các đỉnh của hình chóp cùng nhìn hai đỉnh còn lại của hình chóp dưới một góc vuông hoặc tất cả các đỉnh của hình chóp cùng nhìn hai điểm nào đó dưới một góc vuông.

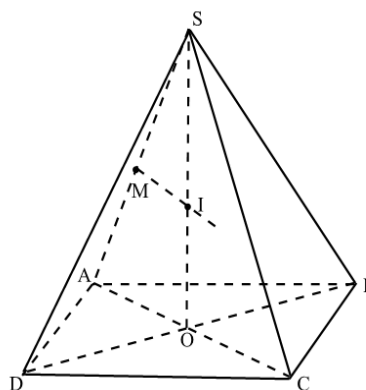
Phương pháp 4: Trong không gian ta dự đoán điểm đặc biệt I nào đó rồi chứng minh I cách đều các đỉnh của hình chóp.

III. Cách xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của một số hình chóp đặc biệt.

1. Trường hợp hình chóp có các cạnh bên bằng nhau.

Giả sử $SA=SB=SC=SD$. Ta dựng $SO \perp (ABCD)$. Trong tam giác SAO kẻ trung trực của SA cắt SO tại I ; Ta được I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp.

Trường hợp này để tính bán kính ta sử dụng tứ giác nội tiếp đường tròn. Cụ thể $ABCD$ nội tiếp đường tròn và có AB cắt CD tại M , khi đó $MA.MB=MC.MD$.



2. Trường hợp hình chóp có một mặt vuông góc với đáy.

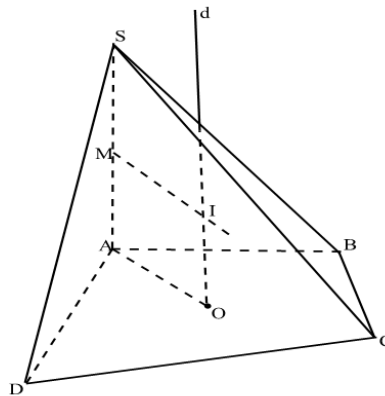
- Xác định trục đường tròn ngoại tiếp đáy

- Xác định trục đường tròn ngoại tiếp của mặt vuông góc đáy
- Giao của hai trục đường tròn là tâm đường tròn ngoại

3. Trường hợp hình chóp có một cạnh vuông góc với đáy.

Giả sử SA vuông góc (ABCD).

- Xác định trục đường tròn ngoại tiếp đáy, d song song SA.
- Xác định trung trực cạnh bên SA cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



Để tính bán kính ta sử dụng định lý Pitago trong tam giác vuông

IV. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có chiều cao $SA=a$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Gọi E là trung điểm AD. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp SCDE theo a.

Phân tích bài toán:

+Nếu nhìn SCDE là hình chóp tam giác S.CDE có mặt đáy CDE là tam giác vuông tại E, ta có ngay trục đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE, khi đó ta tìm trục d' đường tròn ngoại tiếp tam giác chứa mặt bên nào đó của hình chóp sao cho d và d' đồng phẳng hoặc tìm hay dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên nào đó của hình chóp, trong trường hợp này không nên dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên bất kì, vì các cạnh bên của hình chóp không đồng phẳng với d.

+Nếu nhìn SDCE là hình chóp C.SDE đáy tam giác SCE thì trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD sẽ song song CE, khi đó ta có thể dựng mặt phẳng trung trực của CE cắt trục tại tâm I.

Từ đó ví dụ dụ 1 có thể có các cách giải sau

Cách giải thứ nhất.

Tam giác CDE vuông tại E nên gọi O là trung điểm CD và d là đường thẳng qua O song song SA khi đó d là trục đường tròn ngoại tiếp đáy CDE.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và SC.

Ta chứng minh được MN là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SEC

Thật vậy

$CE \perp SE$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp

tam giác SCE.

