

CHỦ ĐỀ 5: NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. HÀM SỐ BẬC BA: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1. Giới hạn, đạo hàm và cực trị

Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai tọa độ điểm cực trị thì theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

- Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$

Chú ý: Đối với hàm số bậc ba ta luôn có $y_{CD} > y_{CT}$ và:

- Nếu $a > 0$ thì $x_{CD} < x_{CT}$.
- Nếu $a < 0$ thì $x_{CD} > x_{CT}$.

2. Bảng biến thiên

TH1: Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ CD $\searrow$		CT	$\nearrow$ $+\infty$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	-	0	+	0
y	$+\infty$			$-\infty$

$\searrow$

CT

$\nearrow$

CD

$\searrow$

$-\infty$

Hệ số $a > 0$

Hệ số $a < 0$

TH2: Hàm số không có điểm cực trị

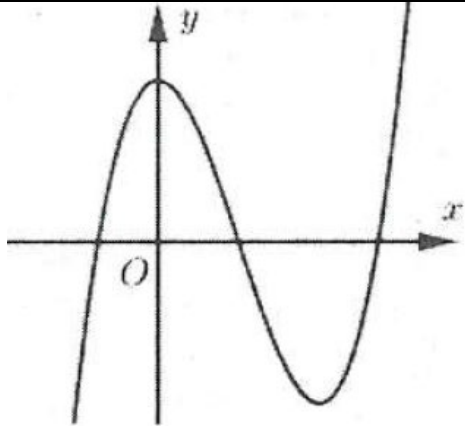
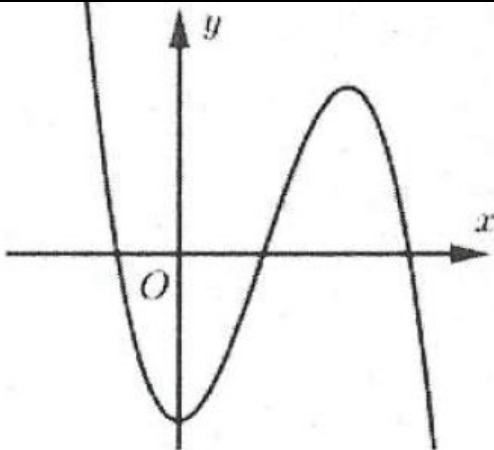
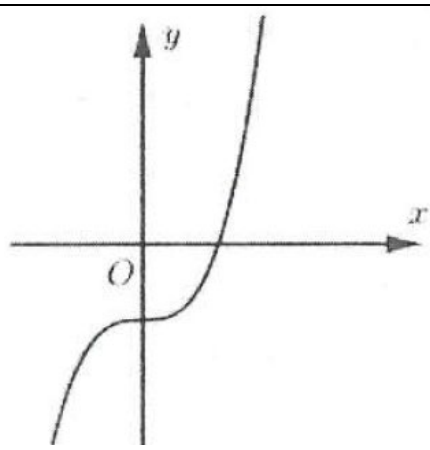
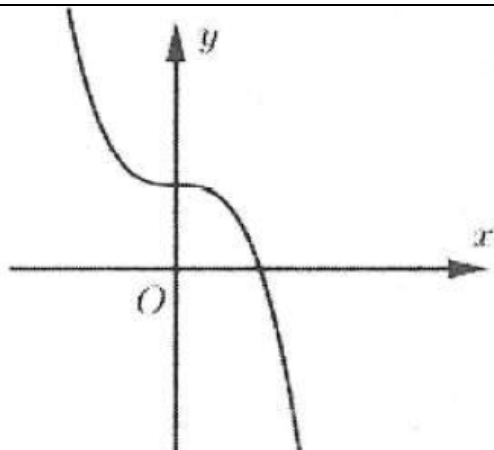
x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Hệ số $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

Hệ số $a < 0$

3. Đồ thị hàm số

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta'_{y'} > 0$	 $x_{CB} < x_{CT}$	 $x_{CB} > x_{CT}$
$\Delta'_{y'} \leq 0$		

4. Phương pháp giải toán

Để nhận diện đồ thị hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ta làm như sau:

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ để xác định hệ số a :

- Nếu $a > 0$ thì nhánh cuối của đồ thị đi lên $x; y$ tiến về vô cùng.
- Nếu $a < 0$ thì nhánh cuối của đồ thị đi xuống $x \rightarrow +\infty$ và $y \rightarrow -\infty$.

Dựa vào giao điểm với trục tung $(0; d)$ suy ra tính chất của hệ số d

Dựa vào số điểm cực trị của đồ thị hàm số suy ra số nghiệm của phương trình $y' = 0$

Dựa vào vị trí của các điểm cực trị, tọa độ các điểm cực trị và các điểm mà đề bài đã cho thuộc đồ thị hàm số.

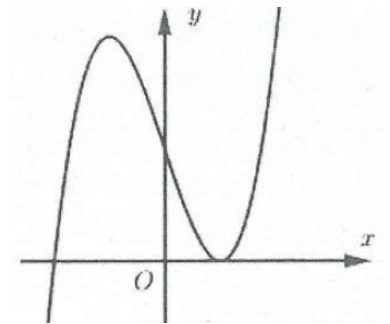
Trong trường hợp đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $x_1; x_2$ ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases} \quad (\text{định lý Viet})$$

Khi đó dựa vào $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ suy ra tính chất của b ; dựa vào $x_1 x_2 = \frac{c}{3a}$ suy ra tính chất của c .

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ví dụ 1: [Đề THPT QG năm 2017] Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
- B. $y = x^4 - x^2 + 1$.
- C. $y = x^4 + x^2 + 1$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nên ta loại đáp án **B** và **C**.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau:

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
- C. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.
- D. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải

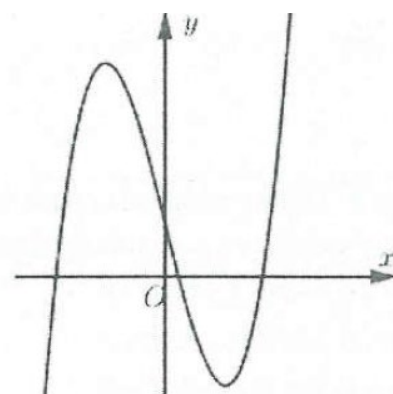
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Hệ số $a > 0$ do đó loại **B** và **C**.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại $x = 0, x = 2$ nên loại **D**. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

- A. $y = x^3 - 4x + 1$. B. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
C. $y = x^3 - 4x - 1$. D. $y = -x^3 + 4x + 1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

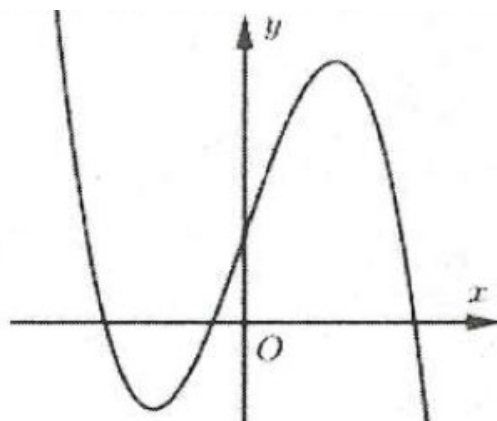
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$ nên ta loại đáp án C

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ nên ta loại đáp án D.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy x_1, x_2 trái dấu nên đáp án ta loại đáp án B. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
C. $y = x^3 - 3x + 1$.
D. $y = -x^3 - 3x + 1$.



Lời giải

Hàm số có hệ số $a < 0$ do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên loại đáp án C.

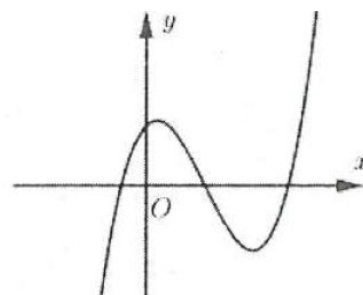
Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1 < 0 < x_2$ nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

Xét đáp án A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ (loại).

Xét đáp án D. $y = -x^3 - 3x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 - 3x < 0 (\forall x \in \mathbb{R})$ (loại). **Chọn B.**

Ví dụ 5: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



$$\text{D. } a > 0, b > 0, c > 0, d < 0.$$

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\text{Mặt khác: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \xrightarrow{a > 0} c > 0 \end{cases} . \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 6: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số

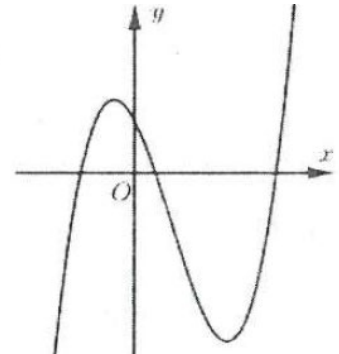
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1 < 0, x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$

$$\text{Mặt khác: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0 \end{cases} . \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 7: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số

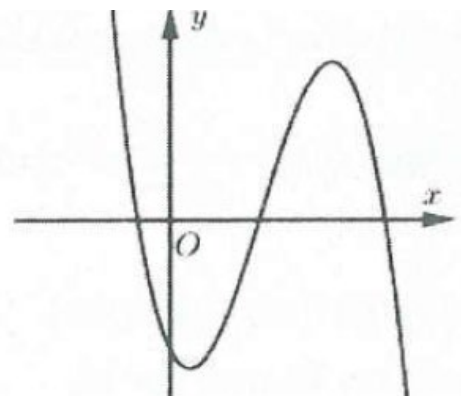
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Lời giải

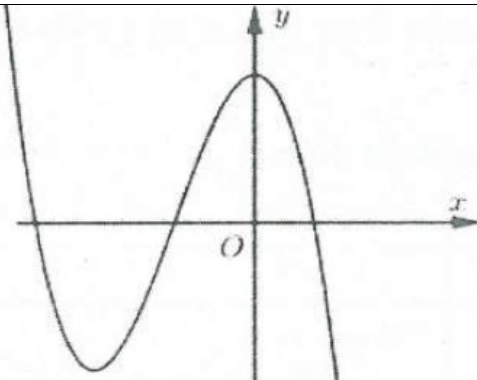
Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1 > 0, x_2 > 0$

Mặt khác: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \xrightarrow{a < 0} c < 0 \end{cases}$. Chọn D.

Ví dụ 8: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b = 0, c > 0, d > 0$.
 B. $a < 0, b = 0, c > 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ (loại đáp án A).

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$

Hàm số có 2 điểm cực trị trong đó $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$ nên $y' = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b < 0$. Chọn C.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
 B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
 C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Dựa vào giả thiết, ta có các nhận xét sau:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow f(0) = d < 0$

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1$ là điểm cực tiểu và x_2 điểm cực đại $\Rightarrow x_{CT} < x_{CD} \Rightarrow$ hệ số $a < 0$.

- Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn tổng $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và tích hai

nghiệm $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$ vì $\begin{cases} -1 < x_1 < 0 \\ 1 < x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$. Chọn D.

II. HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

1. Giới hạn, đạo hàm và cực trị

Giới hạn

- Với $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$.

Đạo hàm và cực trị: $y' = 4ax^2 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$

- Với $ab \geq 0$ thì hàm số có một điểm cực trị $x = 0$.

