

TRUNG TÂM HOÀNG GIA

Số 14 – Thống Nhất – P. Tân Thành – Q. Tân Phú

Số 56 – Phố Chợ - P. Tân Thành – Q. Tân Phú

CHUYÊN ĐỀ 4

SỐ PHỨC

Tài liệu luyện thi THPT Quốc Gia

Năm học 2017 – 2018

Biên soạn & Giảng dạy:

Ths. Lê Văn Đoàn

0933.755.607

MỤC LỤC

	Trang
§ 1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC	1
Nhóm 1. Sử dụng hai số phức bằng nhau	3
Nhóm 2. Tìm các thuộc tính của số phức loại 1	3
Nhóm 3. Tìm các thuộc tính của số phức loại 2	5
Nhóm 4. Tìm số phức thỏa biểu thức số phức là số thuần ảo, số thực	9
Nhóm 5. Lấy môđun hai vế của số phức	12
Nhóm 6. Chuẩn hóa số phức	14
Nhóm 7. Bài toán sử dụng bất đẳng thức trong số phức	15
Bài tập trắc nghiệm dạng đại số của số phức	24
Bảng đáp án trắc nghiệm	40
§ 2. DẠNG HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC	41
Nhóm 1. Bài toán xác định điểm biểu diễn của số phức	42
Nhóm 2. Tập hợp điểm là đường thẳng	49
Nhóm 3. Tập hợp điểm là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn	52
Nhóm 4. Tập hợp điểm là một elip	59
Nhóm 5. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất	61
Phương pháp 1. Lượng giác hóa	61
Phương pháp 2. Bình phương vô hướng	67
Phương pháp 3. Hình chiếu và tương giao	72
Bài tập trắc nghiệm dạng hình học của số phức	79
Đáp án trắc nghiệm	102
§ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC	103
Bài tập trắc nghiệm	108
Đáp án trắc nghiệm	117

§ 1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC & CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

☆☆☆

1. Định nghĩa

- **Đơn vị ảo:** Số i mà $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.
- Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Gọi a là phần thực, b là phần ảo của số phức z .
- Tập số phức $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$. Tập số thực $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ví dụ. Số phức $z = 3 - 2i$ có phần thực là phần ảo là

Đặc biệt:

- Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là số thực.
- Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ. Tìm các số thực x, y , biết rằng $(2x + 1) + (3y - 2)i = (x + 2) + (y + 4)i$.

Giải. Từ định nghĩa, ta có: $\begin{cases} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots \end{cases}.$

3. Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.

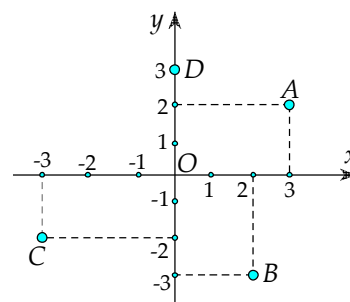
Ví dụ. Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có:

Điểm A biểu diễn cho số phức:

Điểm B biểu diễn cho số phức:

Điểm C biểu diễn cho số phức:

Điểm D biểu diễn cho số phức:

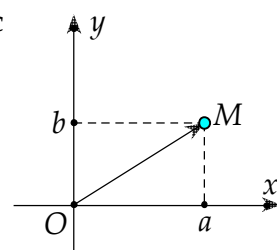
**4. Môđun của số phức**

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và được kí hiệu là $|z|$. Khi đó: $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Kết quả: $\forall z \in \mathbb{C}$ ta có: $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $|z^2| = |z|^2$ và

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z| = |\bar{z}|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$



Ví dụ. Tìm môđun của các số phức sau:

$$\bullet \quad z = 3 - 2i \Rightarrow |z| = |3 - 2i| = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

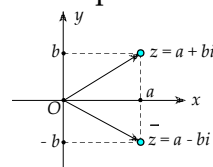
$$\bullet \quad z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

5. Số phức liên hợp

– **Định nghĩa.** Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và được kí hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

Ví dụ. Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = \dots\dots\dots$

Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = \dots\dots\dots$



– Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox .

– Từ định nghĩa, ta có các kết quả sau:

- $\overline{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

6. Cộng, trừ, nhân, chia số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

– Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

○ Phép cộng: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

○ Phép trừ: $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Số phức đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$. Do đó $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Ví dụ. Cho hai số phức là $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 3 + 7i$. Tìm phần thực, phần ảo và môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ và số phức $w' = z_2 - z_1$

.....

– Phép nhân số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức, rồi thay $i^2 = -1$ trong kết quả nhận được. Cụ thể $z_1 \cdot z_2 = (ab - bd) + (ad + bc)i$.

Ví dụ. Cho hai số phức: $z_1 = 5 + 2i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Hãy tính:

$$\bullet \quad w = z_1 \cdot z_2 = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \quad r = \frac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \dots\dots\dots$$

– Phép chia: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$, ($z_2 \neq 0$).

– Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$ là $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

Bài tập vận dụng**BT 1.** Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau (nhóm sử dụng 2 số phức bằng nhau)

a) $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x.$

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện $\Rightarrow (2x + 1) + (1 - 2y)i = 4 - 2i + yi - x$

$$\Leftrightarrow (2x + 1) + (1 - 2y)i = (4 - x) + (y - 2)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 4 - x \\ 1 - 2y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Nhận xét: Ở trên đã sử dụng kết quả của hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

b) $(1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i.$

ĐS: $x = 1, y = 1.$

.....
.....

c) $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i.$

ĐS: $x = -1, y = 2.$

.....
.....

d) $\frac{x + yi}{1 - i} = 3 + 2i.$

ĐS: $x = 5, y = -1.$

.....
.....

e) $\frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} = i.$

ĐS: $x = -2, y = 8.$

.....
.....**BT 2.** Nhóm bài toán tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và môđun của z, w (loại 1)

a) Cho z thỏa $(2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = 5 - i$. Tìm các thuộc tính của $w = 1 + 2z + z^2$.

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện có $(2 + i)z + \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = 5 - i \Leftrightarrow (2 + i)z + \frac{1 - 2i + i^2}{1 - i^2} = 5 - i$

$$\Leftrightarrow (2 + i)z + \frac{-2i}{2} = 5 - i \Leftrightarrow (2 + i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2 + i} \Leftrightarrow z = \frac{5(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10 - 5i}{4 - i^2} = \frac{10 - 5i}{5} \Leftrightarrow z = 2 - i.$$

Suy ra $w = 1 + 2z + z^2 = 1 + 2(2 - i) + (2 - i)^2 = 8 - 6i$ có phần thực là 8, ảo là -6 .

Số phức liên hợp của w là $\bar{w} = 8 + 6i \Rightarrow$ môđun $|w| = |\bar{w}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Nhận xét:

- Về phương pháp tự luận, để thực hiện phép chia 2 số phức, ta cần nhân thêm số phức liên hợp của mẫu số, chẳng hạn trong lời giải trên có $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)}$.
- Nếu sử dụng casio, ta chuyển về chế độ CMPLX (mode 2) (i tương ứng ENG).

Chuyển về tìm z và nhập $\frac{5 - i - \frac{1 - i}{1 + i}}{2 + i}$ sẽ được kết quả $2 - i$, nghĩa là tìm được số phức $z = 2 - i$. Các phép toán còn lại thao tác tương tự trên casio.

b) $z = (2 + 4i) + 2i(1 - 3i).$

ĐS: $z = 8 + 6i.$

.....

c) $(1 + i)z = 14 - 2i.$

ĐS: $z = 6 - 8i.$

.....

.....

d) $(1 - i)z + (2 - i) = 4 - 5i.$

ĐS: $z = 3 - i.$

.....

.....

.....

e) $w = z_1 - 2z_2$ biết rằng $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - 3i.$

ĐS: $w = -3 + 8i.$

.....

.....

.....

f) $w = z_1 z_2$ biết rằng $z_1 = 2 + 5i, z_2 = 3 - 4i.$

ĐS: $w = 26 + 7i.$

.....

.....

.....

g) $(1 - 2i)z - \frac{9 + 7i}{3 - i} = 5 - 2i.$

ĐS: $z = 1 + 3i.$

.....

.....

.....

.....

h) $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z.$

ĐS: $z = 2 - 3i.$

.....

.....

.....

.....

BT 3. Nhóm bài toán tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và môđun của z (loại 2)

a) Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm môđun của z .

Lời giải tham khảo

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i \Leftrightarrow (2 + 3i)(a + bi) - (1 + 2i)(a - bi) = 7 - i$

$$\Leftrightarrow 2a + 2bi + 3ai + 3bi^2 - a + bi - 2ai + 2bi^2 = 7 - i \Leftrightarrow (a - 5b) + (a + 3b)i = 7 - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 5b = 7 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - i \Rightarrow |z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Phần thực của số phức z là 2, phần ảo bằng -1 , số phức liên hợp $\bar{z} = 2 + i$.

Nhận xét: Khi bài toán yêu cầu tìm các thuộc tính của số phức (phần thực, phần ảo, môđun hoặc số phức liên hợp) mà đề bài cho giả thiết chứa hai thành phần trong ba thành phần z , $\bar{z}$, $|z|$ thì ta sẽ gọi số phức $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, với $a, b \in \mathbb{R}$, rồi sau đó thu gọn và sử dụng kết quả hai số phức bằng nhau, giải hệ.

b) $2z - i\bar{z} = 2 + 5i.$

ĐS: $z = 3 + 4i.$

.....

.....

.....

.....

c) $z + (2 + i)\bar{z} = 3 + 5i.$

ĐS: $z = 2 - 3i.$

.....
.....
.....
.....
d) $2z + 3(1 - i)\bar{z} = 1 - 9i.$

ĐS: $z = 2 + 3i.$
.....
.....
.....
.....

e) $(3z - \bar{z})(1 + i) - 5z = 8i - 1.$

ĐS: $z = 3 - 2i.$
.....
.....
.....
.....

f) $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2.$

ĐS: $z = -2 + 5i.$
.....
.....
.....
.....
.....

g) $(3 - 2i)z + 5(1 + i)\bar{z} = 1 + 5i.$

ĐS: $z = 1 - i.$
.....
.....
.....
.....
.....

h) $(3 + i)\bar{z} + (1 + 2i)z = 3 - 4i.$

ĐS: $z = 2 + 5i.$

.....

.....

.....

i) $(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20.$

ĐS: $z = 4 + 3i.$

.....

.....

.....

.....

j) $z^2 + |z| = 0.$

ĐS: $z = 0; z = \pm i.$

.....

.....

.....

.....

k) $|z| + (\bar{z} - 3)i = 1.$

ĐS: $z = 3 - 4i.$

.....

.....

.....

.....

l) $z + \bar{z} = 10$ và $|z| = 13.$

ĐS: $z = 5 \pm 12i.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

m) $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$.

ĐS: $z = 3 + 4i, z = 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

n) $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} - 2 - i|$ và $|z - 1| = \sqrt{5}$.

ĐS: $\begin{cases} z = 2 + 2i \\ z = -1 - i \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

o) $|z|^2 + 2z.\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$.

ĐS: $z = 1 + i, z = 1 - i$.

.....

.....

.....

.....

.....

p) $w = 1 + iz + z^2$ với $z + (2 - i).\bar{z} = 5 + i$.

ĐS: $w = -3i$.

.....

.....

.....

.....

.....

q) $w = z + 2\bar{z}$ với $(1 - i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$.

ĐS: $w = 6 - i$.

$$r) \quad z = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad z = (2^{10} + 1)i - 2^{10}.$$

BT 4. Nhóm bài toán tìm các số phức z thỏa mãn biểu thức số phức là số thực, số thuần ảo

- a) (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 44) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo ?

Lời giải tham khảo

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } (z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1 = (a + bi)^2 - 2(a + bi) + 1$$

$$\Rightarrow (z - 1)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 - 2a - 2bi + 1 = (a^2 - b^2 - 2a + 1) + (2ab - 2b)i$$

Vì $(z - 1)^2$ là số thuần ảo nên phần thực của nó bằng 0, nghĩa là có:

$$a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 - b^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } |z + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a + bi + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |(a + 2) + (b - 1)i| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a + 2)^2 + (b - 1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) } \Rightarrow \text{ hệ phương trình } \begin{cases} b^2 = (a - 1)^2 \\ (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ (a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ (a + 2)^2 + (a - 2)^2 = 8 \\ b = 1 - a \\ (a + 2)^2 + a^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ 2a^2 = 0 \\ b = 1 - a \\ a^2 + 2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ a = -1 \pm \sqrt{3} \\ b = 2 \mp \sqrt{3} \end{cases}$$

Có ba số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = -i$, $z = -1 \pm \sqrt{3} + (2 \mp \sqrt{3})i$.

Nhận xét: Số phức $z = a + bi$ được gọi là số phức thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực $a = 0$ và z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo $b = 0$.

b) $|z| = 5$ và phần thực bằng 2 lần phần ảo.

ĐS: $z = \pm 3 \pm i$.

.....

.....

.....

.....

c) $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

ĐS: $\begin{cases} z = 1 \pm i \\ z = -1 \pm i \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực.

ĐS: $z = 1, z = -1 + 2i$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

e) $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13}$ và $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo.

ĐS: $z = \pm(2 + i)$.

.....

.....

f) $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực và $|z - 1| = \sqrt{5}$.

ĐS: $z = 2i, z = 2 - 2i$.

g) $z + \bar{z} = 6$ và $z^2 + 2\bar{z} - 8i$ là số thực.

ĐS: $z = 3 + 2i$.

h) $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo.

ĐS: $\begin{cases} z = 2i \\ z = \pm\sqrt{5} + 2i \end{cases}$.

BT 5. Nhóm bài toán lấy môđun hai vế của đẳng thức số phức (đề cần tính $|z|$ hoặc $P(|z|)$)

a) Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** $0 < |z| \leq 1$. **B.** $1 < |z| \leq 3$. **C.** $3 < |z| \leq 10$. **D.** $10 < |z| \leq 50$.

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết, ta có $z - 4 = |z| + i|z| - 4i - 3iz \Leftrightarrow (1 + 3i)z = (|z| + 4) + (|z| - 4)i$

Lấy môđun hai vế, được $|(1 + 3i)z| = |(|z| + 4) + (|z| - 4)i|$

$$\Leftrightarrow |(1 + 3i)| \cdot |z| = \sqrt{(|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2} \Leftrightarrow \sqrt{10} \cdot |z| = \sqrt{(|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10|z|^2 = 2|z|^2 + 32 \Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Nhận xét: Lấy môđun hai vế của một biểu thức số phức thực ra là việc sử dụng phép kéo theo của hai số phức bằng nhau $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$. Do đó ta **chỉ được thực hiện được** nó khi biểu thức giả thiết của bài toán được **đưa về các dạng chuẩn sau**:

- ① $a + bi = c + di$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
 ② $(a + bi)z = c + di$ hoặc $(a + bi)\bar{z} = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
 ③ $\frac{a + bi}{z} = ci + d$ hoặc $\frac{a + bi}{\bar{z}} = ci + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ta thường sử dụng các tính chất $|z| = |\bar{z}|$, $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ và $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

b) Tìm môđun của số phức z thỏa mãn $2z - 2 = (1 - i)|\bar{z}| + (2 - z\sqrt{2})i$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z[(2 + 3i)|\bar{z}| - 3 + 2i] - \sqrt{26} = 0$. Tính giá trị của $|\bar{z}|$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1-i}{z} = \frac{(2-3i)\bar{z}}{|z|^2} + 2-i$. Tính giá trị của $|z|$.

.....

.....

.....

.....

.....

e) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + i - 2$. Tính giá trị của $|\bar{z}|$.

.....

.....

.....

.....

.....

f) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z| = \frac{\sqrt{26}}{\bar{z}} + 3 - 2i$. Tính giá trị của $|z|$.

.....

.....

.....

.....

.....

g) Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1-3i)|\bar{z}| = \frac{4\sqrt{10}}{z} + 3 + i$. Tính $P = |\bar{z}|^4 + |z|^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

BT 6. Nhóm bài toán chuẩn hóa số phức

- a) Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

Lời giải tham khảo

Chuẩn hóa $z_1 = 1 \Rightarrow |z_1| = 1$ và đặt $z_2 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\text{Có } \begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 - z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ |(1-a) - bi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (1-a)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - 2a + 1 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ và sẽ chọn } z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1 - z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Kiểm tra $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Khi đó } P = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2 \stackrel{\text{casio}}{=} -1 \text{ là kết quả cần tìm.}$$

- b) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức

$$z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi. \text{ Tìm } |b|.$$

$$\text{A. } |b| = \frac{3}{8}. \quad \text{B. } |b| = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad \text{C. } |b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad \text{D. } |b| = \frac{8}{3}.$$

- c) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2 . Biết rằng $\widehat{MON} = 45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Tính $|z_1^2 + 4z_2^2|$.

$$\text{A. } 4\sqrt{2}. \quad \text{B. } 4. \quad \text{C. } 6. \quad \text{D. } 4\sqrt{5}.$$

d) Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

- A. $P = -1$. B. $P = 0$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

BT 7. Nhóm bài toán sử dụng bất đẳng thức trong số phức

Vì số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ. Do đó ta có thể xem vectơ $\overrightarrow{OM} = (a; b)$ cũng biểu diễn cho số phức z . Nghĩa là có thể sử dụng bất đẳng thức vectơ trong phép toán max – min của số phức.

Cho ba vectơ $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (x; y)$, $\vec{w} = (m; n)$ và khi đó:

① $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

② $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

③ $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

④ $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{m}{n}$.

Các bất đẳng thức cổ điển thường được sử dụng:

⑤ Bất đẳng thức Cauchy:

○ Với $a, b \geq 0$ thì: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b \geq 0$.

○ Với $a, b, c \geq 0$ thì: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \geq 0$.

⑥ Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpxki):

○ Với $a, b > 0$ và x, y bất kỳ ta luôn có $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ (Dạng cộng mẫu số).

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

○ Với a, b, x, y bất kỳ ta luôn có: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ |a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{cases}$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

○ Với x, y, z bất kỳ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ |a.x + b.y + c.z| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lưu ý:

① Ta có thể sử dụng phương pháp hàm số (hoặc tam thức) để tìm max – min.

② Ngoài ra còn sử dụng phương pháp hình học (sẽ tìm hiểu kỹ ở bài học 2).

a) Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của $P = |z|$.

Bài giải tham khảo

Cách giải 1. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$, (hay $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$).

Ta có $4 = |z - 3 + 4i| = |z - (3 - 4i)| \geq |z| - |3 - 4i| = |z| - 5 \Rightarrow P = |z| \leq 9$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P_{\max} = 9$.

Cách giải 2. Sử dụng lượng giác hóa.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{x - 3}{4}\right)^2 + \left(\frac{y + 4}{4}\right)^2 = 1. \text{ Đặt } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \sin \alpha \\ \frac{y + 4}{4} = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \sin \alpha + 3 \\ y = 4 \cos \alpha - 4 \end{cases}. \text{ Khi đó } P = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4 \sin \alpha + 3)^2 + (4 \cos \alpha - 4)^2}$$

$$= \sqrt{41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} = \sqrt{41 + \sqrt{24^2 + 32^2} \sin(\alpha - \beta)} = \sqrt{41 + 40 \sin(\alpha - \beta)}$$

$$\text{với } \frac{24}{\sqrt{24^2 + 32^2}} = \cos \beta, \frac{32}{\sqrt{24^2 + 32^2}} = \sin \beta.$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin(\alpha - \beta) \leq 1 \Leftrightarrow -40 \leq 40 \sin(\alpha - \beta) \leq 40 \Leftrightarrow 1 \leq 41 + 40 \sin(\alpha - \beta) \leq 81$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{41 + 40 \sin(\alpha - \beta)} \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq P \leq 9. \text{ Suy ra } P_{\min} = 1 \text{ và } P_{\max} = 9.$$

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

$$\text{Ta có } |24 \cdot \sin \alpha + (-32) \cdot \cos \alpha| \leq \sqrt{(24^2 + 32^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 40$$

$$\Leftrightarrow -40 \leq 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha \leq 40 \Leftrightarrow 1 \leq 41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha \leq 81$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{41 + 24 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} \leq 9 \Rightarrow P_{\min} = 1 \text{ v\`a } P_{\max} = 9.$$

Cách giải 3. Sử dụng phương pháp hình học (sẽ tìm hiểu rộng ở bài học 2).

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4$

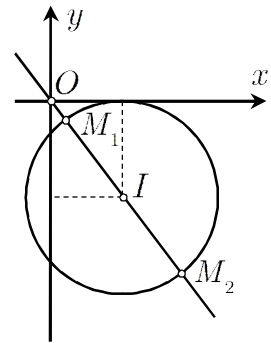
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$. Do đó tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 4$.

Từ hình vẽ $\begin{cases} |z|_{\min} = OM_1 = OI - IM_1 = OI - R = 1 \\ |z|_{\max} = OM_2 = OM_1 + 2R = 9 \end{cases}$.

Để tìm z có môđun lớn nhất và z có môđun nhỏ nhất chính là tọa độ hai điểm M_1, M_2 cũng là tọa độ giao điểm của đường thẳng OI và đường tròn.

Đường thẳng OI qua $O(0;0)$ và có VTCP là $\overrightarrow{OI} = (3; -4)$

có dạng $\frac{x}{3} = \frac{y}{-4} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow (x; y) = \left\{ \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5} \right); \left(\frac{27}{5}; -\frac{36}{5} \right) \right\}.$



Nhận xét: Cách 2 và 3 tổng quát hơn, có thể tìm $P_{\max}$ và $P_{\min}$ cùng một lúc. Tùy vào yêu cầu của bài toán mà ta chọn phương pháp cho phù hợp cho trắc nghiệm hoặc tự luận.

b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz + 4 - 3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Cho số phức z thỏa $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |\overline{z}|$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) Trong các số phức thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm số phức có môđun nhỏ nhất ?

Bài giải tham khảo

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ điều kiện $\Rightarrow |x + yi - 2 - 4i| = |x + yi - 2i|$
 $\Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$
 $\Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$

Cách giải 1. Sử dụng đánh giá hằng đẳng thức $A^2 \geq 0$.

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$
 $\Rightarrow |z|_{\min} = 2\sqrt{2}$ và dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i.$

Cách giải 2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}.$

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1}} \geq \sqrt{\frac{(x + y)^2}{1 + 1}} = \sqrt{\frac{4^2}{2}} = 2\sqrt{2}.$

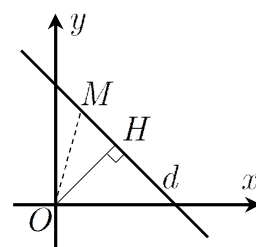
$\Rightarrow |z|_{\min} = 2\sqrt{2}$ và dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i.$

Cách giải 3. Sử dụng hình học

Tập hợp biểu diễn số phức z là đường $d : x + y - 4 = 0.$

Số phức có môđun nhỏ nhất $\Leftrightarrow |z|_{\min} = OH$ và số phức cần tìm chính là tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm O lên $d.$

Vì $OH \perp d : x + y - 4 = 0 \Rightarrow OH : x - y + m = 0.$



Do $O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH : x - y = 0$. Tọa độ điểm $H = d \cap OH$ thỏa mãn

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(2;2) \Rightarrow z = 2 + 2i \Rightarrow |z|_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

e) Trong các số phức thỏa mãn $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$, tìm số phức có môđun nhỏ nhất ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

f) Trong các số phức thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$, tìm số phức có môđun nhỏ nhất ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

g) Trong các số phức thỏa $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực, tìm số phức có môđun nhỏ nhất ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

h) Trong các số phức thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$, tìm môđun nhỏ nhất $|w|_{\min}$ của số phức $w = 2z + 2 - i$.

.....

- i) Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$ và $w = iz + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

- j) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z + i}{z} \right|$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

- k) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Tìm $M + m$.

