

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó có hệ số góc bằng 9.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải các phương trình sau:

- a) $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$;
- b) $\log_3^2(x-1) - \log_3(x-1)^3 + 2 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x \sin 2x) dx$.

Câu 4 (1,0 điểm).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$.

b) Trong kì thi THPT quốc gia, hai bạn Hạnh và Phúc đều thi môn tự chọn là Vật lý. Đề thi môn Vật lý có 8 mã đề khác nhau, được sắp xếp và phát cho các thí sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để mã đề môn Vật lý của Hạnh nhận được giống với mã đề môn Vật lý của Phúc nhận được.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của cạnh AB . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DH và SC .

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho M cách đều ba điểm A, B, C .

Câu 7 (1,0 điểm). Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x+1} \geq 4x - 2$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A và H là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$, đường thẳng AH có phương trình $3x - 4y - 17 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho, biết đường thẳng AD đi qua $M(7;2)$ và E có tung độ âm.

Câu 9 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 = c^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

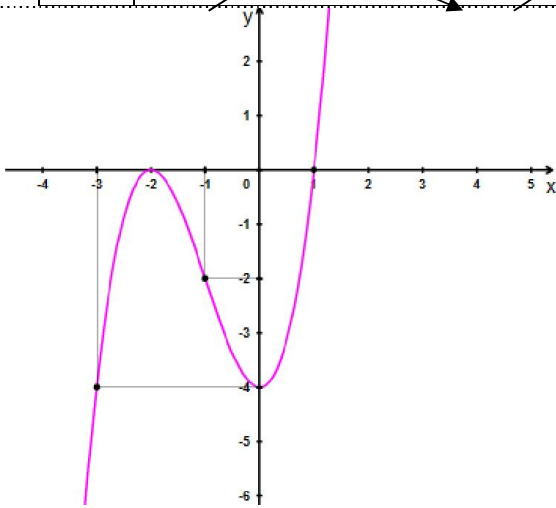
biểu thức $P = (a^2 + b^2 - c^2) \left[\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right]$.

.....HẾT.....

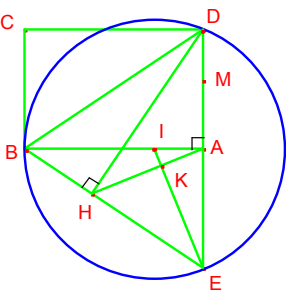
Họ và tên thí sinh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Câu	Nội dung	Điểm																
Câu 1a	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ $y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$	0,25																
	Các khoảng đồng biến: $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; khoảng nghịch biến: $(-2; 0)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{CD} = 0$; đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -4$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.	0,25																
	Bảng biến thiên:	0,25																
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	
	x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$													
y'	+	0	-	0	+													
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$														
 Giao điểm Ox: $(-2; 0), (1; 0)$ Giao điểm Oy: $(0; -4)$	0,25																	
Câu 1b	+ Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (C), d là tiếp tuyến của (C) tại điểm M Phương trình dt d là : $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$	0,25																
	+ Tiếp tuyến d có hệ số góc bằng 9 nên $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$	0,25																
	+ Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9x - 9$	0,25																
	+ Với $x_0 = -3$ thì $y_0 = -4$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9x + 23$	0,25																
Câu 2a	$\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$	0,25																

	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$	0.25
Câu 2b	ĐK: $x > 1$ $\log_3^2(x-1) - \log_3(x-1)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2(x-1) - 3\log_3(x-1) + 2 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-1) = 1 \\ \log_3(x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 10 \end{cases} \text{ (nhận).}$	0.25
Câu 3	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$	0,25
	Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}$	0,25
	Xét $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$	0,25
	$B = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ Vậy $I = A + B = \frac{\pi^4}{64} + \frac{\pi}{4}$	0,25
Câu 4a	TXĐ: $D = [-3; 3]$. Trên $(-3; 3)$ ta có $f'(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 9}{\sqrt{9 - x^2}}$.	0.25
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$	0.25
Câu 4b	$f(-3) = 0; f(3) = 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Vậy $\min_{[-3;3]} f(x) = 0, \max_{[-3;3]} f(x) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$	0.25
	Vì Hạnh cũng như Phúc đều có 8 cách nhận mã đề thi nên ta có $n(\Omega) = 8.8 = 64$ Gọi A là biến cố “mã đề của Hạnh nhận được giống với mã đề của Phúc nhận được”. Với mỗi cách nhận mã đề của Hạnh thì Phúc chỉ có duy nhất một cách nhận mã đề (giống với Hạnh) nên $n(A) = 8.1$. Xác suất $P(A) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.	0.25