- Với $ab < 0$ thì hàm số có 3 điểm cực trị $x = 0, x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

2. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	CT	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$CĐ$	$-\infty$

$$a > 0, b \geq 0$$

$$a < 0, b \leq 0$$

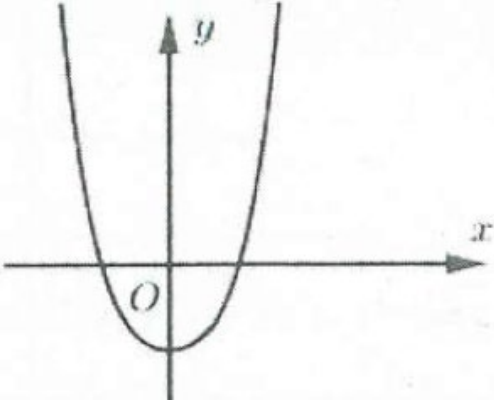
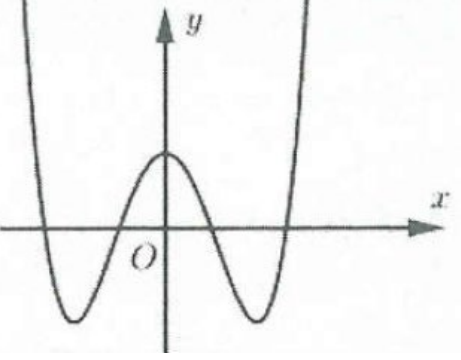
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
y'		$- \quad 0$	$+ \quad 0$	$- \quad 0$	$+$	
y	$+\infty$	$\swarrow CT \quad \nearrow C\mathcal{D} \quad \searrow CT \quad \nearrow$				$+\infty$

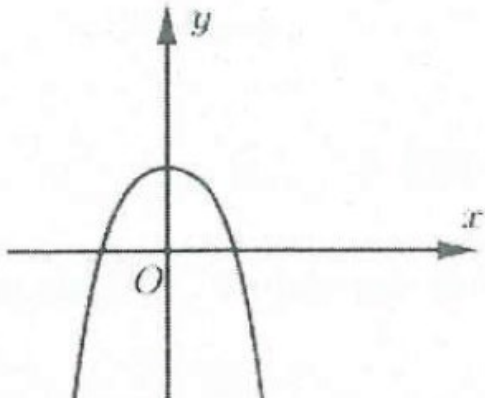
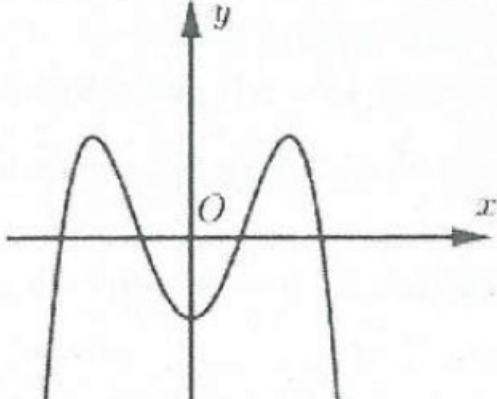
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
y'		$- \quad 0$	$+ \quad 0$	$- \quad 0$	$+$
y		$C\bar{D}$		$C\bar{D}$	
	$-\infty$		CT		$-\infty$

$$a > 0, b < 0$$

$$a < 0, b > 0$$

3. Đồ thị hàm số

	$ab \geq 0$	$ab < 0$
$a > 0$		

$a < 0$		

Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

4. Phương pháp giải toán

Để nhận diện đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) ta làm như sau:

Dựa vào $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ để xác định hệ số a :

Dựa vào giao điểm với trục tung $(0; d)$ suy ra tính chất của hệ số d

Dựa vào số điểm cực trị của đồ thị hàm số và hệ số a để xác định hệ số b .

- Với $ab \geq 0$ thì hàm số có một cực trị.

- Với $ab < 0$ thì hàm số có 3 cực trị.

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

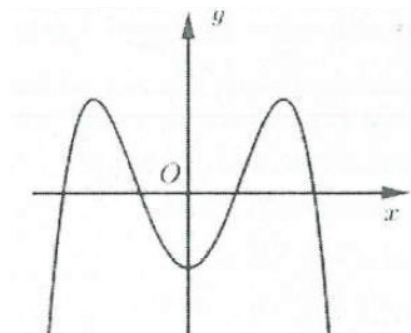
Ví dụ 1: [Đề THPT QG năm 2018] Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Hệ số $a < 0$ nên ta loại đáp án A và B.

Mặt khác hàm số có 3 điểm cực trị nên loại đáp án C. **Chọn D.**

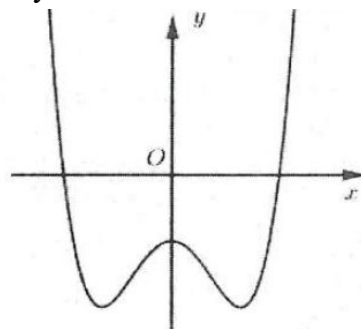
Ví dụ 2: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + x^2 - 1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Hệ số $a > 0$ do đó loại đáp án B và D.

Mặt khác hàm số có 3 điểm cực trị nên loại đáp án C. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tính giá trị của biểu thức

$T = b + 2c$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y			-2		-2	
	$-\infty$			-3		$-\infty$

A. $T = -4$.

B. $T = 1$.

C. $T = -2$.

D. $T = -1$.

Lời giải

Do $y(0) = 2 \Leftrightarrow c = -3 \Rightarrow y = -x^4 + bx^2 - 3$

Mặt khác $f(1) = -2 \Leftrightarrow -1 + b + c = -2 \Rightarrow b + c = -1 \Rightarrow b = 2$

Suy ra $b + 2c = 2 - 6 = -4$. Chọn A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình

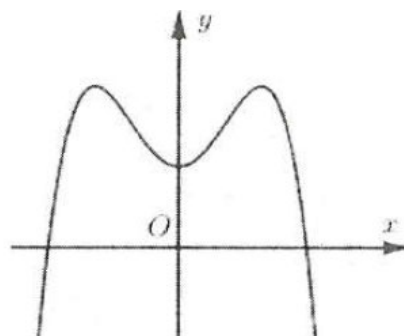
vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$.

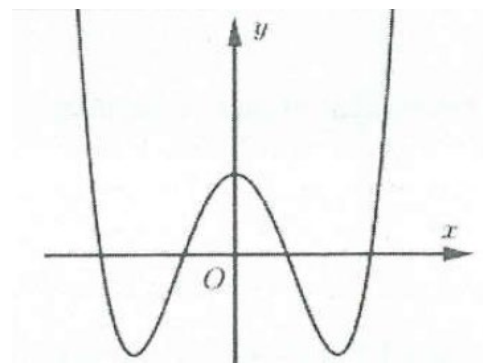
Hàm số có ba cực trị suy ra $ab < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; c) \Rightarrow c > 0$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; c) \Rightarrow c > 0$.

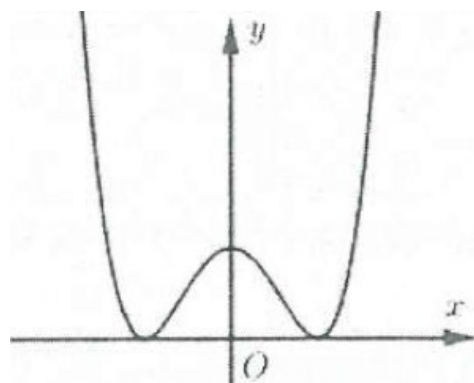
Hàm số có ba cực trị suy ra $ab < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; c) \Rightarrow c > 0$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0; b^2 = 4ac$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0; b^2 = 4ac$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0; b^2 > 4ac$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0; b^2 < 4ac$.



Lời giải

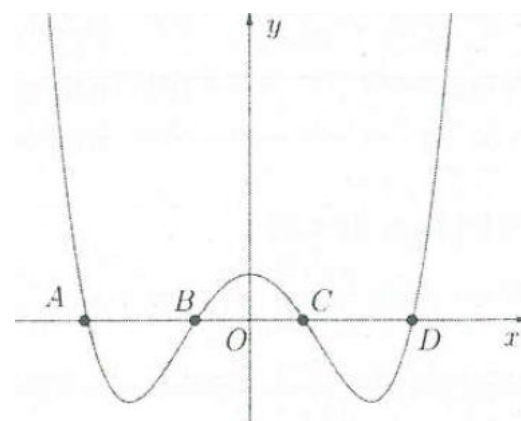
Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$; đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; c) \Rightarrow c > 0$.

Hàm số có ba cực trị suy ra $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Giá trị cực trị của hàm số là $y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB = BC = CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.
- B. $a > 0, b > 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^4 + bx^2 + c) = +\infty \Rightarrow a > 0$$

- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm như trong hình khi đó $\begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$. Gọi x_1, x_2 là nghiệm

$$\text{phương trình } ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2) \\ x_A^2 = x_D^2 = x_1 \\ x_B^2 = x_C^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } AB = BC = CD \Rightarrow x_A + x_C = 2x_B \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -2\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = 3\sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = 9x_2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 = 9x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9b}{10a} \\ x_2 = -\frac{b}{10a} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{9b^2}{100a^2} \Rightarrow 9b^2 = 100ac$$

Suy ra $a > 0, b < 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$. **Chọn C.**

III. HÀM SỐ PHÂN THỨC: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$

1. Đạo hàm

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{ad - bc}{cx + d}, \quad \forall x \neq -\frac{d}{c} \text{ suy ra:}$$

- Nếu $ad - bc > 0 \rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

- Nếu $ad - bc < 0 \rightarrow$ hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

2. Giới hạn, tiệm cận

- $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \rightarrow y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

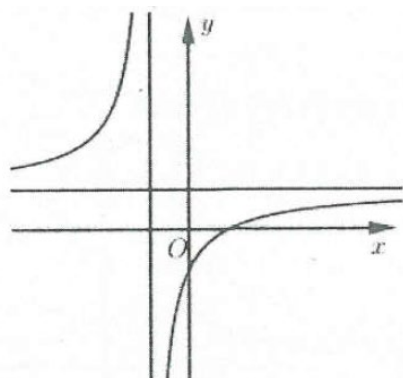
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} y = \lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty \rightarrow y = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

3. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

$$ad - bc > 0$$

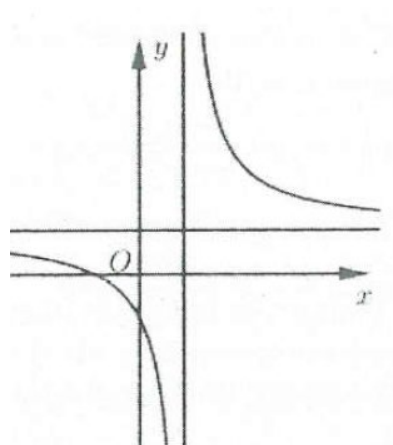
4. Đồ thị hàm số



$$ad - bc > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
y'	-		-
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

$$ad - bc < 0$$



$$ad - bc < 0$$

Đồ thị hàm số nhận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

5. Phương pháp giải toán

Để nhận diện hàm số phân thức bậc nhất: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$) ta làm như sau:

Dựa vào các đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$ và giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{b}{d}\right)$.

Chú ý: Với các bài toán xác định dấu của a, b, c, d ta có thể chọn $a > 0$ (vì $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-ax-b}{-cx-d}$) từ đó suy ra dấu của b, c, d .

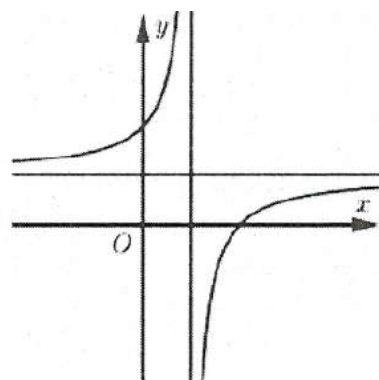
Ví dụ 1: Đường cong hình bên là đồ thị của một hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=1$ do vậy ta loại hai đáp án là C và D.

Xét đáp án A có $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến. **Chọn B.**

Cách 2: Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số với các trục tọa độ để loại đáp án A.

Ví dụ 2: Đường cong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

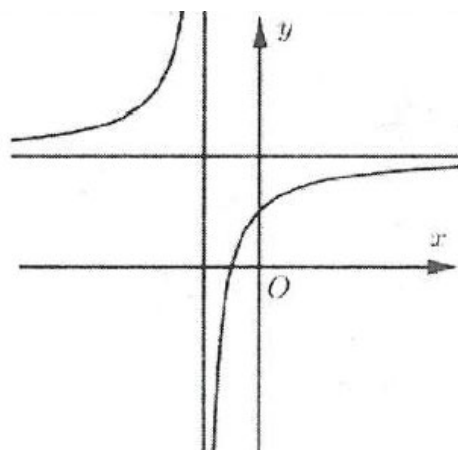
nào

A. $y = \frac{2x}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.



Lời giải

Đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x=-1$ và $y=2$ là đường tiệm cận nên loại đáp án C.

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định. Mặt khác với $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$

Loại đáp án B. Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ nên loại A. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số đã cho là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-3}{x+2}$.