A. $4 - \sqrt{7}$.

B. $4 + \sqrt{7}$.

C. 7.

D. $4 + \sqrt{5}$.

- 1) Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

Lời giải tham khảo

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Từ giả thiết $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= |1 + z| + 3|1 - z| = |(1 + x) + yi| + 3|(1 - x) - yi| \\ &\Leftrightarrow P = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + 1 - x^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + 1 - x^2} \\ &\Leftrightarrow P = \sqrt{2(1 + x)} + 3\sqrt{2(1 - x)}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $P = f(x) = \sqrt{2(1 + x)} + 3\sqrt{2(1 - x)}$ trên đoạn $[-1; 1]$ có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1 - x)}}, \quad \forall x \in (-1; 1). \text{ Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1).$$

$$\text{Tính } f(-1) = 6, f(1) = 2, f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}. \text{ Suy ra } \max P = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i.$$

Cách khác: Sử dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

$$\begin{aligned} P &= 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow P \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)[(x + 1)^2 + y^2 + (1 - x)^2 + y^2]} = \sqrt{20(x^2 + y^2 + 1)} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Lưu ý: Ta có thể sử dụng phương pháp hình học sẽ ngắn hơn (bài học 2).

BT 8. Cho số phức z_1, z_2 thỏa $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$.

A. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2\sqrt{3}$. **D.** $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

BT 9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

- A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. B. $\min|w| = 2$. C. $\min|w| = 1$. D. $\min|w| = \frac{1}{2}$.

BT 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z + i|$.

- A. $\min P = 2$. B. $\min P = 1$. C. $\min P = 3$. D. $\min P = 4$.

BT 11. Cho số phức $z = x + 2yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Tính tổng S của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$?

- A. $S = -\sqrt{5}$. B. $S = 0$. C. $S = \sqrt{5}$. D. $S = 2\sqrt{5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

**Nhóm 1. Tìm các số thực x và y thỏa mãn hai số phức bằng nhau**

- Câu 1.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 14) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.
- A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$. B. $x = \sqrt{2}, y = 2$. C. $x = 0, y = 2$. D. $x = \sqrt{2}, y = -2$.
- Câu 2.** Trên tập số phức, cho $2x + y + (2y - x)i = x - 2y + 3 + (y + 2x + 1)i$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2x + 3y$.
- A. $P = 7$. B. $P = 3$. C. $P = 1$. D. $P = 4$.
- Câu 3.** Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $(1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i$.
- A. $x = 1, y = -1$. B. $x = 1, y = 1$. C. $x = -1, y = 1$. D. $x = -1, y = -1$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa điều kiện $3x + yi = 2y + 1 + (2 - x)i$.
- A. $(1; 1)$. B. $(1; 1), (0; -1)$. C. $(1; 0), (-1; -1)$. D. $(-1; -1)$.
- Câu 5.** Tìm các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $x(3 + 5i) + y(1 - 2i)^3 = -35 + 23i$.
- A. $(x; y) = (-3; 4)$. B. $(x; y) = (3; 4)$.
C. $(x; y) = (3; -4)$. D. $(x; y) = (-3; -4)$.
- Câu 6.** Cho số thực x, y thỏa $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x$. Tính $T = x^2 - 3xy - y$.
- A. $T = -1$. B. $T = 1$. C. $T = -2$. D. $T = -3$.

Nhóm 2. Tìm số phức (hoặc xác định các thuộc tính của số phức – loại 1)

- Câu 7.** (Đề thi minh họa lần 1 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.
- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .
- Câu 8.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = -i$.
- A. Phần thực là 0 và phần ảo là $-i$. B. Phần thực là -1 và phần ảo là i .
C. Phần thực là $-i$ và phần ảo là 0 . D. Phần thực là 0 và phần ảo là -1 .
- Câu 9.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = -i(4i + 3)$.
- A. Phần thực là 4 và phần ảo là -3 . B. Phần thực là 4 và phần ảo là 3 .
C. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$. D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
- Câu 10.** Cho các số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 2 + i$. Hỏi số phức $u = z \cdot \bar{w}$ có đặc điểm nào?
- A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3 . B. Phần thực là 0 và phần ảo là 3 .
C. Phần thực là 0 và phần ảo là $3i$. D. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

- Câu 11.** (Đề thử nghiệm lần 2 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.
- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.
- Câu 12.** Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (1 - i)(3 + 2i)$.
- A. $\bar{z} = 1 + i$. B. $\bar{z} = 5 + i$. C. $\bar{z} = 5 - i$. D. $\bar{z} = 1 - i$.
- Câu 13.** Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) = 4 - 3i$. Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$ của z .
- A. $\bar{z} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$. B. $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$. C. $\bar{z} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$. D. $\bar{z} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.
- Câu 14.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 1 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + 3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?
- A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. B. $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. C. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. D. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$.
- Câu 15.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.
- A. $-14 - 5i$. B. $-10 - 5i$. C. $-10 + 5i$. D. $14 - 5i$.
- Câu 16.** Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{3 + 2i} = 1 - i$. Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$.
- A. $\bar{z} = -5 - i$. B. $\bar{z} = -1 - 5i$. C. $\bar{z} = 5 + i$. D. $\bar{z} = -1 + 5i$.
- Câu 17.** Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 14 - 2i$. Giả sử số phức liên hợp của z có dạng $\bar{z} = a + bi$. Tìm $a + b$.
- A. $a + b = -4$. B. $a + b = 14$. C. $a + b = 4$. D. $a + b = -14$.
- Câu 18.** Xác định số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức z , biết $\frac{(i - 1)z + 2}{1 - 2i} = 2 + 3i$.
- A. $\bar{z} = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$. B. $\bar{z} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$. C. $\bar{z} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$. D. $\bar{z} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$.
- Câu 19.** Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (2 + i)(-1 + i)(2i + 1)^2$.
- A. $\bar{z} = 15 + 5i$. B. $\bar{z} = 1 + 3i$. C. $\bar{z} = 5 + 15i$. D. $\bar{z} = 5 - 15i$.
- Câu 20.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 Mã đề 104 câu 4) Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm $|z|$.
- A. $|z| = 3$. B. $|z| = 5$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = \sqrt{5}$.
- Câu 21.** (Đề thử nghiệm lần 3 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.
- A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.
- Câu 22.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z = (1 - 2i)[2 + i + i(3 - 2i)]$.
- A. $|z| = 4\sqrt{10}$. B. $|z| = 4\sqrt{5}$. C. $|z| = 160$. D. $|z| = 2\sqrt{10}$.
- Câu 23.** (Đề thi minh họa lần 1 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1 + z_2| = 1$. **D.** $|z_1 + z_2| = 5$.

Câu 24. Tìm môđun của số phức $w = (1 + z)\bar{z}$, biết z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$.

A. $|w| = 2$. **B.** $|w| = \sqrt{10}$. **C.** $|w| = \sqrt{8}$. **D.** $|w| = \sqrt{2}$.

Câu 25. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1 + i)z - \bar{z}$.

A. $|w| = 3$. **B.** $|w| = 5$. **C.** $|w| = -4$. **D.** $|w| = \sqrt{7}$.

Câu 26. Tìm môđun của số phức $z + \frac{1 + 5i}{3 - i} = 2 + 3i$.

A. $|z| = \frac{\sqrt{170}}{7}$. **B.** $|z| = \frac{\sqrt{170}}{4}$. **C.** $|z| = \frac{\sqrt{170}}{5}$. **D.** $|z| = \frac{\sqrt{170}}{3}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 - 3i)z + 1 + i = -z$. Tìm môđun của số phức $w = 13z + 2i$.

A. $|w| = -2$. **B.** $|w| = \frac{\sqrt{26}}{13}$. **C.** $|w| = \sqrt{10}$. **D.** $|w| = -\frac{4}{13}$.

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tính môđun của số phức $z = (z_1 + 2)z_2$.

A. $|z| = 15$. **B.** $|z| = 5\sqrt{5}$. **C.** $|z| = \sqrt{65}$. **D.** $|z| = \sqrt{137}$.

Câu 29. Cho số phức $z = -3 - 4i$. Tính môđun của số phức $w = iz + \frac{25}{z}$.

A. $|w| = \sqrt{2}$. **B.** $|w| = 2$. **C.** $|w| = 5$. **D.** $|w| = \sqrt{5}$.

Câu 30. Tìm môđun của số phức z , biết z thỏa mãn $z = (-4 + i\sqrt{48})(2 + i)$.

A. $|z| = 8\sqrt{5}$. **B.** $|z| = 5\sqrt{5}$. **C.** $|z| = 6\sqrt{5}$. **D.** $|z| = 9\sqrt{5}$.

Câu 31. Cho số phức $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{17}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{15}$. **C.** $|z_1 + z_2| = 4$. **D.** $|z_1 + z_2| = 8$.

Câu 32. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = -2 - 2i$. Tìm môđun của số phức $z_1 - z_2$.

A. $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|z_1 - z_2| = 1$. **C.** $|z_1 - z_2| = \sqrt{17}$. **D.** $|z_1 - z_2| = 5$.

Câu 33. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 + i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

A. $|z_1 + 3z_2| = 10$. **B.** $|z_1 + 3z_2| = 61$.
C. $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{61}$. **D.** $|z_1 + 3z_2| = \sqrt{10}$.

Câu 34. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 4 + 3i$. Tính $\left| \frac{2z_1}{3z_2} \right|$.

A. $\left| \frac{2z_1}{3z_2} \right| = 2$. **B.** $\left| \frac{2z_1}{3z_2} \right| = \frac{2}{3}$. **C.** $\left| \frac{2z_1}{3z_2} \right| = \frac{3}{2}$. **D.** $\left| \frac{2z_1}{3z_2} \right| = \frac{5}{2}$.

Câu 35. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 09) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z .

- A.** $a = 2$. **B.** $a = 3$. **C.** $a = -3$. **D.** $a = -2$.
- Câu 36.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 27) Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .
A. $a = 0, b = 1$. **B.** $a = -2, b = 1$. **C.** $a = 1, b = 0$. **D.** $a = 1, b = -2$.
- Câu 37.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 5) Tìm phần ảo của số phức $z = 12 - 18i$.
A. -18 . **B.** 18 . **C.** 12 . **D.** $-18i$.
- Câu 38.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 07) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.
A. $b = -2$. **B.** $b = 2$. **C.** $b = 3$. **D.** $b = -3$.
- Câu 39.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 101 câu 07) Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tính số phức $z = z_1 + z_2$.
A. $z = 7 - 4i$. **B.** $z = 2 + 5i$. **C.** $z = -2 + 5i$. **D.** $z = 3 - 10i$.
- Câu 40.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 08) Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.
A. $z = 11$. **B.** $z = 3 + 6i$. **C.** $z = -1 - 10i$. **D.** $z = -3 - 6i$.
- Câu 41.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 104 câu 10) Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.
A. $z = 1 - 5i$. **B.** $z = 1 + i$. **C.** $z = 5 - 5i$. **D.** $z = 1 - i$.
- Câu 42.** (Đề thi minh họa – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.
A. $w = 7 - 3i$. **B.** $w = -3 - 3i$. **C.** $w = 3 + 7i$. **D.** $w = -7 - 7i$.
- Câu 43.** Cho hai số phức $z = 1 + 3i, w = 2 - i$. Tìm phần ảo của số phức $u = \bar{z}.w$.
A. -7 . **B.** $5i$. **C.** 5 . **D.** $-7i$.
- Câu 44.** Trong tập các số phức, tìm số phức z biết $(1 + i)z + 2 - 3i = z(2 - i) - 2$.
A. $z = 1 + 2i$. **B.** $z = 2 + i$. **C.** $z = 2 - i$. **D.** $z = 1 - 2i$.
- Câu 45.** Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần ảo b của số phức liên hợp của z .
A. $b = 2i$. **B.** $b = -2i$. **C.** $b = 2$. **D.** $b = -2$.
- Câu 46.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 5 năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z = \frac{m+i}{m-i}$ có phần thực dương.
A. $m > 0$. **B.** $m < -1$ hoặc $m > 1$.
C. $-1 < m < 1$. **D.** $m > 1$.
- Câu 47.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực của số phức z^2 .
A. 9 . **B.** 12 . **C.** 5 . **D.** 13 .
- Câu 48.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tính $m = |\bar{z} + iz|$.
A. $m = 16$. **B.** $m = 4\sqrt{2}$. **C.** $m = 8\sqrt{2}$. **D.** $m = 2\sqrt{2}$.

- Câu 49.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)^2 \bar{z} + 4 - 5i = -1 + 6i$. Tính $S = a + b$.
A. $S = -3$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 3$.
- Câu 50.** (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh cụm 1 năm 2017) Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = -1 + 5i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng
A. $3i$. **B.** 1 . **C.** $2i$. **D.** 3 .
- Câu 51.** Cho z là một số ảo khác 0. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
A. $z = \bar{z}$. **B.** $z + \bar{z} = 0$.
C. $\bar{z}$ là số thực. **D.** phần ảo z bằng 0.
- Câu 52.** Cho số phức $z = (2i)^4 - \frac{(1+i)^6}{5i}$. Số phức $\overline{5z + 3i}$ là số phức nào sau đây?
A. $440 + 3i$. **B.** $88 + 3i$. **C.** $440 - 3i$. **D.** $88 - 3i$.
- Câu 53.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $z = (1 + 2i)(3 - i)$. Tính tổng $P = a + b$.
A. $P = 6$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 0$.
- Câu 54.** Cho $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $(2 + i)z - (3 + 5i) = 4 - 4i$. Tính tổng $P = a + b$.
A. $P = -\frac{26}{5}$. **B.** $P = \frac{8}{3}$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 2$.
- Câu 55.** Tìm phần ảo b của số phức $w = z_1 + 2z_2$. Biết số phức $z_1 = 3 - 3i$ và $z_2 = -1 + 2i$.
A. $b = 1$. **B.** $b = -1$. **C.** $b = -7$. **D.** $b = 7$.
- Câu 56.** Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$. Tính $T = |z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2|$.
A. $T = \sqrt{2}$. **B.** $T = \sqrt{5}$. **C.** $T = 2\sqrt{10}$. **D.** $T = 2$.
- Câu 57.** Cho hai số phức $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 3 + 2i$. Tính phần ảo b của số phức $z = \frac{z_1^2}{z_2}$.
A. $b = \sqrt{19}$. **B.** $b = \frac{18}{13}i$. **C.** $b = \frac{18}{13}$. **D.** $b = \frac{13}{18}$.
- Câu 58.** Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + 2i)(z - 1) - 5 + 2i = 0$.
A. $z = \frac{12}{5} - \frac{6}{5}i$. **B.** $z = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i$. **C.** $z = \frac{6}{5} - \frac{12}{5}i$. **D.** $z = \frac{1}{5} - \frac{12}{5}i$.
- Câu 59.** Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 - i)(z + 1 - 2i) - 3 + 2i = 0$.
A. $z = 4 + 3i$. **B.** $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$. **C.** $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$. **D.** $z = 4 - 3i$.
- Câu 60.** Tìm số phức z mà $z + 4 = z(2 - i)$.
A. $z = 2 + 2i$. **B.** $z = 1 + i$. **C.** $z = 1 + 2i$. **D.** $z = 2 + i$.
- Câu 61.** Gọi w là số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Hãy tìm w .
A. $w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **C.** $w = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$. **D.** $w = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
- Câu 62.** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm số phức $w = z(1 + i)^2 - \bar{z}$.
A. $w = 3 + 5i$. **B.** $w = 7 - 8i$. **C.** $w = -3 + 5i$. **D.** $w = -7 + 8i$.

- Câu 63.** Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo a của số phức $w = (1 + i)z - (2 - i)\bar{z}$.
 A. $a = -9i$. B. $a = -9$. C. $a = -5$. D. $a = -5i$.
- Câu 64.** Cho số phức $z = 1 - 2i$. Tìm phần thực a của số phức $w = z^3 - \frac{2}{z} + z\bar{z}$.
 A. $a = -\frac{33}{5}$. B. $a = -\frac{31}{5}$. C. $a = -\frac{32}{5}$. D. $a = \frac{32}{5}$.
- Câu 65.** Cho hai số phức $z_1 = 5 - 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = \bar{z}_1 + z_2 + 2z_1\bar{z}_2$.
 A. $\bar{w} = 54 + 26i$. B. $\bar{w} = -54 - 26i$. C. $\bar{w} = 54 - 26i$. D. $\bar{w} = 54 - 30i$.
- Câu 66.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = 5 - i$. Tìm môđun của số phức $w = 1 + 2z + z^2$.
 A. $|w| = 4$. B. $|w| = 2\sqrt{7}$. C. $|w| = 10$. D. $|w| = 100$.
- Câu 67.** Cho số phức z thỏa $(1 + i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = 1 - iz + z$.
 A. Phần ảo là 1. B. Phần ảo là -3 . C. Phần ảo là -2 . D. Phần ảo là -1 .
- Câu 68.** Số phức z thỏa mãn $|z| + z = 0$. Tìm khẳng định **đúng**?
 A. z là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0. B. $|z| = 1$.
 C. Phần thực của z là một số âm. D. z là số thuần ảo.
- Câu 69.** Với mọi số thuần ảo z , số $z^2 + |z|^2$ có đặc điểm nào sau đây?
 A. là số 0. B. là số ảo khác 0. C. là số thực âm. D. là số thực dương.
- Câu 70.** Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \frac{1}{3} \left[\overline{(1 - 2i)^2} - z \right]$.
 A. $z = -\frac{3}{4} - 2i$. B. $z = -\frac{3}{4} + 2i$. C. $z = 2 + \frac{3}{4}i$. D. $z = 2 - \frac{3}{4}i$.
- Câu 71.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - 2i$. Tìm môđun của số phức $w = \frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}$.
 A. $|w| = 5$. B. $|w| = \sqrt{3}$. C. $|w| = 3$. D. $|w| = \sqrt{5}$.
- Câu 72.** Rút gọn biểu thức $P = (1 - i)^{2016}$.
 A. $P = 2^{1008}$. B. $P = -2^{1008}$. C. $P = 2^{1008}i$. D. $P = -2^{1008}i$.
- Câu 73.** Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (1 + i)^{10}$.
 A. $a = 0, b = 32$. B. $a = 0, b = 32i$. C. $a = 0, b = -32$. D. $a = 32, b = 0$.
- Câu 74.** Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z = \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^{2016}$. Tính tổng $S = a + b$.
 A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.
- Câu 75.** Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i\sqrt{3})z = 4i$. Tính z^{2017} .

A. $-8^{672}(\sqrt{3} + i)$. B. $8^{672}(i\sqrt{3} - 1)$. C. $8^{672}(\sqrt{3} + i)$. D. $8^{672}(1 - i\sqrt{3})$.

Câu 76. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1-2i)^5}{2+i}$. Tính tổng $S = a + 2b$.

A. $S = 38$. B. $S = 10$. C. $S = 31$. D. $S = 55$.

Câu 77. Xác định số phức z thỏa mãn $(1 - i^{2017})z = 2 - i$.

A. $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. B. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

Câu 78. Tìm số phức $z = 1 + i + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$.

A. $z = 1025 - 1025i$. B. $z = -1025 - 1025i$.
C. $z = -1025 + 1025i$. D. $z = 1025 + 1025i$.

Câu 79. Cho số phức $z = (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + (1 + i)^4 + \dots + (1 + i)^{22}$. Tìm phần thực a của số phức z .

A. $a = -2^{11}$. B. $a = -2^{11} + 2$. C. $a = -2^{11} - 2$. D. $a = 2^{11}$.

Câu 80. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2016}$.

A. $a = 0, b = -1$. B. $a = 0, b = 1$. C. $a = 1, b = 1$. D. $a = 1, b = 0$.

Câu 81. Tìm môđun của số phức $z = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2016}$, $n \in \mathbb{N}$.

A. $|z| = 2$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = 1008$. D. $|z| = 2006$.

Câu 82. Cho số phức $z = i + i^3 + i^5 + \dots + i^{2n+1} + \dots + i^{2017}$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm số phức $w = \overline{1 - z}$.

A. $w = 1 + i$. B. $w = 1 - i$. C. $w = i$. D. $w = -i$.

Câu 83. Số phức z thỏa $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 18i^{19}$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\overline{z - i} = -9 + 9i$. B. $z = -9 - 9i$. C. $z = -18$. D. $\bar{z} = 18$.

Câu 84. Tìm phần thực a của số phức $z = 1 + 1 + i + (1 + i)^2 + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{26}$.

A. $a = -2^{13}$. B. $a = 2^{13}$. C. $a = -1 - 2^{13}$. D. $a = 1 + 2^{13}$.

Nhóm 3. Tìm số phức (hoặc tìm các thuộc tính của số phức – loại 2)

Câu 85. (Đề thử nghiệm – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 86. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 101 câu 36) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{7}{3}$.

Câu 87. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 104 câu 36) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.

- Câu 88.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 38) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.
- A. $|z| = 17$. B. $|z| = \sqrt{17}$. **C. $|z| = \sqrt{10}$.** D. $|z| = 10$.
- Câu 89.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 39) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.
- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. **D. $S = -4$.**
- Câu 90.** (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.
- A. $P = -1$. B. $P = -5$. C. $P = 3$. **D. $P = 7$.**
- Câu 91.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 1 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 - i)z + 4\bar{z} = 7 - 7i$. Tìm môđun của số phức z .
- A. $|z| = \sqrt{3}$. B. $|z| = 5$. **C. $|z| = \sqrt{5}$.** D. $|z| = 3$.
- Câu 92.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 12 - 2018i$.
- A. $|z| = 2$.** B. $|z| = \sqrt{2017}$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = \sqrt{2018}$.
- Câu 93.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 3 năm 2017) Tính tổng S của các phần thực của tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \sqrt{3}z^2$.
- A. $S = \sqrt{3}$. **B. $S = \frac{\sqrt{3}}{6}$.** C. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 94.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 5 năm 2017) Cho z số phức thỏa mãn điều kiện $z + (1 - 2i)\bar{z} = 2 - 4i$. Tìm môđun của số phức z .
- A. $|z| = 3$. **B. $|z| = \sqrt{5}$.** C. $|z| = 5$. D. $|z| = \sqrt{3}$.
- Câu 95.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2$.
- A. 2. B. 4. **C. 0.** D. 1.
- Câu 96.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $a + b$.
- A. $a + b = -1$.** B. $a + b = 1$. C. $a + b = 7$. D. $a + b = -5$.
- Câu 97.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $z(2i - 3) - 8i\bar{z} = -16 - 15i$. Tính $a - 3b$.
- A. 4. B. 6. C. 5. **D. -1.**
- Câu 98.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2(z + 1) = 3\bar{z} + i(5 - i)$. Tính $a + 2b$.
- A. $a + 2b = 1$. B. $a + 2b = -3$. **C. $a + 2b = 3$.** D. $a + 2b = -1$.
- Câu 99.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2z + \bar{z} = 3 + i$. Tính giá trị của biểu thức $3a + b$.
- A. $3a + b = 3$. **B. $3a + b = 4$.** C. $3a + b = 6$. D. $3a + b = 5$.
- Câu 100.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)(2z - 1) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$. Tính $P = a + b$.
- A. $P = 0$.** B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = -2$.

Câu 101. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$.

- A. $|z| = 2$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = 1$.

Câu 102. Cho số phức z thỏa mãn $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2$. Tìm môđun của số phức z .

- A. $|z| = 73$. B. $|z| = 5$. C. $|z| = \sqrt{73}$. D. $|z| = 7\sqrt{3}$.

Câu 103. Cho số phức z thỏa $2z = i(\bar{z} + 3)$. Hãy tìm môđun của số phức z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = 5$. C. $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. D. $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 104. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + \bar{z} = 1 + i$. Tìm $a^2 + b^3$.

- A. $a^2 + b^3 = 27$. B. $a^2 + b^3 = -4$. C. $a^2 + b^3 = 15$. D. $a^2 + b^3 = 2$.

Câu 105. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tìm $a + b^2$.

- A. $a + b^2 = 5$. B. $a + b^2 = -1$. C. $a + b^2 = -2$. D. $a + b^2 = 3$.

Câu 106. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $zi + 2\bar{z} = 4 - 4i$. Tìm $2^a + 2^b$.

- A. $2^a + 2^b = \frac{1}{36}$. B. $2^a + 2^b = 48$. C. $2^a + 2^b = \frac{1}{16}$. D. $2^a + 2^b = 32$.