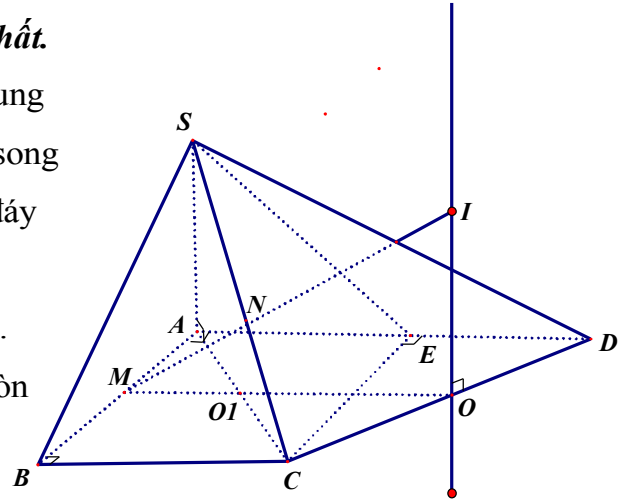
$$\begin{cases} MN \perp CE \\ MN \perp SC \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SCE)$$

Dễ dàng chứng minh được MN và d cắt nhau,

gọi $I = MN \cap d$, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp SCDE

$$\text{Bán kính } R = IC = \sqrt{OI^2 + OC^2},$$

$$\text{trong đó } OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{OI}{ON} = \frac{OM}{OIM} = 3 \Rightarrow OI = \frac{3a}{2}, \text{ Suy ra } R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$



Cách giải thứ hai.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, SC và SE, ta có AMNP là hình bình hành và (AMNP)

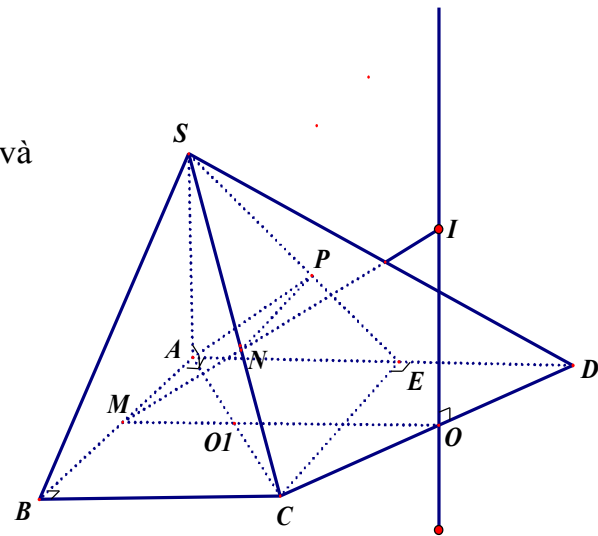
là mặt phẳng trung trực SE, vì

$AP \perp SE$ (Tam giác ASE cân tại A)

$NP \perp SE$ ($NP \parallel AB$, $AB \perp SE$).

Gọi O là trung điểm CD ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Đường thẳng d đi qua O song song SA là trục đường tròn ngoại tiếp đáy ECD.



$MN \subset (AMNP)$ cắt d tại I , ta được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $SECD$.

$$\text{Bán kính } R = IC = \sqrt{OI^2 + OC^2}$$

$$\text{Trong đó } OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{OI}{ON} = \frac{OM}{OIM} = 3 \Rightarrow OI = \frac{3a}{2} \text{ Suy ra } R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Cách giải thứ ba:

Nếu nhìn tứ diện $SECD$ là hình chóp $C.SED$ ta có đường cao CE và mặt đáy là tam giác SED ,
có góc $SED > 90^\circ$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SDE và d là trục đường tròn ngoại tiếp đáy SDE , Khi đó $d \parallel CE$.

Dựng mặt phẳng trung trực (P) của CE đi qua trung điểm M của CE cắt d tại I
Ta được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $CSDE$.