D. $y = \frac{-x+3}{x+2}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 1$ (loại đáp án C và D).

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Xét hàm số $y = \frac{x-3}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định nên ta loại đáp án

A. Chọn B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số đã cho là hàm số nào?

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

B. $y = \frac{2-x}{x+3}$.

C. $y = \frac{2x+7}{x+3}$.

D. $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = -3$ và tiệm cận ngang $y = 1$ (loại đáp án A và B).

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

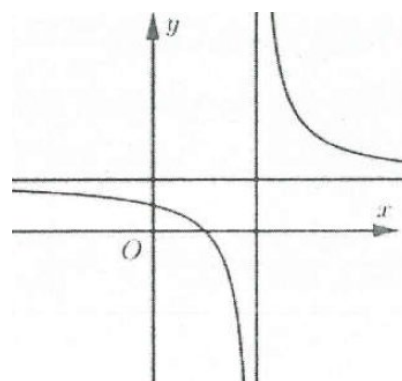
Xét hàm số $y = \frac{2x+7}{x+3} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 (\forall x \neq -3) \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định nên

ta loại đáp án C. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định

nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ ta có:
$$\begin{cases} -\frac{d}{c} > 0 \\ \frac{a}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cd < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt Ox tại $\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$, cắt Oy tại $\left(0; \frac{d}{d}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{b}{d} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ bd > 0 \end{cases}$

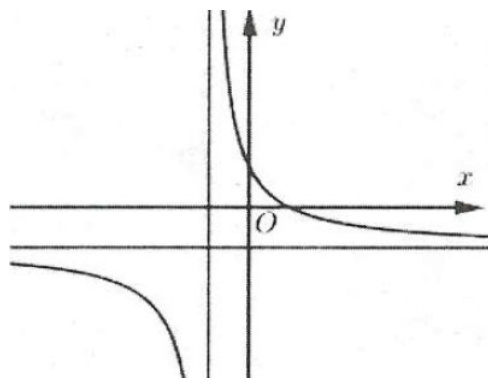
Với $a > 0 \Rightarrow b < 0; c > 0; d < 0$.

Với $a < 0 \Rightarrow b > 0; c < 0; d > 0$.

Do đó $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $ab > 0, bc < 0, ad > 0$.
- B. $ab > 0, bc < 0, ad < 0$.
- C. $ab < 0, bc > 0, ad < 0$.
- D. $ab < 0, bc < 0, ad < 0$.



Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ ta có:
$$\begin{cases} -\frac{d}{c} < 0 \\ \frac{a}{c} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cd > 0 \\ ac < 0 \end{cases}$$

$$\text{Đồ thị cắt } Ox \text{ tại } \left(\frac{-b}{a}; 0\right), \text{ cắt } Oy \text{ tại } \left(0; \frac{b}{d}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{b}{d} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ bd > 0 \end{cases}$$

Chọn $a > 0 \Rightarrow b < 0, c < 0, d < 0$ (vì $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-ax-b}{-cx-d}$) suy ra $ab < 0, bc > 0, ad < 0$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ

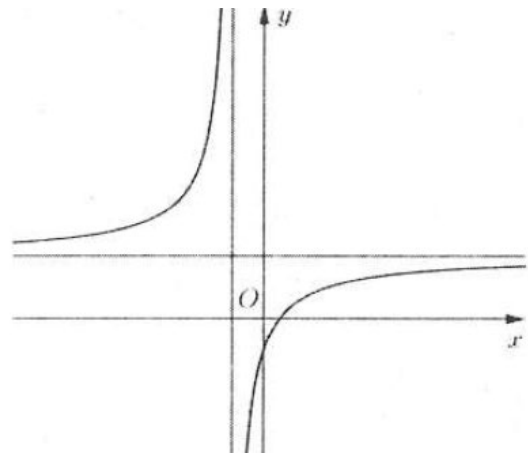
bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương nên $x = \frac{-b}{a} > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $y = \frac{a}{c} < 0$.

Đồ thị hàm số nhận $x = \frac{-d}{c} < 0$ làm tiệm cận đứng và $y = \frac{a}{c} > 0$ làm tiệm cận ngang.

Chọn $a > 0$ suy ra $b < 0, c > 0, d > 0 \Rightarrow \begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{2}{cx+b}$ có đồ thị như hình

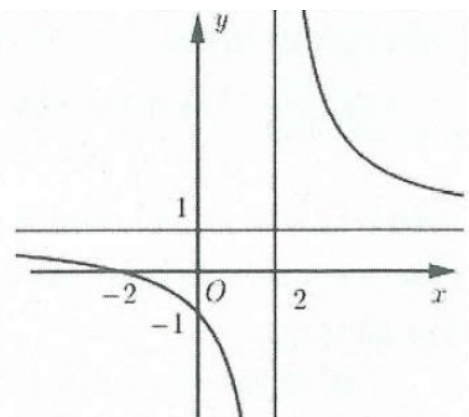
vẽ:

A. $a = 2, b = 2, c = -1$.

B. $a = 1, b = 1, c = -1$.

C. $a = 1, b = 2, c = 1$.

D. $a = 1, b = -2, c = 1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

$$\text{Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}=2 \\ \frac{a}{c}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a=c \end{cases}$$

$$\text{Đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ tại các điểm } (0;-1), (-2;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b}=-1 \\ -2a+2=0 \end{cases}$$

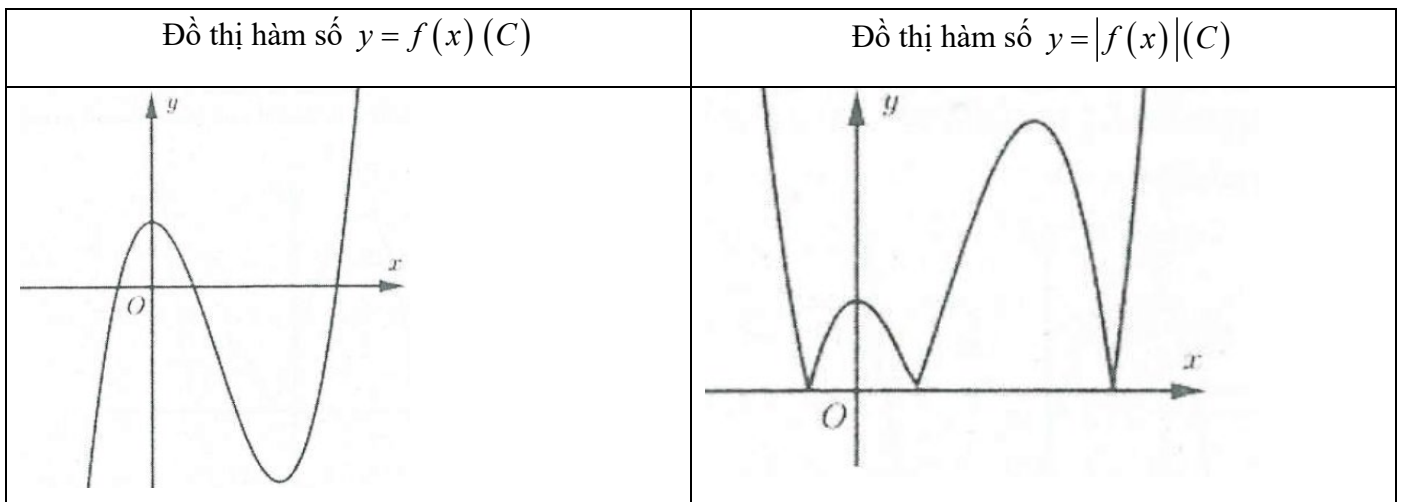
Suy ra $a=1, b=-2, c=1$. **Chọn D.**

IV ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Mẫu 1: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) (C)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)| (C)$

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$. Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)| (C)$ gồm hai phần:

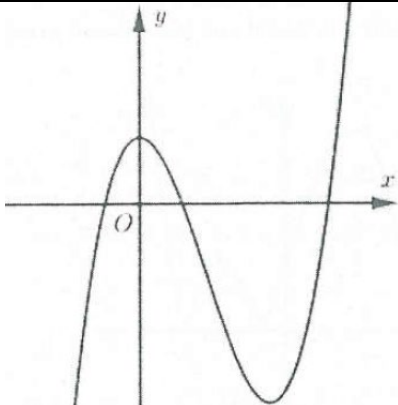
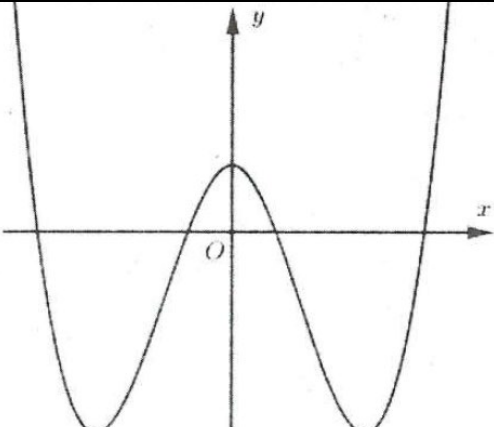
- **Phần 1:** Là phần đồ thị hàm số (C) nằm phía bên trên trục hoành.
- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox



Mẫu 2: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) (C)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|) (C_1)$

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Do đó đồ thị hàm số $y = f(|x|) (C_1)$ gồm hai phần:

- **Phần 1:** Là phần đồ thị hàm số (C) nằm bên phải trục tung.
- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung (vì hàm số $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên nhận trục tung làm trục đối xứng)

Đồ thị hàm số $y = f(x) (C)$	Đồ thị hàm số $y = f(x) (C_1)$
	

Mẫu 3: Từ đồ thị hàm số $y = u(x).v(x) (C)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |u(x)|.v(x) (C_1)$

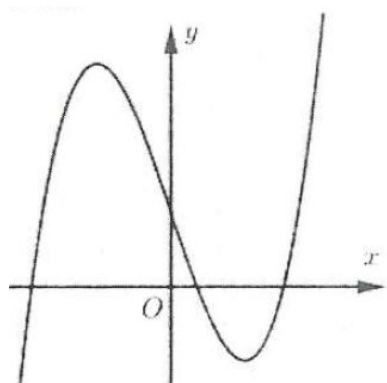
Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$. Do đó đồ thị hàm số $y = |u(x)|.v(x) (C_1)$ gồm hai

phần:

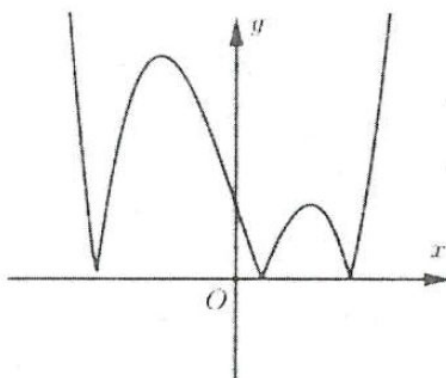
- **Phần 1:** Là phần của (C) ứng với miền $u(x) \geq 0$.

- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần của (C) ứng với miền $u(x) < 0$ qua trục Ox .

Ví dụ 1: Hình 1 là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Đồ thị hình 2 là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 - 3|x| + 1$.

B. $y = |x^3 - 3x + 1|$.

C. $y = ||x|^3 - 3|x| + 1|$.

D. $y = |x|^3 - 3x + 1$.

Lời giải

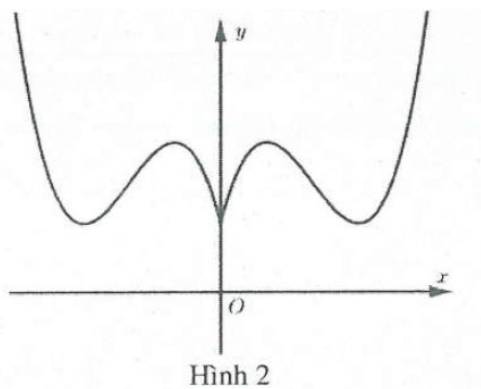
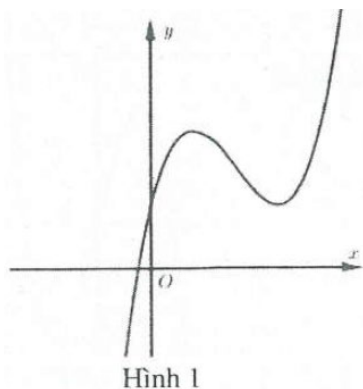
Đồ thị hình 2 gồm 2 phần:

- **Phần 1:** Là phần đồ thị của hình 1 nằm phía bên trên trục Ox .

- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần đồ thị của hình 1 nằm dưới Ox qua Ox .