Câu 107. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + i)z + (3 - i)\bar{z} = 2 - 6i$.

- A. $|z| = \sqrt{13}$. B. $|z| = \sqrt{15}$. C. $|z| = \sqrt{5}$. D. $|z| = \sqrt{3}$.

Câu 108. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn điều kiện $2z + (1 + i)\bar{z} = 5 + 3i$.

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = \sqrt{3}$. C. $|z| = 3$. D. $|z| = 5$.

Câu 109. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm môđun của z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = \sqrt{3}$. D. $|z| = 2$.

Câu 110. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tính $T = ab + 1$.

- A. $T = -1$. B. $T = 0$. C. $T = 1$. D. $T = -2$.

Câu 111. Tìm các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + b$.

- A. $P = 10$. B. $P = -2$. C. $P = 7$. D. $P = 5$.

Câu 112. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $\left| \frac{z - i}{z - 1} \right| = 1$ và $\left| \frac{z + i}{z - 3i} \right| = 1$. Tính $P = a^2 - b^2$.

- A. $P = -2$. B. $P = 5$. C. $P = 0$. D. $P = 7$.

Câu 113. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{2 - iz}{2 + i} - \frac{z + 2i}{1 - 2i} = 2\bar{z}$ và $|z| > 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - ab$.

- A. $P = 0$. B. $P = \frac{29}{100}$. C. $P = 5$. D. $P = 1$.

Câu 114. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z^3 + 12i = \bar{z}$ và có phần thực dương. Tính $P = 3a - 2b$.

- A. $P = -11$. B. $P = -2$. C. $P = 5$. D. $P = 8$.

Câu 115. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z+1)(1+i) + \frac{\bar{z}-i}{1-i} = |z|^2$ và có phần thực khác 0. Tính $P = a^2 - 2b$.

- A. $P = -\frac{11}{100}$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{29}{100}$. D. $P = \frac{81}{100}$.

Câu 116. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2(\bar{z}+1) + z - 1 = (1-i)|z|^2$ và $|z| < 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

- A. $P = -\frac{1}{3}$. B. $P = -\frac{3}{10}$. C. $P = \frac{4}{3}$. D. $P = \frac{3}{10}$.

Câu 117. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z\sqrt{3z\bar{z}} + 1 = |z|(2 + 6iz)$ và $|z| > \frac{1}{5}$. Tính $P = 5a + b$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = -\frac{3}{10}$. D. $P = -2$.

Câu 118. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z\bar{z} - z| = 2$ và $|z| = 2$?

- A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Bốn.

Câu 119. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+6| = 5$ và phần ảo của z bằng 4.

- A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Vô số.

Câu 120. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời $|z|^2 + |\bar{z}|^2 = 26$ và $z + \bar{z} = 6$.

- A. Hai. B. Ba. C. Hai. D. Một.

Nhóm 4. Tìm các số phức z thỏa mãn biểu thức số phức là số thực, số thuần ảo

Câu 121. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 101 câu 03) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo ?

- A. $z = -2 + 3i$. B. $z = 3i$. C. $z = -2$. D. $z = \sqrt{3} + i$.

Câu 122. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 44) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo ?

- A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 123. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 101 câu 46) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo ?

- A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Câu 124. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 48) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo ?

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 125. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-i| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo ?

A. Ba. B. Một. C. Bốn. D. Hai.

Câu 126. Biết có bốn số phức thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tính tổng các phần ảo của bốn số phức đó.

A. 0. B. 4. C. -4. D. 5.

Câu 127. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2z + 3i$ có phần ảo là 5 và $3z + 2i - 3$ là số thuần ảo. Tìm $a^2 + 2b^3$.

A. $a^2 + 2b^3 = 26$. B. $a^2 + 2b^3 = 2$. C. $a^2 + 2b^3 = 38$. D. $a^2 + 2b^3 = 43$.

Câu 128. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z - 1)(\bar{z} + i)$ là số thực.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 129. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 130. Biết có ba số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo. Tính tổng các phần thực của ba số phức z đó.

A. 2. B. $2\sqrt{5}$. C. 0. D. $-2\sqrt{5}$.

Câu 131. Biết rằng có bốn số phức thỏa mãn $|z - \bar{z} + 1 - i| = \sqrt{5}$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thuần ảo. Tìm tổng các phần thực của bốn số phức đó.

A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 132. Biết rằng có hai số phức thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực. Tính tổng các phần ảo của hai số phức đó.

A. 9. B. 7. C. 5. D. 3.

Câu 133. Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(2z + 3 - 2i)(z + i)$ là số thuần ảo và $|z + 1 - i| = |i\bar{z} - 2|$. Tính tổng $a^2 + b^3$.

A. 1. B. 11. C. 21. D. 31.

Câu 134. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $w = \frac{z + 2 + 3i}{z - i}$ là một số thuần ảo và $|z + 1 - 3i| = |z - 1 + i|$. Tính $P = 2a - b$.

A. $P = -3$. B. $P = -4$. C. $P = -5$. D. $P = 2$.

Câu 135. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i|$ và $\frac{z - i}{\bar{z} + i}$ là số thuần ảo. Tính $P = a + b$.

A. $P = -\frac{3}{2}$. B. $P = 2$. C. $P = 1$. D. $P = 8$.

Câu 136. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $iz^2 + |z| + 1 = 0$ và có phần thực dương. Tính $P = a - b$.

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $P = -2$.

Câu 137. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left| \frac{z+1-2i}{\bar{z}+3+4i} \right| = 1$ và số phức $\frac{z-2i}{\bar{z}+i}$ là số thuần ảo.

- A. 0. **B.** 1. C. 2. D. 4.

Câu 138. Cho số phức $z = \left(\frac{4i}{i+1} \right)^m$, m là số nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1;100]$ để z là số thực?

- A.** 25. **B.** 26. C. 27. D. 28.

Câu 139. Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i} \right)^m$, m là nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1;50]$ để z là số thuần ảo?

- A. 24. **B.** 25. C. 26. D. 50.

Nhóm 5. Lấy môđun hai vế của đẳng thức số phức

Câu 140. (Đề thử nghiệm lần 3 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Xét số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 141. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}[(3+4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$. Tính giá trị của $|\bar{z}|$.

- A. $|\bar{z}| = 2$. **B.** $|\bar{z}| = \sqrt{2}$. C. $|\bar{z}| = 2\sqrt{2}$. **D.** $|\bar{z}| = 1$.

Câu 142. Cho số phức z thỏa mãn $z + (4+3z)i = 4 + (1+i)|z|$. Hỏi mệnh đề nào **đúng**?

- A. $0 < |z| \leq \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2} < |z| \leq 3$. C. $3 < |z| \leq \frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{2} < |z| \leq 10$.

Câu 143. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1-i}{z} + i = \frac{(2-3i)\bar{z}}{|z|^2} + 2$. Hỏi mệnh đề nào **đúng**?

- A. $\frac{3}{2} < |z| \leq 2$. **B.** $|z| > 2$. C. $|z| \leq \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}$.

Câu 144. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Tính $|z|^4 + |z|^2$.

- A. 1. **B.** 2. C. 3. D. 4.

Câu 145. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z| = \frac{\sqrt{26}}{\bar{z}} + 3 - 2i$. Tính $|z|^4 + |z|^2$.

- A. 1. **B.** 2. C. 3. D. 4.

Câu 146. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(1-3i)|z| = \frac{4\sqrt{10}}{z} + 3 + i$. Tính $|z|^4 + |z|^2$.

- A. 1. **B.** 16. C. 9. D. 25.

Nhóm 6. Chuẩn hóa số phức

Câu 147. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2|z_2| = 2$ và $|2z_1 - 3z_2| = 4$. Tính $|z_1 + 2z_2|$.

- A. $\sqrt{10}$. B. $\sqrt{11}$. C. $\sqrt{15}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 148. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 3z_2| = 2$. Tính $|2z_1 + 3z_2|$.

- A. $\sqrt{249}$. B. 1. C. $\sqrt{241}$. D. 5.

Câu 149. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2 . Biết rằng $\widehat{MON} = 45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Tính $|z_1^2 + 4z_2^2|$.

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. 6. D. $4\sqrt{5}$.

Câu 150. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$.

- A. $|b| = \frac{3}{8}$. B. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. D. $|b| = \frac{8}{3}$.

Câu 151. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm phần thực b của số phức $\frac{1}{1-z}$.

- A. $b = \frac{1}{2}$. B. $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $b = -1$.

Câu 152. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- A. $|z_1 - z_2| = 1$. B. $|z_1 - z_2| = 2$. C. $|z_1 - z_2| = 3$. D. $|z_1 - z_2| = 4$.

Câu 153. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 3, |z_1| = 1, |z_2| = 2$. Tính $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$.

- A. 2. B. 0. C. 8. D. 4.

Câu 154. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính $|z_1 + z_2|$.

- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 155. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}, |z_1| = |z_2| = 1$. Tính $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$.

- A. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$. B. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 1$. C. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2$. D. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = -1$.

Câu 156. Cho các số phức $z, w \neq 0$ và $|z - w| = 2|z| = |w|$. Tìm phần thực e của $u = \frac{z}{w}$.

- A. $e = -\frac{1}{8}$. B. $e = \frac{1}{4}$. C. $e = 4$. D. $e = \frac{1}{8}$.

Câu 157. Cho hai số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa $|z_1 - z_2| = 5|z| = |w|$. Tìm môđun của $w = z_1z_2$.

- A. $|w| = \frac{1}{10}$. B. $|w| = \frac{1}{5}$. C. $|w| = \frac{\sqrt{5}}{10}$. D. $|w| = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 158. Cho z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$.

- A. $P = 1 - i$. B. $P = -1 - i$. **C. $P = -1$.** D. $P = 1 + i$.

Câu 159. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

- A. $P = -1$. **B. $P = 0$.** C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Câu 160. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1 z_2 \neq -1$. Tìm phần ảo a của số phức $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

- A. $a = -1$. B. $a = 1$. C. $a = 2$. **D. $a = 0$.**

Câu 161. Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) sao cho z không phải là số thực và $\frac{z}{1 + z^2}$ là

số thực. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{|z|}{1 + |z|^2}$.

- A. $P = \frac{1}{5}$. **B. $P = \frac{1}{2}$.** C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = 1$.

Câu 162. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $z_1, z_2 \neq 0, z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

- A. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.** B. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2\sqrt{3}$. D. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 163. Với z_1, z_2 là hai số phức bất kỳ, giá trị của biểu thức $a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$ bằng

- A. $a = 2$. **B. $a = \frac{1}{2}$.** C. $a = 1$. D. $a = \frac{3}{2}$.

Câu 164. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $P = (|z| - 2)^2$. B. $P = (|z|^2 - 2)^2$. **C. $P = (|z| - 4)^2$.** D. $P = (|z|^2 - 4)^2$.

Câu 165. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1999$ và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$.

- A. $P = 1999$.** B. $P = 999,5$. C. $P = 1999^2$. D. $P = 5997$.

Câu 166. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2017$ và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$.

- A. $P = 1008,5$. **B.** $P = 2017$. C. $P = 2017^2$. D. $P = 6051$.

Câu 167. Tính chất nào sau đây **không đúng** với mọi số phức z_1, z_2 .

- A.** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. B. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
C. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. D. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Câu 168. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Tìm khẳng định **đúng**?

- A.** $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Câu 169. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$. Tính $T = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$.

- A. $T = 2$. **B.** $T = 4$. C. $T = 1$. D. $T = 0$.

Nhóm 7. Bài toán số phức liên quan đến max min

Câu 170. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 1 năm 2017) Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

- A. 2. **B.** 1. C. 3. D. 4.

Câu 171. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức z thỏa $|z - 3| = 2|z|$ và $\max|z - 1 + 2i| = a + b\sqrt{2}$. Tính $a + b$.

- A.** 4. B. $4\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 172. Tìm m để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết rằng số phức $z = m + (m - 3)i$, ($m \in \mathbb{R}$).

- A. $m = 0$. B. $m = 3$. **C.** $m = \frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 173. Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |z|$.

- A.** $P_{\max} = 9$. B. $P_{\max} = 5$. C. $P_{\max} = 12$. D. $P_{\max} = 3$.

Câu 174. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz + 4 - 3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. $|z|_{\min} = 6$. **B.** $|z|_{\min} = 4$. C. $|z|_{\min} = 3$. D. $|z|_{\min} = 5$.

Câu 175. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |z|$.

- A. $P_{\max} = \sqrt{5}$. B. $P_{\max} = 2$. C. $P_{\max} = 2\sqrt{2}$. **D.** $P_{\max} = \sqrt{2}$.

Câu 176. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm môđun nhỏ nhất $|w|_{\min}$ của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- A. $|w|_{\min} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. B. $|w|_{\min} = 3\sqrt{2}$. **C.** $|w|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $|w|_{\min} = \frac{3}{2}$.

Câu 177. Cho các số phức z, w thỏa $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$ và $w = iz + 1$. Tìm $|w|_{\min}$.

A. $|w|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $|w|_{\min} = 2\sqrt{2}$. **C.** $|w|_{\min} = 2$. **D.** $|w|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 178. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z - 1 + 2i| = |z - i|$. Tính $P = 2a - b^2$ khi $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $P = \frac{1}{25}$. **B.** $P = \frac{19}{25}$. **C.** $P = -\frac{4}{25}$. **D.** $P = \frac{14}{25}$.

Câu 179. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.

A. $4 - \sqrt{7}$. **B.** $4 + \sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4 + \sqrt{5}$.

Câu 180. Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Câu 181. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = 2|z|$. Khẳng định nào sau **đúng** ?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.
C. $\sqrt{5}-1 \leq |z| \leq \sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1 \leq |z| \leq \sqrt{6}+1$.

Câu 182. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z - 1 + i$.

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 183. Cho số phức $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z .

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 184. Cho số phức $z = x + 2yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Tính tổng S của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$?

A. $S = -\sqrt{5}$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = \sqrt{5}$. **D.** $S = 2\sqrt{5}$.

Câu 185. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$ và số phức $w = \frac{2z-i}{2+iz}$. Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $|w| > 2$. **B.** $|w| \leq 1$. **C.** $|w| = 2$. **D.** $1 < |w| < 2$.

Câu 186. Cho số phức z thỏa mãn $(1-z)(i+\bar{z})$ là số ảo. Tìm tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - i|$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $7 - \sqrt{2}$.

Câu 187. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z - 1| + |z - i|$.

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 188. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z\bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** 3.

Câu 189. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$ và biểu thức $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm môđun của số phức z .

A. $|z| = \sqrt{2} - 1$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = \sqrt{2} + 1$.

Câu 190. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2$ và biểu thức $P = |z| + |z - 3 - 6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|\bar{z}|$.

A. $|\bar{z}| = 1 + \sqrt{7}$. B. $|\bar{z}| = \sqrt{7}$. C. $|\bar{z}| = 2\sqrt{7}$. D. $|\bar{z}| = 2 + \sqrt{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

1.C	2.B	3.B	4.A	5.B	6.D	7.D	8.D	9.B	10.A
11.D	12.B	13.D	14.D	15.D	16.C	17.B	18.A	19.C	20.D
21.A	22.A	23.A	24.B	25.B	26.C	27.D	28.B	29.A	30.A
31.A	32.D	33.C	34.B	35.A	36.D	37.A	38.B	39.A	40.D
41.B	42.B	43.A	44.B	45.C	46.B	47.C	48.C	49.D	50.D
51.B	52.D	53.B	54.D	55.A	56.D	57.C	58.C	59.B	60.A
61.D	62.D	63.C	64.C	65.C	66.C	67.B	68.A	69.A	70.A
71.D	72.A	73.D	74.C	75.C	76.B	77.B	78.C	79.C	80.D
81.B	82.A	83.A	84.B	85.C	86.B	87.D	88.C	89.D	90.D
91.C	92.A	93.B	94.B	95.C	96.A	97.D	98.C	99.B	100.A
101.A	102.C	103.A	104.D	105.D	106.D	107.A	108.A	109.A	110.A
111.A	112.C	113.D	114.D	115.C	116.B	117.A	118.A	119.B	120.A
121.B	122.C	123.C	124.D	125.C	126.A	127.B	128.B	129.B	130.C
131.A	132.D	133.A	134.D	135.C	136.B	137.B	138.A	139.B	140.D
141.D	142.B	143.D	144.B	145.B	146.B	147.B	148.C	149.D	150.C
151.A	152.A	153.D	154.A	155.B	156.D	157.B	158.C	159.B	160.D
161.B	162.A	163.B	164.C	165.A	166.B	167.A	168.A	169.B	170.B
171.A	172.C	173.A	174.B	175.D	176.C	177.A	178.A	179.B	180.A
181.C	182.C	183.B	184.B	185.B	186.A	187.D	188.B	199.C	200.B

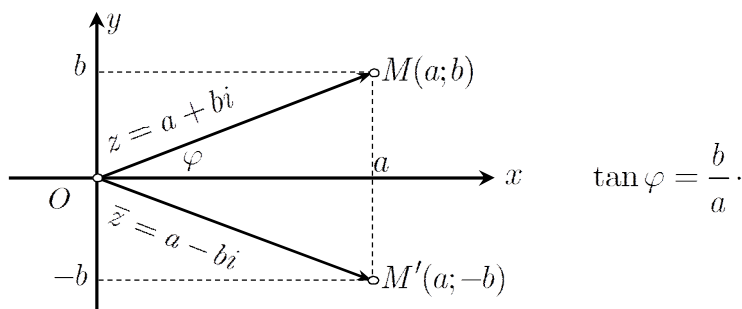
Chúc các em làm bài tốt và đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến !

Bài 2. BẰNG DẪN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC & BÀI TOÁN LIÊN QUAN

☆☆☆

Kiến thức cơ bản

- Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$.
- Các điểm $M(a; b)$, $M'(a; -b)$ biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục hoành Ox .



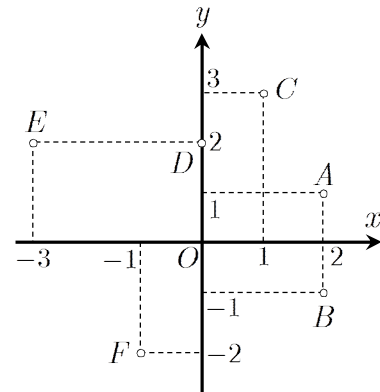
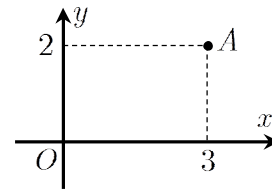
Bài toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện cho trước ?

- **Bước 1.** Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
- **Bước 2.** Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
$Ax + By + C = 0$.	Là đường thẳng $d : Ax + By + C = 0$.
$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases}$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (đường tròn kể cả bên trong)
$R_1^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R_2^2$.	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .
$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.	Là một parabol (P) có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b > 0)$.
$ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} $.	Là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Bài tập vận dụng**BT 1. Nhóm 1. Bài toán xác định điểm biểu diễn số phức cơ bản và bài toán liên quan**

a) Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có:

Điểm $A(2;1)$ biểu diễn cho số phức $z_1 = 2 + i$.Điểm $B(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_2 = \dots$ Điểm $C(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_3 = \dots$ Điểm $D(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_4 = \dots$ Điểm $E(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_5 = \dots$ Điểm $F(\dots; \dots)$ biểu diễn cho số phức $z_6 = \dots$ ✓ **Nhận xét:** số phức $z_1 = 2 + i$ và số phức liên hợp $\bar{z}_1 = z_2 = 2 - i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A và B đối xứng nhau qua trục Oxb) Điểm A trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.A. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.B. Phần thực là 3 và phần ảo là -2 .C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.D. Phần thực là -3 và phần ảo là 2 .c) Cho số phức $z = 2 - i$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn số phức $w = iz$.
A. $M(-1; 2)$. B. $N(2; -1)$. C. $P(2; 1)$. D. $Q(1; 2)$.d) Cho số phức z thỏa mãn $2i + z(1 - i) = i(3 - i)$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức z .A. $M_3(1; 0)$. B. $M_1(0; 1)$. C. $M_4(0; 2)$. D. $M_2(0; -1)$.e) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$.A. $M(1; -5)$. B. $M(5; -5)$. C. $M(1; 1)$. D. $M(5; 1)$.f) $M(x_0; y_0)$ biểu diễn của số phức z thỏa $(1 + i)z + (2 + i)\bar{z} = 3 + i$. Tính $2x_0 + 3y_0$.A. -1 . B. 8 . C. 5 . D. 1 .

- g) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4 - 6i$ có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ lần lượt là hai điểm M và N . Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm của đoạn MN . Tìm môđun của số phức z .

A. $|z| = 3\sqrt{10}$. B. $|z| = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. C. $|z| = \sqrt{10}$. D. $|z| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

- ✓ **Nhận xét:** Vì điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là $M(a; b)$ hay $\overrightarrow{OM} = (a; b)$. Do đó cần nhớ những kiến thức cơ bản về vectơ, hệ trục tọa độ Oxy và hệ thức lượng tam giác.

Cho tam giác ABC , hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và R , r , p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi của tam giác ABC .

- ① Các phép toán cơ bản trên vectơ:

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- Quy tắc đường chéo hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

③ M là trung điểm của $AB \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ và $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

④ Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.

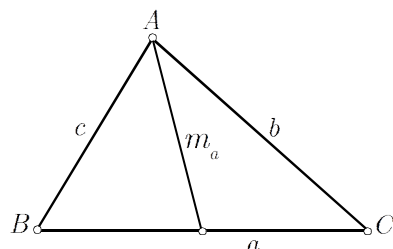
⑤ Hai vectơ cùng phương: $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad (b_1, b_2 \neq 0)$.

⑥ Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}; \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \end{cases}$.

⑦ Định lí hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

⑧ Định lí hàm cos: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$

⑨ Công thức trung tuyến: $\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases} \quad p = \frac{a + b + c}{2} \quad \text{nửa chu vi}$



⑩ Diện tích: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

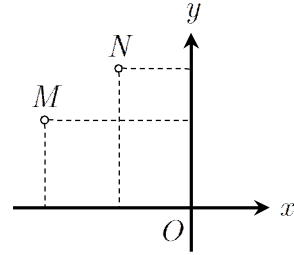
- h) Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình vẽ bên dưới. Hỏi khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $|z_1 - z_2| = MN$.

B. $|z_1| = OM$.

C. $|z_2| = ON$.

D. $|z_1 + z_2| = MN$.



A. vì

B. vì

C. vì

D. vì

- i) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i$ và điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)z_1$. Tính diện tích S của tam giác OMN với O là gốc tọa độ.

A. $S = \frac{15}{2}$.

B. $S = \frac{25}{4}$.

C. $S = \frac{25}{2}$.

D. $S = \frac{31}{4}$.

.....
.....

- ✓ **Cần nhớ:** Tính diện tích ΔABC : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a; b) \\ \overrightarrow{AC} = (c; d) \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |ad - bc|$.

- j) Trong mặt phẳng phức cho 3 điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1 + i)^2$, $z_3 = m - i$. Tìm tham số m để tam giác ABC vuông tại B .

A. $m = 3$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$.

D. $m = 2$.

.....
.....

- k) Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -3 - 2i$. Hỏi khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. B và C đối xứng nhau qua trục tung.

B. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

C. A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

D. A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$.

A. vì

B. vì

C. vì

D. vì

.....

.....

- l) Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 - i, 2 + 3i, 3 + i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D .

A. $z = 2 - 3i$. **B.** $z = 4 + 5i$. **C.** $z = 4 + 3i$. **D.** $z = 2 + 5i$.

.....

.....

.....

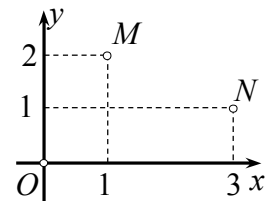
- m) Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây ?

A. $z_4 = 4 - 3i$.

B. $z_3 = -2 + i$.

C. $z_2 = 4 + 3i$.

D. $z_1 = 2 - i$.



.....

.....

.....