	Đặt $t = \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ thu được BPT: $\sqrt{t^2+5} \geq 2t+1$.	
	Ta có $\sqrt{t^2+5} \geq 2t+1 \Leftrightarrow t \leq \frac{2}{3}$	0.25
	$\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} \geq 6x-3 \Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{10+\sqrt{55}}{18}$. Vậy $T = \left[-1; \frac{10+\sqrt{55}}{18}\right]$.	0.25
Câu 8	Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE Suy ra (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $R=5$ Vì tam giác BDE cân nên I thuộc AB Do $\triangle IBE$ cân tại I nên $\widehat{IBE} = \widehat{IEB}$ Do $\triangle AHE$ cân tại A nên $\widehat{AHE} = \widehat{AEH}$ Mà $\widehat{IBE} + \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $\widehat{IEB} + \widehat{AHE} = 90^\circ$. $\Rightarrow \triangle HKE$ vuông tại K. 	0.25
	Đường thẳng IE qua I và vuông góc với AH nên có phương trình $4x+3y-19=0$. Tọa độ của E thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 4x+3y-19=0 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(1;5) \\ E(7;-3) \end{cases}$ (loại)	0.25
	Đường thẳng AD đi qua M và E có phương trình: $x-7=0$ Tọa độ điểm A thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x-7=0 \\ 3x-4y-17=0 \end{cases} \Rightarrow A(7;1)$ D đối xứng với E qua A $\Rightarrow D(7;5)$	0.25
	Đường thẳng AB qua A và vuông góc với AD nên có phương trình: $y-1=0$ Tọa độ điểm B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(9;1) \\ B(-1;1) \end{cases}$ Với $B(-1;1)$ và do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(-1;5)$ Với $B(9;1)$ và do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow C(9;5)$ Vậy $A(7;1), B(-1;1), C(-1;5), D(7;5)$ hoặc $A(7;1), B(9;1), C(9;5), D(7;5)$	0.25
Câu 9	Ta có $P = (a^2+b^2-c^2) \left[\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \right] - \frac{c^2}{a^2+b^2} + 1$ Do $a^3+b^3=c^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{c} < 1; 0 < \frac{b}{c} < 1$ Do đó $1 = \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Rightarrow a^2+b^2-c^2 > 0$ (1) Theo BĐT Cô Si: $\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(a-c)^2} \cdot \frac{1}{(b-c)^2}} = \frac{2}{(c-a)(c-b)} > 0$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $P \geq \frac{2(a^2+b^2-c^2)}{(c-a)(c-b)} - \frac{c^2}{a^2+b^2} + 1$ (3).	0.25

	Đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c}; t = x + y$. Ta có $x^3 + y^3 = 1$. Dễ thấy $x^3 + y^3 = (x + y) \left[\frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 \right] \geq \frac{1}{4}(x + y)^3 \Rightarrow x + y \leq \sqrt[3]{4}$ và $(x + y)^3 > x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow x + y > 1$ nên $t \in (1; \sqrt[3]{4}]$.	0.25
	Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \Rightarrow 1 = t^3 - 3txy \Rightarrow xy = \frac{t^3 - 1}{3t}$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \frac{t^3 + 2}{3t}$. Từ (3) suy ra: $P \geq \frac{2(x^2 + y^2 - 1)}{(1 - x)(1 - y)} - \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{2(t + 2)(t - 1)^2}{(t - 1)^3} - \frac{3t}{t^3 + 2} + 1 = \frac{2(t + 2)}{t - 1} - \frac{3t}{t^3 + 2} + 1$	0.25
	Xét hàm số $f(t) = \frac{2(t + 2)}{t - 1} - \frac{3t}{t^3 + 2} + 1; t \in (1; \sqrt[3]{4}]$ $f'(t) = \frac{-6}{(t - 1)^2} + \frac{6t^3 - 6}{(t^3 + 2)^2} = \frac{6 \left[(t - 1)^2(t^3 - 1) - (t^3 + 2)^2 \right]}{(t - 1)^2(t^3 + 2)^2} < 0$ (vì $t \in (1; \sqrt[3]{4}] \Rightarrow (t - 1)^2(t^3 - 1) \leq 3(\sqrt[3]{4} - 1)^2 < 2, (t^3 + 2)^2 > 2$). Suy ra $\min_{(1; \sqrt[3]{4}]} f(t) = f(\sqrt[3]{4}) = \frac{5\sqrt[3]{4} + 6}{2(\sqrt[3]{4} - 1)}$. Từ đó ta có $\min P = \frac{5\sqrt[3]{4} + 6}{2(\sqrt[3]{4} - 1)}$ khi $a = b = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}c$.	0.25

----- Hết -----