Do đó đồ thị hình 2 là đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |x^3 - 3x + 1|$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Hình 1 là đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$. Đồ thị hình 2 là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



A. $y = |x^3 - 4x^2 + 4x + 1|$.

B. $y = ||x|^3 - 4x^2 + 4|x| + 1|$.

C. $y = |x|x - 4x^2 + 4|x| + 1$.

D. $y = |x|^3 + 4x^2 + 4|x| + 1$.

Lời giải

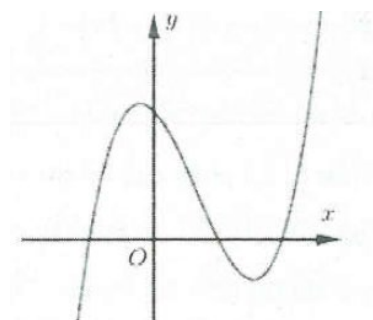
Đồ thị hình 2 gồm 2 phần:

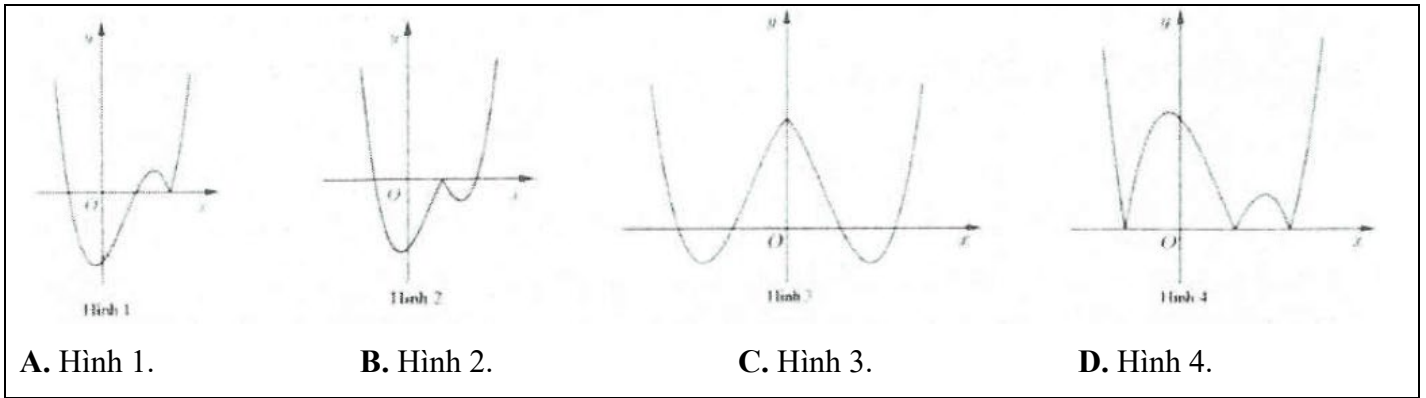
- **Phần 1:** Là phần đồ thị của hình 1 nằm bên phải trục Oy .

- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần 1 qua Oy .

Do đó đồ thị hình 2 là đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |x|x - 4x^2 + 4|x| + 1$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: [Đề thi tham khảo của Bộ GD&ĐT năm 2017] Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị nào như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?





Lời giải

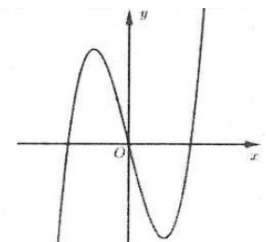
Đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ cắt trục hoành tại điểm $x=1, x=2$

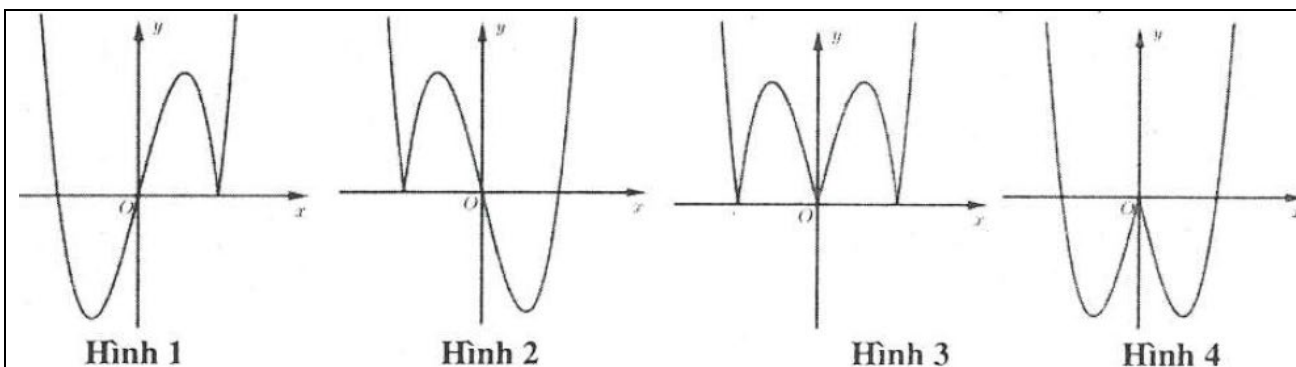
Áp dụng quy tắc phá giá trị tuyệt đối $y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$ gồm 2 phần:

- **Phần 1:** Là phần của đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với miền $x \geq 2$.
 - **Phần 2:** Lấy đối xứng phần của đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ ứng với miền $x < 2$ qua trục hoành.
- Từ đó suy ra đồ thị hàm số có dạng như hình 1. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Hàm số $y = x^3 - 4x$ có đồ thị nào như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2+2x)$?





A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Lời giải

Ta có: $y = |x-2|(x^2+2x) = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x^3 - 4x) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

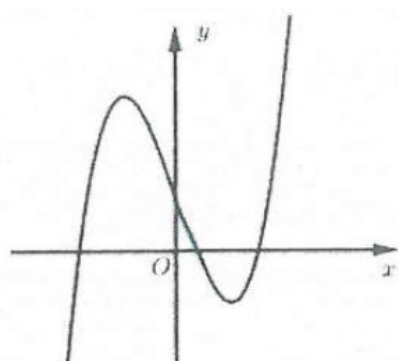
Do đó đồ thị hàm số $y = |x-2|(x^2+2x)$ gồm 2 phần:

- **Phần 1:** Là phần của đồ thị $(C): y = x^3 - 4x$ ứng với $x \geq 2$.

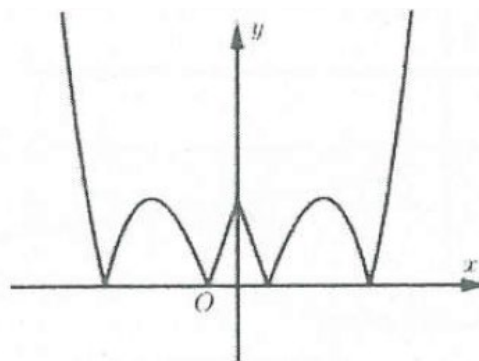
- **Phần 2:** Là đối xứng phần của $(C): y = x^3 - 4x$ ứng với miền $x < 2$ qua Ox .

Suy ra đồ thị hàm số $y = |x-2|(x^2+2x)$ là hình 1. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Hình 1 là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Đồ thị hình 2 là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3| - 3|x| + 1$.

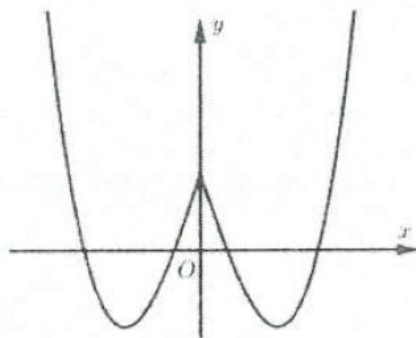
B. $y = |x^3| + 3|x| + 1$.

C. $y = ||x^3| - 3|x| + 1|$.

D. $y = ||x^3| + 3|x| + 1|$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = |x^3| - 3|x| + 1$ như hình vẽ sau



Đồ thị hình 2 gồm 2 phần:

Từ đó suy ra đồ thị hàm số ở hình 2 là đồ thị hàm số $y = \left| x^3 - 3|x| + 1 \right|$. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

- A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		0		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số có đúng 1 cực trị.
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	0	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

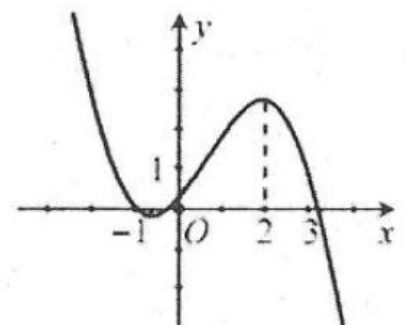
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $b < 0, c < 0$. B. $b > 0, c > 0$. C. $b > 0, c < 0$. D. $b < 0, c > 0$.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ sau.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

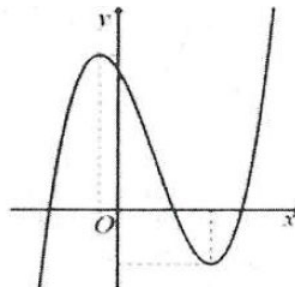
- A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
 B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
 C. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
 D. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.



Câu 5: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ sau.

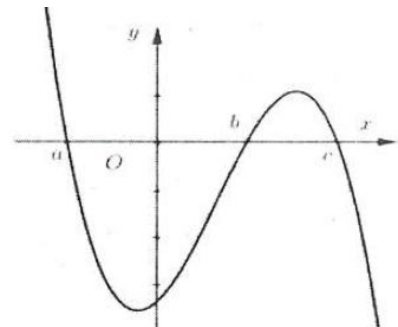
Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a, b, c < 0; d > 0$.
- B. $a, b, d < 0; c > 0$.
- C. $a, c, d < 0; b < 0$.
- D. $a, d > 0; b, c < 0$.



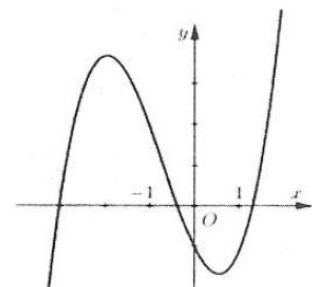
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$.
- B. $f(c) > f(b) > f(a)$.
- C. $f(a) > f(b) > f(c)$.
- D. $f(b) > f(a) > f(c)$.



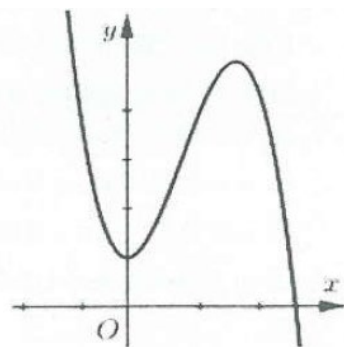
Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $b < 0; cd < 0$.
- B. $b > 0; cd < 0$.
- C. $b < 0; cd > 0$.
- D. $b < 0; cd > 0$.



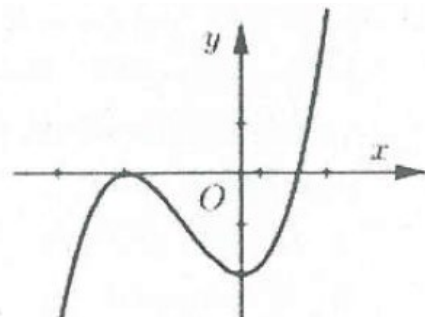
Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c = 0, d > 0$.



Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.