- n) Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1 - i)(2 + i), z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Tam giác ABC là tam giác vuông nhưng không cân.

B. Tam giác ABC là tam giác cân nhưng không đều, không vuông.

C. Tam giác ABC là tam giác vuông cân.

D. Tam giác ABC là tam giác đều.

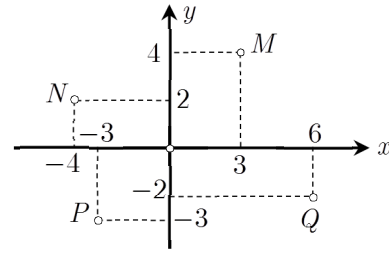
.....

.....

.....

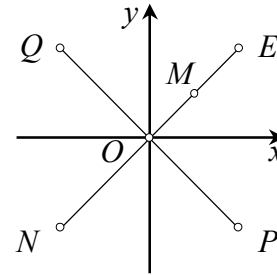
- o) Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình ?

- A. Điểm P .
B. Điểm M .
C. Điểm N .
D. Điểm Q .



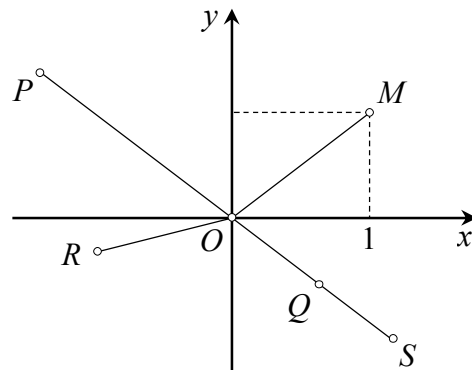
- p) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$.

- A. Điểm N .
B. Điểm Q .
C. Điểm E .
D. Điểm P .



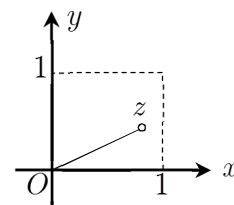
- q) Cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào ?

- A. Điểm S .
B. Điểm Q .
C. Điểm P .
D. Điểm R .



- r) Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{i}{z}$ nằm ở góc phần tư thấy mấy trong hệ trục tọa độ Oxy ?

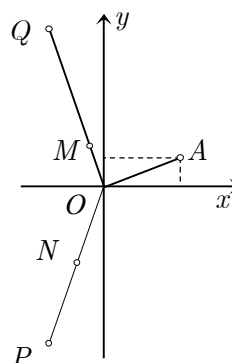
- A. Thứ nhất.
B. Thứ hai.
C. Thứ ba.
D. Thứ tư.



- s) Cho số phức z thỏa $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z .

Biết trong hình vẽ, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây ?

- A. Điểm Q .
B. Điểm M .
C. Điểm N .
D. Điểm P .



- t) Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 - 3i)(1 + i)$ và φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

- A. $\sin 2\varphi = -\frac{5}{13}$. B. $\sin 2\varphi = \frac{5}{13}$. C. $\sin 2\varphi = \frac{13}{5}$. D. $\sin 2\varphi = -\frac{13}{5}$.

✓ **Cần nhớ:** Công thức lượng giác $\boxed{\sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}}$ và $\boxed{\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}}$.

- u) Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 + i)^2(4 - i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

- A. $\cos 2\varphi = -\frac{87}{475}$. B. $\cos 2\varphi = \frac{87}{475}$. C. $\cos 2\varphi = -\frac{87}{425}$. D. $\cos 2\varphi = \frac{87}{425}$.

- v) Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1 + 2i, 1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i, 1 - 2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I , bán kính R . Hỏi tọa độ điểm I biểu diễn số phức nào sau đây ?

A. $z = \sqrt{3}$. B. $z = 1 - \sqrt{3}i$. C. $z = 1$. D. $z = -1$.

.....

.....

.....

- w) Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_1, z_2 . Hỏi tam giác OAB là tam giác gì ?

A. Tam giác đều. B. Tam giác vuông tại O .
C. Tam giác tù. D. Tam giác có một góc bằng 45° .

.....

.....

.....

- x) Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 4i - 5|$.

A. $\min P = \frac{5}{\sqrt{34}}$. B. $\min P = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\min P = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\min P = \frac{4}{\sqrt{13}}$.

.....

.....

.....

- y) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $P = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = 4\sqrt{7}$. C. $P = 3\sqrt{3}$. D. $P = 5\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

BT 2. Nhóm 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường thẳng và bài toán liên quan

- a) Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây ?

A. $20x - 16y - 47 = 0$.

B. $20x + 16y - 47 = 0$.

C. $20x - 16y + 47 = 0$.

D. $20x + 16y + 47 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}| \Leftrightarrow 2|(x - 2) + (y + 3)i| = |(-2x - 1) + (2y + 2)i|$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{(-2x - 1)^2 + (2y + 2)^2} \Leftrightarrow 20x - 16y - 47 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $20x - 16y - 47 = 0$.

- b) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

A. Đường thẳng $d : 4x - 6y + 13 = 0$.

B. Đường thẳng $d : 4x + 6y - 13 = 0$.

C. Đường thẳng $d : 6x - 4y - 13 = 0$.

D. Đường thẳng $d : 6x - 4y + 13 = 0$.

.....

.....

.....

.....

- c) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1 + i)$ là số thực.

A. Trục Oy .

B. Trục Ox .

C. $y = -x$.

D. $y = x$.

.....

.....

.....

- d) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo.

A. Đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$.

B. Đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.

C. Đường thẳng $3x + 2y + 1 = 0$.

D. Đường thẳng $3x + 2y - 1 = 0$.

.....

.....

.....

- e) Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$.

A. $z = 1 - 4i$.

B. $z = 1 + 4i$ hoặc $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

C. $z = -1 - 2i$ hoặc $z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

D. $z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

.....

- f) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $x - 7y - 9 = 0$. B. $x + 7y - 9 = 0$. C. $x + 7y + 9 = 0$. D. $x - 7y + 9 = 0$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa bài toán.

Ta có $w = (2 - i)z + 1 = x + yi \Leftrightarrow z = \frac{x - 1 + yi}{2 - i}$.

Ta lại có $|z - i| = |z - 1 + 2i| \Leftrightarrow \left| \frac{x - 1 + yi}{2 - i} - i \right| = \left| \frac{x - 1 + yi}{2 - i} - 1 + 2i \right|$
 $\Leftrightarrow \frac{|(x - 2) + (y - 2)i|}{|2 - i|} = \frac{|(x - 1) + (y + 5)i|}{|2 - i|}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 5)^2} \Leftrightarrow x + 7y + 9 = 0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $x + 7y + 9 = 0$.

- ✓ **Nhận xét:** Bài toán cho z , yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn w (loại gián tiếp) thường ta sẽ gọi $w = x + yi$, sau đó biểu thị z theo x, y sẽ tìm được tập hợp điểm.

- g) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - (1 + i)| = |z + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 - 4i)z - 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

.....

- h) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z - 2$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- i) Cho tất cả các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$. Tìm $P = 2x + 3y$.

A. $P = 9$. **B.** $P = 11$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- j) Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = -5 - 3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và mô đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

BT 3. Nhóm 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa bài toán.

$$\text{Ta có } |z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 2^2.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn bài toán là một đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 2^2$ có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$.

- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1 + i)z|$.

A. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

B. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

C. $x^2 + (y + 1)^2 = 2$.

D. $(x + 1)^2 + y^2 = 2$.

.....

.....

.....

.....

- ✓ **Lưu ý:** Cần nhớ những kiến thức cơ bản về đường tròn trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

- ① Để viết phương trình đường tròn ta cần tìm tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

Dạng 1: $(C) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a; b) \\ \bullet \text{ BK : } R \end{cases} \Rightarrow \boxed{(C) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}.$

Dạng 2: $\boxed{(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$, với $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} > 0$.

- ② Chu vi đường tròn $\boxed{p_{(C)} = 2\pi R}$ và diện tích đường tròn $\boxed{S_{(C)} = \pi R^2}$.

- c) Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $|z - 3 + 5i| = 4$ là một đường tròn. Tính chu vi $p_{(C)}$ của đường tròn đó.

A. $p_{(C)} = 4\pi$.

B. $p_{(C)} = 2\pi$.

C. $p_{(C)} = 8\pi$.

D. $p_{(C)} = 16\pi$.

.....

.....

.....

.....

- d) Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích S bằng bao nhiêu ?

A. $S = 5\pi$. **B.** $S = \frac{5\pi}{4}$. C. $S = \frac{5\pi}{2}$. D. $S = 25\pi$.

.....

.....

.....

- e) Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (1-2i)z+3$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải tham khảo

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề có $w = (1-2i)z+3 \Leftrightarrow z = \frac{w-3}{1-2i}$

$$\Leftrightarrow z+2 = \frac{w-3}{1-2i} + 2 \Leftrightarrow z+2 = \frac{w-1-4i}{1-2i} \Leftrightarrow z+2 = \frac{(x-1)+(y-4)i}{1-2i}$$

Lấy môđun hai vế được $|z+2| = \left| \frac{(x-1)+(y-4)i}{1-2i} \right| \Leftrightarrow 5 = \frac{|(x-1)+(y-4)i|}{|1-2i|}$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = (5\sqrt{5})^2.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(1;4)$, bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

- f) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = 2z-i$ là đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $I(2;-1), R=2$. B. $I(2;1), R=4$.
C. $I(2;-1), R=4$. D. $I(-2;1), R=2$.

.....

.....

.....

.....

.....

- g) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (1+i\sqrt{3})z+2$ là đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $I(3;\sqrt{3}), R=4$. **B.** $I(3;\sqrt{3}), R=2$.
C. $I(3;-\sqrt{3}), R=4$. D. $I(-3;\sqrt{3}), R=2$.

- h) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \bar{z} + 1 - i$ là đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $I(2;1), R = 3$.

B. $I(1;2), R = \sqrt{3}$.

C. $I(2;1), R = 4$.

D. $I(1;2), R = 5$.

- i) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2}$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (1 + 2i)z + 1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

A. $I(0;-2), R = \sqrt{5}$.

B. $I(1;-4), R = \sqrt{10}$.

C. $I(0;2), R = \sqrt{5}$.

D. $I(-1;-4), R = \sqrt{10}$.

- j) Cho số phức z thỏa $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

Lời giải tham khảo

$$\text{Theo đề có } (2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 2)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$$

$$\text{Lấy môđun hai vế } |(2|z| - 1) + (|z| + 2)i| = \left| \frac{\sqrt{10}}{z} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 2)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|}$$

$$\Leftrightarrow 5|z|^2 + 5 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ vì } |z| \geq 0.$$

$$\text{Gọi } w = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Theo đề có } w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w+1-2i}{3-4i}$$

$$\text{Lấy môđun hai vế được } |z| = \left| \frac{w+1-2i}{3-4i} \right| = \frac{|w+1-2i|}{|3-4i|} = \frac{|(x+1) + (y-2)i|}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow |(x+1) + (y-2)i| = 5 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2.$$

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = 5$.

- k) Cho số phức z thỏa $(1-i)|\bar{z}| = \frac{2\sqrt{3}}{z} + 1 + i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = iz - 1 + i$ là đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm khẳng định **đúng**?

A. $I(-1;1), R = \sqrt{2}$. **B.** $I(1;1), R = \sqrt{2}$. **C.** $I(1;1), R = 2$. **D.** $I(-1;1), R = 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- l) Cho số phức z thỏa $(3-7i)|z| = \frac{176-82i}{\bar{z}} + 7 + 3i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = (1+i)z + 2 - i$ là đường tròn tâm I và bán kính R . Tìm I và R .

A. $I(2;-1), R = 5$.

B. $I(2;1), R = 5$.

C. $I(2;-1), R = 5\sqrt{2}$.

D. $I(2;1), R = 5\sqrt{2}$.

m) Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \bar{z} + 1 - i$.

A. Hình tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. **B.** Đường tròn $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

C. Đường tròn $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$. **D.** Hình tròn $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$.

n) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ với $|z - 1| \leq 2$.

A. Hình tròn $x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$. **B.** Hình tròn $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

C. Hình tròn $x^2 + (y - 1)^2 = 16$. **D.** Hình tròn $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$.

- o) Tập hợp các số phức $w = (1+i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

A. $S = 4\pi$. B. $S = 2\pi$. C. $S = 3\pi$. D. $S = \pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

- p) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w = \bar{z} + 1 - i$ với $|2z + i|^2 \leq 3z\bar{z} + 1$ là một hình tròn. Tìm tâm I và bán kính R .

A. $I(1;5), R = 3\sqrt{3}$. B. $I(1;-5), R = 3\sqrt{3}$.
C. $I(5;-1), R = \sqrt{3}$. D. $I(5;1), R = \sqrt{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

- q) Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $1 < |z-1| < 2$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa bài toán.

Theo đề bài, ta có $1 < |z-1| < 2 \Leftrightarrow 1 < |x + yi - 1| < 2 \Leftrightarrow 1 < |(x-1) + yi| < 2$

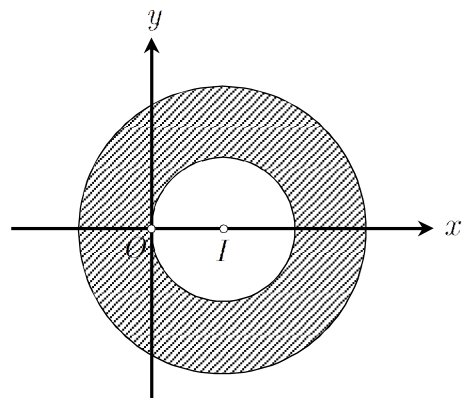
$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 2$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < (x-1)^2 + y^2 < 2^2.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn $1 < |z-1| < 2$ là hình vành khăn là phần nằm giữa hai đường

tròn đồng tâm $I(1;0)$ với bán kính $\begin{cases} R_1 = 1 \\ R_2 = 2 \end{cases}$

như hình vẽ bên (không tính những điểm nằm trên hai đường tròn).



- r) Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là hình vành khăn. Tính chu vi P của hình vành khăn.

A. $P = 4\pi$. B. $P = \pi$. C. $P = 2\pi$. D. $P = 3\pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- s) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S = 25\pi$. B. $S = 8\pi$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 16\pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- t) Gọi (H) là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq 1 \leq x - y$. Tính diện tích hình (H) .

A. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. D. 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BT 4. Nhóm 4. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là elip**Kiến thức cơ bản về đường elip**

Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Đường elip là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ($a > c$). Hai điểm F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm của elip. Khoảng cách $2c$ được gọi là tiêu cự của elip.

Phương trình chính tắc của elip:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > b > 0.$$

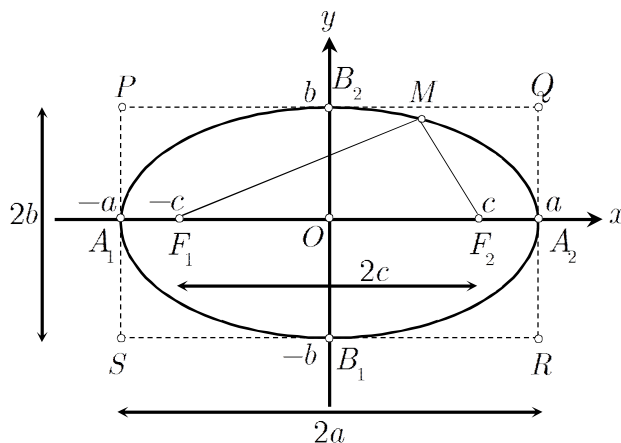
Các thông số cần nhớ:

Trục lớn $A_1A_2 = 2a$.

Trục bé $B_1B_2 = 2b$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$.

Mối liên hệ $a^2 = b^2 + c^2$.



Bán kính qua tiêu của M là $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$.

- a) Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

C. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1.$

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa bài toán.

$$\text{Ta có } |z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow |(x + 4) + yi| + |(x - 4) + yi| = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 10 \quad (*)$$

Đặt $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 8$ nên tập hợp điểm

$M(x; y)$ biểu diễn số phức z là một elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a = 10 \\ F_1F_2 = 2c = 8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- b) Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - 2| + |z + 2| = 10$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$

C. $(E): \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{16} = 1.$

D. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

- c) Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - i| + |z + i| = 4$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

B. $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

C. $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$

D. $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

- d) Tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - i + 1| + |z + i - 1| = 8$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1.$

B. $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1.$

C. $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$

D. $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1.$

BT 5. Nhóm 5. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Trong nhóm bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức số phức có nhiều phương pháp giải, nhưng không có công cụ nào gọi là “vạn năng” để giải quyết hết tất cả các bài toán. Tùy vào đặc điểm của từng đề bài mà ta chọn phương pháp phù hợp sao cho nhanh, gọn, phù hợp với trắc nghiệm. Nhưng trước tiên ta cần nắm vững thật kỹ các phương pháp.

Phương pháp 1. Sử dụng lượng giác hóa

Đối với nhóm bài toán mà tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thì việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.

Giả sử có được giả thiết $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gọi ta đến

công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên đặt $\begin{cases} \frac{x - a}{R} = \sin t \\ \frac{y - b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R \sin t + a \\ y = R \cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về

dạng lượng giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng:

① $-1 \leq \sin t \leq 1, -1 \leq \cos t \leq 1$ và $a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng 1: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

• $a \sin t + b \cos t \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$.

• $a \sin t + b \cos t \geq -\sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = -\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$.

a) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - 2 - 3i| = 1$ và biểu thức $|\bar{z} + i + 1|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $|3x - 2y|$.

Lời giải tham khảo

Ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 3)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1^2 \quad (*)$

✓ **Cách giải 1. Sử dụng lượng giác hóa.** Đặt $\begin{cases} x = \sin t + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases}$.

Có $|\bar{z} + i + 1| = |(x + 1) + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{6x + 4y - 10}$
 $= \sqrt{6 \cdot \sin t + 4 \cdot \cos t + 14} \leq \sqrt{\sqrt{(6^2 + 4^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} + 14} = \sqrt{14 + 2\sqrt{13}}$

Suy ra $|\bar{z} + i + 1|_{\max} = \sqrt{14 + 2\sqrt{13}}$.

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin t}{6} = \frac{\cos t}{4} \\ 6 \sin t + 4 \cos t = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin t - 3 \cos t = 0 \\ 3 \sin t + 2 \cos t = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \cos t = \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}.$$

$$\text{Từ } \begin{cases} x = \sin t + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{13}}{13} + 2 \\ y = \frac{2\sqrt{13}}{13} + 3 \end{cases} \Rightarrow |3x - 2y| = \frac{5\sqrt{13}}{13}.$$

✓ **Cách giải 2. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz**

Từ (*) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x + 6y - 12$.

$$\text{Có } P = |\bar{z} + i + 1| = |(x+1) + (1-y)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{6x + 4y - 10}$$

Phân tích: Từ (*) có $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ nên nghĩ đến việc phân tích biểu thức

$$\sqrt{6x + 4y - 10} = \sqrt{6(x-2) + 4(y-3) + 14}, \text{ áp dụng } ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$$

$$\text{có } P = \sqrt{6(x-2) + 4(y-3) + 14} \leq \sqrt{\sqrt{(6^2 + 4^2)[(x-2)^2 + (y-3)^2]} + 14} = \text{const.}$$

$$P = \sqrt{6(x-2) + 4(y-3) + 14} \leq \sqrt{\sqrt{(6^2 + 4^2)[(x-2)^2 + (y-3)^2]} + 14} = \sqrt{2\sqrt{13} + 14}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \sqrt{2\sqrt{13} + 14}.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{4} \\ 6x + 4y = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{13}}{13} + 2 \\ y = \frac{2\sqrt{13}}{13} + 3 \end{cases} \Rightarrow |3x - 2y| = \frac{5\sqrt{13}}{13}.$$

✓ **Cách giải 3. Sử dụng hình học (hình chiếu và tương giao)**

Ta có $|\bar{z} - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + (y-3)i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1^2$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn tâm $I(2;3)$, bán kính $R = 1$.

Có $|\bar{z} + i + 1| = |(x+1) + (1-y)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = NM$, với $N(-1;1)$.

Bài toán trở thành tìm điểm $M \in (C) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ thỏa mãn $NM_{\min}$. Lúc

này $NM_{\min} = NH = |NI - R| \Leftrightarrow M \equiv H$ và $NM_{\max} = NK = |NI + R| \Leftrightarrow M \equiv K$.

Khi đó để tìm số phức thỏa $|\bar{z} + i + 1|_{\min}$, $|\bar{z} + i + 1|_{\max}$ chính là tọa độ điểm H và

K là giao điểm của đường thẳng (NI) và đường tròn.

Ngoài ra, nếu đề bài yêu cầu tìm số phức thỏa $|z|_{\min}$ hoặc

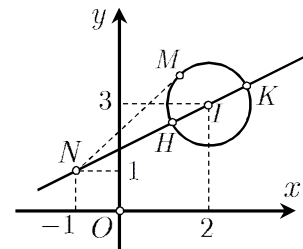
$|z|_{\max}$, nghĩa là $OM_{\min}$ hoặc $OM_{\max}$, ta suy luận tương tự.

Phương trình đường thẳng (NI) qua $N(-1;1)$, có vectơ

chỉ phương $\overrightarrow{NI} = (3;2)$ có dạng $(NI) : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2}$ hay

$(NI) : 2x - 3y + 5 = 0$. Lúc này nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$ là

các điểm biểu diễn của số phức z thỏa $|\bar{z} + i + 1|_{\min}$, $|\bar{z} + i + 1|_{\max}$ (hs làm tiếp tục).



- b) (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 – Câu 46) Xét các số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A.** $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 8$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a - 4) + (b - 3)i| \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad (*)$$

- ✓ **Cách giải 1. Sử dụng lượng giác hóa.** Đặt $\begin{cases} x = \sqrt{5} \sin t + 4 \\ y = \sqrt{5} \cos t + 3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Có } Q &= |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 5)^2 + (\sqrt{5} \cos t)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 3)^2 + (\sqrt{5} \cos t + 4)^2} \\ &= 1 \cdot \sqrt{10\sqrt{5} \sin t + 30} + 1 \cdot \sqrt{6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left[(10\sqrt{5} \sin t + 30) + (6\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 30) \right]} \quad (1) \\ &= \sqrt{2(16\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t + 60)} = \sqrt{2 \left[8\sqrt{5}(2 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t) + 60 \right]} \\ &\leq \sqrt{2 \left[8\sqrt{5} \sqrt{(2^2 + 1^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} + 60 \right]} = 10\sqrt{2} \quad (2). \text{ Suy ra } \max Q = 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi dấu "=" tròn (1) và (2) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin t}{2} = \frac{\cos t}{1} \\ 2 \sin t + \cos t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t - 2 \cos t = 0 \\ 2 \sin t + \cos t = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a = \sqrt{5} \sin \alpha + 4 = 6 \\ b = \sqrt{5} \cos \alpha + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10. \text{ Chọn đáp án A.}$$

- ✓ **Cách giải 2. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz**

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8a - 6b + 20 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20.$$

$$\begin{aligned} Q &= |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = 1 \cdot \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + 1 \cdot \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left\{ [(a + 1)^2 + (b - 3)^2] + [(a - 1)^2 + (b + 1)^2] \right\}} \quad (1) \\ &= \sqrt{2[2(a^2 + b^2) - 4b + 12]} = \sqrt{2[2(8a + 6b - 20) - 4b + 12]} \\ &= \sqrt{32a + 16b - 56} = \sqrt{32(a - 4) + 16(b - 3) + 120} \\ &\leq \sqrt{\sqrt{(32^2 + 16^2)[(a - 4)^2 + (b - 3)^2]} + 120} = \sqrt{\sqrt{(32^2 + 16^2) \cdot 5} + 120} = 10\sqrt{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi dấu "=" tròn (1) và (2) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a - 4}{32} = \frac{b - 3}{16} \\ 32(a - 4) + 16(b - 3) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10. \text{ Chọn đáp án A.}$$

✓ **Cách giải 3. Sử dụng bình phương vô hướng (tìm hiệu kỹ ở phương pháp 2)**

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a - 4) + (b - 3)i| \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc đường tròn tâm $I(4;3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có $Q = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = |(a + 1) + (b - 3)i| + |(a - 1) + (b + 1)i|$
 $= \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}$.