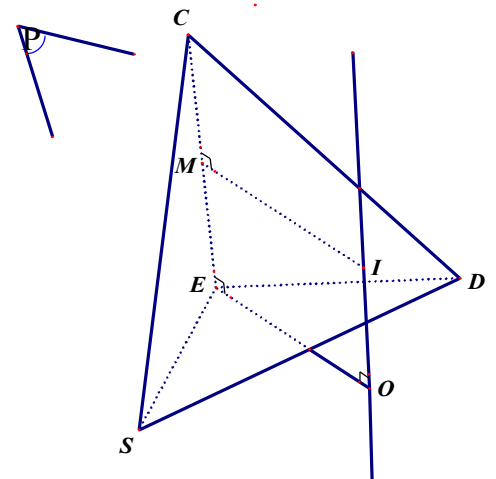
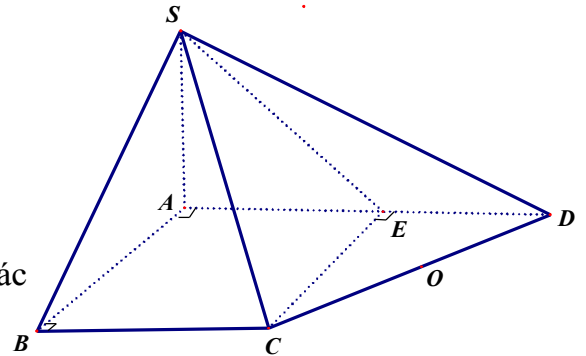
$$\text{Bán kính } R = IE = \sqrt{EM^2 + OE^2}$$

Với $R_1 = OE$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SED .

Tam giác SED có $ED = a$, $SE = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{5}$

Theo định lý hàm số cosin ta tính được góc $SED = 135^\circ$

$$\text{Theo định lý hàm sin } R_1 = \frac{SD}{2 \sin E} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \text{ Suy ra } R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$



Ví dụ 2: Cho hình $S.ABCD$, đường cao $SA=2a$ đáy $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Phân tích bài toán.

+ Hình chóp $SABC$ có SA là đường cao nên theo phương pháp giải chúng ta có thể sử dụng đúng phương pháp dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$. Có trục đường tròn ngoại tiếp đáy song song SA như vậy sẽ chọn mặt phẳng trung trực của cạnh SA , xác định thêm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là xong.

+ Đáy là hình thang cân với $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$ nên ta nghĩ đến việc xem xét các quan hệ vuông góc từ số liệu bài toán và định lý 3 đường vuông góc để chứng minh A, B, C cùng nhìn SD dưới một góc vuông.

Từ đó ta có các cách giải sau:

Cách giải thứ nhất

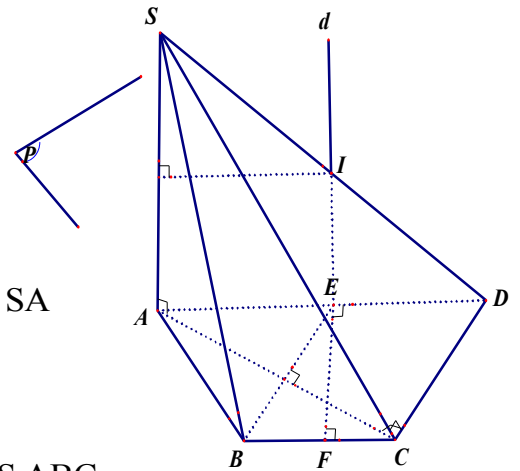
Gọi E, F lần lượt là trung điểm AD và BC
có BE là trung trực AC và EF là trung trực BC
nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mp(SAD) đường thẳng d qua E song song SA
là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực SA .

khi đó $(P) \cap d = I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$

$$\text{Bán kính } R = IA = \sqrt{AE^2 + IE^2} = a\sqrt{2}$$



Cách giải thứ hai.

Ta có $SA \perp AD$.

