

CHỦ ĐỀ 7: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1) Bất phương trình logarit cơ bản

Xét bất phương trình $\log_a x > b$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

2) Các dạng toán và phương pháp giải bất phương trình logarit thường gặp

✎ Dạng 1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Xét bất phương trình $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều khi $a > 1$)
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (ngược chiều khi $0 < a < 1$)
- Nếu a chứa ẩn thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] > 0 \end{cases}$ (hoặc chia 2 trường hợp của cơ số)

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$

b) $\log_2(1-2\log_9 x) < 1$

Lời giải

a) $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} 1-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \log_5(1-2x) < \log_5 5 + 2\log_5(x+1) \Leftrightarrow \log_5(1-2x) < \log_5[5(x+1)^2]$

$$\Leftrightarrow 1-2x < 5(x^2+2x+1) \Leftrightarrow 5x^2+12x-4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{-6+2\sqrt{14}}{5} \\ x < \frac{-6-2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{-6+2\sqrt{14}}{5} < x < \frac{1}{2}$

b) $\log_2(1-2\log_9 x) < 1$ (2)

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 1-2\log_9 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-\log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 3$

(2) $\Leftrightarrow 1-2\log_9 x < 2 \Leftrightarrow 1-\log_3 x < 2 \Leftrightarrow \log_3 x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{3} < x < 3$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_x [\log_2(4^x - 6)] \leq 1$

b) $\log_x \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) > 1$

Lời giải

a) Điều kiện: $4^x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \log_4 6$

Với $x > \log_4 6$ ta có: $\log_x [\log_2(4^x - 6)] \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \log_2(4^x - 6) \leq x \Leftrightarrow 1 < 4^x - 6 < 2^x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 2^x - 6 < 0 \\ 4^x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2^x < 3 \\ x > \log_4 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 3 \\ x > \log_4 7 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của BPT là: $\log_4 7 < x < \log_2 3$

b) ĐK: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq x > 0 \\ \frac{2x-1}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

TH1: Với $x > 1$: BPT $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} > x \Leftrightarrow 2x-1 > x^2-x \Leftrightarrow x^2-3x+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp suy ra nghiệm của BPT là $1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

TH2: Với $0 < x < \frac{1}{2}$: BPT $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} < x \Leftrightarrow 2x-1 > x^2-x \Leftrightarrow x^2-3x+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp suy ra nghiệm của BPT là $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của BPT là: $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$

b) $\log_x [\log_3(9^x - 72)] \leq 1$

Lời giải

a) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) - \log_5 2^4 < \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{4^x + 144}{16} \right) < \log_5(5 \cdot 2^{x-2} + 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x + 144}{16} < 5 \cdot 2^{x-2} + 5 \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \rightarrow 2 < x < 4$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $2 < x < 4$.

b) $\log_x [\log_3(9^x - 72)] \leq 1 \quad (3)$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73 > 1, (*)$

Với điều kiện (*) thì $(3) \Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 72 \leq 3^x$

$\Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq -8, \forall x \\ 3^x \leq 9 \end{cases}$

Từ đó ta được $x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình là $\log_9 73 < x \leq 2$

Nhận xét: Trong ví dụ trên, mặc dù cơ số chứa ẩn x nhưng do điều kiện ta xác định được ngay biểu thức về trái đồng biến nên bài toán không phải chia 2 trường hợp.

Ví dụ 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$ là:

A. 4

B. 5

C. 10

D. 11

Lời giải

Ta có: BPT $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -4 \\ x^2 + 2x - 24 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -4 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ BPT có 4 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_5(1 - 2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x + 1)$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Điều kiện $-1 < x < \frac{1}{2}$.

Ta có: BPT $\Leftrightarrow \log_5(1 - 2x) - \log_5(x + 1)^2 < 1 \Leftrightarrow \log_5 \frac{(1 - 2x)}{(x + 1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{(x + 1)^2} < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x < -2 \end{cases}$

Kết hợp $\begin{cases} -2 < x < -\frac{2}{5} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ BPT có 1 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$ là

A. T = -7

B. T = -6

C. T = -3

D. T = -4

Lời giải

Ta có: $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ x^2 + 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -4 \leq x < -3 \end{cases}$

Vậy nghiệm của BPT là: $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{-4; 1\} \Rightarrow T = -3$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$ là

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

Lời giải

Ta có: $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 43 > 0 \\ x^2 - 11x + 43 < 25 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 9$

Vậy nghiệm của BPT là: $2 < x < 9$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\} \Rightarrow$ BPT có 6 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 6) > -2$

A. T = 7

B. T = 6

C. T = 5

D. T = 3

Lời giải

Điều kiện $x^2 - 4x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 6) > -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2; 3\} \Rightarrow T = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$ là

A. T = 7

B. T = 6

C. T = 5

D. T = 3

Lời giải

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1) \Leftrightarrow -\log_2 \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \frac{x^2 + 6x + 9}{2(x+1)} > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+3)^2 > 2(x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 2x - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1 + 2\sqrt{2}$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow T = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Biết $x = \frac{9}{4}$ là một nghiệm của bất phương trình $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$ (*).