Xét $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$ thì $Q = MA + MB$.

Phân tích: $Q = MA + MB = \frac{1}{\alpha}(\alpha MA) + \frac{1}{\beta}(\beta MB) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)[(\alpha MA)^2 + (\beta MB)^2]}$.

Do đó cần tìm $(\alpha MA)^2 + (\beta MB)^2 = \text{const}$ để áp dụng đúng điểm rơi trong bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. Từ đó gọi ta sử dụng bình phương vô hướng.

Ta có
$$\begin{cases} MA^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}|^2 = |\overrightarrow{MI}|^2 + |\overrightarrow{IA}|^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = R^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \\ MB^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}|^2 = |\overrightarrow{MI}|^2 + |\overrightarrow{IB}|^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = R^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \end{cases}$$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2R^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$ với $R = \sqrt{5}$, $IA = 5$, $IB = 5$.

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 60 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IJ}$ với $J(0;1)$ là trung điểm của AB .

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 60 + 4|\overrightarrow{MI}| \cdot |\overrightarrow{IJ}| \cdot \cos(\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{IJ}) \leq 60 + 4|\overrightarrow{MI}| \cdot |\overrightarrow{IJ}| = 100$.

Mà $Q = 1.MA + 1.MB \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(MA^2 + MB^2)} \leq \sqrt{2.100} = 10\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} MA = MB \\ \cos(\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{IJ}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MI} \uparrow \overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{MI} \end{cases} \Rightarrow M(6;4) \Rightarrow P = a + b = 10$$
.

c) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 6 - 8i| = 2\sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $Q = |z + 6 + 2i| + |z - 2 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- d) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z-1| + |z-i|.$$

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- e) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

- A. $|w| = 2\sqrt{314}$. B. $|w| = 2\sqrt{309}$. C. $|w| = \sqrt{1258}$. D. $|w| = 3\sqrt{137}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- f) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và biểu thức $\left| z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biểu thức $P = |a+b|$.

- A. $P = 6$. B. $P = 3\sqrt{2}$. C. $P = 4$. D. $P = \sqrt{2}$.

.....

.....

- g) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và môđun của z đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 0$. B. $P = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $P = 4$. D. $P = 1 + 3\sqrt{2}$.

- h) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i|$.

A. $3 + \sqrt{17}$. B. $3 - \sqrt{17}$. C. $1 + 5\sqrt{2}$. D. $\sqrt{26 + 7\sqrt{17}}$.

Phương pháp 2. Sử dụng bình phương vô hướng

Đối với một số bài toán tìm max, min, việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$ hoặc $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ tỏ ra khá hiệu quả. Ta cần nhớ bình phương vô hướng $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- i) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2z_2| = 5$ và $|3z_1 - z_2| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải tham khảo

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1 và z_2 .

Suy ra $|\vec{u}| = |z_1 + 2z_2| = |\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5$ và $|\vec{v}| = |3z_1 - z_2| = |3\vec{OM} - \vec{ON}| = 3$.

- ✓ **Phân tích.** Bài toán trở thành tìm M, N để $P = |\vec{OM}| + |\vec{ON}|$ đạt giá trị lớn nhất thỏa $|\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5$ và $|3\vec{OM} - \vec{ON}| = 3$. Để tìm $P_{\max}$, gọi sử dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$, tức tìm $P = |\vec{OM}| + |\vec{ON}| = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha |\vec{OM}|) + \frac{1}{\beta} \cdot |\beta \vec{ON}|$ hay $P = \frac{1}{\alpha} (\alpha |\vec{OM}|) + \frac{1}{\beta} |\beta \vec{ON}| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \left(\alpha^2 |\vec{OM}|^2 + \beta^2 |\vec{ON}|^2\right)}$. Do đó cần phải tìm tổng bình phương vô hướng $\alpha^2 |\vec{OM}|^2 + \beta^2 |\vec{ON}|^2 = \text{const}$, đó là chìa khóa.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} |\vec{OM} + 2\vec{ON}| = 5 \\ |3\vec{OM} - \vec{ON}| = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{OM}|^2 + 4|\vec{ON}|^2 + 4\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 25 \\ 9|\vec{OM}|^2 + |\vec{ON}|^2 - 6\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3|\vec{OM}|^2 + 12|\vec{ON}|^2 + 12\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 75 \\ 18|\vec{OM}|^2 + 2|\vec{ON}|^2 - 12\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{21|\vec{OM}|^2 + 14|\vec{ON}|^2 = 93}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$\begin{aligned} P = |\vec{OM}| + |\vec{ON}| &= \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \left(\sqrt{21} \cdot |\vec{OM}|\right) + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left(\sqrt{14} \cdot |\vec{ON}|\right) \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{14}\right) \left(21|\vec{OM}|^2 + 14|\vec{ON}|^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{14}\right) \cdot 93} = \sqrt{\frac{155}{14}} \Rightarrow P_{\max} = \sqrt{\frac{155}{14}}. \end{aligned}$$

- j) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$ và biểu thức $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm môđun của số phức z .

A. $|z| = \sqrt{2} - 1$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = \sqrt{2} + 1$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Có $|z - 1 - i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$.

Ta có $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i| = 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 4)^2}$.

Xét $O(0;0)$, $N(4;4)$ thì $P = 3OM + 2NM = 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}|$.

Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{OM}|^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{OI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} = 3 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IM} \\ |\overrightarrow{NM}|^2 = (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM})^2 = |\overrightarrow{NI}|^2 + |\overrightarrow{IM}|^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IM} = 19 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IM} \end{cases}$$

Nhận thấy rằng:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OI} = (1;1) \\ \overrightarrow{IN} = (3;3) = 3(1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI} = 0.$$

Suy ra: $3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2 = 28 + 2\overrightarrow{IM} \cdot (\underbrace{3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}}_0) = 28 \Rightarrow \boxed{3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2 = 28}.$

$P = 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} \cdot |\overrightarrow{OM}|) + 2 \cdot |\overrightarrow{NM}| \leq \sqrt{(3 + 4)(3|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{NM}|^2)} = 14.$

Vậy $P_{\max} = 14$ đạt được khi
$$\begin{cases} |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NM}| \\ 3|\overrightarrow{OM}| + 2|\overrightarrow{NM}| = 14 \end{cases} \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = 2 = |z|. \text{ Chọn C.}$$

k) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z + 1| + 3|z - 1|$.

A. $2\sqrt{10}$.

B. $\sqrt{10}$.

C. $3\sqrt{10}$.

D. $4\sqrt{10}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

l) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2$ và biểu thức $P = |z| + |z - 3 - 6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|\overline{z}|$.

A. $|\overline{z}| = 1 + \sqrt{7}$.

B. $|\overline{z}| = \sqrt{7}$.

C. $|\overline{z}| = 2\sqrt{7}$.

D. $|\overline{z}| = 2 + \sqrt{7}$.

- m) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $2\sqrt{13}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{26}$. D. $2\sqrt{26}$.

- n) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $4|z + i| + 3|z - i| = 10$. Tìm $|z|_{\min}$.

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

- o) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.

A. $3\sqrt{5}$. B. $\sqrt{61}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $\sqrt{41}$.

- p) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Tính $x + y$, biết rằng biểu thức $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

- q) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và biểu thức $P = |z - 1| + |z - 1 - 7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính môđun của số phức $w = z - 1 + i\sqrt{3}$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2\sqrt{3}$. C. $|w| = 4\sqrt{3}$. D. $|w| = 3\sqrt{2}$.

- r) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$ và biểu thức $P = |z - 7 - 9i| + 2|z - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $|z|$.

A. $\sqrt{37}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{17}$.

- s) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 3i| = 6$. Tính $x + y$, biết rằng biểu thức $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2 + 2\sqrt{5}$. **B.** $1 - \sqrt{5}$. **C.** $2 - 2\sqrt{5}$. **D.** $1 + \sqrt{5}$.

Phương pháp 3. Sử dụng hình chiếu và tương giao

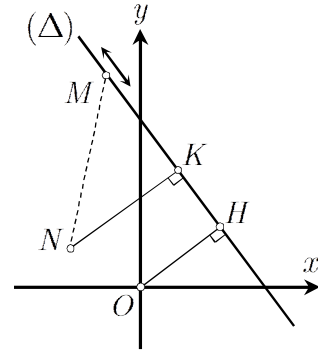
- ① Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ sao cho NM nhỏ nhất $\Leftrightarrow K$ là hình chiếu của N lên (Δ) , nghĩa là $NM_{\min} = NK = d_{[N,(\Delta)]} \Leftrightarrow M \equiv K$.

$$\bullet \quad |z|_{\min} = OH = d_{[O,(\Delta)]} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Khi đó $M \equiv H$ và tọa độ $H = (\Delta) \cap (OH)$.

$$\bullet \quad |z - (x_0 + y_0 i)|_{\min} = NK = d_{[N,(\Delta)]} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Khi đó $M \equiv K$ và tọa độ $K = (\Delta) \cap (MK)$.



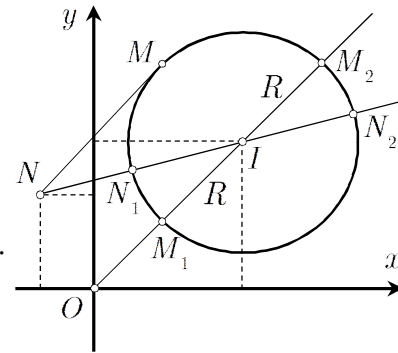
- ② Cho tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Gọi N là điểm biểu diễn số phức z' . Khi đó:

$$\bullet \quad \begin{cases} |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = |OI - R| \text{ khi } M \equiv M_1 \\ |z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = |OI + R| \text{ khi } M \equiv M_2 \end{cases}$$

Khi đó $(OI) \cap (C) = \{M_1; M_2\}$.

$$\bullet \quad \begin{cases} |z - z'|_{\min} = MN_{\min} = NN_1 = |NI - R| \text{ khi } M \equiv N_1 \\ |z - z'|_{\max} = MN_{\max} = NN_2 = |NI + R| \text{ khi } M \equiv N_2 \end{cases}$$

Khi đó $(NI) \cap (C) = \{N_1; N_2\}$.



- t) Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $P = 3x - 2y$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có } |z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

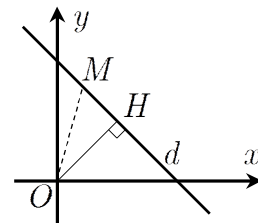
Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) là một đường thẳng $(\Delta): x + y - 4 = 0$.

Số phức có môđun nhỏ nhất $|z|_{\min} = OH$ và số phức cần tìm chính là tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm O lên d .

$$\text{Vì } OH \perp d: x + y - 4 = 0 \Rightarrow OH: x - y + m = 0.$$

Do $O(0; 0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: x - y = 0$. Tọa độ điểm $H = d \cap OH$ thỏa hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(2; 2) \Rightarrow x = y = 2 \Rightarrow 3x - 2y = 2. \text{ Chọn A.}$$



- ✓ **Lưu ý.** Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu (học sinh tự giải) để tìm $|z|_{\min}$.

- u) Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - y$.

A. 3. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{5}{3}$.

.....

- v) Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z + 1 - 5i}{\bar{z} + 3 - i} \right| = 1$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x + y$.

A. $T = \frac{5}{12}$. B. $T = -\frac{12}{5}$. C. $T = \frac{12}{5}$. D. $T = -\frac{5}{12}$.

.....

- w) Cho các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$.

A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 2.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z + 2 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 2)i| = |x + (y - 4)i| \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $(\Delta): x + y - 2 = 0$.

Ta lại có $|iz + 1| = |i(x + yi) + 1| = |(1 - y) + xi| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = NM$, với $N(0; 1)$.

Bài toán trở thành tìm điểm $M \in (\Delta): x + y - 2 = 0$ thỏa mãn $NM_{\min}$ với $N(0; 1)$.

Để $NM_{\min} = NK \Leftrightarrow M \equiv K$, tức K là hình chiếu của điểm N lên (Δ) .

$$\text{Suy ra } NM_{\min} = NK = d_{[N; (\Delta)]} = \frac{|x_N + y_N - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- ✓ **Lưu ý.** Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng $A^2 \geq 0$, bất đẳng thức cộng mẫu (học sinh tự giải) để tìm $|z|_{\min}$.

- x) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 2 - 3i|$.

A. $\frac{11}{10}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\frac{11\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{121}{10}$.

- y) Cho các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai số phức có môđun lớn nhất và môđun nhỏ nhất. Tính tổng phần ảo của hai số phức z_1, z_2 đó.

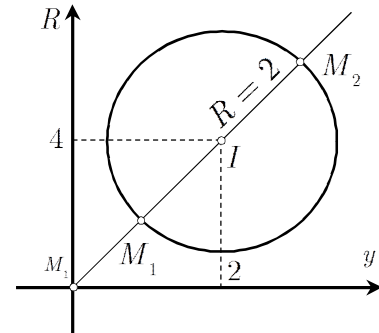
A. -4 . B. 4 . C. -8 . D. 8 .

Lời giải tham khảo

Ta có $|z - (2 + 4i)| = 2 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = 2$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C) có tâm $I(2; 4)$, $R = 2$.

Ta lại có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overrightarrow{OM}| = OM$.



Bài toán trở thành tìm $M \in (C) : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ **thỏa mãn** $OM_{\min}, OM_{\max}$.

Theo hình vẽ có $\begin{cases} |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = |OI - R| \text{ khi } M \equiv M_1 \\ |z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = |OI + R| \text{ khi } M \equiv M_2 \end{cases}$. **Lúc này tọa độ**

biểu diễn số phức z_1, z_2 **là hai điểm** $\{M_1; M_2\} = (OI) \cap (C)$.

Ta có $OI = 2\sqrt{5}$, $R = 2$ nên $\begin{cases} |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = |OI - R| = 2\sqrt{5} - 2 \\ |z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = |OI + R| = 2\sqrt{5} + 2 \end{cases} \quad (*)$

Phương trình đường thẳng (OI) đi qua điểm $O(0; 0)$, vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OI} = (2; 4)$ có dạng $(OI) : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 2x$. Tọa độ M_1, M_2 là giao điểm của (OI) và (C) .

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left\{ 2 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 \pm \frac{4\sqrt{5}}{5} \right\}$.

Suy ra $z_1 = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)i$, $z_2 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(4 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)i$.

Do đó tổng hai phần ảo của số phức z_1, z_2 bằng $\left(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) + \left(4 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) = 8$.

✓ **Lưu ý.** Ngoài cách giải sử dụng hình chiếu và tương giao (hình học), ta có thể giải theo cách khác như: Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu hoặc lượng giác hóa. Nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của $|z|$, ta dừng lại ở (*) và nếu câu hỏi như trên, ta không cần giải (*).

z) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.

A. 12.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

.....

aa) Cho các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = |z + 1|$ và biểu thức $P = |z - (3 - 2i)|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $T = |x - y|$.

A. $T = 0$.B. $T = 2$.C. $T = 4$.D. $T = 6$.

.....

bb) Cho các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm $Q = |x - 2y|$.

A. $Q = 0$.B. $Q = 2$.C. $Q = 4$.D. $Q = 6$.

.....

cc) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|2iz - 1 + 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 - 3i|$.

- A. $\frac{-1 + 5\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1 + 5\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{-1 + 2\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

dd) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$. Tìm $M + m$.

- A. 4. B. 8. C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{13}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ee) Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5}$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 5 + 2i|$. Tìm $a + b$.

Lời giải tham khảo

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Trong mặt phẳng tọa độ xét các điểm $A(1; 1)$, $B(7; 4)$ và $I(5; -2)$.

Ta có $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = 3\sqrt{5} = AB$. Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc đoạn thẳng AB .

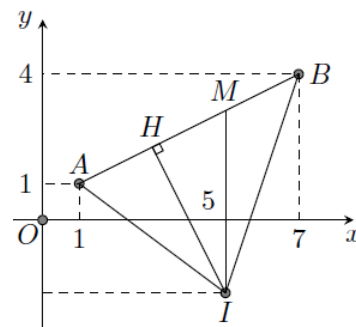
Theo hình vẽ có $|z - 5 + 2i| = IM$.

Phương trình đường thẳng (AB) đi qua $A(1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{(AB)} = \overrightarrow{AB} = (6;3) = 3(2;1)$ có dạng

$$(AB): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow (AB): x-2y+1=0.$$

$$\bullet |z - 5 + 2i|_{\min} = IH = d_{[I;(AB)]} = 2\sqrt{5} \Rightarrow m = 2\sqrt{5}.$$

$$\bullet |z - 5 + 2i|_{\max} = IB = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = 2\sqrt{10}. \text{ Vậy } a + b = 2(\sqrt{5} + \sqrt{10}).$$



- ff) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

Lời giải tham khảo

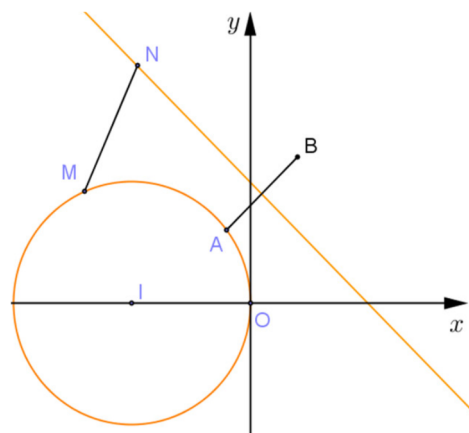
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 và z_2 . Có M di động trên đường tròn $(C): (x+5)^2 + y^2 = 25$ tâm $I(-5;0), R=5$.

Tương tự điểm N di động trên đường thẳng $(\Delta): 8x + 6y - 35 = 0$ là đường trung trực của đoạn AB với $A(-1;3), B(3;6)$.

Ta lại có $P = |z_1 - z_2| = MN$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua I , vuông góc với d . Khi đó để $P = MN$ nhỏ nhất thì

$$M = (d) \cap (C), N = (d) \cap (\Delta) \text{ và } MN_{\min} = |d_{[I;(\Delta)]} - R| = \frac{5}{2}.$$



- gg) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

hh) Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

A. $\sqrt{3}$.

B. 3.

C. $\sqrt{5}$.

D. 5.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ii) Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.n$.

A. $M.n = 2$.

B. $M.n = 1$.

C. $M.n = 2\sqrt{2}$.

D. $M.n = 2\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✓ **Cần nhớ.** Nếu tập hợp điểm biểu diễn z là một elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ thì

$$|z|_{\min}, |z|_{\max} \text{ thỏa mãn } \begin{cases} \max |z| = OM_{\max} = a \\ \min |z| = OM_{\min} = b \end{cases}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

☆☆☆

Nhóm 1. Bài toán xác định điểm biểu diễn của số phức

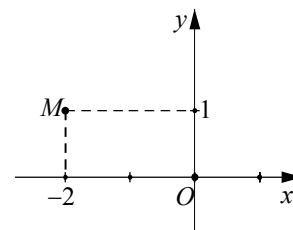
Câu 1. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 – Câu 01) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = -2 + i$.

B. $z = 1 - 2i$.

C. $z = 2 + i$.

D. $z = 1 + 2i$.



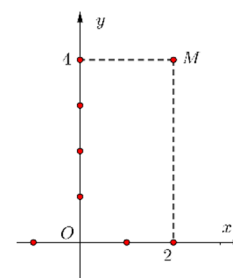
Câu 2. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = 4 + 2i$.

B. $z = 2 + 4i$.

C. $z = -2 + 4i$.

D. $z = 4 - 2i$.



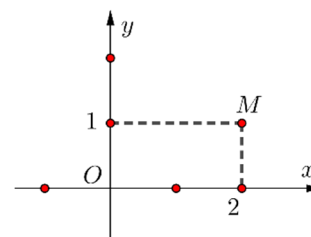
Câu 3. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = -1 + 2i$.

B. $z = 1 + 2i$.

C. $z = 1 - 2i$.

D. $z = 2 + i$.



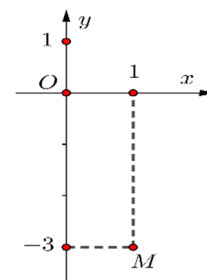
Câu 4. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = -3 + i$.

B. $z = 1 - 3i$.

C. $z = -1 - 3i$.

D. $z = 1 + 3i$.



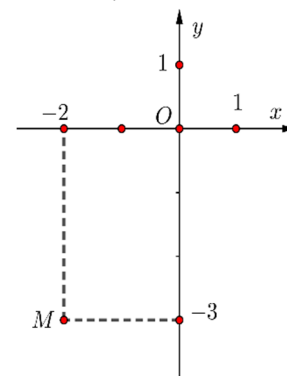
Câu 5. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = (1 + i)(2 - i)$.

B. $z = (1 + i)(2 - 3i)$.

C. $z = \frac{3 - 2i}{i}$.

D. $z = \frac{i}{2 + 3i}$.



Câu 6. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Đề 101 Câu 30) Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $Q(1;2)$.

B. $N(2;1)$.

C. $M(1;-2)$.

D. $P(-2;1)$.

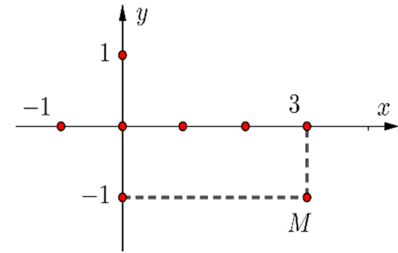
Câu 7. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z = (1 + 2i)(1 - i)$.

B. $z = (1 + i)(2 - 3i)$.

C. $z = \frac{1 + i}{1 - i}$.

D. $2z - 8 = (1 + i)^2$.



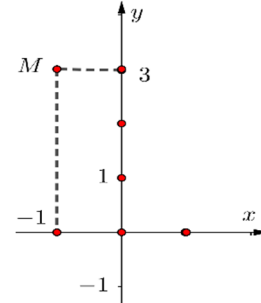
Câu 8. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tìm số phức z .

A. $z = -1 - 3i$.

B. $z = 3 - i$.

C. $z = -1 + 3i$.

D. $z = 1 + 3i$.



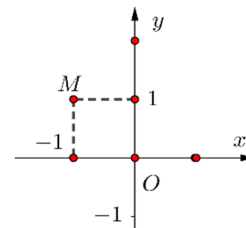
Câu 9. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tìm số phức z .

A. $z = 1 - i$.

B. $z = -1 - i$.

C. $z = 1 + i$.

D. $z = -1 + i$.



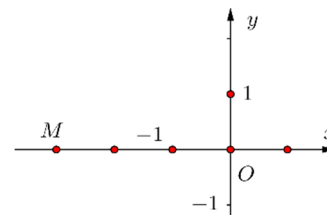
Câu 10. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tìm số phức z .

A. $z = -3i$.

B. $z = 3i$.

C. $z = -3$.

D. $z = 3$.



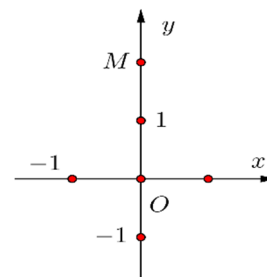
Câu 11. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$. Tìm số phức z .

A. $z = 2i$.

B. $z = 2$.

C. $z = -2$.

D. $z = -2i$.



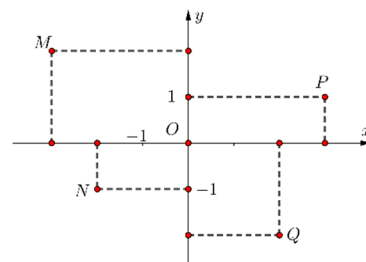
Câu 12. Các điểm M, N, P, Q trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn lần lượt của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 . Khi đó số phức $w = 3z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ bằng

A. $w = -6 + 4i$.

B. $w = 3 - 4i$.

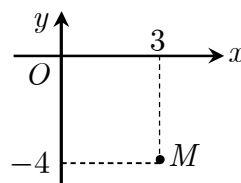
C. $w = 6 + 4i$.