Gọi E là trung điểm AD khi đó $EC=ED=EA=a$

nên $AC \perp CD$ suy ra $SC \perp CD$

Tương tự $SB \perp BD$

Do đó A,B,C,S,D nằm trên mặt cầu đường kính SD.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC là $R = \frac{SD}{2} = a\sqrt{2}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mặt phẳng (ABC). $AC=b$, $AB=c$, góc $BAC = \alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó theo b, c và α .

Cách giải thứ nhất.

Gọi AA' là đường kính của đường tròn

Khi đó $AC \perp A'C$, $AB \perp A'B$.

Ta chứng minh $AC' \perp A'C'$:

$SA \perp A'C$ (do $SA \perp (ABC)$)

$AC \perp A'C$

$\Rightarrow A'C \perp AC'$.

Mà $AC' \perp SC$

$\Rightarrow AC' \perp A'C'$

Tương tự $AB' \perp A'B'$

Như vậy B,C,B',C' cùng nhìn AA' dưới một góc vuông nên A,B,C,C',B' cùng thuộc mặt cầu đường kính AA'.

Tính bán kính: Gọi R là bán kính mặt cầu đi qua A,B,C,C',B' thì R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong tam giác ABC:

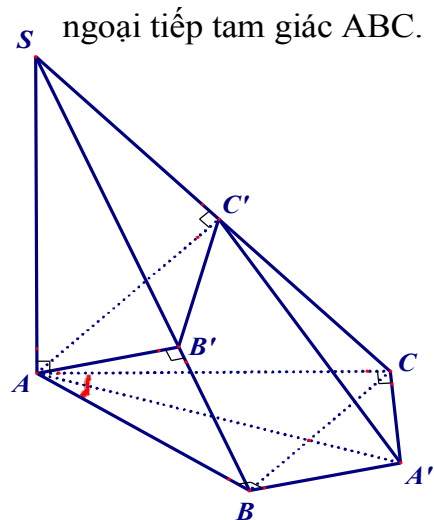
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$= c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

$$\text{Trong tam giác ABC: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp A.BCC'B' là I trung điểm AA' bán kính

$$R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$



Cách giải thứ 2:

Tam giác ABB' vuông tại B' nên trong (ABC) dựng đường

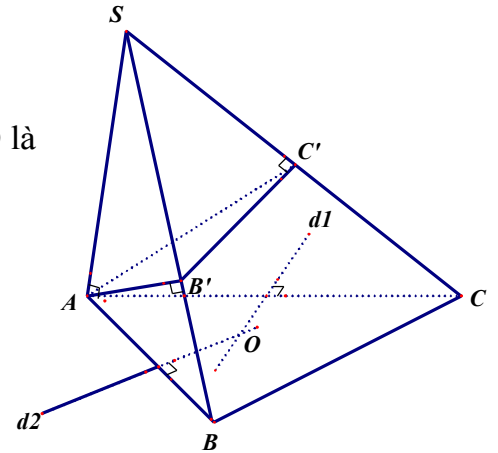
trung trực d_2 của AB , tam giác ACC' vuông tại C' nên trong $mp(ABC)$ dựng đường trung trực d_1 của AC .

Gọi $O = d_1 \cap d_2$ ta có $OA=OB=OB'=OC=OC'$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCC'B'$ đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Bán kính $R=OA$

Trong tam giác ABC :

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$



V. Bài tập tương tự

Bài 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA=SB=a$. mặt phẳng (SAB) vuông góc $(ABCD)$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $SABCD$.

Bài 2: Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB=BC=AC=BD=a$ và $AD=b$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 3: Cho chóp $SABC$ có SA vuông góc đáy và $SA=a$, $AB=b$, $AC=c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp trong các trường hợp sau:

- Góc BAC bằng 90° .
- Góc BAC bằng 60° và $b=c$.
- Góc BAC bằng 120° và $b=c$.

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD=BC=a$, $BC=AD=b$ và $AC=BD=c$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.