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình (*) là:

- A. $T = \left(-1; \frac{5}{2}\right)$ B. $T = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ C. $T = (-\infty; -1)$ D. $T = \left(2; \frac{5}{2}\right)$

Lời giải

$$\text{Vì } x = \frac{9}{4} \text{ là một nghiệm của bất phương trình nên } \log_a \left[\left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2 \right] > \log_a \left[\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 2\frac{9}{4} + 3 \right]$$

$$\Leftrightarrow \log_a \frac{13}{16} > \log_a \frac{201}{16} \Leftrightarrow \log_a \frac{201}{13} < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

$$\text{Khi đó, bất phương trình đã cho } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 < -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 12 \\ 2x^2 - 3x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \\ -1 < x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3x}}(5x^2 - 18x + 16) > 2$ là:

- A. $S = (0; 1) \cup (8; +\infty)$ B. $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup (8; +\infty)$
C. $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup (8; +\infty)$ D. $S = (8; +\infty)$

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 5x^2 - 18x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x > 2 \\ x < \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < \frac{8}{5}, x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{BPT } \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3x}}(5x^2 - 18x + 16) > \log_{\sqrt{3x}} 3x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3x} - 1)(5x^2 - 18x + 16 - 3x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x} - 1)(2x^2 - 18x + 16) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1 \end{cases}$$

Kết hợp ĐK: Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup (8; +\infty)$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{1}{\log_2(3x-5)} \geq \frac{2}{\log_2(6x-2)}$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Điều kiện: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 3x-5 > 0 \\ 1 \neq 6x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$. Khi đó: $\log_2(6x-2) > 0$

Ta có: BPT $\Leftrightarrow \frac{\log_2(6x-2) - 2\log_2(3x-5)}{\log_2(3x-5)\log_2(6x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(6x-2) - \log_2(3x-5)^2}{\log_2(3x-5)} \geq 0$ (1)

TH1: $\log_2(3x-5) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ ta có:

(1) $\Leftrightarrow \log_2(6x-2) \geq \log_2(3x-5)^2 \Leftrightarrow 6x-2 \geq (3x-5)^2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Kết hợp với điều kiện trong trường hợp này BPT có nghiệm $2 < x \leq 3$

TH2: $\log_2(3x-5) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 2$

(1) $\Leftrightarrow \log_2(6x-2) \leq \log_2(3x-5)^2 \Leftrightarrow 6x-2 \leq (3x-5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện trong trường hợp này BPT vô nghiệm

Vậy nghiệm của BPT là: $x \in (2; 3] \Rightarrow$ BPT có 1 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

✎ Dạng 2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ta sẽ làm tương tự như các dạng đặt ẩn phụ của phương trình nhưng lưu ý đến chiều biến thiên của hàm số.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

Lời giải

a) ĐK: $x > 0; x \neq 1$

BPT $\Leftrightarrow 2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\log_5^2 x - \log_5 x - 3}{\log_5 x} < 0$

Đặt $t = \log_5 x \rightarrow \frac{2t^2 - t - 3}{t} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ 0 < t < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 x < -1 \\ 0 < \log_5 x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{5} \\ 1 < x < 5\sqrt{5} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; 5\sqrt{5})$

b) ĐK: $x > 0$. Khi đó $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \log_2 x \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 16$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = [4; 16]$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_7 \sqrt{x} - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} x > 2$

b) $\log_x 2 \cdot (2 + \log_2 x) > \frac{1}{\log_{2x} 2}$

Lời giải

a) ĐK: $x > 0$. Khi đó: BPT $\Leftrightarrow \log_7 \sqrt{x} - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} x > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_7 x - \log_7 x > 2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_7 x > 2 \Leftrightarrow \log_7 x < -4 \Leftrightarrow 0 < x < 7^{-4}$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $0 < x < 7^{-4}$

b) ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó: BPT $\Leftrightarrow \log_x 2 \cdot (2 + \log_2 x) > \log_2 (2x) = 1 + \log_2 x$

Đặt $t = \log_2 x$ ta có: $\frac{1}{t} \cdot (2 + t) > 1 + t \Leftrightarrow \frac{2 + t - t(1 + t)}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 2}{t} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \sqrt{2} \\ t < -\sqrt{2} \end{cases}$

Với $0 < t < \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < x < 2^{\sqrt{2}}$

Với $t < -\sqrt{2} \Rightarrow \log_2 x < -\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x < 2^{-\sqrt{2}}$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $x \in (0; 2^{-\sqrt{2}}) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$

Ví dụ 3: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + 2\log_x 4 - 3 < 0$ là:

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Lời giải

ĐK: $x > 0, x \neq 1$

BPT $\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4}{\log_2 x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0 \\ 1 < \log_2 x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 2 < x < 8 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = (0; 1) \cup (2; 8)$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ BPT có 5 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Gọi S là tập hợp số nguyên x thuộc khoảng $(0; 10)$ và thỏa mãn bất phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 3 \cdot \log_3 x + 6 \geq 0$. Tổng các phần tử tập hợp S là:

A. T=3**B. T=33****C. T=44****D. T=54****Lời giải**

$$\text{ĐK: } x > 0. \text{ BPT } \Leftrightarrow \log_2^2 x - 7\log_2 x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 6 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 64 \\ 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Kết hợp $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow x = \{1; 2\} \Rightarrow T = 3. \text{ Chọn A.}$

Ví dụ 5: Gọi S là tập hợp số nguyên x thỏa mãn $\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 \leq 0$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. T=351**B. T=27****C. T=378****D. T=26****Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } x > 0. \text{ BPT } \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2(\log_3 x + 1) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 27$$

$$\text{Kết hợp } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2; 3; 4 \dots 27\} \Rightarrow T = 1 + 2 + \dots + 27 = \frac{28 \cdot 27}{2} = 378 \text{ (cấp số cộng có } \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases})$$

Chọn C.

Ví dụ 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{\log_9(3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 + 4x + 2)$ là:

A. 5**B. 2****C. 4****D. 3****Lời giải**

$$\text{Ta có BPT } \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\log_3(3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 + 4x + 2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{1}{2}\log_3(3x^2 + 4x + 2)} (t \geq 0) \text{ ta có: } t + 1 > 2t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < t < 1$$

$$\text{Do đó } 0 \leq \log_3(3x^2 + 4x + 2) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 2 \geq 1 \\ 3x^2 + 4x + 2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 4x - 7 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq -1 \\ -\frac{7}{3} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x < 1 \\ -\frac{7}{3} < x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của BPT là } x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup \left(-\frac{7}{3}; -1\right]$$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{0; 1; -2; -1\}$ BPT có 4 nghiệm nguyên. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Số nghiệm nguyên của bất $\log_4 (x-1)^2 + 3\sqrt{2\log_4 (x-1)} - 4 \leq 0$ là:

A. 2

B. 3

C. 4

D. Vô số

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_4 (x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

BPT $\Leftrightarrow 2\log_4 (x-1) + 3\sqrt{2\log_4 (x-1)} - 4 \leq 0$. Đặt $t = 2\log_4 (x-1), (t \geq 0)$ ta có:

$t^2 + 3t - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \log_4 (x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{2; 3\}$ BPT có 2 nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{\log_2^2 x + 3}{\log_2 x + 3} > 2$ là:

A. $(8; +\infty)$

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (8; +\infty)$

C. $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; +\infty)$

D. $(0; 1) \cup (8; +\infty)$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{8} \end{cases}$. Đặt $t = \log_2 x$ ta có: $\frac{t^2 + 3}{t + 3} > 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t - 3}{t + 3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 3 \\ -3 < t < -1 \end{cases}$

+) Với $t > 3 \Leftrightarrow \log_2 x > 3 \Leftrightarrow x > 8$

+) Với $-3 < t < -1$ ta có: $-3 < \log_2 x < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; +\infty)$. **Chọn C.**

Dạng 3. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số, phân tích nhân tử, đánh giá...

Cho hàm số $y = f(t)$ xác định và liên tục trên D:

Nếu hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên D và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$

Nếu hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên D và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $x + \log_2 \sqrt{x+1} + \log_3 \sqrt{x+9} > 1$

b) $2x^2 - 10x + 10 > \log_2 \frac{2x-1}{(x-2)^2}$

Lời giải

a) Điều kiện $x > -1$

BPT $\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}\log_2 (x+1) + \frac{1}{2}\log_3 (x+9) > 1 \Leftrightarrow g(x) = 2x + \log_2 (x+1) + \log_3 (x+9) > 2$

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)\ln 2} + \frac{1}{(x+9)\ln 3} > 0 \Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên } (-1; +\infty)$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$$

Vậy nghiệm của BPT là $(0; +\infty)$

b) Điều kiện $x > \frac{1}{2}, x \neq 2$

$$\text{Khi đó: BPT} \Leftrightarrow 2(x-2)^2 + \log_2(x-2)^2 > 2 \cdot \frac{2x-1}{2} + \log_2 \frac{2x-1}{2}$$

Xét $f(t) = 2t + \log_2 t (t > 0)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f\left[(x-2)^2\right] > g\left(\frac{2x-1}{2}\right) \Leftrightarrow (x-2)^2 > \frac{2x-1}{2}$$

$$\text{Đáp số: } x > \frac{5+\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2} > x > \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(2^x + 3) + \log_3(4^x + 2) \leq 3$ là:

A. 1 B. 2 C. 0 D. Vô số

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \log_2(2^x + 3) + \log_3(4^x + 2) (x \in \mathbb{R})$ ta có: $f(0) = 3$

$$\text{Mặt khác } f'(x) = \frac{2^x}{2^x + 3} + \frac{4^x \ln 4}{(4^x + 2)\ln 3} > 0 (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Do đó BPT} \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow x \leq 0$$

Vậy nghiệm của BPT là: $x \leq 0$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Gọi S là tập hợp số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 - 3x + 5} \geq x^2 - 4x + 3$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. T=2 B. T=5 C. T=3 D. T=6

Lời giải

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 2) - \log_2(2x^2 - 3x + 5) \geq (2x^2 - 3x + 5) - (x^2 + x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 2) + (x^2 + x + 2) \geq \log_2(2x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - 3x + 5)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t, t > 0$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm f đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó: $f(x^2 + x + 2) \geq f(2x^2 - 3x + 5) \Leftrightarrow x^2 + x + 2 \geq 2x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2; 3\} \Rightarrow T = 6$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $\log_2 \frac{4(x+1)}{\sqrt{x}+2} > 2(x-\sqrt{x})$ ta được tập nghiệm $S = \left[a; \frac{b+\sqrt{c}}{2} \right)$, với a, b, c

là các số nguyên dương. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$

A. $T=3$

B. $T=5$

C. $T=8$

D. $T=16$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$. Khi đó BPT $\Leftrightarrow 2 + \log_2(x+1) > 2(x-\sqrt{x}) + \log_2(\sqrt{x}+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) - 2x > \log_2[(\sqrt{x}+1)+1] - 2(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow f(x) > f(\sqrt{x}+1)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2(t+1) - 2t$ trên $[0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 2} - 2 < 0, \forall t \geq 0$ vì

$(t+1)2\ln 2 > 1, \forall t \geq 0$. Do đó nghịch biến trên khoảng $[0; +\infty)$

Khi đó BPT $\Leftrightarrow f(x) > f(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow x < \sqrt{x}+1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$

Suy ra $a=0; b=3; c=5 \Rightarrow T = 8$. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(1-2x) \leq 3$ là :

- A. $S = \left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$ B. $S = \left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ C. $S = \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ D. $S = \left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Câu 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 2$ là:

- A. $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$ B. $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$ C. $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ D. $S = (1; +\infty)$

Câu 3: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) \geq 0$ là

- A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$ C. $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ D. $S = \left(0; \frac{1}{4}\right]$

Câu 4: Giải bất phương trình $\log(3x^2+1) > \log(4x)$.

- A. $x < \frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$ B. $0 < x < \frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$ C. $0 < x < 1$ D. $\frac{1}{3} < x < 1$

Câu 5: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(x+10)$

- A. 6 B. 4 C. 0 D. Vô số

Câu 6: Tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 2 \ln(4x+4)$ là

- A. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ B. $S = (-1; +\infty) \setminus \{0\}$ C. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ D. $S = \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$

Câu 7: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1) > \log_{0,2}(3-x)$ là

- A. $S = (-1; 3]$ B. $S = (-1; +\infty)$ C. $S = (-1; 1)$ D. $S = (-\infty; 1)$

Câu 8: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là

- A. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ B. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$ C. $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

Câu 9: Tập nghiệm S của bất phương trình $2 \log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

- A. $S = (1; 5)$ B. $S = (1; 3]$ C. $S = [1; 3]$ D. $S = [3; 5]$

Câu 10: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x+3) - 1 \geq \log_{\sqrt{2}}x$.

- A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 11: Giải bất phương trình $2 \log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \leq 2$

- A. $x > \frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4} < x \leq 3$ C. Vô nghiệm D. $-\frac{3}{8} \leq x \leq 3$

Câu 12: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$ là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 13: Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = \frac{11}{5}$ B. $S = \frac{31}{6}$ C. $S = \frac{28}{15}$ D. $S = \frac{8}{3}$

Câu 14: Bất phương trình $\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{9}{4}}(x-1)$ tương đương với bất phương trình nào?