Câu 10: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$

Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a, d > 0; b, c < 0$.
- B. $a, b, c < 0; d > 0$.
- C. $a, c, d > 0; b < 0$
- D. $a, b, d > 0; c < 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình bên. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
- B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
- C. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.
- D. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có đồ thị như hình bên. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
- B. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
- C. $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$.
- D. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ

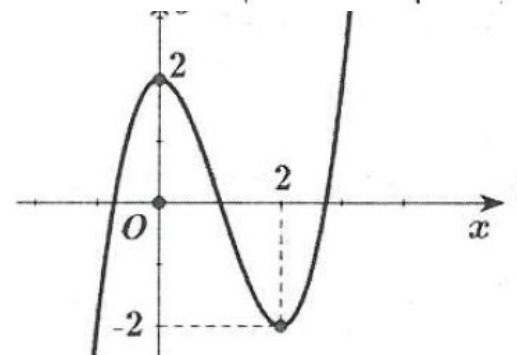
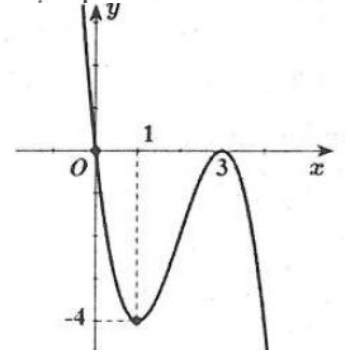
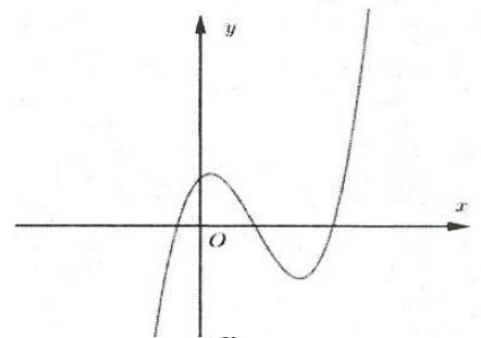
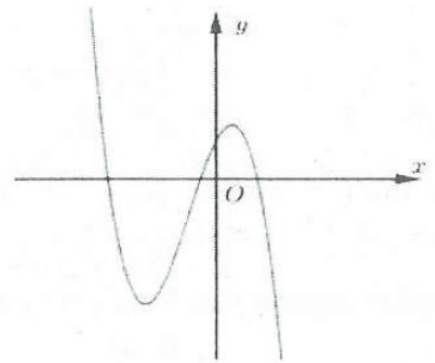
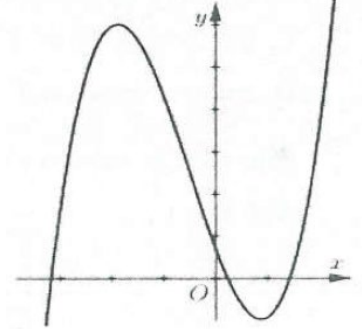
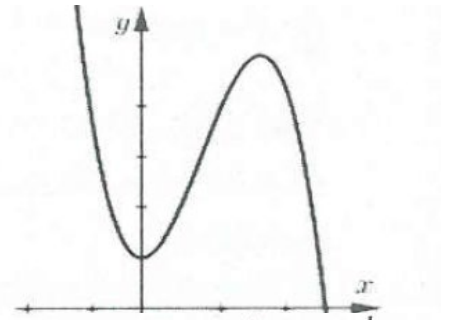
thị là đường cong như hình vẽ. Tìm khẳng định **sai**?

- A. $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 117$.
- B. $b^{10} + abc \neq 0$.
- C. $c^2 + 100bc > 1$.
- D. $a^2 + 4b \geq 0$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có

đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và $(4; +\infty)$.



B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, x = -2$.

C. Với $c \in [-1; 2]$ thì $f(-1) < f(c) < f(2)$.

D. $\min_{x \in [0; 2]} y + \max_{x \in [-1; 2]} y = 0$

Câu 16: Cho hàm số $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				9		$-\infty$
			-23				

Tính giá trị của biểu thức $T = f(2) + 2.f(0)$

A. 6.

B. 10.

C. 12.

D. 8.

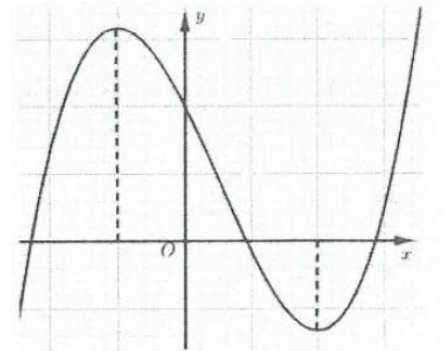
Câu 17: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $8b^2 = 3ac$.

B. $8b^2 = -3ac$.

C. $4b^2 = -3ac$.

D. $4b^2 = 3ac$.



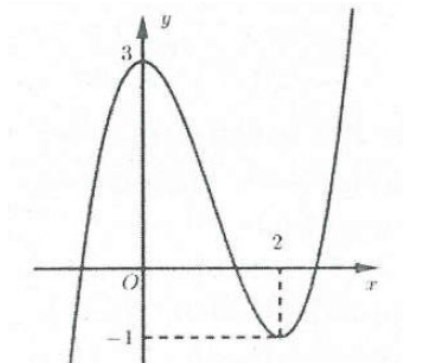
Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức $T = f(a + b - c)$ bằng.

A. $T = 1$.

B. $T = -1$.

C. $T = -7$.

D. $T = 7$.



Câu 19: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = 0$ là:

A. 7.

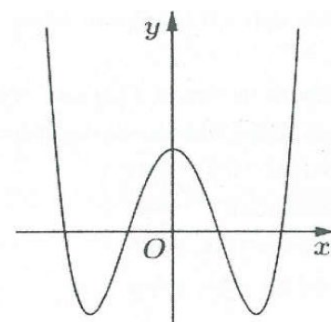
B. 9.

C. 6.

D. 5.

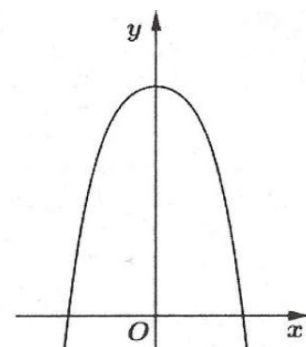
Câu 20: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



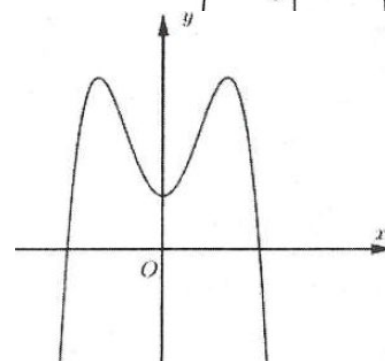
Câu 21: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c \geq 0$.



Câu 22: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0; b < 0; c > 0$.
- B. $a < 0; b < 0; c > 0$.
- C. $a < 0; b > 0; c > 0$.
- D. $a < 0; b > 0; c < 0$.



Câu 23: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

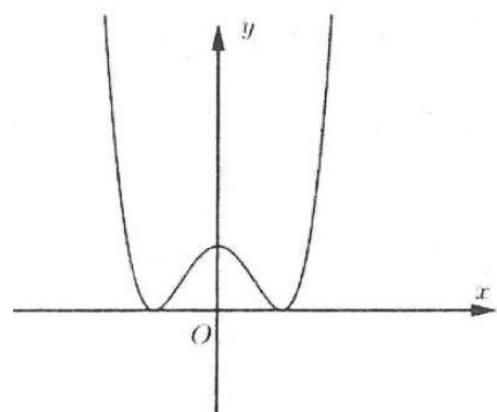
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	4	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ bằng 4.
- B. Hàm số có 2 điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- C. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- D. Biểu thức $ab(c+1)$ nhận giá trị dương.

Câu 24: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a > 0; b > 0; c > 0; b^2 = 4ac$.

B. $a > 0; b < 0; c > 0; b^2 = 4ac$.

C. $a > 0; b > 0; c > 0; b^2 > 4ac$.

D. $a > 0; b < 0; c > 0; b^2 < 4ac$.

Câu 25: Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. Giá trị của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau.

A. $A = 24$.

B. $A = 20$.

C. $A = 18$.

D. $A = 6$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$
			-5			-5			

Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

A. $P = -15$.

B. $P = 15$.

C. $P = -8$.

D. $P = 8$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.

(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

(II). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau là

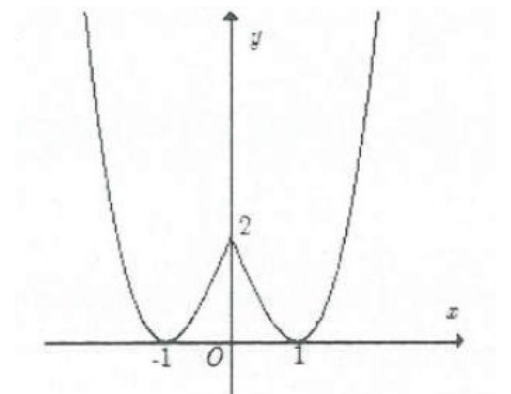
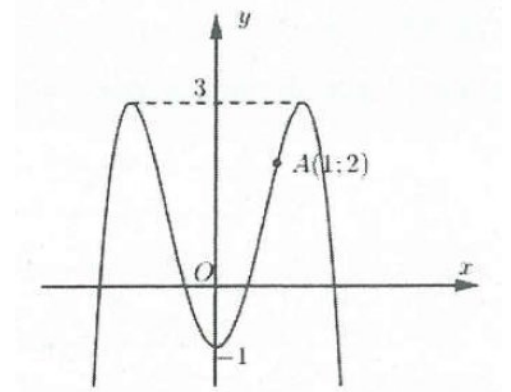
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	0	-3	0	$-\infty$

A. $\begin{cases} m = 0 \\ m < -3 \end{cases}$.

B. $m < -3$.

C. $\begin{cases} m = 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$.

D. $m < -\frac{3}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Tính $S = ab + bc + 2ca$.

A. $S = -2$.

B. $S = -5$.

C. $S = -3$.

D. $S = -4$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{5}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên.

Có bao nhiêu phát biểu sau đây đúng?

(1). Hàm số có 3 điểm cực trị.

(2). Tổng $a - 2b - 3c$ lớn hơn 0.

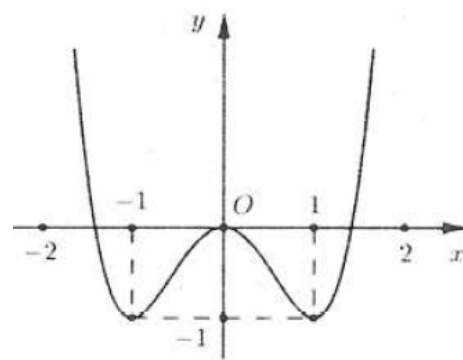
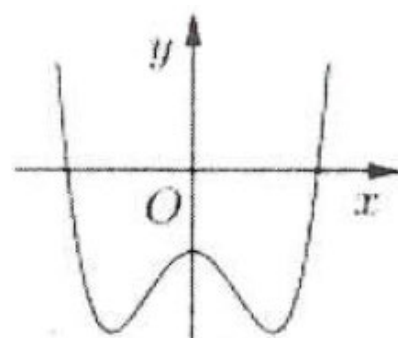
(3). Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.



Câu 32: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f^2(x)$ là

- A. 5. B. 4.
C. 3. D. 6.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			-2		$+\infty$

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) + 2f(x)}$ là

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 34: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = 4a + 2b + c + 2d + e$ bằng

- A. $P = 1$.
B. $P = 4$.
C. $P = -1$.
D. $P = -2$.

Câu 35: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f^2(x)$ là

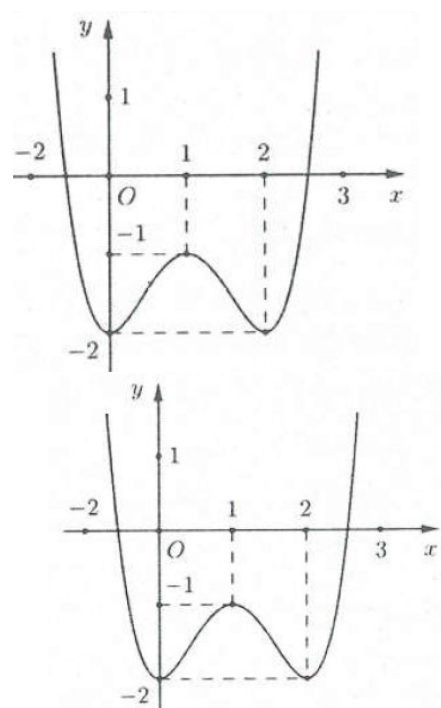
- A. 6.
B. 4.
C. 5.
D. 3.