D. $w = 4 - 3i$.



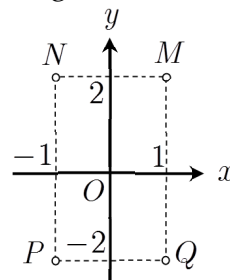
Câu 13. (Đề minh họa lần 2 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của z .

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
 B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
 C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
 D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Câu 14. (Đề thi minh họa lần 1 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

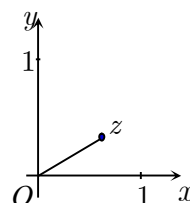
- A. Điểm P .
 B. Điểm Q .
 C. Điểm M .
 D. Điểm N .



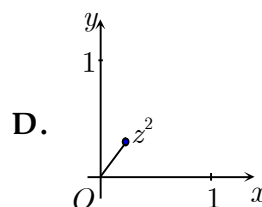
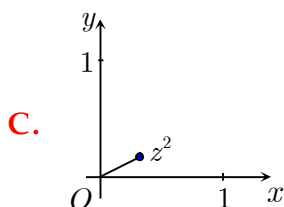
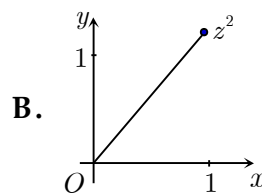
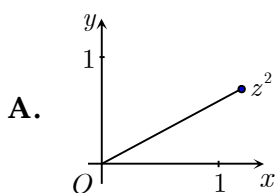
Câu 15. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 104 Câu 13) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $N(4; -3)$. B. $M(2; -5)$. C. $P(-2; -1)$. D. $Q(-1; 7)$.

Câu 16. Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng như hình vẽ bên dưới.

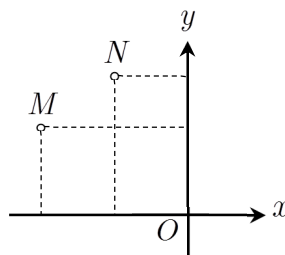


Hỏi hình nào biểu diễn số phức z^2 trong các hình ở bốn đáp án A, B, C, D sau ?



Câu 17. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây sai ?

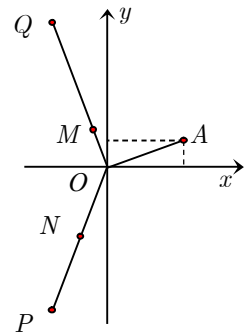
- A. $|z_2| = ON$.
 B. $|z_1 - z_2| = MN$.
 C. $|z_1 + z_2| = MN$.
 D. $|z_1| = OM$.



Câu 18. Cho số phức z thỏa $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z .

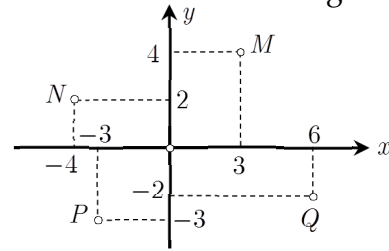
Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây ?

- A. Điểm Q .
- B. Điểm M .
- C. Điểm N .
- D. Điểm P .



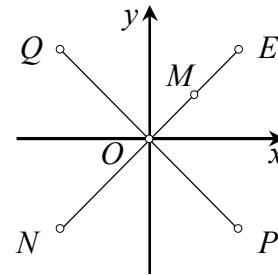
Câu 19. Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình ?

- A. Điểm P .
- B. Điểm M .
- C. Điểm N .
- D. Điểm Q .



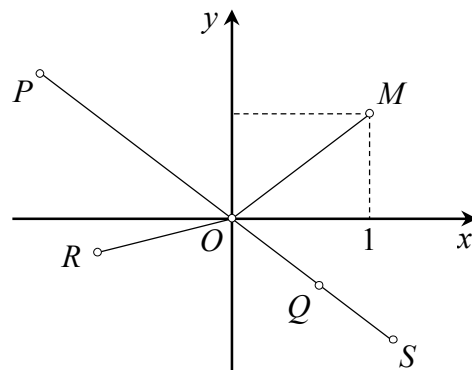
Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$.

- A. Điểm N .
- B. Điểm Q .
- C. Điểm E .
- D. Điểm P .



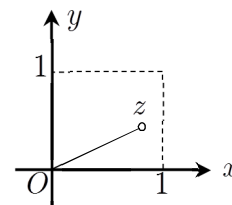
Câu 21. Cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào ?

- A. Điểm S .
- B. Điểm Q .
- C. Điểm P .
- D. Điểm R .



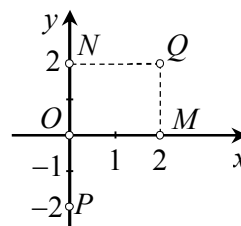
Câu 22. Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{i}{z}$ nằm ở góc phần tư thấy mấy trong hệ trục tọa độ Oxy ?

- A. Thứ nhất.
- B. Thứ hai.
- C. Thứ ba.
- D. Thứ tư.



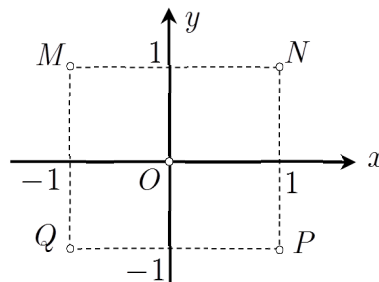
Câu 23. Cho số phức $z = 2i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong hình vẽ bên dưới.

- A. Điểm M .
B. Điểm N .
 C. Điểm P .
 D. Điểm Q .



Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z + 2i = -4$. Điểm nào sau đây biểu diễn cho z trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

- A.** Điểm M .
 B. Điểm N .
 C. Điểm P .
 D. Điểm Q .



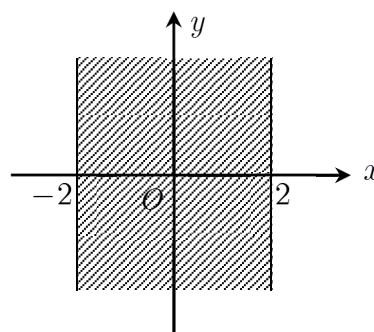
Câu 25. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Để điểm biểu diễn của z nằm trong dải $(-2; 2)$ như phần gạch sọc của hình vẽ thì điều kiện của a, b phải thỏa mãn là gì ?

A. $-2 < a < 2$ và $b \in \mathbb{R}$.

B. $\begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a \leq -2 \\ b \leq -2 \end{cases}$.

D. $a, b \in (-2; 2)$.



Câu 26. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 . Tính độ dài của $\overline{AB}$.

- A.** $|z_2 + z_1|$. **B.** $|z_2 - z_1|$. **C.** $|z_1| + |z_2|$. **D.** $|z_1| - |z_2|$.

Câu 27. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 8 năm 2017) Tìm điểm biểu diễn của $z = \frac{5}{3 - 4i}$.

- A.** $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. **B.** $N\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. **D.** $Q(3; -4)$.

Câu 28. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $z = i(1 + 2i)^2$.

- A.** $M_1(-4; -3)$. **B.** $M_2(4; -3)$. **C.** $M_3(-4; 3)$. **D.** $M_4(4; 3)$.

Câu 29. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(9 + 5i)z + (7 - 2i) = 0$.

- A.** $M(1; 2)$. **B.** $N(1; 1)$. **C.** $P(2; 2)$. **D.** $Q\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 30. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(1 - i)z = 5 + 3i$.

- A.** $M(1; 2)$. **B.** $N(4; 1)$. **C.** $P(1; 4)$. **D.** $Q(-1; -4)$.

Câu 31. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $2i + z(1 - i) = i(3 - i)$.

- A.** $M_3(1; 0)$. **B.** $M_1(0; 1)$. **C.** $M_4(0; 2)$. **D.** $M_2(0; -1)$.

- Câu 32.** Cho số phức $z = 2 - i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = iz$.
 A. $M(-1;2)$. B. $N(2;-1)$. C. $P(2;1)$. D. $Q(1;2)$.
- Câu 33.** Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = iz - \bar{z}$.
 A. $M(5;5)$. B. $N(-5;5)$. C. $P(5;-5)$. D. $Q(-5;-5)$.
- Câu 34.** Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$.
 A. $M(1;-5)$. B. $N(5;-5)$. C. $P(1;1)$. D. $Q(5;1)$.
- Câu 35.** Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(2 - i)(1 + i) + \bar{z} = 4 - 2i$.
 A. $M_1(-1;-3)$. B. $M_2(-1;3)$. C. $M_3(1;-3)$. D. $M_4(1;3)$.
- Câu 36.** Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$ và M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
 A. M' đối xứng với M qua Oy . B. M' đối xứng với M qua Ox .
 C. M' đối xứng với M qua O . D. M' đối xứng với M qua đường $y = x$.
- Câu 37.** Cho số phức $z = -2i - 1$. Tìm điểm biểu diễn N của số phức liên hợp của z trong mặt phẳng phức.
 A. $N_1(-1;-2)$. B. $N_2(-1;2)$. C. $N_3(-2;1)$. D. $N_4(2;-1)$.
- Câu 38.** Trong mặt phẳng phức, cho điểm $A(2;1)$ thì B đối xứng với A qua trục tung sẽ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?
 A. $z = 2 + i$. B. $z = 2 - i$. C. $z = -2 + i$. D. $z = -2 - i$.
- Câu 39.** Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 5 + 4i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = 4i - 5$. Tìm mệnh đề **đúng**?
 A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.
 B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.
 C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O .
 D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.
- Câu 40.** Gọi A và B tương ứng là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 2i$ và $z' = 2 + 3i$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
 A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục Oy .
 B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.
 C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục Ox .
 D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
- Câu 41.** Gọi A, B, C là các điểm trong mặt phẳng theo thứ tự biểu diễn số phức $2 + 3i, 3 + i, 1 + 2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z . Tìm z .
 A. $z = 1 + i$. B. $z = 2 - 2i$. C. $z = 1 - i$. D. $z = 2 + 2i$.
- Câu 42.** Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(4;0), B(1;4)$ và $C(1;-1)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Biết rằng G là điểm biểu diễn số phức z . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
 A. $z = 3 + \frac{3}{2}i$. B. $z = 3 - \frac{3}{2}i$. C. $z = 2 - i$. D. $z = 2 + i$.
- Câu 43.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào sau đây biểu diễn cho số phức z , biết $i\bar{z} = (2 + i)^2$.
 A. $M_1(4;-3)$. B. $M_2(-4;3)$. C. $M_3(-4;-3)$. D. $M_4(4;3)$.

- Câu 44.** Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn N của số phức nghịch đảo của z .
- A. $N\left(\frac{3}{13}; \frac{2}{13}\right)$. B. $N(3; 2)$. C. $N\left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right)$. D. $N(3; -2)$.
- Câu 45.** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = i(1 + 2i)^2$. Tìm tọa độ của điểm M .
- A. $M(-4; -3)$. B. $M(4; -3)$. C. $M(-4; 3)$. D. $M(4; 3)$.
- Câu 46.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $iz = 1 + 2i - \frac{1 + 7i}{1 - 3i}$. Xác định tọa độ điểm A biểu diễn số phức liên hợp $\bar{z}$.
- A. $A(-1; 3)$. B. $A(-1; -3)$. C. $A(1; -3)$. D. $A(1; 3)$.
- Câu 47.** Biết điểm $M(1; -2)$ biểu diễn số phức z . Tính môđun của số phức $w = i\bar{z} - z^2$.
- A. 26. B. 6. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{6}$.
- Câu 48.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 1 năm học 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4 - 6i$ có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ lần lượt là hai điểm M và N . Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm của đoạn MN . Hỏi z là số phức nào trong các số phức dưới đây?
- A. $z = -3 - 9i$. B. $z = -1 - 3i$. C. $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $z = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i$.
- Câu 49.** Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $3 - 2i$, điểm B biểu diễn số phức $-1 + 6i$. Gọi M là trung điểm của AB . Hỏi M biểu diễn số phức nào?
- A. $1 - 2i$. B. $2 - 4i$. C. $2 + 4i$. D. $1 + 2i$.
- Câu 50.** Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z = 1 - 3i$ và $w = -2 + i$ trên mặt phẳng tọa độ. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. $\sqrt{13}$. B. 5. C. $\sqrt{5}$. D. 3.
- Câu 51.** Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2\bar{z}_1$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng MN .
- A. $MN = \sqrt{2}$. B. $MN = 2$. C. $MN = \sqrt{10}$. D. $MN = 5$.
- Câu 52.** Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Khẳng định nào sai về số phức $w = z_1 \cdot \bar{z}_2$.
- A. Số phức liên hợp của w là $8 + i$. B. Môđun của w bằng $\sqrt{65}$.
C. Điểm biểu diễn của w là $M(8; 1)$. D. Phần thực của w là 8, phần ảo là -1 .
- Câu 53.** Số nào sau đây là số đối của số phức z , biết z có phần thực dương thỏa mãn $|z| = 2$ và trong mặt phẳng phức thì z có điểm biểu diễn thuộc đường thẳng $y = x\sqrt{3}$.
- A. $-1 + i\sqrt{3}$. B. $1 + i\sqrt{3}$. C. $-1 - i\sqrt{3}$. D. $1 - i\sqrt{3}$.
- Câu 54.** Cho số phức $p = 3 + 4i$, $q = -2 + 3i$. Tìm tọa độ $(x; y)$ của điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2q + 3z = p$.
- A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. B. $\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 55. Tìm tất cả các số phức z thỏa $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$.

- A. $z = 1 - 4i$. B. $z = 1 + 4i$ hoặc $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.
C. $z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. D. $z = -1 - 2i$ hoặc $z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Câu 56. Cho số phức z thỏa $iz + 2 - i = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng Oxy đến điểm $M(3; -4)$.

- A. $d = 2\sqrt{5}$. B. $d = \sqrt{13}$. C. $d = 2\sqrt{10}$. D. $d = 2\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $-4, 4i$ và $m + 3i$. Với giá trị thực nào của m thì A, B, C thẳng hàng?

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích S của $\triangle OMM'$ với O là gốc tọa độ.

- A. $S = \frac{15}{2}$. B. $S = \frac{25}{4}$. C. $S = \frac{25}{2}$. D. $S = \frac{31}{4}$.

Câu 59. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = 16 - 2i$.

- A. $M(4; 1)$. B. $N(4; -1)$. C. $P(-4; 1)$. D. $Q(-4; -1)$.

Câu 60. Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13 + 2i$.

- A. $M(3; 2)$. B. $N(3; -2)$. C. $P(-3; 2)$. D. $Q(-3; -2)$.

Câu 61. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2+i)\bar{z} = 3 + i$.

- A. $M(1; -1)$. B. $N(1; 2)$. C. $P(1; 1)$. D. $Q(-1; 1)$.

Câu 62. Tìm điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ thỏa mãn $\bar{z} + 3z = (3 - 2i)^2(2 + i)$.

- A. $M\left(\frac{11}{2}; \frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(\frac{11}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. C. $M(11; 9)$. D. $M(11; -9)$.

Câu 63. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2 + (2 + i)z = (3 - 2i)\bar{z} + i$.

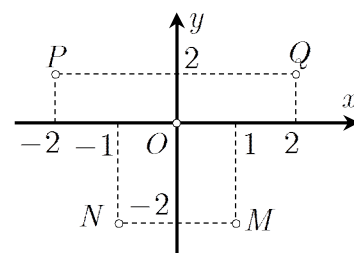
- A. $M\left(\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$. B. $M\left(-\frac{11}{8}; \frac{5}{8}\right)$. C. $M\left(-\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$. D. $M\left(\frac{11}{8}; \frac{5}{8}\right)$.

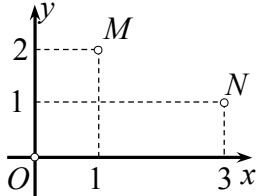
Câu 64. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$.

- A. $M_1(2; -5)$. B. $M_2(-2; 5)$. C. $M_3(-2; 3)$. D. $M_4(2; 3)$.

Câu 65. Cho số phức z thỏa $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Số phức $w = 5.(iz)^{-1}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D ở hình vẽ?

- A. Điểm N .
B. Điểm Q .
C. Điểm M .
D. Điểm P .



- Câu 66.** Trong mặt phẳng phức gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1-i)(2+i), z_2 = 1+3i, z_3 = -1-3i$. Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?
- A. Vuông nhưng không cân. B. Đều nhưng không vuông, không cân.
C. Vuông cân. D. Đều.
- Câu 67.** Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $z_1 = -1+3i, z_2 = -3-2i, z_3 = 4+i$ trong hệ tọa độ Oxy . Hãy chọn kết luận **đúng nhất**?
- A. Tam giác ABC vuông cân. B. Tam giác ABC cân.
C. Tam giác ABC vuông. D. Tam giác ABC đều.
- Câu 68.** Cho A, B, C lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $z_1 + z_2 = 0$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?
- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC vuông tại C .
C. Tam giác ABC cân tại C . D. Tam giác ABC vuông cân tại C .
- Câu 69.** Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1+i, z_2 = (1+i)^2, z_3 = m-i$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .
- A. $m = -4$. B. $m = -2$. C. $m = -3$. D. $m = 3$.
- Câu 70.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h . Biết $a = -2+i, h = 1+3i$ và số phức b có phần ảo dương. Khi đó, môđun của số phức b .
- A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{37}$.
- Câu 71.** Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3+2i, z_2 = 3-2i, z_3 = -3-2i$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?
- A. Hai điểm B và C đối xứng nhau qua trục tung.
B. Ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$.
C. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
D. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(1; \frac{2}{3}\right)$.
- Câu 72.** Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây?
- A. $z_4 = 4-3i$.
B. $z_3 = -2+i$.
C. $z_2 = 4+3i$.
D. $z_1 = 2-i$.
- 
- Câu 73.** Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1-i, 2+3i, 3+i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D .
- A. $z = 2-3i$. B. $z = 4+5i$. C. $z = 4+3i$. D. $z = 2+5i$.
- Câu 74.** Cho A, B, C là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1+2i, z_2 = -2+5i, z_3 = 2+4i$. Tìm số phức z biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $-1 + 7i$. B. $5 + i$. C. $1 + 5i$. D. $3 + 5i$.

Câu 75. Cho A, B, C là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + i$. Tìm số phức z_4 được biểu thị bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $z_4 = 4 - 6i$. B. $z_4 = -4 - 6i$. C. $z_4 = -4 + 6i$. D. $z_4 = 4 + 6i$.

Câu 76. Cho A, B, C là các điểm biểu diễn số phức $1 + 3i$, $-2 + 2i$, $1 - 7i$. Tìm số phức z_4 được biểu thị bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $z = -2 - 8i$. B. $z = 4 - 6i$. C. $z = 4 + 6i$. D. $z = 2 + 8i$.

Câu 77. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, $z_3 = 4 + i$. Tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành thì D là điểm biểu diễn số phức nào?

- A. $2 + i$. B. $5 + 6i$. C. $2 - i$. D. $3 + 4i$.

Câu 78. Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $6 - 3i$, $(1 + 2i)i$, i^{-1} . Tìm số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $z = -8 + 3i$. B. $z = 8 - 5i$. C. $z = -8 - 4i$. D. $z = 4 - 2i$.

Câu 79. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $1 + i$ và $2 + 3i$. Tìm số phức z biểu diễn bởi điểm Q sao cho $\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MQ} = \vec{0}$.

- A. $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$. B. $z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$. C. $z = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$. D. $z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$.

Câu 80. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 - i)(-1 + i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương của trục hoành với véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $-\frac{3}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 81. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 - 3i)(1 + i)$ và φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

- A. $\sin 2\varphi = -\frac{5}{13}$. B. $\sin 2\varphi = \frac{5}{13}$. C. $\sin 2\varphi = \frac{13}{5}$. D. $\sin 2\varphi = -\frac{13}{5}$.

Câu 82. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 + i)^2(4 - i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

- A. $\cos 2\varphi = -\frac{87}{475}$. B. $\cos 2\varphi = \frac{87}{475}$. C. $\cos 2\varphi = -\frac{87}{425}$. D. $\cos 2\varphi = \frac{87}{425}$.

Câu 83. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy M là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ và gọi φ là góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM . Tính $\tan 2\varphi$.

- A. $\tan 2\varphi = -\frac{4}{3}$. B. $\tan 2\varphi = -\frac{3}{4}$. C. $\tan 2\varphi = \frac{4}{3}$. D. $\tan 2\varphi = -1$.

Câu 84. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính $P = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = 4\sqrt{7}$. C. $P = 3\sqrt{3}$. D. $P = 5\sqrt{2}$.

Nhóm 2. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức là đường thẳng

Câu 85. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 5 năm 2017) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z + 3i|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z .

A. Một đường thẳng. B. Một đường tròn. C. Một hyperbol. D. Một elip.

Câu 86. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 8 năm 2017) Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |i - z|$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây ?

A. $2x + 4y + 13 = 0$. B. $4x + 2y + 3 = 0$.
C. $-2x + 4y - 13 = 0$. D. $4x - 2y + 3 = 0$.

Câu 87. Tìm tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2i| = |\bar{z} + 1|$.

A. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $4x + 2y + 3 = 0$.
B. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $4x - 2y + 3 = 0$.
C. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $2x + 4y - 3 = 0$.
D. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $2x + 4y + 3 = 0$.

Câu 88. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z + 2| = |i - z|$.

A. Đường thẳng $y = -2x - \frac{3}{2}$. B. Đường thẳng $y = -2x - 3$.
C. Đường thẳng $y = 2x - \frac{3}{2}$. D. Đường thẳng $y = 2x + \frac{3}{2}$.

Câu 89. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực.

A. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$. B. Đường thẳng $x - y + 2 = 0$.
C. Đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$. D. Đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.

Câu 90. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z - (1 + i)| = |z + 2i|$ là đường nào sau đây ?

A. Đường thẳng $x - y + 1 = 0$. B. Đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
C. Đường thẳng $x + y + 1 = 0$. D. Parabol $y = x^2 + 1$.

Câu 91. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$ là đường thẳng. Hãy viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x - 2y + 1 = 0$. B. $4x - 6y - 1 = 0$.
C. $4x + 2y - 1 = 0$. D. $4x - 2y - 1 = 0$.

Câu 92. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Biết tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là một đường thẳng, hãy tìm đường thẳng đó ?

A. $d_1 : 20x - 16y - 47 = 0$. B. $d_2 : 20x + 16y + 47 = 0$.
C. $d_3 : 20x + 32y + 47 = 0$. D. $d_4 : 20x - 32y - 47 = 0$.

- Câu 93.** Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $v = (z - i)(2 + i)$ là một số thuần ảo.
- A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 2$. B. Đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.
 C. Đường thẳng $2x - y + 1 = 0$. D. Đường parabol $2x = y^2$.
- Câu 94.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo.
- A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 5$. B. Đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.
 C. Đường tròn $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$. D. Đường thẳng $3x + 2y - 1 = 0$.
- Câu 95.** Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d : 3x - y + 1 = 0$.
- A. $z = 1 - 4i$. B. $z = 1 + 4i$ và $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.
 C. $z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. D. $z = -1 - 2i$ và $z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.
- Câu 96.** Cho số phức z thỏa $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z + 1$ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.
- A. $x - 7y - 9 = 0$. B. $x + 7y - 9 = 0$. C. $x + 7y + 9 = 0$. D. $x - 7y + 9 = 0$.
- Câu 97.** Cho số phức $v = a + bi$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - v| = 1$.
- A. Đường thẳng $(x - a) + (y - b) = 1$. B. Đường thẳng $y = b$.
 C. Đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$. D. Đường thẳng $x = a$.
- Câu 98.** Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $z^2 = (\bar{z})^2$ là
- A. Gốc tọa độ. B. Trục hoành.
 C. Trục tung. D. Trục tung và trục hoành.
- Câu 99.** Trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện z là số ảo.
- A. Trục ảo.
 B. Trục thực và trục ảo.
 C. Đường phân giác góc phần tư thứ nhất và thứ ba.
 D. Hai đường phân giác của các góc tọa độ.
- Câu 100.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1 + i)$ là số thực.
- A. Đường tròn bán kính bằng 1. B. Trục hoành Ox .
 C. Đường thẳng $y = -x$. D. Đường thẳng $y = x$.
- Câu 101.** Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $\frac{z - i}{z + i}$ là số thực.
- A. Đường tròn phương trình $x^2 + y^2 = 1$ bỏ đi điểm $A(0; -1)$.
 B. Hyperbol phương trình $x^2 - y^2 = -1$ bỏ đi điểm $A(0; -1)$.