- A. $\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{9}{4}} x - \log_{\frac{9}{4}} 1$ B. $2 \log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$
 C. $\log_{\frac{9}{4}} x \leq \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$ D. $\log_{\frac{3}{2}} x \leq 2 \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$

Câu 15: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x-2)] > 0$ là $(a;b)$. Tính $b - a$

- A. 1 B. 4 C. 3 D. 5

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 2 \ln(4x+4)$

- A. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ B. $S = (-1; +\infty) \setminus \{0\}$ C. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ D. $S = \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$

Câu 17: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4(x-1)^2 - \log_2 3 \log_3(x+2) \leq 1$ là

- A. $S = [-1; 1) \cup (1; +\infty)$ B. $S = [-1; +\infty)$ C. $S = (-2; 1) \cup (1; +\infty)$ D. $S = [2; +\infty)$

Câu 18: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x > \log_2(x^2 - x) - 1$

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (1; 2)$ C. $S = (0; 2)$ D. $S = (1; 2]$

Câu 19: Giải bất phương trình $\log_3^2 x - 2 \log_3(3x) - 1 < 0$ được tập nghiệm $S = (a;b)$, với a, b là hai số thực và $a < b$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a + b$

- A. $T = -3$ B. $T = 3$ C. $T = 11$ D. $T = 28$

Câu 20: Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ B. $S = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$
 C. $S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $S = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0$ là:

- A. $S = \left[-2; -\frac{3}{2}\right)$ B. $S = [-2; 0)$ C. $S = (-\infty; 2]$ D. $S = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$

Câu 22: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ B. $S = (-1; 2)$ C. $S = (2; +\infty)$ D. $S = (-\infty; 2)$

Câu 23: Bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = [10; 10^{2018}]$ B. $S = [10; 10^{2018})$ C. $S = [1; 2018]$ D. $(10; 10^{2018})$

Câu 24: Bất phương trình $\log_3(3^x - 1)[1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và tỉ số $\frac{x_1}{x_2} = \log \frac{a}{b}$ trong đó

$a, b \in \mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a + b$

- A. $a + b = 38$ B. $a + b = 37$ C. $a + b = 56$ D. $a + b = 55$

Câu 25: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{x+1}(-2x) > 2$

- A. $(\sqrt{3} - 2; 0)$ B. $(-1; 0)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(\sqrt{3} - 2; +\infty)$

Câu 26: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ B. $S = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $S = (1; +\infty)$ D. $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

Câu 27: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x-1) < 3$ là

- A. $S = (-\infty; 14)$ B. $S = \left(\frac{1}{2}; 5\right)$ C. $S = \left[\frac{1}{2}; 14\right)$ D. $S = \left(\frac{1}{2}; 14\right]$

Câu 28: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

- A. $(-1; 6)$ B. $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ C. $(-\infty; 6)$ D. $(6; +\infty)$

Câu 29: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

- A. 9 B. 15 C. 8 D. 10

Câu 30: Bất phương trình $\log_2 \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 0$ có tập nghiệm là $S = \left(\frac{1}{4}; a\right] \cup [b; +\infty)$. Hỏi $M = a + b$ bằng

- A. 12 B. 8 C. 9 D. 10

Câu 31: Hỏi bất phương trình $\log_{\frac{4}{25}}(x+1) \geq \log_{\frac{2}{5}}x$ tương đương với bất phương trình nào?

A. $2\log_{\frac{2}{5}}(x+1) \geq \log_{\frac{2}{5}} x$

B. $\log_{\frac{4}{25}} x + \log_{\frac{4}{25}} 1 \geq \log_{\frac{2}{5}} x$

C. $\log_{\frac{2}{5}}(x+1) \geq 2\log_{\frac{2}{5}} x$

D. $\log_{\frac{2}{5}}(x+1) \geq \log_{\frac{4}{25}} x$

Câu 32: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

A. $S = [3; 5]$

B. $S = (1; 3]$

C. $S = [-3; 3]$

D. $S = (1; 5)$

Câu 33: Giải bất phương trình $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$ được tập nghiệm $S = [a; b]$. Tính ab

A. $ab = 1$

B. $ab = 2$

C. $ab = 12$

D. $ab = 1,5$

Câu 34: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4^2(x-2) - 4\log_4 3 \cdot \log_3(x-2) + 3 \geq 0$

A. $S = (-\infty; 6] \cup [66; +\infty)$

B. $S = [6; 66]$

C. $S = (2; 6] \cup [66; +\infty)$

D. $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

Câu 35: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x - 8\log_2 3 \cdot \log_3 \sqrt{x} + 3 < 0$

A. 5

B. 1

C. 7

D. 4

Câu 36: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{4-x} - x + 1 \geq 0$

A. $S = (-\infty; 1]$

B. $S = (-\infty; 3)$

C. $S = (-\infty; 3]$

D. $S = [3; +\infty)$

Câu 37: Giải phương trình $\log_2 x \log_3 x + x \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$. Tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 35

B. 5

C. 10

D. 9

Câu 38: Giải bất phương trình $\sqrt{4-2^x} \cdot \log_2(x+1) \geq 0$

A. $x \geq 0$

B. $-1 < x \leq 2$

C. $0 \leq x \leq 2$

D. $-1 \leq x \leq 2$

Câu 39: Giải bất phương trình $\log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$