Câu 36: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với a, b, c, d, e là các số thực và $a \neq 0$, có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			-1		2				
	$-\infty$			-3					$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{f^2(x) + 3f(x)}$ là

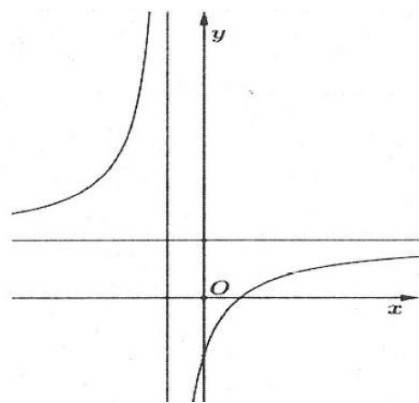
- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.



Câu 37: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

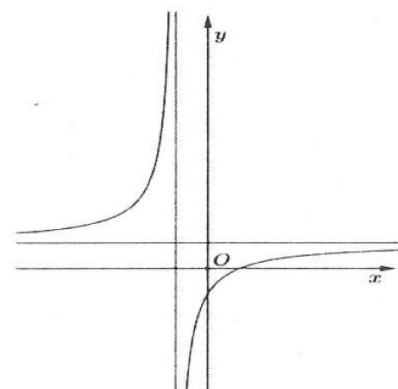
- A. $bd > 0, ad > 0$.
- B. $ad < 0, ab > 0$.
- C. $ab < 0, ad < 0$.
- D. $ad > 0, ab < 0$.



Câu 38: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

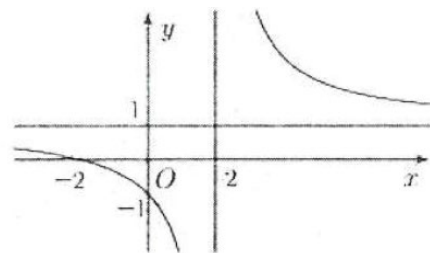
- A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Tính

tổng $T = a + 2b + 3c$.

- A. $T = 0$.
- B. $T = -1$.
- C. $T = 3$.
- D. $T = 2$.



Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ (C) có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung song song với đường thẳng $y = 2x + 2018$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	-3		$+\infty$		-3

Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$ là:

- A. $T = -1$.
- B. $T = 1$.
- C. $T = 3$.
- D. $T = 2$.

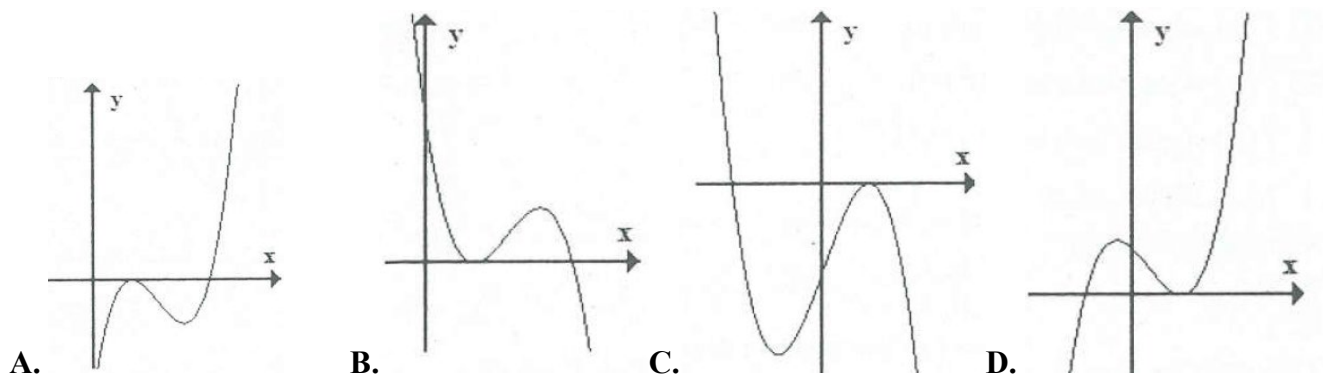
Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ (C) có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết (C) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B thỏa mãn $S_{OAB} = 4$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

Giá trị của biểu thức $T = ab + 2c$ là:

- A. $T = -6$. B. $T = 10$. C. $T = 8$. D. $T = -4$.

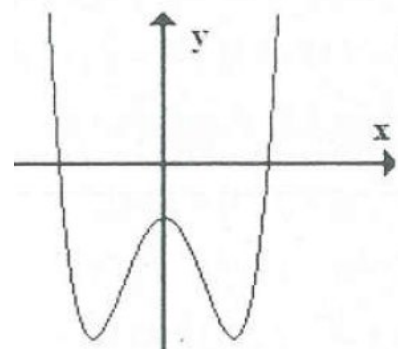
Câu 42: Hình vẽ nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = -(a-x)(b-x)^2$ với $a > b > 0$.



Câu 43: Đồ thị hình bên biểu diễn đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$.

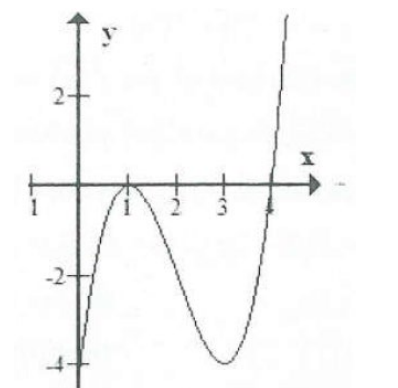
Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng nhất** về mối liên hệ giữa a, b, c ?

- A. $c > b > 0 > a$.
 B. $abc > 0$.
 C. $(a-b)(a-c) < 0$.
 D. $a + bc < 0$.



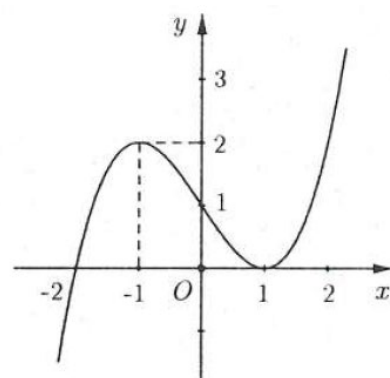
Câu 44: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị biểu diễn là đường cong (C) như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

- A. $a + b + c = -1$.
 B. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 132$.
 C. $a + c \geq 2b$.
 D. $a + b^2 + c^3 = 11$.



Câu 45: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau:

- $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- $f'(-1) + f'(1) = 0$.



$f'(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Số mệnh đề đúng là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau:

1. $f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị.
2. $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
3. $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.
4. $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0; x = \pm 1$

Số mệnh đề đúng là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết

$f(4) + f(2) + 2f(0) = f(-1) + 3f(1)$. Tính $\max_{[-1; 4]} f(x) + \min_{[-1; 4]} f(x)$

A. $M + m = f(0) + f(4)$.

B. $M + m = f(-1) + f(2)$.

C. $M + m = f(-1) + f(1)$.

D. $M + m = f(1) + f(4)$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$ biết $f(1) + f(0) = 2f(-1) - f(-2) + f(-3)$

A. $f(-3)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(1)$.

D. $f(0)$.

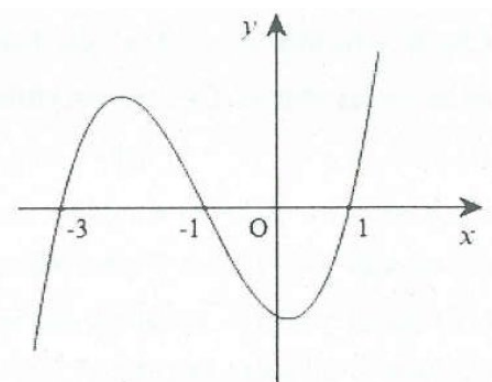
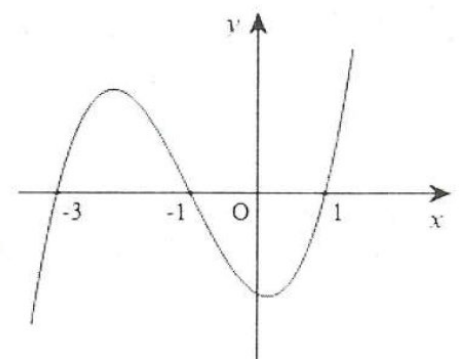
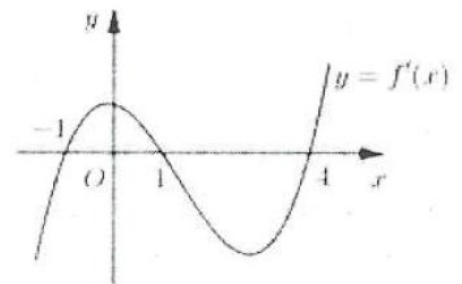
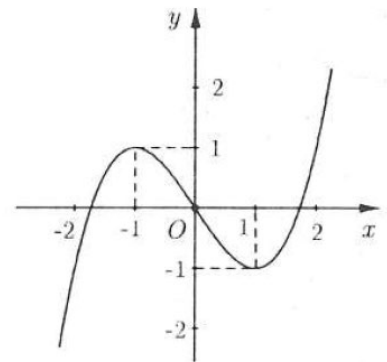
Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$

A. $f(-3)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(1)$.

D. $f(0)$.



Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$ biết

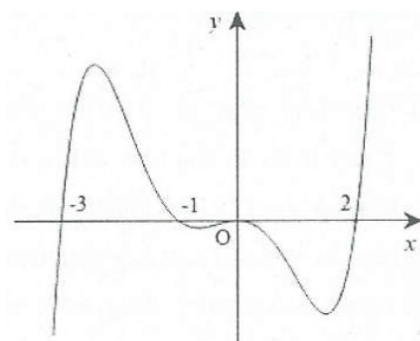
$$f(2) + 2f(-2) = 3f(-1) + f(-3) - f(1)$$

A. $f(-1) + f(-3)$.

B. $f(-1) + f(2)$.

C. $f(0) + f(2)$.

D. $f(0) + f(-3)$



Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các khẳng định sau:

(1). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

(2). Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(3). Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

(4). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$

(5). Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

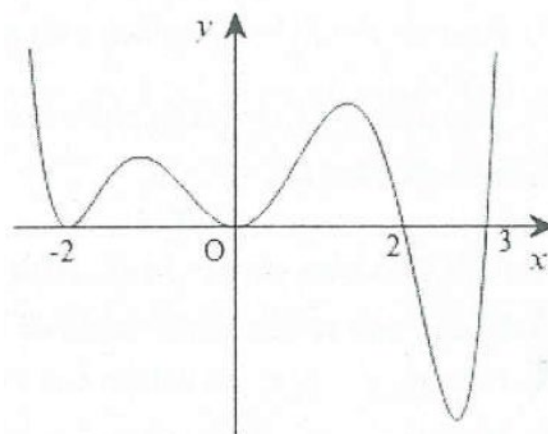
Số khẳng định đúng là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các khẳng định sau:

(1). Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -4)$.

(2). Hàm số nghịch biến trên $(-4; 0)$.

(3). Hàm số có 4 điểm cực trị.

(4). Hàm số có 2 điểm cực đại.

(5). Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 3$

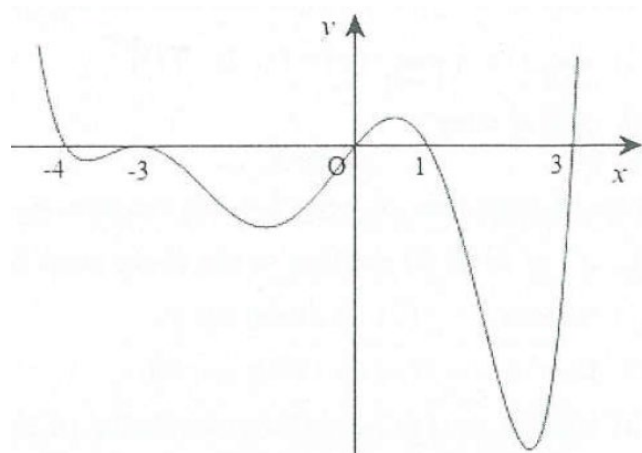
Số khẳng định đúng là:

A. 1.

B. 2.

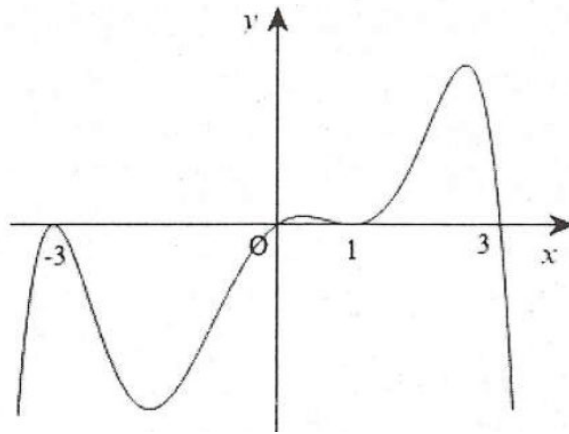
C. 3.