C. Trục tung Oy bỏ đi điểm $A(0; -1)$.

D. Trục hoành Ox bỏ đi điểm $A(0; -1)$.

Câu 102. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

A. Đường tròn.

B. Trục thực.

C. Trục ảo.

D. Một điểm.

Câu 103. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn phần thực của z bằng phần ảo của z' và phần ảo của z bằng phần thực của z' . Nếu tập hợp của các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z' là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $x - 2y + 3 = 0$. **B.** $2x + y - 3 = 0$. **C.** $x - 2y - 3 = 0$. **D.** $2x + y + 3 = 0$.

Câu 104. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $z^2 = |z|^2$.

A. Gốc tọa độ.

B. Trục hoành.

C. Trục tung và trục hoành.

D. Trục tung.

Câu 105. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng d_1, d_2 .

A. $M(0; 0)$.

B. $M(1; 1)$.

C. $M(1; 2)$.

D. $M(0; 3)$.

Câu 106. Biết tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| = |i - z|$ là đường thẳng d . Tính khoảng cách h từ gốc O đến đường thẳng d .

A. $h = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

B. $h = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

C. $h = \frac{3\sqrt{5}}{20}$.

D. $h = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Câu 107. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16$ là hai đường thẳng d_1 và d_2 . Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

A. $d(d_1, d_2) = 2$.

B. $d(d_1, d_2) = 4$.

C. $d(d_1, d_2) = 1$.

D. $d(d_1, d_2) = 6$.

Câu 108. Cho các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$.

A. $z = 3 + i$.

B. $z = 1 + 3i$.

C. $z = 2 - 3i$.

D. $z = -2 + 3i$.

Câu 109. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

A. $\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Nhóm 3. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức là đường tròn, hình tròn

- Câu 110.** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $|z - i| = 1$ là một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn này. Tìm tọa độ của I .
- A. $I(0; -1)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(1; 0)$. D. $I(-1; 0)$.
- Câu 111.** Tập hợp biểu diễn số phức z thỏa $z\bar{z} = 4$ là đường tròn có bán kính R bằng mấy ?
- A. $R = 2$. B. $R = 6$. C. $R = 4$. D. $R = 8$.
- Câu 112.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 7 năm 2017) Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 5i| = 4$ một đường tròn tâm I , bán kính R . Tìm I và R .
- A. $I(2; -5)$ và $R = 2$. B. $I(-2; 5)$ và $R = 4$.
C. $I(2; -5)$ và $R = 4$. D. $I(0; 0)$ và $R = 2$.
- Câu 113.** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$ là một đường tròn. Tìm tâm I và bán kính R .
- A. $I(2; -1)$, $R = 1$. B. $I(-2; 1)$, $R = \sqrt{3}$.
C. $I(1; -2)$, $R = 3$. D. $I(-2; 1)$, $R = 3$.
- Câu 114.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$ là đường tròn có phương trình nào sau đây ?
- A. $x^2 + (y + 1)^2 = 2$. B. $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.
C. $x^2 + (y - 1)^2 = 2$. D. $(x + 1)^2 + y^2 = 2$.
- Câu 115.** Tìm đường tròn tâm I , bán kính R là tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - (4 + 3i)| = 2$.
- A. $I(4; 3)$, $R = 2$. B. $I(4; -3)$, $R = 4$. C. $I(-4; 3)$, $R = 4$. D. $I(4; -3)$, $R = 2$.
- Câu 116.** Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - 3 + 2i| = 5$ là một đường tròn có tâm I và bán kính R . Tìm I và R .
- A. $I(-3; -2)$, $R = 5$. B. $I(3; -2)$, $R = 5$.
C. $I(3; 2)$, $R = 5$. D. $I(-3; 2)$, $R = 5$.
- Câu 117.** Cho số phức z thỏa mãn $|iz - 2i| = |1 - 2i|$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Hãy xác định tọa độ tâm I của đường tròn đó.
- A. $I(0; 2)$. B. $I(0; -2)$. C. $I(-2; 0)$. D. $I(2; 0)$.
- Câu 118.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - (2 + i)| = 2$ là một đường tròn có phương trình nào sau đây ?
- A. $x - 3y - 2 = 0$. B. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.
C. $2x - y - 2 = 0$. D. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.
- Câu 119.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z - 2i| = 3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa khoảng cách từ I đến đường thẳng $d: 3x + 4y - m = 0$ bằng $\frac{1}{5}$.

A. $m = 8, m = -8$. B. $m = 8, m = 9$. C. $m = -7, m = 9$. D. $m = 7, m = 9$.

Câu 120. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 4$ là một đường tròn. Tính chu vi C của đường tròn đó.

A. $C = 4\pi$. B. $C = 2\pi$. C. $C = 8\pi$. D. $C = 16\pi$.

Câu 121. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1)(\bar{z} - 2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng bao nhiêu ?

A. 5π . B. $\frac{5\pi}{4}$. C. $\frac{5\pi}{2}$. D. 25π .

Câu 122. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$, với m là tham số thực thuộc $\mathbb{R}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 - 4i)z - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $r = 20$. B. $r = 4$. C. $r = 22$. D. $r = 5$.

Câu 123. Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn. Tìm tâm I và bán kính R .

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$.
C. $I(-1; 2), R = 5$. D. $I(1; -2), R = 5$.

Câu 124. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I và bán kính R (trừ một điểm). Tìm tọa độ I và tính R .

A. $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $R = \frac{1}{2}$.
C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $R = \frac{1}{2}$. D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 125. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 4$. B. $R = 5$. C. $R = 20$. D. $R = 22$.

Câu 126. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 12$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (8 - 6i)z + 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 122$. B. $r = 120$. C. $r = 24\sqrt{7}$. D. $r = 12$.

Câu 127. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = 2; w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn, tính bán kính đường tròn đó

A. $R = 3$. B. $R = 2$. C. $R = 4$. D. $R = 5$.

Câu 128. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $\sqrt{20}$. B. 20. C. $\sqrt{7}$. D. 7.

Câu 129. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Hãy tính bán kính của đường tròn đó.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{7}$.

Câu 130. (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 2\sqrt{2}$. B. $r = 4$. C. $r = \sqrt{2}$. D. $r = 2$.

Câu 131. Cho số phức z thay đổi luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i$ là đường tròn có phương trình nào sau đây ?

- A. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$. B. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$.
C. Đường tròn $x^2 + (y + 3)^2 = 20$. D. Đường tròn $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$.

Câu 132. (Sở GD & ĐT TP. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức z có $|z| = 4$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $w = \bar{z} + 3i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

- A. 4. B. $\frac{4}{3}$. C. 3. D. $4\sqrt{2}$.

Câu 133. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz + 1 - i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

- A. $r = 22$. B. $r = 4$. C. $r = 20$. D. $r = 5$.

Câu 134. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy , biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 3i| \leq 4$.

- A. Hình tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $r = 4$.
B. Đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $r = 4$.
C. Hình tròn tâm $I(-1;-3)$, bán kính $r = 4$.
D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $r = 4$.

Câu 135. Tập hợp các số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

- A. 4π . B. 2π . C. 3π . D. π .

Câu 136. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích bằng bao nhiêu ?

- A. $S = 9\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 16\pi$. D. $S = 25\pi$.

Câu 137. (Sở GD & ĐT TP. Hồ Chí Minh cụm 5 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó ?

- A. $S = 25\pi$. B. $S = 8\pi$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 16\pi$.

Câu 138. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 1 năm 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

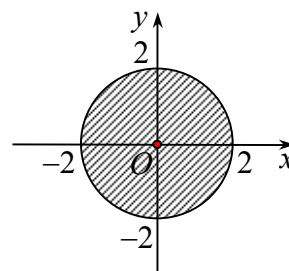
Để điểm biểu diễn của z nằm hẳn bên trong hình tròn tâm O bán kính $R = 2$ như hình bên thì điều kiện cần và đủ của a và b là gì ?

A. $a^2 + b^2 < 2$.

B. $a^2 + b^2 < 4$.

C. $a + b < 2$.

D. $a + b < 4$.



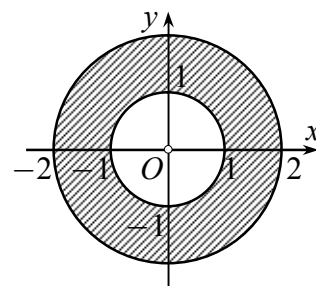
Câu 139. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa điều kiện nào của x, y sau đây để tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ kể cả hai đường tròn $(C_1), (C_2)$

A. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

B. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \end{cases}$.

C. $1 < x^2 + y^2 < 4$.

D. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.



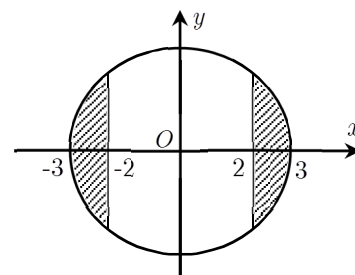
Câu 140. Trong mặt phẳng phức Oxy , số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa điều kiện nào thì có điểm biểu diễn thuộc phần tô đậm trong hình vẽ (kể cả biên) ?

A. $a \in [-3; 2] \cup [2; 3]$ và $|z| > 3$.

B. $a \in (-3; 2) \cup (2; 3)$ và $|z| \leq 3$.

C. $a \in [-3; 2] \cup [2; 3]$ và $|z| < 3$.

D. $a \in [-3; -2] \cup [2; 3]$ và $|z| \leq 3$.



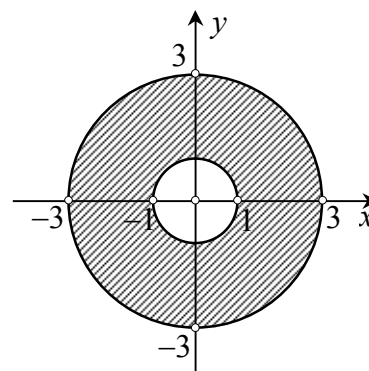
Câu 141. Phần gạch chéo trong hình bên dưới là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện nào ?

A. $1 \leq |z| \leq 3$.

B. $|z| \leq 3$.

C. $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$.

D. $|z| \geq 1$.



Câu 142. Gọi (H) là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 1 \leq a - b$. Tính diện tích hình (H) .

A. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

D. 1.

Nhóm 4. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức là elip và hyperbol

Câu 143. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - 2| + |z + 2| = 10$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$

C. $(E): \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{16} = 1.$

D. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Câu 144. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một elip có phương trình chính tắc nào sau đây ?

A. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 4.$

C. $(E): \frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1.$

D. $(E): \frac{3x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1.$

Câu 145. Tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - i + 1| + |z + i - 1| = 8$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1.$

C. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$

D. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1.$

Câu 146. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z - i| + |z + i| = 4$ là một elip (E) . Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

B. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

C. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$

D. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

Câu 147. Gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$ và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình (H) .

A. $3\pi.$

B. $\frac{3\pi}{4}.$

C. $\frac{3\pi}{2}.$

D. $6\pi.$

Câu 148. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z + i| = |2\bar{z} - z + 3i|$. Tập hợp tất cả những điểm M như vậy là hình gì ?

A. Một parabol.

B. Một đường thẳng.

C. Một đường tròn.

D. Một elip.

Câu 149. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là hình gì ?

A. Một đường thẳng.

B. Một đường Parabol.

C. Một đường Elip.

D. Một đường tròn.

Câu 150. Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

- A. Là đường hyperbol $(H): y = -\frac{1}{x}$. B. Là đường hyperbol $(H): y = \frac{1}{x}$.
 C. Là đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 4$.
 D. Là hai đường Hyperbol $(H_1): y = \frac{1}{x}$ và $(H_2): y = -\frac{1}{x}$.

Nhóm 5. Bài toán max min

Câu 151. Trong tất cả các số phức có dạng $z = m - 3 - (m - 2)i$ với $m \in \mathbb{R}$, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. B. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. C. $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. D. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Câu 152. Cho số phức $z = (m - 1) + (m - 2)i$, ($m \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị của m để môđun của số phức z có giá trị lớn nhất là $\sqrt{5}$.

- A. $-3 \leq m \leq 0$. B. $0 \leq m \leq 3$. C. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 153. Cho số phức $z = m + (m - 3)i$, ($m \in \mathbb{R}$). Tìm m để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $m = 0$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 154. Cho số phức z thỏa $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất?

- A. $-\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$. B. $-\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$. C. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$. D. $\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$.

Câu 155. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh CỤM 1 năm 2017) Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 156. Biết số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ có môđun nhỏ nhất. Tính $M = a^2 + b^2$.

- A. $M = 8$. B. $M = 10$. C. $M = 16$. D. $M = 26$.

Câu 157. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh CỤM 8 năm 2017) Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $3x - 4y - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 158. Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. 10. D. 8.

Câu 159. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |2z + 2 - i|$.

A. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 160. Trong các số phức thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$, số phức nào có môđun nhỏ nhất ?

A. $z = -3 - 4i$. B. $z = \frac{3}{2} + 2i$. C. $z = 3 + 4i$. D. $z = \frac{3}{2} - 2i$.

Câu 161. Trong các số phức thỏa mãn $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất ?

A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 162. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$.

A. $z = -1 - 2i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 1 + 2i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 163. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$.

A. $P_{\max} = 9$. B. $P_{\max} = 5$. C. $P_{\max} = 12$. D. $P_{\max} = 3$.

Câu 164. Cho số phức thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $4\sqrt{2} - 2$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $2 + \sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} + 1$.

Câu 165. Cho số phức z thỏa mãn $|iz + 4 - 3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 166. Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất. Tìm môđun của số phức z_0 .

A. $|z_0| = 4$. B. $|z_0| = 2$. C. $|z_0| = 7$. D. $|z_0| = 3$.

Câu 167. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

A. $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$. B. $z = \frac{25 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$.
C. $z = \frac{26 + 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$. D. $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} - \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$.

Câu 168. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng bao nhiêu ?

A. $8i$. B. 4. C. -8. D. 8.

Câu 169. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |\bar{z} + 1 + i|$.

A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$.

Câu 170. (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3| = 2|z|$ và $\max|z - 1 + 2i| = a + b\sqrt{2}$. Tính $a + b$.

A. 4. B. $4\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{4}{3}$.

- Câu 171.** Cho số phức z có $|z| = 2$ thì số phức $w = z + 3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là bao nhiêu ?
 A. 2 và 5. B. 1 và 6. C. 2 và 6. D. 1 và 5.
- Câu 172.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất. Tính môđun của số phức $|z|$.
 A. $|z| = 2\sqrt{5}$. B. $|z| = 3\sqrt{2}$. C. $|z| = \sqrt{6}$. D. $|z| = 5\sqrt{2}$.
- Câu 173.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 7 năm 2017) Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?
 A. $16 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{74}$. D. $4 + \sqrt{130}$.
- Câu 174.** Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$.
 A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 8.
- Câu 175.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.
 A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.
- Câu 176.** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.
 A. $\max T = 2\sqrt{5}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 3\sqrt{5}$. D. $\max T = 3\sqrt{2}$.
- Câu 177.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Tính $M + m$.
 A. $4 - \sqrt{7}$. B. $4 + \sqrt{7}$. C. 7. D. $4 + \sqrt{5}$.
- Câu 178.** Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính Mm .
 A. $Mm = 2$. B. $Mm = 1$. C. $Mm = 2\sqrt{2}$. D. $Mm = 2\sqrt{3}$.
- Câu 179.** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tính tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.
 A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.
- Câu 180.** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.
 A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. B. $\min|w| = 2$. C. $\min|w| = 1$. D. $\min|w| = \frac{1}{2}$.
- Câu 181.** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z}|$.

- A. $\sqrt{5}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 182. (Đề minh họa lần 3 – Bộ GD & ĐT năm 2017 – Câu 48) Xét số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $m + M$.

- A. $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. D. $\sqrt{13} + \sqrt{73}$.

Câu 183. (Đề tham khảo 2018 – Bộ GD & ĐT – Câu 46) Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

Câu 184. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z - 4 - 3i| = |\bar{z} - 2 + i|$. Tính $P = a^2 + b^2$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $P = \frac{293}{9}$. B. $P = \frac{449}{32}$. C. $P = \frac{481}{32}$. D. $P = \frac{137}{9}$.

Câu 185. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $5 + 3\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $4\sqrt{6}$. D. $34 + 3\sqrt{2}$.

Câu 186. Cho các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 187. Tìm số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z - 3 + 4i| = \sqrt{5}$ và $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của z .

- A. $\sqrt{41}$. B. $\sqrt{34}$. C. 5. D. 4.

Câu 188. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 2 - i| + \sqrt{5}|iz - 1 + 6i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{\sqrt{5} + 2}{3}$. C. $P = \frac{-\sqrt{5} - 2}{3}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 189. Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 2| + 2|z - 2|$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 190. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 6 - 8i| = 2\sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 6 + 2i| + |z - 2 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

Câu 191. Xét hai số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z_1 - 2i| = \sqrt{2}$, $|z_2 - 4 - 2i| = \sqrt{2}$ và một số thực e . Tính $P = a + b + c + d + e$ khi $|z_1 - e| + |z_2 - e|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. 12. B. 10. C. 11. **D. 8.**

Câu 192. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính $|M + mi|$.

- A. $2\sqrt{314}$. B. $2\sqrt{309}$. **C. $\sqrt{1258}$.** D. $3\sqrt{137}$.

Câu 193. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = |z - i|$. Tính $P = 2a - b^2$ khi $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\frac{1}{25}$.** B. $\frac{19}{25}$. C. $-\frac{4}{25}$. D. $\frac{14}{25}$.

Câu 194. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z + 2 - i}{\bar{z} + 1 - i} \right| = \sqrt{2}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z|$.

- A. $2\sqrt{10}$.** B. $\sqrt{20}$. C. 6. D. $3\sqrt{10}$.

Câu 195. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z - 1| + |z - i|$.

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. **C. $2\sqrt{5}$.** D. $3\sqrt{5}$.

Câu 196. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2.** B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 197. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$. Tìm $M + m$.

- A. 4. **B. 8.** C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{13}$.

Câu 198. Biết rằng tồn tại hai số phức z thỏa mãn $|2z + 1| = |z + \bar{z} + 3|$ và $|z - 8|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng hai phần thực của hai số phức đó.

- A. 7. B. 0. **C. 14.** D. 8.

Câu 199. Cho số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Hãy tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

- A. 0.** B. 12. C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 200. Cho số phức z thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(3 - |z|)z^2 = mi$ với $m \in \mathbb{R}$ và điểm A biểu diễn số phức nằm trong đường tròn tâm O bán kính là 3, tìm giá trị lớn nhất của tham số m .

- A. $m_{\max} = 3$. B. $m_{\max} = 0$. C. $m_{\max} = 2$. **D. $m_{\max} = 4$.**

BẢNG ĐÁP ÁN DẠNG HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

1.A	2.B	3.D	4.B	5.C	6.B	7.D	8.A	9.B	10.C
11.D	12.A	13.C	14.B	15.C	16.C	17.C	18.D	19.D	20.C
21.B	22.B	23.B	24.A	25.A	26.B	27.B	28.A	29.D	30.C
31.B	32.D	33.B	34.C	35.D	36.B	37.B	38.C	39.B	40.B
41.D	42.D	43.D	44.A	45.A	46.D	47.C	48.D	49.D	50.B
51.C	52.C	53.B	54.A	55.B	56.C	57.B	58.B	59.A	60.B
61.C	62.A	63.D	64.B	65.C	66.C	67.A	68.B	69.C	70.D
71.D	72.D	73.A	74.B	75.A	76.B	77.C	78.B	79.B	80.B
81.A	82.D	83.C	84.B	85.A	86.B	87.C	88.A	89.D	90.A
91.D	92.A	93.C	94.B	95.B	96.C	97.D	98.D	99.A	100.C
101.C	102.B	103.B	104.D	105.A	106.A	107.B	108.A	109.C	110.B
111.A	112.C	113.D	114.A	115.D	116.C	117.D	118.B	119.D	120.C
121.B	122.A	123.C	124.D	125.C	126.B	127.C	128.A	129.B	130.A
131.A	132.A	133.D	134.A	135.B	136.C	137.D	138.B	139.D	140.D
141.A	142.C	143.B	144.C	145.B	146.B	147.C	148.A	149.B	150.D
151.C	152.B	153.C	154.A	155.B	156.A	157.B	158.B	159.C	160.B
161.C	162.C	163.A	164.B	165.B	166.D	167.D	168.D	169.D	170.A
171.D	172.B	173.D	174.A	175.B	176.A	177.B	178.C	179.C	180.C
181.D	182.B	183.A	184.A	185.B	186.A	187.B	188.A	189.D	190.B
191.D	192.C	193.A	194.A	195.C	196.A	197.B	198.C	199.A	200.D

Chúc các em làm bài tốt và đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến !

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

☆☆☆

Kiến thức cơ bản

1. Căn bậc hai của số phức

Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức w và tìm như sau:

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{x + yi} = a + bi \Leftrightarrow x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)i = x + yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \text{ và giải hệ này tìm được } a, b. \text{ Từ đó tìm được căn bậc hai của số phức } z.$$

Lưu ý: Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn.

Ví dụ 1: Tìm các căn bậc hai của số phức $z = -3 + 4i$.

.....

.....

.....

Tìm căn bậc hai, căn bậc bốn của số phức $z = a + bi$ bằng máy tính bỏ túi:

Để máy tính ở chế độ Radian R ($SHIFT - MODE - 4$) và chế độ số phức $CMPLX$ ($SHIFT - MODE - 2$).

- Tìm căn bậc hai: $\sqrt{a + bi} \angle \left(\frac{\arg(a + bi)}{2} + \frac{2\pi X}{2} \right), CALC : \begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \end{cases}$
- Tìm căn bậc bốn: $\sqrt[4]{a + bi} \angle \left(\frac{\arg(a + bi)}{4} + \frac{2\pi X}{4} \right), CALC : \begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \\ X = 2 \Rightarrow w_3 = \\ X = 3 \Rightarrow w_4 = \end{cases}$

Trong đó: $| | = SHIFT - hyp, \angle = SHIFT - (-), \arg() = SHIFT - 2 - 1.$

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0, (*)$ với $a \neq 0$ có biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ hoặc } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Ví dụ 2: Biết z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

.....

.....

.....

Bài tập vận dụng**BT 1.** Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a) $z = -5 + 12i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm 2 \pm 3i$.

.....

.....

.....

.....

b) $z = 8 + 6i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm 3 \pm i$.

.....

.....

.....

.....

c) $z = 3 - 4i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm 2 \mp i$.

.....

.....

.....

.....

d) $z = 33 - 56i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm 7 \mp 4i$.

.....

.....

.....

.....

e) $z = 4 + 6\sqrt{5}i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm 3 \mp i\sqrt{5}$.

.....

.....

.....

.....

f) $z = -1 - 2\sqrt{6}i$.

ĐS: $w = \sqrt{z} = \pm\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}$.

.....

BT 2. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0.$

ĐS: $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3i.$

b) $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$

ĐS: $z_1 = -1 - 2i, z_2 = -2 - i.$

c) $z^2 + (1 + i)z - 2 - i = 0.$

ĐS: $z_1 = 1, z_2 = -2 - i.$

d) $z^2 - 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0.$

ĐS: $z_1 = 5 - 12i, z_2 = 3 + 4i.$

e) $(2 - 3i)z^2 + (4i - 3)z + 1 - i = 0.$

ĐS: $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$

f) $2(1+i)z^2 - 4(2-4i)z - 5 - 3i = 0.$ ĐS: $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

.....

.....

.....

.....