A. $x \leq 1$

B. $x \leq \frac{369}{49}$

C. $x \geq \frac{369}{49}$

D. $1 \leq x \leq \frac{369}{49}$

Câu 40: Tìm tập nghiệm S của bất phương $(2^{x^2-4} - 1) \cdot \ln x^2 < 0$

A. $S = (1; 2)$

B. $S = \{1; 2\}$

C. $S = (-2; -1) \cup (1; 2)$

D. $S = [1; 2]$

Câu 41: Tìm tập nghiệm S của bất phương $\log(x^2 + 25) > \log(10x)$

A. $S = \mathbb{R}$

B. $S = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

C. $S = (0; 5) \cup (5; +\infty)$

D. $S = (0; +\infty)$

Câu 42: Cho hàm số $f(x) = \ln^2(x^2 - 2x + 5)$. Tìm các giá trị x để $f'(x) > 0$

A. $x > 0$

B. $x \neq 1$

C. $x \in \mathbb{R}$

D. $x > 1$

Câu 43: Tìm tập nghiệm S của bất phương $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 \frac{2x+1}{x-1}\right) > 1$

A. $S = (-\infty; 1)$

B. $S = (-\infty; -3)$

C. $S = (1; +\infty)$

D. $S = (-\infty; -2)$

Câu 44: Bất phương trình $\log_{125}(x+3)^3 + \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{x+4} \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 5 B. 1 C. Vô số D. 12

Câu 45: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 1$

- A. Vô số B. Không có C. 1 D. 2

Câu 46: Tìm tập nghiệm S của bất phương $\ln[(x-1)(x-2)(x-3)+1] > 0$

- A. $S = (1;2) \cup (3;+\infty)$ B. $S = (-\infty;1) \cap (2;3)$ C. $S = (1;2) \cap (3;+\infty)$ D. $S = (-\infty;1) \cup (2;3)$

Câu 47: Tìm tập nghiệm S của bất phương $\log_2^2(x+1) - 5\log_2(x+1) + 4 \geq 0$

- A. $S = (-\infty;1] \cup [15;+\infty)$ B. $S = [1;15]$
C. $S = (-1;1] \cup [15;+\infty)$ D. $S = (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$

Câu 48: Tìm tập nghiệm S của bất phương $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho

- A. $S = (-2;0) \cup \left(\frac{1}{3};3\right]$ B. $S = (-1;0) \cup \left(\frac{1}{3};3\right]$
C. $S = (-1;0) \cup (1;3]$ D. $S = (-1;0) \cup \left(\frac{1}{3};3\right]$

Câu 49: Tìm số nghiệm nguyên của $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2-10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$

- A. 6 B. 4 C. 5 D. 3

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $\log_2(1-2x) \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x > 0 \\ 1-2x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x < \frac{1}{2}. \text{ Chọn D.}$

Câu 2: $\log_{0,5}(x-1) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{4}. \text{ Chọn B.}$

Câu 3: $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}. \text{ Chọn B.}$

Câu 4: $\log(3x^2+1) > \log(4x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2+1 > 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2-4x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$

Câu 5: $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(x+10) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-9 > 0 \\ x+10 > 0 \\ 4x-9 < x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \\ x > -10 \\ x < \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4} < x < \frac{19}{3}$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6\}. \text{ Chọn B.}$

Câu 6: $\ln x^2 < 2\ln(4x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ \ln x^2 < \ln(4x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^2 < (4x+4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ (3x+4)(5x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x > -\frac{4}{5} \vee x < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{5} \\ x \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$

Câu 7: $\log_{0,2}(x+1) > \log_{0,2}(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \\ x+1 < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1. \text{ Chọn C.}$

Câu 8: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2x}{x} > 0 \\ \frac{1-2x}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3x-1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{3} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. \text{ Chọn C.}$

Câu 9: Điều kiện: $1 < x < 5$. Ta có $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2(10-2x)$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 10-2x \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 < x \leq 3. \text{ Chọn B.}$

Câu 10: Điều kiện: $x > 0$

Ta có $\log_2(x+3) - 1 \geq \log_{\sqrt{2}} x \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+3}{2} \geq \log_2 x^2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} \geq x^2$
 $\Leftrightarrow 2x^2 \leq x+3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \{1\}. \text{ Chọn A.}$

Câu 11: Điều kiện: $x > \frac{3}{4}$

Ta có $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \leq 2 \Leftrightarrow 2\log_3(4x-3) - \log_3(2x+3) \leq 2$
 $\Leftrightarrow \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 9 \Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3. \text{ Chọn D.}$

Câu 12: Điều kiện: $x > 0$

Ta có $\log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - 1 \geq 0 \\ \log_3 x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Có vô số nghiệm nguyên. Chọn D.}$

Câu 13: $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 6-5x > 0 \\ 3x-2 > 6-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < \frac{6}{5} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{6}{5}$

