

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$.

b) Giải phương trình: $\cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

Câu 2 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Biết góc $BAC = 90^\circ$ và

$a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự tạo thành cấp số nhân. Tính số đo góc B, C .

Câu 3 (1,0 điểm). Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ 8 chữ số trên lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2019^n}} \end{cases}$$
. Tìm công thức số hạng

tổng quát và tính $\lim u_n$.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $BAD = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M và I

là hai điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N .

a) Chứng minh đường thẳng SD vuông góc với mặt phẳng (AMI) .

b) Chứng minh $ANI = 90^\circ$; $AMI = 90^\circ$.

c) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác BCD , G' là trung điểm của AG . Một mặt phẳng (α) đi qua G' cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D' . Tính

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}.$$

Câu 8 (1,0 điểm). Cho n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2).$$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

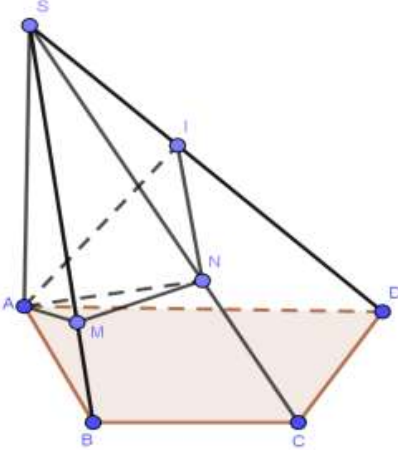
I. LƯU Ý CHUNG:

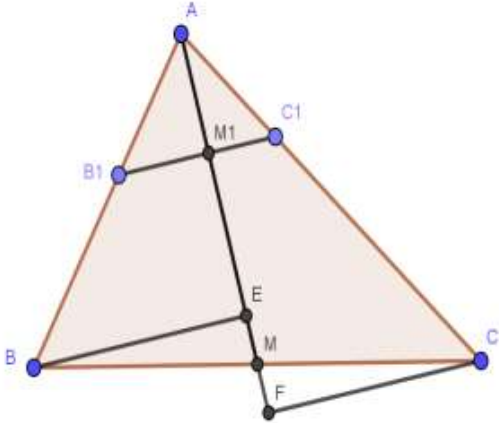
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

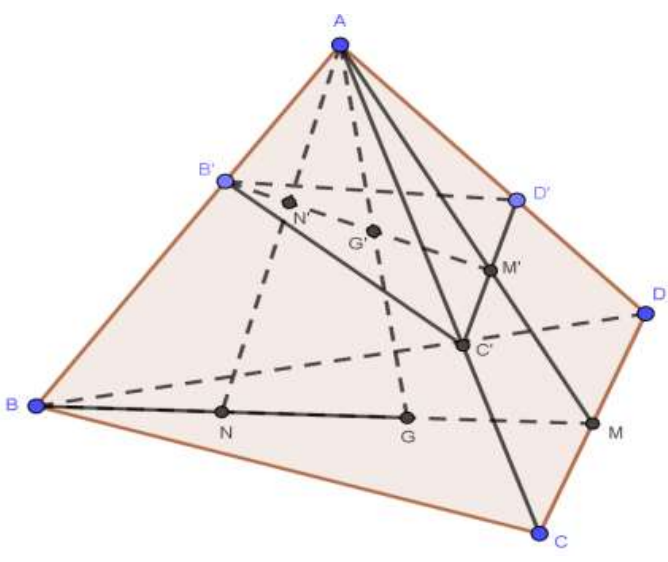
II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	(2,0 điểm)	
	a.(1,0 điểm).	
	Gọi y_0 là một giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$. Khi đó phương trình $y_0 = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ phải có nghiệm. Ta có phương trình $y_0 = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (y_0 + 2) \sin x + (1 - 2y_0) \cos x = 4y_0 - 3$ (1)	0,5
	Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $(y_0 + 2)^2 + (1 - 2y_0)^2 \geq (4y_0 - 3)^2 \Leftrightarrow 11y_0^2 - 24y_0 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_0 \leq 2$	0,25
	Vậy $\max y = 2, \min y = \frac{2}{11}$.	0,25
	b.(1,0 điểm)	
	$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ Phương trình $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x - 1 = 0 \end{cases}$	0,5
	+) Với $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.	0,25
	+) Với $\sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi$. Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.	0,25
2	(1,0 điểm)	
	Ta có: $\frac{2}{3}b^2 = ac$. Do tam giác ABC vuông ta có	0,25