BT 3. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thuần ảo ?

a) $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$ ĐS: $z = 2i, z = 1 \pm i\sqrt{3}.$

.....

.....

.....

.....

b) $z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0.$ ĐS: $z = -i, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{11}}{2}.$

.....

.....

.....

.....

c) $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0.$ ĐS: $z = 2i, z = -1 \pm 2i.$

.....

.....

.....

.....

BT 4. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thực ?

a) $2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0.$ ĐS: $z = -\frac{1}{2}, z = 1+i, z = 2-i.$

.....

.....

.....

.....

b) $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$ ĐS: $z = 1, z = i, z = 1+i.$

BT 5. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

a) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0.$

ĐS: $z = 1 \pm i, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$

b) $(z - i)(z + 2i)(z + 4i)(z + 7i) = 34.$

ĐS: $z = \pm 1 - 3i, z = (-3 \pm 3\sqrt{2})i.$

c) $z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = 0.$

ĐS: $z = -1, z = -i, z = 3i.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

☆☆☆

- Câu 1.** (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 câu 20) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng
- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 3. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 2.** (Đề thi THPT QG năm 2017 – Mã đề 101 câu 22) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm ?
- A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. B. $z^2 - 2z - 3 = 0$. C. $z^2 - 2z + 3 = 0$. D. $z^2 + 2z - 3 = 0$.
- Câu 3.** (Đề thi THPT QG năm 2017 – Mã đề 102 câu 17) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.
- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.
- Câu 4.** (Đề thi THPT QG năm 2017 – Mã đề 103 câu 17) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.
- A. $P = \frac{1}{6}$. B. $P = \frac{1}{12}$. C. $P = -\frac{1}{6}$. D. $P = 6$.
- Câu 5.** (Đề thi THPT QG năm 2017 – Mã đề 104 câu 17) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.
- A. $T = \sqrt{2}$. B. $T = 2$. C. $T = 8$. D. $T = 4$.
- Câu 6.** (Đề thi minh họa lần 1 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.
- A. $T = 4$. B. $T = 2\sqrt{3}$. C. $T = 4 + 2\sqrt{3}$. D. $T = 2 + 2\sqrt{3}$.
- Câu 7.** (Đề thi minh họa lần 2 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?
- A. $M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M_3\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $M_4\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.
- Câu 8.** (Đề thi minh họa lần 3 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2$.
- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = -1$. D. $P = 0$.
- Câu 9.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 2 năm 2017) Gọi z_1, z_2 nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Tìm $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$.
- A. $w = 2^{50}i$. B. $w = -2^{51}$. C. $w = 2^{51}$. D. $w = -2^{50}i$.

- Câu 10.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Tìm các căn bậc hai của -12 trong tập số phức $\mathbb{C}$.
- A. $\pm 4\sqrt{3}i$. B. $\pm 2\sqrt{3}i$. C. $\pm 2\sqrt{2}i$. D. $\pm 3\sqrt{2}i$.
- Câu 11.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 6 năm 2017) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2$.
- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.
- Câu 12.** Tìm số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$.
- A. $\begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$.
- Câu 13.** (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh cụm 7 năm 2017) Tìm tập nghiệm của phương trình $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$.
- A. $\{\pm 2; \pm 4i\}$. B. $\{\pm \sqrt{2}; \pm 2i\}$. C. $\{\pm \sqrt{2}i; \pm 2\}$. D. $\{\pm 2; \pm 4i\}$.
- Câu 14.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Tính $I = z_1^{100} + z_2^{100}$.
- A. $M = -2^{51}$. B. $M = 2^{51}$. C. $M = 2^{51}i$. D. $M = 2^{50}$.
- Câu 15.** Trên trường số phức $\mathbb{C}$, cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau ?
- A. Phương trình luôn có nghiệm. B. Tổng hai nghiệm bằng $-\frac{b}{a}$.
- C. Tích hai nghiệm bằng $\frac{c}{a}$. D. $b^2 - 4ac < 0$ phương trình vô nghiệm.
- Câu 16.** Gọi M_1, M_2 là hai điểm lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Tính số đo góc $\widehat{M_1OM_2}$.
- A. $\widehat{M_1OM_2} = 120^\circ$. B. $\widehat{M_1OM_2} = 90^\circ$. C. $\widehat{M_1OM_2} = 60^\circ$. D. $\widehat{M_1OM_2} = 150^\circ$.
- Câu 17.** Gọi A và B là hai điểm trong mặt phẳng biểu diễn hai nghiệm phân biệt của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Tính $\tan \widehat{AOB}$.
- A. $\tan \widehat{AOB} = \frac{1}{2}$. B. $\tan \widehat{AOB} = 1$. C. $\tan \widehat{AOB} = \frac{4}{3}$. D. $\tan \widehat{AOB} = \sqrt{3}$.
- Câu 18.** Gọi A, B là hai điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. $AB = 6$. B. $AB = 2$. C. $AB = 12$. D. $AB = 4$.
- Câu 19.** Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:
- A. $MN = 4$. B. $MN = 5$. C. $MN = -2\sqrt{5}$. D. $MN = 2\sqrt{5}$.
- Câu 20.** Biết phương trình $z^2 + 2z + 26 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Xét các khẳng định:
- (1): $z_1 z_2 = 26$. (2): z_1 là số phức liên hợp của z_2 .
- (3): $z_1 + z_2 = -2$. (4): $|z_1| > |z_2|$.

Hỏi có bao nhiêu số khẳng định **đúng** ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 21. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 = -5 + 12i$.

- A. $z = 2 + 3i$ hoặc $z = -2 - 3i$. B. $z = 2 + 3i$.
C. $z = 2 - 3i$ hoặc $z = -2 + 3i$. D. $z = 2 - 3i$.

Câu 22. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Tính $A = |z_1| + |z_2|$.

- A. $A = 2\sqrt{3}$. B. $A = 4$. C. $A = 4\sqrt{3}$. D. $A = 5$.

Câu 23. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tính $A = |z_1| + |z_2|$.

- A. $A = 0$. B. $A = 1$. C. $A = 2$. D. $A = 4$.

Câu 24. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính $A = |z_1| + |z_2|$.

- A. $A = 2\sqrt{5}$. B. $A = 10$. C. $A = 3$. D. $A = 6$.

Câu 25. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $A = 15$. B. $A = 20$. C. $A = 19$. D. $A = 17$.

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $P = 50$. B. $P = 2\sqrt{5}$. C. $P = 10$. D. $P = 6$.

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $P = 2$. B. $P = \sqrt{3}$. C. $P = 6$. D. $P = 2\sqrt{3}$.

Câu 28. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $P = \frac{11}{9}$. B. $P = \frac{8}{3}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{4}{3}$.

Câu 29. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 3z + 3 = 0$. Tính $P = \frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2}$.

- A. $P = \frac{2}{3}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = \frac{4}{9}$. D. $P = \frac{2}{9}$.

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính $M = |z_1^2| + |z_2^2|$.

- A. $M = 2\sqrt{34}$. B. $M = 4\sqrt{5}$. C. $M = 12$. D. $M = 10$.

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $P = 26$. B. $P = 2\sqrt{13}$. C. $P = 13$. D. $P = \sqrt{26}$.

Câu 32. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính $A = |z_1|^3 + |z_2|^3$.

- A. $A = 20\sqrt{10}$. B. $A = 2\sqrt{10}$. C. $A = 20$. D. $A = 10\sqrt{10}$.

Câu 33. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = -1$. Tính $P = z_1^3 + z_2^3$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = z_1^4 + z_2^4$.

- A. $P = -14$. B. $P = 14$. C. $P = -14i$. D. $P = 14i$.

Câu 35. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\sqrt{3}z^2 - z + 6 = 0$. Tính $A = z_1^3 + z_2^3$.

- A. $A = -5,8075$. B. $A = \frac{54 - \sqrt{3}}{9}$. C. $A = \frac{\sqrt{3} + 54}{-9}$. D. $A = \frac{\sqrt{3} - 54}{9}$.

Câu 36. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$. Tính $T = |z_1^4| + |z_2^4|$.

- A. $T = 16$. B. $T = 128$. C. $T = 32$. D. $T = 64$.

Câu 37. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tính $T = |z_1^4| + |z_2^4|$.

- A. $T = 75$. B. $T = -51$. C. $T = 50$. D. $T = 25$.

Câu 38. Gọi x_0 là nghiệm phức có phần ảo là số dương của phương trình $x^2 + x + 2 = 0$. Tìm số phức $z = x_0^2 + 2x_0 + 3$.

- A. $z = 1 + \sqrt{7}i$. B. $z = -2\sqrt{7}i$. C. $z = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}$. D. $z = \frac{\sqrt{7}i - 3}{2}$.

Câu 39. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 4z + 20 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + 2(z_1^2 + z_2^2)$.

- A. $A = 0$. B. $A = 2$. C. $A = -28$. D. $A = -16$.

Câu 40. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tìm số phức $w = z_0 + \frac{6}{z_0 + i}$.

- A. $w = -\frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$. B. $w = -\frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$. C. $w = \frac{24}{5} - \frac{7}{5}i$. D. $w = \frac{24}{5} + \frac{7}{5}i$.

Câu 41. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Tìm iz_0 .

- A. $iz_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. B. $iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. C. $iz_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. D. $iz_0 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Câu 42. Ký hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 10z + 29 = 0$ với z_1 có phần ảo âm. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1^2 - z_2^2 + 1$.

- A. $\bar{w} = 1 + 40i$. B. $\bar{w} = 40 - i$. C. $\bar{w} = 1 - 10i$. D. $\bar{w} = 1 - 40i$.

Câu 43. Ký hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực và phần ảo đều âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Hỏi điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = \bar{z}_0 \cdot i^3$.

- A. $M_2(2; -1)$. B. $M_1(-1; 2)$. C. $M_4(-2; -1)$. D. $M_3(2; 1)$.

Câu 44. Gọi z_1, z_2 nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 7 = 0$. Tính $P = z_1 + z_2 - z_1z_2$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2$. C. $P = 5$. D. $P = -5$.

Câu 45. Gọi z_1, z_2 nghiệm phức phương trình $2z^2 - 3z + 2 = 0$. Tính $P = \sqrt{z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2}$.

A. $P = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $P = \frac{5}{\sqrt{2}}$. **C.** $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $P = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 46. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có 1 nghiệm là $z = -2 + i$. Tính $a - b$.
A. $a - b = 9$. **B.** $a - b = 1$. **C.** $a - b = 4$. **D.** $a - b = -1$.

Câu 47. Tìm các số thực b, c để phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận số phức $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

A. $\begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Câu 48. Phương trình $z^2 + bz + c = 0$, ($b, c \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Hãy tính $b + c$.

A. $b + c = 0$. **B.** $b + c = 3$. **C.** $b + c = 2$. **D.** $b + c = 7$.

Câu 49. Biết rằng phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có một nghiệm là $z = 1 - i$. Tính môđun của số phức $w = a + bi$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 50. Tìm $b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $8 + 16i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + 8bz + 64c = 0$.

A. $\begin{cases} b = 2 \\ c = -5 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} b = -2 \\ c = -5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$.

Câu 51. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 8 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Tìm số phức $w = (2z_1 + z_2)\bar{z}_1$.

A. $w = 12 + 6i$. **B.** $w = 10 + 2i\sqrt{7}$. **C.** $w = 10$. **D.** $w = 12 - 6i$.

Câu 52. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tìm số phức liên hợp của $w = (1 + 2i)z_1$.

A. $\bar{w} = -3 - i$. **B.** $\bar{w} = 1 - 3i$. **C.** $\bar{w} = 1 + 3i$. **D.** $\bar{w} = -3 + i$.

Câu 53. Gọi z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo âm. Tìm số phức $\overline{z_1 + 2z_2}$.

A. $-3 + 2i$. **B.** $-3 - 2i$. **C.** $3 - 2i$. **D.** $3 + 2i$.

Câu 54. Gọi z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tính môđun của số phức: $z = z_1^2 + z_2^2 + 4 - 3i$.

A. $|z| = 6$. **B.** $|z| = 3\sqrt{2}$. **C.** $|z| = 2\sqrt{3}$. **D.** $|z| = 18$.

Câu 55. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$, trong đó phần ảo của z_1 là số âm. Tính môđun của số phức $w = z_1^2 - 2z_2^2 - 2$.

A. $|w| = 13$. **B.** $|w| = \sqrt{13}$. **C.** $|w| = 8$. **D.** $|w| = 2\sqrt{2}$.

Câu 56. Cho hai số phức z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Tính môđun của số phức $w = (z_1 + z_2)i + z_1z_2$.

A. $|w| = 3$. **B.** $|w| = \sqrt{185}$. C. $|w| = \sqrt{153}$. D. $|w| = \sqrt{133}$.

Câu 57. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Tính giá trị của biểu thức $M = |z_1| + |3z_1 - z_2|$.

A. $\sqrt{6} - 2\sqrt{21}$. **B.** $\sqrt{6} + 2\sqrt{21}$. C. $\sqrt{6} + 4\sqrt{21}$. D. $\sqrt{6} - 4\sqrt{21}$.

Câu 58. Gọi w là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 7z + 13 = 0$. Tìm $\bar{w}$.

A. $\bar{w} = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $\bar{w} = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. C. $\bar{w} = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. D. $\bar{w} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 59. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực và phần ảo đều âm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^3 \bar{z}_0$.

A. $M(2; -1)$ B. $M(-2; -1)$. **C.** $M(2; 1)$. D. $M(-1; 2)$.

Câu 60. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tìm trên mặt phẳng tọa độ điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{i}{z_0}$.

A. $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 61. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức iz_0 .

A. $M_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $M_3\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. D. $M_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 62. Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $6z^2 - 12z + 7 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn của số phức $w = iz_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$.

A. $M(0; -1)$. B. $N(1; 1)$. **C.** $P(0; 1)$. D. $Q(1; 0)$.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$ có hai nghiệm phức có môđun bằng 1.

A. $a = 1$. B. $a = 1, a = -1$. C. $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. D. $a = -1$.

Câu 64. Phương trình bậc hai $z^2 + Mz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $10i$. Khi đó trên tập $\mathbb{C}$, giá trị của M bằng bao nhiêu?

A. $\begin{cases} M = -\sqrt{6} + \sqrt{6}i \\ M = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} M = \sqrt{6} + \sqrt{6}i \\ M = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i \end{cases}$.
C. $\begin{cases} M = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i \\ M = \sqrt{6} - \sqrt{6}i \end{cases}$. D. $\begin{cases} M = \sqrt{6} - \sqrt{6}i \\ M = -\sqrt{6} + \sqrt{6}i \end{cases}$.

Câu 65. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3 - 7z^2 + 31z - 25 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

- A. $T = 11$. B. $T = \sqrt{11}$. C. $T = 121$. D. $T = 22$.

Câu 66. Biết phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có $z_1, z_2, z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm. Biết z_2 có phần ảo âm, tìm phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$.

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -1.

Câu 67. Tính tổng các nghiệm của phương trình $z^4 - 8 = 0$ trên tập số phức.

- A. 0. B. $2\sqrt[4]{8}$. C. $2i\sqrt[4]{8}$. D. $2\sqrt[4]{8} + i2\sqrt[4]{8}$.

Câu 68. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, giải phương trình $z^4 - 25 = 0$.

- A. $z = \pm\sqrt{5}i$. B. $z = \pm\sqrt{5}, z = \pm\sqrt{5}i$.
C. $z = \pm\sqrt{5}$. D. $z = \pm 5, z = \pm 5i$.

Câu 69. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + z^2 - 20 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $T = 4$. B. $T = 2 + \sqrt{5}$. C. $T = 4 + 3\sqrt{5}$. D. $T = 6 + 3\sqrt{5}$.

Câu 70. Xét phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ trong tập số phức $\mathbb{C}$. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

- A. $T = 3\sqrt{2}$. B. $T = 5\sqrt{2}$. C. $T = 5$. D. $T = \sqrt{2}$.

Câu 71. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi A, B, C, D lần lượt là bốn điểm biểu diễn bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 đó. Tính giá trị của $P = OA + OB + OC + OD$, trong đó O là gốc tọa độ.

- A. $P = 4$. B. $P = 2 + \sqrt{2}$. C. $P = 2\sqrt{2}$. D. $P = 4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 72. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 7z^2 + 12 = 0$. Tính tổng $T = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4$.

- A. $T = 10$. B. $T = 25$. C. $T = 50$. D. $T = 100$.

Câu 73. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|} + \frac{1}{|z_4|}$.

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{5}{2}$. C. $S = 6$. D. $S = \frac{13}{2}$.

Câu 74. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = 0$. D. $P = 2$.

Câu 75. Phương trình $z^2 + iz + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong tập số phức?

- A. Hai. B. Một. C. Không có. D. Vô số.

Câu 76. Trên tập số phức, tìm nghiệm của phương trình $iz + 2 - i = 0$.

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = 2 + i$. C. $z = 1 + 2i$. D. $z = 4 - 3i$.

Câu 77. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, giải phương trình $z + \frac{1}{z} = 2i$.

- A. $z = (1 \pm \sqrt{2})i$. B. $z = (5 \pm \sqrt{2})i$. C. $z = (1 \pm \sqrt{3})i$. D. $z = (2 \pm \sqrt{5})i$.

Câu 78. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + 3iz + 4 = 0$.

- A. $z = 3i$ hoặc $z = 4i$. B. $z = i$ hoặc $z = -4i$.
C. $z = 1 + i$ hoặc $z = -3i$. D. $z = 2 - 3i$ hoặc $z = 1 + i$.

Câu 79. Hai giá trị $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$ là hai nghiệm của phương trình nào sau đây ?

- A. $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$. B. $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$.
C. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$. D. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

Câu 80. Trong $\mathbb{C}$, tìm nghiệm của phương trình $z^3 - 8 = 0$.

- A. $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$. B. $z_1 = 2$, $z_2 = i\sqrt{3} - 1$, $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$.
C. $z_1 = -2$, $z_2 = i\sqrt{3} - 1$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$. D. $z_1 = -2$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Câu 81. Cho phương trình ẩn phức $z^3 + 8 = 0$ có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 . Tính $|z_1| + |z_2| + |z_3|$.

- A. 6. B. $2 + 2\sqrt{5}$. C. $2 + 2\sqrt{10}$. D. $2 + 2\sqrt{2}$.

Câu 82. Trong $\mathbb{C}$, tìm nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$.

- A. $z_1 = 2 - i$ hoặc $z_2 = -i$. B. $z_1 = i - 2$ hoặc $z_2 = -i$.
C. $z_1 = 2 + i$ hoặc $z_2 = 2 - i$. D. $z_1 = 2 + i$ hoặc $z_2 = -i$.

Câu 83. Tính tổng phần thực, phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$ thỏa mãn $z^2 - 2(1 + i)z + 2i = 0$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. -2.

Câu 84. Trong $\mathbb{C}$, tìm nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 2i$.

- A. $z = (1 \pm \sqrt{3})i$. B. $z = (5 \pm \sqrt{2})i$. C. $z = (1 \pm \sqrt{2})i$. D. $z = (2 \pm \sqrt{5})i$.

Câu 85. Tìm a để $(2 + i)z^2 + az + b = 0$, ($a, b \in \mathbb{C}$) có hai nghiệm là $3 + i$ và $1 - 2i$.

- A. $a = -9 - 2i$. B. $a = 15 + 5i$. C. $a = 9 + 2i$. D. $a = 15 - 5i$.

Câu 86. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$. Tính môđun của số phức $w = z_1^2 + z_2^2 - 3z_1z_2$.

- A. $|w| = 2$. B. $|w| = \sqrt{13}$. C. $|w| = 2\sqrt{13}$. D. $|w| = \sqrt{20}$.

Câu 87. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $(2z + 2 - i)^2 - 8(2z - i) + 9 = 0$, trong đó phần ảo của z_2 nhỏ hơn phần ảo của z_1 . Tính $P = |z_1 + 2z_2|$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = 4$. C. $P = 3$. D. $P = \sqrt{6}$.

- Câu 88.** Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ và A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- A. $I(1;1)$. B. $I(-1;0)$. C. $I(0;1)$. D. $I(1;0)$.
- Câu 89.** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.
- A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. B. $\min|w| = 2$. C. $\min|w| = 1$. D. $\min|w| = \frac{1}{2}$.
- Câu 90.** Cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trong đó m là tham số phức. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -10$.
- A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$. B. $m = 2 + 2\sqrt{2}i$. C. $m = 2 - 2\sqrt{2}i$. D. $m = -2 - 2\sqrt{2}i$.
- Câu 91.** Cho phương trình $z^2 + mz - 6i = 0$. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì m có dạng $m = \pm(a + bi)$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $a + 2b$.
- A. $a + 2b = 0$. B. $a + 2b = 1$. C. $a + 2b = -2$. D. $a + 2b = -1$.
- Câu 92.** Trong tập số phức, tìm giá trị của m để phương trình bậc hai $z^2 + mz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$.
- A. $m = \pm(1 - i)$. B. $m = 1 - i$. C. $m = \pm(1 + i)$. D. $m = -1 - i$.
- Câu 93.** Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.
- A. $T = 2\sqrt{13}$. B. $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$. C. $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$. D. $T = 4\sqrt{13}$.
- Câu 94.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$. Tìm tổng các phần ảo của các số phức z_1, z_2 .
- A. 4. B. 3. C. -4. D. -3.
- Câu 95.** Cho các số phức z, w thỏa mãn $z + w = 4 - i$ và $z^3 + w^3 = 7 + 28i$. Gọi z_1 là số phức có phần ảo dương và w_1 là số phức có phần ảo âm. Tính $|z_1| + |w_1|$.
- A. $\sqrt{11} + 4$. B. $\sqrt{11} + 3$. C. $\sqrt{5} + 1$. D. $\sqrt{10} + \sqrt{5}$.
- Câu 96.** Tính tổng các nghiệm của phương trình $(z + i)^4 + 4z^2 = 0$.
- A. 4. B. -4. C. $4i$. D. $-4i$.
- Câu 97.** Tính tổng các nghiệm của phương trình $z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$. Biết rằng phương trình đã cho có một nghiệm thuần ảo.
- A. $-2 + 2i$. B. $2i$. C. $-1 - 2i$. D. $-1 + 2i$.
- Câu 98.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $(z^2 + 3z + 2)(z^2 + 11z + 30) = 60$. Tìm tổng các phần thực của z_1, z_2, z_3, z_4 .
- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{21}{2}$. C. $\frac{21}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.
- Câu 99.** Biết phương trình $z^3 - (3 + i)z^2 + (3 + 4i)z + 1 - mi = 0$ có một nghiệm $z = i$. Tìm tổng các nghiệm của phương trình đã cho.

A. $3 + i$.

B. $1 + i$.

C. $2 - i$.

D. $2 + i$.

Câu 100. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4 = 0$. Tính

giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_4^2}$.

A. $T = \frac{4}{5}$.

B. $T = -\frac{4}{5}$.

C. $T = \frac{5}{4}$.

D. $T = -\frac{5}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

1.D	2.C	3.B	4.A	5.D	6.C	7.B	8.D	9.B	10.B
11.C	12.C	13.C	14.A	15.D	16.A	17.C	18.A	19.D	20.C
21.A	22.B	23.C	24.A	25.B	26.C	27.C	28.D	29.A	30.D
31.A	32.A	33.C	34.A	35.D	36.B	37.C	38.C	39.C	40.C
41.B	42.A	43.D	44.A	45.A	46.D	47.C	48.B	49.C	50.D
51.B	52.C	53.B	54.B	55.C	56.B	57.B	58.A	59.C	60.B
61.B	62.C	63.A	64.B	65.A	66.B	67.A	68.B	69.D	70.A
71.D	72.C	73.A	74.B	75.A	76.C	77.A	78.B	79.C	80.B
81.A	82.D	83.B	84.C	85.A	86.D	87.C	88.D	89.C	90.A
91.D	92.A	93.B	94.A	95.D	96.D	97.A	98.B	99.A	100.C

Chúc các em làm bài tốt và đạt kết quả cao trong kỳ thi sắp đến !