Do đó suy ra $a=1, b=\frac{6}{5} \Rightarrow a+b=\frac{11}{5}. \text{ Chọn A.}$

Câu 14: $\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{9}{4}}(x-1) \Leftrightarrow 2\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{3}{2}}(x-1). \text{ Chọn B.}$

$$\text{Câu 15: } \log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3 (x-2)] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ \log_3 (x-2) > 0 \\ \log_2 (x-2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 > 1 \\ x-2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4$$

Do đó suy ra $a=3, b=4 \Rightarrow b-a=1$. **Chọn A.**

$$\text{Câu 16: } \ln x^2 < 2 \ln (4x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ \ln x^2 < \ln (4x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^2 < (4x+4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ (3x+4)(5x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x > -\frac{4}{5} \vee x < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{5} \\ x \neq 0 \end{cases} . \text{Chọn C.}$$

$$\text{Câu 17: Điều kiện: } \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_4 (x-1)^2 - \log_2 3 \log_3 (x+2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_2 |x-1| - \log_2 (x+2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{|x-1|}{x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow |x-1| \leq 2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1 . \text{Chọn B.}$$

$$\text{Câu 18: Điều kiện: } x > 1$$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}} (x+2) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x > \log_2 (x^2 - x) - 1 \Leftrightarrow -\log_2 (x+2) + 2 \log_2 x > \log_2 (x^2 - x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2}{x+2} > \log_2 \frac{x^2 - x}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} > \frac{x^2 - x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $1 < x < 2$. **Chọn B.**

$$\text{Câu 19: Điều kiện: } x > 0$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_3^2 - 2(1 + \log_3 x) - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < \log_3 x < 3 \Leftrightarrow 3^{-1} < x < 3^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 27$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}; b = 27 \Rightarrow T = 28 . \text{Chọn D.}$$

$$\text{Câu 20: BPT} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases} . \text{Chọn C.}$$

Câu 21: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{4x+6}{x} > 0 \\ \frac{4x+6}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{3}{2} \\ \frac{3x+6}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{3}{2} \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{3}{2}. \text{ Chọn A.}$

Câu 22: Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$. BPT $\Leftrightarrow x+1 > 2x-1 \Leftrightarrow x < 2 \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$. **Chọn A.**

Câu 23: Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow 1 \leq \log x \leq 2018 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 10^{2018}$. **Chọn A.**

Câu 24: Điều kiện: $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

PT $\Leftrightarrow \log_3^2(3^x - 1) + \log_3(3^x - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^x - 1) = 2 \\ \log_3(3^x - 1) = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 = 3^2 \\ 3^x - 1 = 3^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 10 \\ 3^x = \frac{28}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_3 10 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = \log_3 \frac{28}{27}; x_2 = \log_3 10 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \log \frac{28}{27} \Rightarrow a = 28; b = 27 \Rightarrow a + b = 55$. **Chọn D.**

Câu 25: Điều kiện: $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$

Với $x < 0 \Leftrightarrow x+1 < 1$ nên BPT $\Leftrightarrow -2x < (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 + \sqrt{3} \\ x < -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được $-2 + \sqrt{3} < x < 0$ thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 26: BPT $\Leftrightarrow 0 < 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$. **Chọn D.**

Câu 27: BPT $\Leftrightarrow 0 < 2x - 1 \leq 3^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 14$. **Chọn D.**

Câu 28: Điều kiện: $x > \frac{5}{2}$

BPT: $\Leftrightarrow x+1 < 2x-5 \Leftrightarrow x > 6$. **Chọn D.**

Câu 29: Điều kiện: $x > 1$

BPT $\Leftrightarrow 2x+5 > x-1 \Leftrightarrow x > -6 \rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; \dots; 9\}$. **Chọn C.**

Câu 30: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4} \\ \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4} \\ \frac{x^2 - 10x + 9}{4x - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4} \\ \begin{cases} x \geq 9 \\ \frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ \frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 1; b = 9 \Rightarrow a + b = 10$. **Chọn D.**

Câu 31: Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_{\left(\frac{2}{5}\right)^2} (x+1) \geq \log_{\frac{2}{5}} x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_{\frac{2}{5}} (x+1) \geq \log_{\frac{2}{5}} x \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}} (x+1) \geq 2 \log_{\frac{2}{5}} x$. **Chọn C.**

Câu 32: Điều kiện: $1 < x < 5$

BPT $\Leftrightarrow \log_2 (x-1)^2 \leq \log_2 [2(5-x)] \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 2(5-x) \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \rightarrow 1 < x \leq 3$. **Chọn B.**

Câu 33: Điều kiện: $x > 0$

Đặt $\log_6 x = t \Rightarrow x = 6^t \rightarrow 6^{t^2} + (6^t)^t \leq 12 \Leftrightarrow 6^{t^2} + 6^{t^2} \leq 12 \Leftrightarrow 6^{t^2} \leq 6 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$