D. 4.



Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các khẳng định sau:

(1). Hàm số $y = f(x^2 + 3)$ đồng biến trên $(0; 1)$.



(2). Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên $(3;4)$.

(3). Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

(4). Hàm số $y = f(1-x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

(5). Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -3$

Số khẳng định đúng là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và các mệnh đề sau:

(1). Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

(2). Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại.

(3). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$

(4). Hàm số $y = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$

(5). Trên đoạn $[-2; 1]$ giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(-2)$

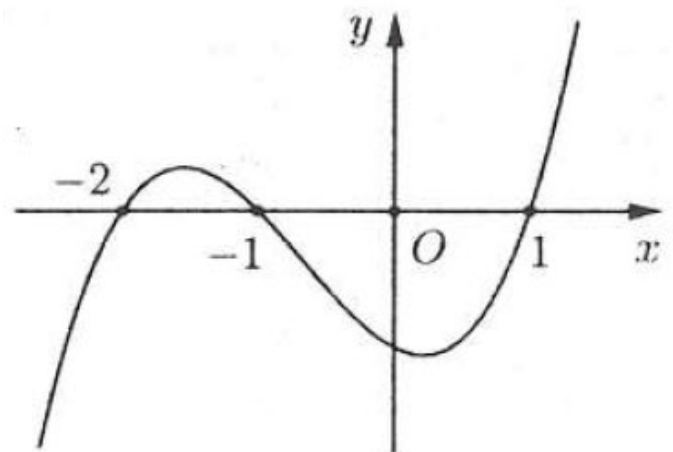
Số mệnh đề đúng là:

A. 5.

B. 3.

C. 2.

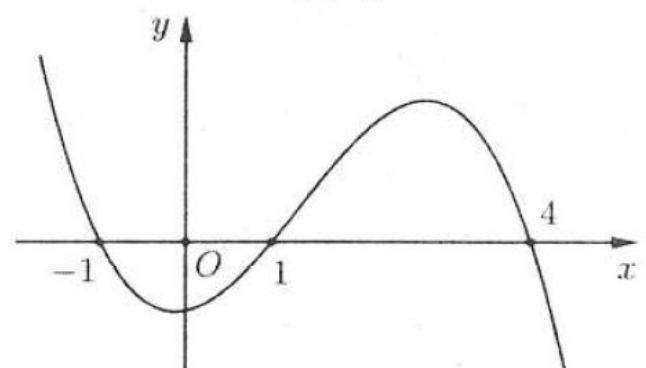
D. 4.



Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và các mệnh đề sau:

(1). Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

(2). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu.



- (3). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$
- (4). Hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$
- (5). $\max_{[-1;4]} f(x) + \min_{[-1;4]} f(x) = f(-1) + f(1)$

Số mệnh đề đúng là:

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$

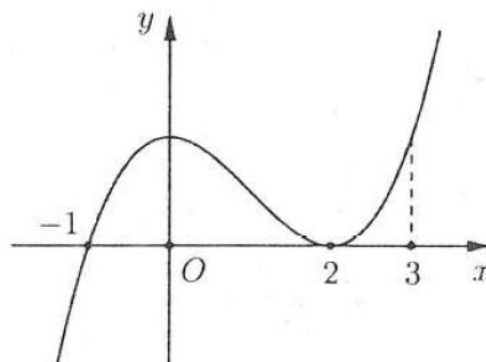
có đồ thị như hình vẽ bên và các mệnh đề sau:

- (1). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị.
- (2). Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại.
- (3). Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$
- (4). Hàm số $y = f\left(1 - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{3})$

- (5). Trên đoạn $[-1;3]$ thì $f(3) + f(2) - 2f(-1) > 0$

Số mệnh đề đúng là:

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.



LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Đồ thị hàm số có đạt cực trị tại 2 điểm $x=0; x=2$ nên loại **C, D**. Mà nhìn vào dạng biến thiên của đồ thị hàm số nên ta loại **B**. **Chọn A**.

Câu 2: Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=1$. **Chọn D**.

Câu 3: Đầu tiên nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra $a < 0$. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có 2 nghiệm dương nên

$$\text{ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0; c < 0. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và tích âm $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$. **Chọn A**.

Câu 5: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b < 0$ và tích âm $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. **Chọn D**.

Câu 6: Ta có $f'(x) < 0$ với $x \in (a; b) \Rightarrow f(a) > f(b)$

Mà $f'(x) > 0$ với $x \in (b; c) \Rightarrow f(b) > f(c)$. **Chọn A**.

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng âm $\Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$ và tích âm $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. **Chọn D**.

Câu 8: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b < 0$ và bằng 0 $\Rightarrow c = 0$. **Chọn A**.

Câu 9: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng âm $\Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$ và tích bằng 0 $\Rightarrow c = 0$. **Chọn A**.

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và tích bằng 0 $\Rightarrow c = 0$. **Chọn D.**

Câu 11: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, nhận thấy hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tổng âm $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và tích âm $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. **Chọn D.**

Câu 12: Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$; đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và ta thấy $\begin{cases} x_{CB} + x_{CT} < 0 \\ x_{CB} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}; y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Khi đó $\begin{cases} \Delta' = b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b < 0 \text{ (do } a < 0 \text{)}. \\ \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 13: Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$; đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và hai điểm này đều nằm bên phải trục Oy

Khi đó $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dương

Suy ra $\begin{cases} \Delta' = b^2 - 3ac > 0 \\ \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0; c > 0$. **Chọn B.**

Câu 14: Đạo hàm $y' = -3x^2 + 2ax + b \rightarrow \begin{cases} y'(1) = -3 + 2a + b \\ y'(3) = -27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -9 \end{cases}$

$x = 1; y = -4 \rightarrow y(1) = -1 + 6 - 9 + c = -4 \Rightarrow c = 0$.

Xét các đáp án ta thấy **C sai. Chọn C.**

Câu 15: Quan sát đồ thị ta có:

A sai vì hàm số không nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

B sai vì hàm số chỉ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C sai vì trên đoạn $[-1; 2]$ hàm số vừa có khoảng đồng biến, vừa có khoảng nghịch biến.

D đúng vì $\min_{x \in [0; 2]} y + \max_{x \in [-1; 2]} y = -2 + 2 = 0$. **Chọn D.**

Câu 16: Gọi hàm số bậc ba có dạng $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$

Ta có $y' = -3x^2 + 2ax + b$; $y'' = -6x + 2a$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $A(1; 9)$, $B(-3; -23)$

$$\text{Điểm } A(1; 9) \text{ là điểm cực đại} \Rightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 3 = 0 \\ -1 + a + b + c = 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Điểm } B(-3; -23) \text{ là điểm cực tiểu} \Rightarrow \begin{cases} y'(-3) = 0 \\ y(-3) = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + b - 27 = 0 \\ 27 + 9a - 3b + c = -23 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $a = -3, b = 9$ và $c = 4$. Vậy $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 4 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \\ f(0) = 4 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 17: Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 dựa vào đồ thị ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta thấy } x_1 = -2x_2 \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ -2x_2^2 = \frac{c}{3a} \end{cases} \Rightarrow -\frac{8b^2}{9a^2} = \frac{c}{3a} \Leftrightarrow 8b^2 = -3ac. \text{ **Chọn B.}**$$

Câu 18: Dựa vào đồ thị ta thấy $y' = 0$ có 2 nghiệm $x = 0; x = 2$

$$\text{Suy ra } y' = k(x^2 - 2x) \Rightarrow y = k\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + d$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow y = f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + 3$$

$$\text{Lại có: } f(2) = -1 \Rightarrow k \cdot \left(\frac{8}{3} - 4\right) + 3 = -1 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

Suy ra $f(a + b + c) = f(-2) = 7$. **Chọn D.**

$$\text{Câu 19: Ta có } f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a(1) \\ f(x) = b(2) \\ f(x) = c(3) \end{cases} \text{ (với } a < b < c)$$

Khi đó $\begin{cases} a < -2 \\ b \in (-2; 2) \\ c > 2 \end{cases}$ từ đó suy ra phương trình (1) có 1 nghiệm, phương trình (2) có 3 nghiệm và phương

trình (3) có 1 nghiệm. Suy ra phương trình $f[f(x)] = 0$ có 5 nghiệm. **Chọn D.**

Câu 20: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ do đó $a > 0$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ nên $c > 0$. **Chọn D.**

Câu 21: Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ do đó $a < 0$ loại đáp án C.

Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \Rightarrow b \leq 0$ loại B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; c) \Rightarrow c > 0$ loại D. **Chọn A.**

Câu 22: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$

Do đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c) \Rightarrow c > 0$

Chọn C.

Câu 23: Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho có 2 điểm cực đại và một điểm cực tiểu

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 4.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0$, mặt khác $c = 0 \Rightarrow ab(c+1) < 0$ do đó đáp án D sai. **Chọn D.**

Câu 24: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$; đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c) \Rightarrow c > 0$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$. **Chọn B.**

Câu 25: Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1) \Rightarrow c = -1$

Ta có: $y_{CD} = y\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right) = \frac{-b^2}{4a} + c = 3$; $y(1) = a + b + c = 2$

Do đó $\begin{cases} -b^2 = 16a \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^2 = 16(3-b) \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12; a = 9 \\ b = 4; a = -1 \end{cases}$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ có thể nhận giá trị là 18. **Chọn C.**

Câu 26: Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số đạt cực đại $A(0; -3)$ và cực tiểu $B(-1; -5)$. Xét

hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$ và $y'' = 12ax^2 + 2b$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm cực đại $A(0; -3)$ và điểm cực tiểu $B(-1; -5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0) = y'(1) = 0 \\ y(0) = -3; y(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ c = -3 \\ a + b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b + 3c = -15$$

Chú ý: Với $a = 2; b = -4; c = -3$ ta được $y = 2x^4 - 4x^2 - 3 \rightarrow y''(0) = -8 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số. **Chọn A.**

Câu 27: Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$; hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$

Hàm số có 3 điểm cực trị gồm 2 điểm cực tiểu $x = \pm 1$ và điểm cực đại $x = 0$

Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ hàm số không có giá trị lớn nhất. **Chọn B.**

Câu 28: Để phương trình $f(x) = 2m$ có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} 2m = 0 \\ 2m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 29: Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx \rightarrow \begin{cases} y(0) = 3 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow S = -2$ **Chọn A.**

Câu 30: Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$

Do đó $y' = 2.f'(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2x-1 < 0 \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$

Từ đó hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$. **Chọn C.**

Câu 31: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

-Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị $\rightarrow$ (1) đúng.

-Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Đồ thị (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow y(0) = c < 0$

Do đó, tổng $a - 2b - 3c$ lớn hơn 0 $\rightarrow$ (2) đúng.

-Đồ thị (C) cắt trục Oy tại điểm $M(0; y_0)$

Vì $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $\Rightarrow$ Tiếp tuyến của (C) tại $x = 0$ là $y = y_0$

Dễ thấy $y = y_0$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $\rightarrow$ (3) đúng.