	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = a \sin B; c = a \sin C = a \cos B.$	
	Suy ra $\frac{2}{3} a^2 \sin^2 B = a^2 \cos B \Leftrightarrow B = 60^\circ$	0,5
	Vậy $A = 90^\circ, B = 60^\circ, C = 30^\circ.$	0,25
3	(1,0 điểm)	
	Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có: $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^i 2^{n-i} \right) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n 2^{n-i} C_n^i x^i \right)$	0,25
	Số hạng chứa x^{3n-3} tương ứng với cặp (k, i) thỏa mãn: $\begin{cases} 2k + i = 3n - 3 \\ 0 \leq k, i \leq n \end{cases} \Rightarrow (k, i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$ Do đó hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3} = C_n^n \cdot 2^3 \cdot C_n^{n-3} + C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot C_n^{n-1} = 8C_n^3 + 2n^2$	0,5
	Theo giả thiết ta có: $8C_n^3 + 2n^2 = 26n \Leftrightarrow 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n^2 = 26n$ $\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 5.$ Vậy $n = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
4	(1,0 điểm)	
	Do $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, nên để tổng 4 chữ số đầu và tổng 4 chữ số cuối bằng nhau, điều kiện là tổng đó bằng 14.	0,25
	-Ta lập bộ 4 số có tổng là 14 và có chữ số 0 là: $(0; 1; 6; 7); (0; 2; 5; 7); (0; 3; 4; 7); (0; 3; 5; 6).$ Với mỗi bộ có số 0 trên ứng với một bộ còn lại không có số 0 và có tổng bằng 14.	0,25
	-TH1: Bộ có số 0 đứng trước: Có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp 4 chữ số đầu có $3.3!$ cách. +) Xếp 4 chữ số cuối có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số	0,25
	-TH2: Bộ có số 0 đứng sau: Có 4 bộ có chữ số 0, mỗi bộ có +) Xếp bộ không có chữ số 0 trước có $4!$ cách. +) Xếp bộ có chữ số 0 sau có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số. Vậy có $1728 + 2304 = 4032$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
5	(1,0 điểm)	
	Ta có $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2019^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2019^n}$ $u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2019^1}$ Do đó: $u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2019^2}$... $u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2019^{n-1}}$	0,25
		0,5

	Suy ra: $u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2019^1} + \frac{1}{2019^2} + \dots + \frac{1}{2019^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}$ Vậy $u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}}$	
	Ta có $1 < u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}} < \sqrt[n]{2020} = \sqrt[n]{1.1\dots1.2020} < \frac{1 + 1 + \dots + 1 + 2020}{n}$ $1 + \frac{2019}{n}$ (Côsi cho $n - 1$ số 1 và số 2020) Mặt khác $\lim(1 + \frac{2019}{n}) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$.	0,25
6	(2,0 điểm)	
a)		0,75
	Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$. Ta có $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{a} = a, \vec{b} = 2a, \vec{c} = a\sqrt{3}, \vec{a}.\vec{b} = a^2, \vec{a}.\vec{c} = 0, \vec{b}.\vec{c} = 0.$	0,25
	Ta có: $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$.	0,25
	Suy ra: $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AI} = 0$, $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AM} = 0$. Do đó $SD \perp AI$, $SD \perp AM$. Vậy $SD \perp (AMI)$.	0,25
b)		0,5
	Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{NI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NI} = 0 \Rightarrow AN \perp NI \Rightarrow ANI = 90^\circ.$	0,25
	$+\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{MI} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{9}{28}\vec{c}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI \Rightarrow AMI = 90^\circ.$	0,25
c)		0,75
	Thiết diện tạo bởi mặt phẳng AMI và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMNI$. Ta có	0,25

	$S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{AMN}$	
	Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}, NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$ $\Rightarrow S_{ANI} = \frac{1}{2}AN.NI = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$	0,25
	Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{15a^2}{16} \Rightarrow \cos MAN = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{AM.AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \sin MAN = \frac{\sqrt{14}}{8}$ $\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AN.AM.\sin MAN = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$ Vậy $S_{AMNI} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.	0,25
7	(1,0 điểm)	
	Ta có bài toán : « Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Một đường thẳng d bất kỳ cắt AB, AM, AC lần lượt tại B_1, M_1, C_1. Khi đó $\frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = 2\frac{AM}{AM_1}$ »  Thật vậy : Kẻ BE, CF lần lượt song song với B_1C_1 Ta có $BE \parallel B_1M_1$ nên $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AE}{AM_1} = \frac{AM - ME}{AM_1}$ $CF \parallel C_1M_1$ nên $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AF}{AM_1} = \frac{AM + MF}{AM_1}$ Mặt khác $\triangle BME = \triangle CMF$ (g - c - g) nên $ME = MF$ Do đó $\frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = \frac{AM - ME}{AM_1} + \frac{AM + MF}{AM_1} = 2\frac{AM}{AM_1}$.	0,25
	Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, BG; M', N' là giao điểm của mặt phẳng (α) với AM, AN. Áp dụng bài toán vào tam giác ACD, ta có: $\frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 2\frac{AM}{AM'} \quad (1)$ Áp dụng bài toán vào tam giác ANM, ta có:	0,5

	$\frac{AN}{AN'} + \frac{AM}{AM'} = 2 \frac{AG}{AG'} \Leftrightarrow 2 \frac{AN}{AN'} + 2 \frac{AM}{AM'} = 4 \frac{AG}{AG'} \quad (2)$ Áp dụng bài toán vào tam giác ABG, ta có: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AG}{AG'} = 2 \frac{AN}{AN'} \quad (3)$	
	Thay (1), (3) vào (2) ta được: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 3 \frac{AG}{AG'} = 6.$	0,25
		
8	(1,0 điểm)	
	Xét tam thức $f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$ Ta có: $f(1) = 1 - (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$ $= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + a_3(a_3 - 1) + \dots + a_n(a_n - 1).$	0,25
	Mặt khác $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0;1]$ nên: $\begin{cases} a_1(a_1 - 1) \leq 0 \\ a_2(a_2 - 1) \leq 0 \\ \dots \\ a_n(a_n - 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) \leq 0$	0,25
	Mà $f(0) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \Rightarrow f(1).f(0) \leq 0$ Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$	0,25
	Suy ra $\Delta = (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \geq 0$ $\Rightarrow (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$	0,25