$\rightarrow -1 \leq \log_6 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq x \leq 6 \Rightarrow a = \frac{1}{6}; b = 6 \Rightarrow ab = 1$. **Chọn A.**

Câu 34: Điều kiện: $x > 2$

BPT $\Leftrightarrow \log_4^2 (x-2) - 4 \log_4 (x-2) + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 (x-2) \geq 3 \\ \log_4 (x-2) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 4^3 \\ x-2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 66 \\ x \leq 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 66 \\ 2 < x \leq 6 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 35: Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 8 \log_2 \sqrt{x} + 3 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 < 0$

$\Leftrightarrow 1 < \log_2 x < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 2^3 \Leftrightarrow 2 < x < 8 \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$. **Chọn A.**

Câu 36: Ta có:

Với $x > 3 \Rightarrow 2^{4-x} - x + 1 < 2 - 3 + 1 = 0$

Với $x \leq 3 \Rightarrow 2^{4-x} - x + 1 \geq 2 - 3 + 1 = 0 \rightarrow x \leq 3$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 37: Điều kiện: $x > 0$

PT $\Leftrightarrow \log_2 x (\log_3 x - 1) - 3(\log_3 x - 1) + x(\log_3 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_2 x - 3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_2 x + x - 3 = 0(2) \end{cases}$

Với $x > 2 \Rightarrow VT(2) > 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$ loại

Với $x > 2 \Rightarrow VT(2) < 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$ loại

Với $x = 2$ ta thấy thỏa mãn $\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = 3 + 2 = 5$. **Chọn B.**

Câu 38: Điều kiện: $\begin{cases} 4 - 2^x \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2$

Ta có $\sqrt{4 - 2^x} \cdot \log_2(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 2]$. **Chọn C.**

Câu 39: Điều kiện: $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 7 - \sqrt{10 - x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 10 \\ 49 \geq 10 - x \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 10$

Ta có $\log_2(\sqrt{3x + 1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10 - x}) \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{3x + 1} + 6}{2} \geq \log_2(7 - \sqrt{10 - x})$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x + 1} + 6}{2} \geq 7 - \sqrt{10 - x} \Leftrightarrow \sqrt{3x + 1} + 2\sqrt{10 - x} \geq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49}$. **Chọn D.**

Câu 40: Điều kiện: $x \neq 0$

Ta có $(2^{x^2 - 4} - 1) \cdot \ln x^2 < 0 \rightarrow \begin{cases} 2^{x^2 - 4} - 1 > 0 \\ \ln x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2)$. **Chọn A.**

Câu 41: Ta có $\log(x^2 + 25) > \log(10x) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x > 0 \\ x^2 + 25 > 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x - 5)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 5) \cup (5; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 42: Ta có $f'(x) = 2 \left[\ln(x^2 - 2x + 5) \right]' \cdot \ln(x^2 - 2x + 5) = \frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 5} \cdot \ln(x^2 - 2x + 5)$

Khi đó $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 1) \ln(x^2 - 2x + 5) > 0$ mà $\ln(x^2 - 2x + 5) = \ln[(x - 1)^2 + 4] \geq \ln 4 > 0$

Do đó, bất phương trình trở thành: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập nghiệm là $S = (1; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 43: Ta có $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \frac{2x + 1}{x - 1} \right) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x + 1}{x - 1} > 0 \\ 0 < \log_4 \frac{2x + 1}{x - 1} < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{2x + 1}{x - 1} < 2 \Leftrightarrow x < -2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2)$. **Chọn D.**

Câu 44: Điều kiện: $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3$

Ta có $\log_{125} (x+3)^3 + \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \log_5 (x+3) - \log_5 \sqrt{x+4} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x+3}{\sqrt{x+4}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+4}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \geq x+3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-3; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right]$

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên $x = -2 \in S$. **Chọn B.**

Câu 45: Điều kiện: $x > 0$. Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}. \text{ Vậy } S = \left[-1; \frac{1}{2}\right]. \text{ Chọn D.}$$

Câu 46: Bất phương trình $\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2) \cup (3; +\infty)$. **Chọn A.**

Câu 47: Điều kiện: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x+1) \geq 4 \\ \log_2 (x+1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 2^4 \\ x+1 \leq 2^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 15 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 1] \cup [15; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 48: Vì $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $\Rightarrow \log_m 5 \leq \log_m 2 \Rightarrow m \in (0; 1)$

$$\text{Với } 0 < m < 1, \text{ bất phương trình } \Leftrightarrow 2x^2 + x + 3 \geq 3x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} < x \leq 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$. **Chọn D.**

Câu 49: Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100} + 2x^2 - 15x + 100 < 2^{x^2+10x-50} + x^2 + 10x - 50 (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ là hàm đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(2x^2 - 15x + 100) < f(x^2 + 10x - 50) \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 10 < x < 15$$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có tất cả 4 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn B.**