Vậy (1), (2), (3) đều đúng. **Chọn C.**

Câu 32: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x.(x^2 - 1) = 0$

Ta có $y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2.f'(x).f(x); \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.(x^2 - 1) = 0 \\ x.(x^2 - k) = 0 \end{cases}, \text{ với } k \in (1; 2)$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow x^3.(x^2 - 1).(x^2 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{k} \end{cases}$$

Dễ thấy 5 nghiệm kể trên và nghiệm đơn và bội lẻ $\Rightarrow$ Hàm số có 5 điểm cực trị. **Chọn A.**

$$\text{Câu 33: Ta có } f^2(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khác ± 1

Giải (2), ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = -2$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là

$$x = -1; x = 1 \text{ suy ra } f(x) = -2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\text{Do đó } y = \frac{x^2 - 1}{f(x) + (x^2 - 1)^2} = \frac{1}{(x^2 - 1).f(x)} \text{ và } (x^2 - 1).f(x) = 0 \text{ có 6 nghiệm phân biệt.}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 6 đường tiệm cận đứng. **Chọn C.**

Câu 34: Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng:

$$y(0) = -2 \rightarrow e = -2$$

Ta có $y = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ mà $y'(0) = y'(1) = y'(2)$ nên suy ra

$$\begin{cases} d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 & (1) \\ 8a + 3b + c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) + (2), ta được } 12a + 6b + 3c = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$\text{Vậy } P = 4a + 2b + c + 2d + e = 0 + 2.0 + (-2) = -2. \text{ **Chọn D.**}$$

$$\text{Câu 35: Ta có } y = f^2(x) \Rightarrow y' = [f^2(x)]' = 2.f'(x).f(x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = \{0; 1; 2\}$, $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Do

đó $y' = 0$ có 5 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 36: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

$$f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$F(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_3, x_4$$

Khi đó $f^2(x) + 3f(x) = f(x) \cdot [f(x) + 3] = x^2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$

$$\text{Suy ra } y = \frac{x^2}{f^2(x) + 3f(x)} = \frac{1}{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 37: Ta có $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$; $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$; $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$; $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$. **Chọn D.**

Câu 38: Ta có $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$; $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$; $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$; $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$. **Chọn B.**

Câu 39: Từ hình vẽ, ta có nhận xét sau:

Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị $(C) \Rightarrow x = -\frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = -2c$

Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $(C) \Rightarrow x = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$

Điểm $M(0; -1) \in (C)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -2$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} b = -2 \\ b = -2c = -2a \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow T = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 = 0. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 40: Do đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -3$

Do đó hàm số có dạng: $y = \frac{-3x + b}{x - 1} \Rightarrow y = \frac{3 - b}{(x - 1)^2} \Rightarrow y'(0) = 3 - b$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x + 2018 \Rightarrow 3 - b = 2 \Rightarrow b = 1$

Vậy $a = -3; b = 1; c = 1 \Rightarrow T = 2$. **Chọn D.**

Câu 41: Do đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$

Do đó hàm số có dạng: $y = \frac{2x + b}{x + 1}$

Khi đó $(C) \cap Ox = A\left(-\frac{b}{2}; 0\right); (C) \cap Oy = (0; b) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow b = \pm 4$

$$\text{Do } y' = \frac{2 - b}{(x + 1)^2} < 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = ab + 2c = 10. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 42: Xét hàm số $y = f(x) = -(a - x)(b - x)^2 = (x - a)(x - b)^2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có dạng chữ N xuôi.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y(0) = -a \cdot b^2$ mà $a > 0$ suy ra $y(0) < 0$

Mặt khác $f'(x) = (x-b)^2 + 2(x-a)(x-b) = (x-b)(3x-2a-b)$ suy ra $\begin{cases} f(b) = 0 \\ f'(b) = 0 \end{cases}$ suy ra đồ thị hàm số

$y = f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại $M(b; 0)$. **Chọn A.**

Câu 43: Dựa vào đồ thị hàm số, ta có nhận xét sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ suy ra hệ số } a > 0$$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm suy ra $c < 0$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị suy ra $ab < 0$ mà $a > 0$ nên $b < 0$

Vậy khẳng định đúng nhất là $abc > 0$. **Chọn B.**

Câu 44: Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị (C) đi qua hai điểm cực trị là $A(1; 0)$, $B(3; -4)$

Xét hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, có $y' = 3x^2 + 2ax + b; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Điểm } A(1; 0) \text{ là điểm cực đại} \Rightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Điểm } B(-3; -4) \text{ là điểm cực tiểu} \Rightarrow \begin{cases} y'(-3) = 0 \\ y(3) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + b = -27 \\ 9a + 3b + c = -31 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \neq 132 \\ a + c = -14 < 2b \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 45: Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \Rightarrow 1$ và 2 đúng

$$f'(-1) + f'(1) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow 3 \text{ sai}$$

Đường $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên 4 đúng. **Chọn C.**

Câu 46: Ta có $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên 1 đúng.

Ba nghiệm này là $x = 0, x = a \in (-2; 1), x = b \in (1; 2) \Rightarrow 4$ sai

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ đúng}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow 3 \text{ đúng. **Chọn C.**}$$

Câu 47: Dựa vào hình vẽ, ta có bảng biến thiên:

x	-1	0	1	2	4	
y'	0	+	+	0	-	0
y	$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$					

$$f(-1)$$

$$f(4)$$

Suy ra $M = \max_{[-2;1]} f(x) = f(1)$; $\min_{[-2;1]} f(x) = \{f(-1); f(4)\}$

$$\text{Mà } f(4) + f(2) + 2f(0) = f(-1) + 3f(1) \Leftrightarrow f(4) - f(-1) = 2 \underbrace{[f(1) - f(0)]}_{>0} + \underbrace{f(1) - f(2)}_{>0}$$

Do đó $f(4) - f(-1) > 0 \Leftrightarrow f(4) > f(-1)$

Vậy $M = f(1)$; $m = f(4) \rightarrow M + m = f(1) + f(4)$. **Chọn D.**

Câu 48: Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Suy ra $f(-1) > f(-3)$; $f(-1) > f(1)$

Ta có

$$f(1) + f(0) = 2f(-1) - f(-2) + f(-3) \Leftrightarrow f(1) - f(-3) = [f(-1) - f(-2)] + [f(-1) - f(0)]$$

Mà $f(-1) - f(-2) > 0$, $f(-1) - f(0) > 0 \Rightarrow f(1) - f(-3) > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(-3)$

Do đó $f(-1) > f(1) > f(-3)$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 1]$ là $f(-3)$. **Chọn A.**

Câu 49: Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Suy ra $f(-1) > f(-3)$; $f(-1) > f(1)$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 1]$ là $f(-1)$. **Chọn B.**

Câu 50: Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 2)$. Suy ra $f(-1) > f(-3)$; $f(-1) > f(0) > f(2)$

Ta có

$$f(2) + 2f(-2) = 3f(-1) + f(-3) - f(1) \Leftrightarrow f(2) - f(-3) = 2[f(-1) - f(-2)] + [f(-1) - f(1)]$$

Mà $f(-1) > f(2)$, $f(-1) > f(1) \Rightarrow f(2) - f(-3) > 0 \Leftrightarrow f(2) > f(-3)$

Do đó $f(-1) > f(0) > f(2) > f(-3)$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(-3)$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(-1)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $f(-1) + f(-3)$. **Chọn A.**

Câu 51: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$ và $(3; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$ nên khẳng định (1) sai

Ta có $[f(3 - 2x)]' = -2f'(3 - 2x)$. Hàm số đồng biến khi

$f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow 2 < 3-2x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ nên hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ nên khẳng

định (2) đúng

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x = 2, x = 3$ nên hàm số có 2 điểm cực trị nên khẳng định (3) sai

Ta thấy $f'(x)$ không đổi dấu qua các điểm $x = -2$ nên $x = -2$ không phải là cực trị của hàm số nên khẳng định (4) sai

Hàm số không có giá trị lớn nhất nên khẳng định (5) sai

Do đó có 1 khẳng định đúng là (1). **Chọn A.**

Câu 52: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty; -4)$, $(0; 1)$ và $(3; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-4; -3)$, $(-3; 0)$ và $(1; 3)$ nên khẳng định (1) đúng, khẳng định (2) sai. Với khẳng định (2) chú ý hàm số nghịch biến trên $(-4; -3)$ và $(-3; 0)$ chứ không phải nghịch biến trên $(-4; 0)$

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x = -4, x = 0, x = 1, x = 3$ nên hàm số có 4 điểm cực trị nên khẳng định (3) đúng

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $x = -4, x = 1$ nên hàm số có cực đại tại $x = -4, x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực đại nên khẳng định (4) đúng

Hàm số không có giá trị lớn nhất nên khẳng định (5) sai

Do đó có 3 khẳng định đúng là (1), (3), (4). **Chọn C.**

Câu 53: Ta có $\left[f(x^2+3)\right]' = 2xf'(x^2+3)$. Với $x \in (0; 1)$ thì

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 < x^2 + 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x^2+3) < 0 \end{cases} \Rightarrow 2xf'(x^2+3) < 0$$
 nên hàm số $y = f(x^2+3)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ nên

khẳng định (1) đúng

Ta có $\left[f(2-x)\right]' = -f'(2-x)$. Với $x \in (3; 4)$ thì $-1 < 2-x < -2 \Rightarrow f(2-x) < 0 \Rightarrow -f(2-x) > 0$ nên hàm số $f(2-x)$ đồng biến trên $(3; 4)$ nên khẳng định (2) đúng

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x = 0, x = 3$ nên hàm số có 2 điểm cực trị nên khẳng định (3) đúng

Ta có $\left[f(1-x)\right]' = -f'(1-x)$. Tại $x = 1 \Rightarrow 1-x = 0$ nên $f'(1-x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 1$ suy ra $-f'(1-x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại điểm $x = 1$ nên hàm số $y = f(1-x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ nên khẳng định (4) sai

Hàm số không có giá trị lớn nhất nên khẳng định (5) sai

Do đó có 3 khẳng định đúng là (1), (2), (3). **Chọn C.**

Câu 54: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

Và $f'(x)$ đổi dấu từ $- \rightarrow +$ khi đi qua $x = -2; x = 1 \Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực tiểu

$f'(x)$ đổi dấu từ $+ \rightarrow -$ khi đi qua $x = -1 \Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm cực đại

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1)$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ và $(1; +\infty)$

Xét $g(x) = f(1-x) \rightarrow g'(x) = -f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1-x < -1 \\ 1-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$

Dựa vào bảng biến thiên $\rightarrow$ Trên đoạn $[-2; 1]$ thì $f(-1) > \{f(-1); f(1)\}$

Và $S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)| dx < S_2 = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f'(x) dx > -\int_{-1}^1 f'(x) dx$

$\Leftrightarrow f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(1) \Leftrightarrow f(-2) > f(1)$ suy ra $\min_{[-2; 1]} f(x) = f(1)$

Vậy chỉ có 2 mệnh đề 1, 4 đúng. **Chọn C.**

Câu 55: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

Và $f'(x)$ đổi dấu từ $- \rightarrow +$ khi đi qua $x = 1 \Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm cực tiểu

$f'(x)$ đổi dấu từ $+ \rightarrow -$ khi đi qua $x = -1; x = 4 \Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực đại

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 4)$ chứa $(2; 3)$

Xét $g(x) = f(x^2) \rightarrow g'(x) = 2x.f'(x^2) < 0 \Leftrightarrow x.f'(x^2) < 0 (*)$

Mà $f'(x) = -(x+1)(x-1)(x-4)$ suy ra $(*) \Leftrightarrow -x(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4) < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-2; -1), (0; 1)$ và $(2; +\infty)$

Dựa vào bảng biến thiên $\rightarrow$ Trên đoạn $[-1; 4]$ thì $f(1) < \{f(-1); f(4)\}$

Và $S_1 = \int_{-1}^{-1} |f'(x)| dx < S_2 = \int_1^4 |f'(x)| dx \Leftrightarrow -\int_{-1}^1 f'(x) dx < \int_1^4 f'(x) dx$

$\Leftrightarrow f(-1) - f(1) < f(4) - f(1) \Leftrightarrow f(-1) > f(4)$ suy ra $\begin{cases} \min_{[-1; 4]} f(x) = f(1) \\ \max_{[-1; 4]} f(x) = f(4) \end{cases}$

Vậy chỉ có 3 mệnh đề 2, 3 và 4 đúng. **Chọn B.**

Câu 56: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ tuy nhiên $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x = 2$

Và $f'(x)$ đổi dấu từ $- \rightarrow +$ khi đi qua $x = -1 \Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm cực trị

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1)$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ chứa $(0; 2)$

Xét $g(x) = f(1 - \sqrt{x^2 + 1}) \rightarrow g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f'(1 - \sqrt{x^2 + 1}) < 0$

$$\Leftrightarrow x \cdot f'(1 - \sqrt{x^2 + 1}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(1 - \sqrt{x^2 + 1}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \sqrt{x^2 + 1} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \sqrt{3} \\ x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$ chứa $(1; \sqrt{3})$

Dựa vào bảng biến thiên $\rightarrow$ Trên đoạn $[-2; 1]$ thì $f(3) > f(2) > f(-1)$

$\Rightarrow f(3) + f(2) - 2f(-1) > 0$.

vậy chỉ có 3 mệnh đề 3, 4 và 5 đúng. **Chọn B.**