

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 02 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 06/10/2020

Bài 1 (5,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{7x-y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{6}{7x-y} = 2 \end{cases}$$

b) Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{(2x+y)(2x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(2y+x)(2y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(2z+x)(2z+y)}}.$$

Bài 2 (3,0 điểm). Cho a là một số thực và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = a; x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{x_n + 3} - \frac{(2n+1)x_n - n}{n+1} & \text{nếu } x_n \leq 1 \\ x_n + \frac{n}{x_n} & \text{nếu } x_n > 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Khi $a = 2$. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$ và xác định tất cả các số thực β sao cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = n^\beta (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

b) Tìm tất cả các giá trị $a > 0$ sao cho dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ có giới hạn.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ngoại tiếp đường tròn (I) với $AB < AC$. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với các đường thẳng BC, CA, AB . Các đường thẳng ID và EF cắt nhau tại J . Đường thẳng AJ cắt đường tròn (I) tại các điểm K và L , với K nằm giữa A và L . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt ID, EF lần lượt tại N và S . Đường thẳng qua K và song song BC cắt (I) tại điểm X ($X \neq K$). Đường thẳng qua L song song BC cắt (I) tại điểm Y ($Y \neq L$). Các đường thẳng AX, AY cắt BC lần lượt tại Q, P .

a) Chứng minh ND là phân giác của $\widehat{ENF}$ và AJ đi qua trung điểm M của BC .

b) Chứng minh M là trung điểm đoạn PQ .

Bài 4 (3,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(y) = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) f(\sqrt{xy}); \forall x, y > 0.$$

Bài 5 (4,0 điểm).

a) Cho số nguyên tố $p \geq 7$. Đặt $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p^2 - 1} = \frac{A}{B}$, với A, B là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh: B không chia hết cho p và A chia hết cho p .

b) Trong không gian cho N điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng (N là số nguyên dương lớn hơn 3). Tất cả các cặp điểm trên được nối với nhau bởi C_N^2 đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i). Không có tam giác nào có đúng 1 cạnh xanh.

(ii). Không có 13 điểm nào mà tất cả các đoạn nối được tô cùng màu.

Chứng minh rằng $N \leq 144$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Chữ kí của 01 CBCT:

Số báo danh: