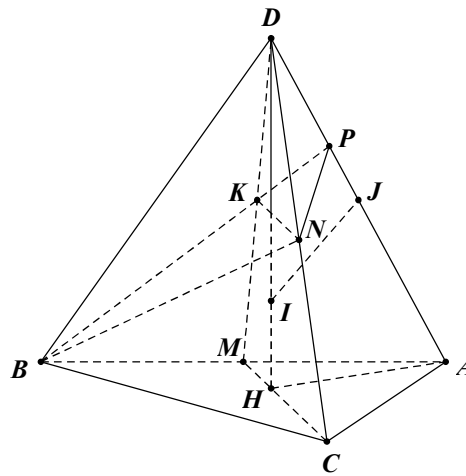


BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

(Dành cho giáo viên ôn thi học sinh giỏi, học sinh năng khiếu và chuyên toán)

-  **Câu 1:** (HSG NAM ĐỊNH 2014-2015) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1, hai điểm M và N lần lượt nằm trên các đoạn AB và CD , sao cho $BN = DN$.
- a) Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Tìm điểm I cách đều 4 đỉnh của tứ diện $ABCD$
- b) Khi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD , gọi (α) là mặt phẳng chứa BN và song song với MC . Tính chu vi thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$
- c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của MN khi M, N thay đổi trên các đoạn AB và CD .

 Lời giải



a) +) Gọi H là trực tâm tam giác ABC , suy ra $DH \perp (ABC)$.

Chứng minh được $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$.

+) Trong (ADH) dựng đường trung trực của đoạn AD cắt DH tại I , suy ra $IA = ID$. (1)

Mặt khác $\Delta IHA = \Delta IHB = \Delta IHC$ suy ra $IA = IB = IC$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow IA = IB = IC = ID$ hay I là điểm cách đều 4 đỉnh của tứ diện $ABCD$.

b) Trong mặt phẳng (DMC) kẻ $NK \parallel MC$ ($K \in DM$) suy ra (α) chính là (BNK) .

Trong mặt phẳng (ABD) gọi $P = BK \cap AD$ suy ra (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tam giác BNP .

Vì M, K lần lượt là trung điểm của AB và $DM \Rightarrow PD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}$.

Áp dụng định lý côsin trong các tam giác $\Delta BDP; \Delta PDN; \Delta BDN$ ta có $PB = \frac{\sqrt{7}}{3}; PN = \frac{\sqrt{7}}{6}; BN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy chu vi ΔBNP là $C_{BNP} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$.

c) +) Đặt $\frac{BM}{BA} = x$, với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{DN}{DC} = x$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{BM} = x \cdot \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DN} = x \cdot \overrightarrow{DC}$.

Ta có: $\overrightarrow{DN} = x \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = x \cdot \overrightarrow{BC} + (1-x) \cdot \overrightarrow{BD}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BD} - x\overrightarrow{BA}$.

$$\begin{aligned} MN^2 &= x^2 BC^2 + (1-x)^2 BD^2 + x^2 BA^2 + 2x(1-x)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} - 2x^2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - 2x(1-x)\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

+) Xét $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ trên đoạn $[0;1]$, ta có: $\max f(x) = f(0) = f(1) = 1$, $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Vậy, MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

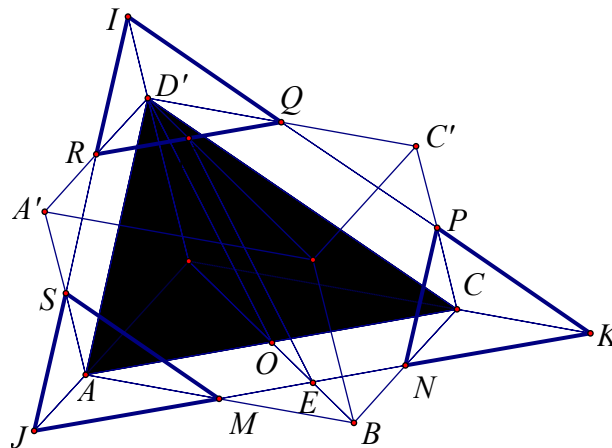
MN đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $M \equiv B, N \equiv D$ hoặc $M \equiv A, N \equiv C$.

Câu 2: (HSG ĐÀ NẴNG NĂM 2011-2012) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

- Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .
- Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

Lời giải

a.



Trong mp($ABCD$), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N .

Trong mp($BDD'B'$), qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O = AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .

Trong mp($A'B'C'D'$), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D', D'C'$ lần lượt tại R, Q .

Trong mp($AA'D'D$), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .

Trong mp($CC'D'D$), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .

Thiết diện là lục giác $MNPQRS$.

b. Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' .

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI, ACD', RQI, JMS, NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ = NK \text{ và } PK = QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI, JMS, NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI, ACD' lần lượt là S_2, S)

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{DC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC}\right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$$

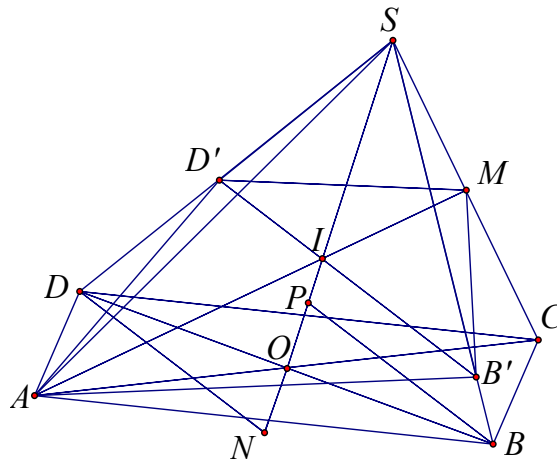
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td} = S_2 - 3S_1$

$$S_{td} = 2S(-k^2 + k + \frac{1}{2}) = 2S\left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right] \leq \frac{3S}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow k = \frac{1}{2})$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB .

Câu 3: (HSG ĐÀ NẴNG NĂM 2011-2012) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của SC . Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB , SD tại các điểm B' , D' khác S . Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}$

Lời giải



Lấy $I = AM \cap B'D'$ và $O = AC \cap BD$,

ta có: S, O, I là các điểm chung của 2 mặt phẳng (SAC) và (SBD)

$\Rightarrow S, O, I$ thẳng hàng. Và I là trọng tâm các mặt chóp $SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Vẽ $BP \parallel B'I$ và $DN \parallel D'I$ ($P, N \in SO$) $\Rightarrow OP = ON$. Đặt $x = \frac{SD}{SD'}$; $y = \frac{SB}{SB'}$

$$\Rightarrow x + y = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SP}{SI} + \frac{SN}{SI} = \frac{2SO}{SI} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow x, y \in [1; 2] \quad (*)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3 \left(\frac{2}{x+y}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Từ (*): $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \geq 2 \Leftrightarrow x \cdot y \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2}$$

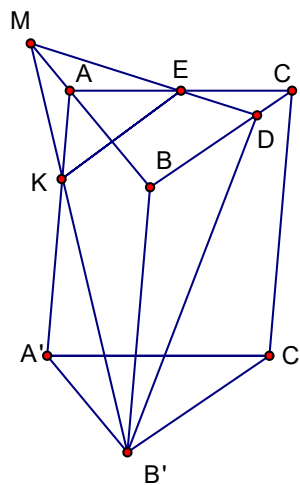
Câu 4: (HSG ĐỀ 046) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{2} AB$. Gọi E là trung điểm của CA .

a) Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MEB')

b) Gọi $D = BC \cap (MEB')$, $K = AA' \cap (MEB')$. Tính tỷ số $\frac{CD}{CB}$ và $\frac{AK}{AA'}$.

Lời giải

a) Ta có $D = ME \cap BC$; $K = MB' \cap AA'$ Suy ra thiết diện là tứ giác $DEKB'$



b, Xét tam giác MBB' có $\frac{AK}{BB'} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AK}{AA'} = \frac{1}{3}$

+) Trong (ABC) . Dựng $EN \parallel AB$ ($N \in BC$), khi đó $EN = \frac{1}{2} AB$

+) Xét tam giác DBM có: $\frac{DN}{DB} = \frac{NE}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow DN = \frac{1}{2} BN$

Suy ra D là trung điểm CN . Vậy $\frac{CD}{CB} = \frac{1}{4}$

Câu 5: (HSG ĐỀ 046) Cho tứ diện $ABCD$. Tìm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

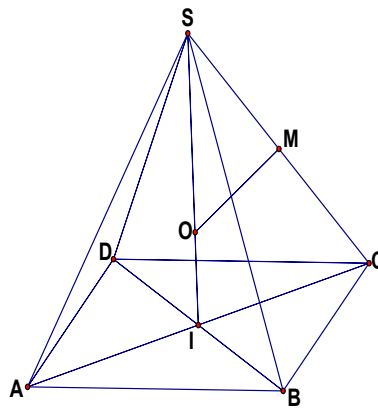
Gọi G là trọng tâm của tứ diện ta có:

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 \\
 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\
 &= 4MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\
 &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\
 &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G$. Vậy: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là trọng tâm của tứ diện.

Câu 6: (HSG ĐỀ 047) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng $3a, (a > 0)$. Hãy xác định điểm O sao cho O cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ và tính độ dài SO

Lời giải



Gọi $I = AC \cap BD$. Do $SA = SB = SC = SD$ nên các tam giác SAC, SBD cân tại đỉnh S nên SI vuông góc với AC, BD suy ra SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Dễ thấy mọi điểm nằm trên đường thẳng SI cách đều các đỉnh A, B, C, D .

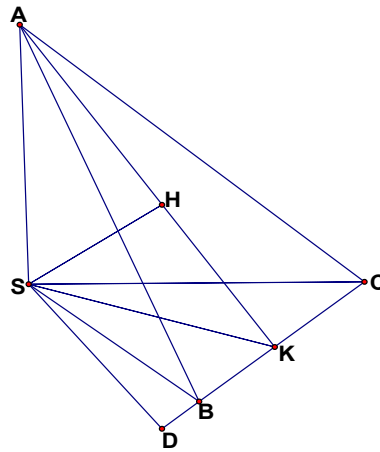
Trong tam giác SIC , dựng trung trực của cạnh SC cắt đường thẳng SI tại O suy ra $OS = OA = OB = OC = OD$.

Ta có:

$$SM \cdot SC = SO \cdot SI \Rightarrow SO = \frac{SM \cdot SC}{SI} = \frac{3a \cdot 3a}{2\sqrt{SA^2 - IA^2}} = \frac{9a^2}{2\sqrt{9a^2 - a^2}} = \frac{9\sqrt{2}a}{8}. \text{ Vậy } SO = \frac{9\sqrt{2}a}{8}.$$

Câu 7: (HSG ĐỀ 047) Cho hình chóp $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng đường thẳng SB vuông góc với đường thẳng SC , biết rằng $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$. tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, các cạnh bên

Lời giải



Gọi K là giao điểm của đường thẳng AH và BC ; trong mặt phẳng (SBC) gọi D là giao điểm của đường thẳng qua S , vuông góc với SC .

Ta có BC vuông góc với SH và SA nên BC vuông góc với mặt phẳng (SAH) suy ra BC vuông góc với SK .

Trong tam giác vuông SAK ta có $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SK^2}$, kết hợp

với giả thiết ta được $\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$ (1)

Trong tam giác vuông SDC ta có $\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{SC^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $SB = SD$, từ đó suy ra $B \equiv D$ hay suy ra SB vuông góc với SC .

 **Câu 8:** (HSG ĐỀ 047) Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AB = CD$, $BC = AD$, $AC = BD$ và một điểm X thay đổi trong không gian. Tìm vị trí của điểm X sao cho tổng $XA + XB + XC + XD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

 **Lời giải**

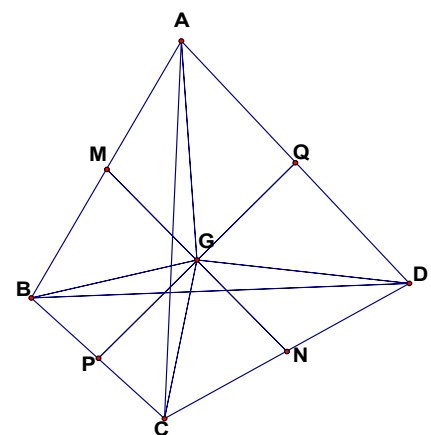
Gọi G là trọng tâm của tứ diện; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD .

Ta có tam giác ACD bằng tam giác BCD nên $AN = BN$ suy ra $MN \perp AB$, tương tự ta chứng minh được $MN \perp CD$ và đường thẳng PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC, AD .

Từ đó suy $GA = GB = GC = GD$.

Ta có

$$XA + XB + XC + XD = \frac{XA.GA + XB.GB + XC.GC + XD.GD}{GA}$$



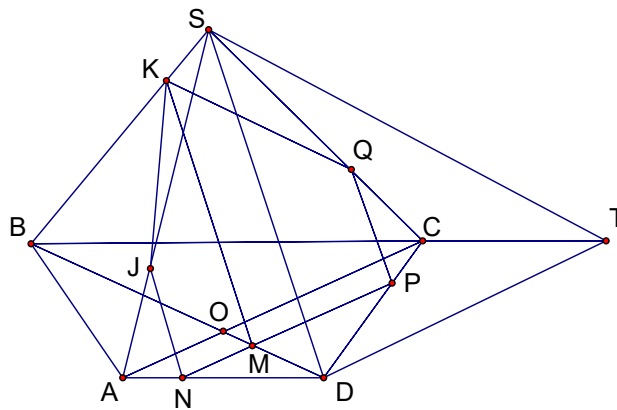
$$\begin{aligned} &\geq \frac{\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{XD} \cdot \overrightarrow{GD}}{GA} \\ &= \frac{\overrightarrow{XG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + 4 \cdot GA^2}{GA} = 4GA. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi X trùng với điểm G . Vậy $XA + XB + XC + XD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi X là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Câu 9: (HSG ĐỀ 048) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$; $AB = AD = DC = a$, ($a > 0$) Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

- a) Tính SD .
b) Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) . Biết $MMD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



- a) Dễ thấy đáy $ABCD$ là nửa hình lục giác đều cạnh a .

Kẻ $DT \parallel AC$ (T thuộc BC). Suy ra $CT = AD = a$ và DT vuông góc SD .

Ta có: $DT = AC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SCT có $SC = 2a$, $CT = a$,

$$\widehat{SCT} = 120^\circ \Rightarrow ST = a\sqrt{7}$$

Xét tam giác vuông SDT có $DT = a\sqrt{3}$

$$, ST = a\sqrt{7} \Rightarrow SD = 2a$$

- b) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD , DC lần lượt tại N, P .

Qua M , N , P kẻ các đường thẳng song song với SD cắt SB , SA , SC lần lượt tại K , J , Q . Thiết

diện là ngũ giác NPQKJ.

Ta có: NJ, MK, PQ cùng vuông góc với NP.

$$S_{NPQKJ} = S_{NMKJ} + S_{MPQK} = \frac{1}{2}(NJ + MK)MN + \frac{1}{2}(MK + PQ)MP = \frac{1}{2}(NJ + MK).NP \text{ (do}$$

$NJ=PQ$).

$$\text{Ta có: } \frac{NP}{AC} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow NP = \frac{AC.MD}{OD} = \frac{x.a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3x$$

$$\frac{NJ}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow NJ = \frac{SD.OM}{OD} = \frac{2a.\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x\right)}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2(a - x\sqrt{3})$$

$$\frac{KM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM = \frac{SD.BM}{BD} = \frac{2a.(a\sqrt{3} - x)}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x)$$

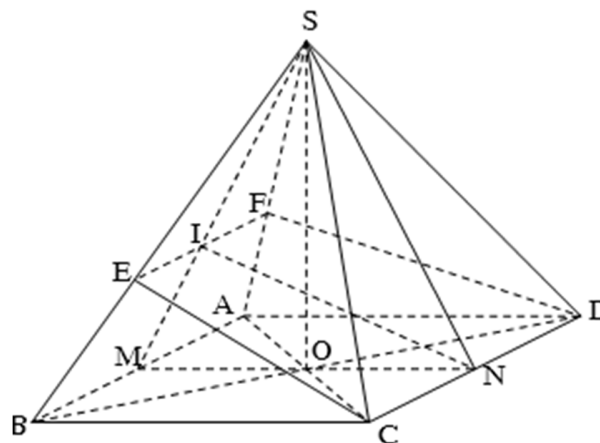
$$\text{Suy ra: } S_{NPQKJ} = \frac{1}{2} \left(2(a - x\sqrt{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x) \right) 3x = 2(3a - 2\sqrt{3}x)x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(3a - 2\sqrt{3}x)2\sqrt{3}x \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[(3a - 2\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}x \right]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{Diện tích NPQKJ lớn nhất bằng } \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

Câu 10: (HSG ĐỀ 049) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cách đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) chứa CD và vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB . Khi đó O là trung điểm của MN và AB vuông góc (SMN) . Kẻ IN vuông góc $SM \Rightarrow IN$ vuông góc mp(SAB)

$$\Rightarrow (\alpha) \equiv (CDI).$$

Từ I kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB, SA lần lượt tại $E, F \Rightarrow EF // AB // CD$. Thiết diện là hình thang $CDEF$

$$\text{Ta có } +) SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}; IN = \frac{SO \cdot MN}{SM} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$$

$$+) SI = \sqrt{SN^2 - IN^2} = \frac{15a}{2\sqrt{17}}. \frac{EF}{AB} = \frac{SI}{SM} \Rightarrow EF = \frac{SI \cdot AB}{SM} = \frac{15a}{17}$$

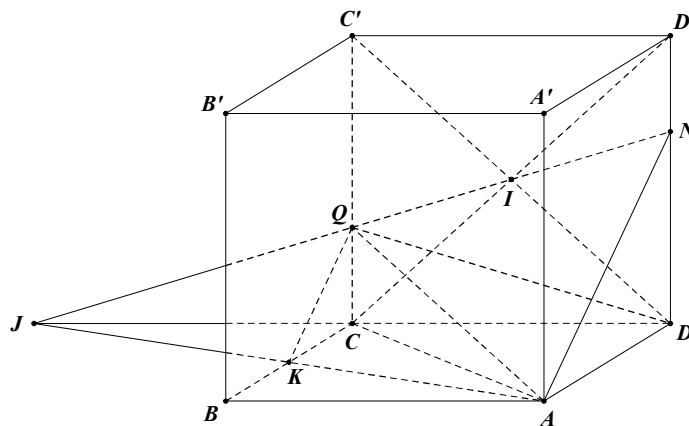
$$\text{Diện tích thiết diện: } S_{CDEF} = \frac{1}{2}(CD + EF)IN = \frac{64a^2}{17\sqrt{17}}$$

Câu 11: (HSG HÀ NAM) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi I là tâm của hình vuông $CDD'C'$, K là trung điểm của cạnh CB .

a. Dựng thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (AKI) . Tính diện tích của thiết diện theo a .

b. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng $A'D'$ và AQ với Q là giao điểm của (AKI) và CC' .

Lời giải



a, +) Gọi J là giao điểm của AK và CD , Q là giao điểm của JI và CC' , N là giao điểm của IJ và DD' .

Thiết diện là tứ giác $AKQN$.

Chứng minh được $AKQN$ là hình thang có 2 đáy là KQ, AN .

+) Chứng minh được C là trung điểm của JD , K là trung điểm JA , Q là trung điểm của JN .

$$\frac{S_{\Delta KQ}}{S_{\Delta JAN}} = \frac{JK}{JA} \cdot \frac{JQ}{JN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AKQN} = S_{\Delta JAN} - S_{\Delta KQ} = 3S_{\Delta KQ}.$$

$$+) CQ = \frac{1}{2}ND = QC' \Rightarrow \frac{CQ}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow CQ = \frac{1}{3}a.$$

+) Tính được $KQ = \frac{a\sqrt{13}}{6}$; $JK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $JQ = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

$$\cos KJQ = \frac{JQ^2 + JQ^2 - KQ^2}{2JK \cdot JQ} = \frac{6}{\sqrt{50}}$$

$$\sin KJQ = \sqrt{1 - \cos^2 KJQ} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$S_{\Delta KQJ} = \frac{1}{2} JK \cdot JQ \cdot \sin KJQ = \frac{\sqrt{14}a^2}{12}$$

$$S_{\Delta KQN} = 3S_{\Delta KQJ} = \frac{\sqrt{14}a^2}{4}.$$

b, Vì $A'D' // AD$ nên góc tạo bởi $A'D'$, AQ bằng góc tạo bởi AQ , AD .

$$C\acute{o} \ AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = a\sqrt{3}.$$

Tính được $AQ = \frac{a\sqrt{19}}{3}$; $AD = a$; $QD = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

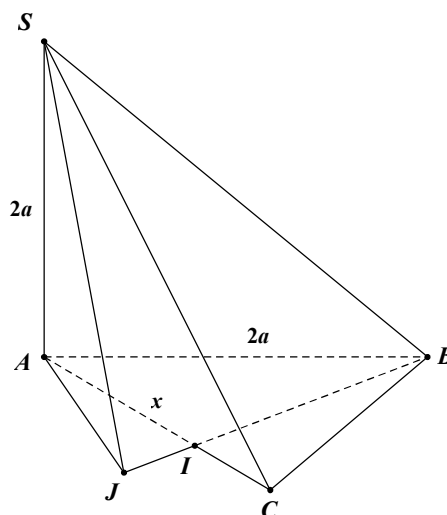
$$\cos QAD = \frac{AQ^2 + AD^2 - QD^2}{2AQ \cdot AD} = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

Câu 12: (HSG ĐỀ 052) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại C với $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi I là điểm di động trên cạnh AC , J là hình chiếu vuông góc của S trên BI .

a) Chứng minh AJ vuông góc với BI .

b) Đặt $AI = x$ ($0 \leq x \leq a\sqrt{3}$). Tính khoảng cách từ S đến BI theo a và x . Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải



a) Ta có AJ là hình chiếu của SJ trên mặt phẳng (ABC) , $SJ \perp BI$

$\Rightarrow AJ \perp BI$ (định lí ba đường vuông góc).

b) $SJ \perp BI$ tại J nên $SJ = d(S, BI)$.

$$+) AC = AB \cos \widehat{BAC} = 2a \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$BC = AB \sin \widehat{BAC} = 2a \cdot \sin 30^\circ = a$$

$$BI^2 = BC^2 + CI^2 = a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2 = 4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BI = \sqrt{4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}}.$$

* Hai tam giác vuông AJI và BCI có $\widehat{AIJ} = \widehat{BIC}$ (đối đỉnh) nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AJ}{BC} = \frac{AI}{BI}$

$$\Rightarrow AJ = \frac{BC \cdot AI}{BI} = \frac{a \cdot x}{\sqrt{4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}}}.$$

* Xét tam giác vuông SAJ ta có:

$$SJ^2 = SA^2 + AJ^2 = 4a^2 + \frac{a^2 x^2}{4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}} = \frac{16a^4 - 8a^3 x\sqrt{3} + 5a^2 x^2}{4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } d(B, SI) = \sqrt{\frac{16a^4 - 8a^3 x\sqrt{3} + 5a^2 x^2}{4a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3}}}.$$

+) Tìm x để SJ đạt min, max:

Trong mặt phẳng (ABC) , $AJ \perp JB$ nên J thuộc đường tròn (C) đường kính AB chứa trong mặt phẳng này. Rõ ràng C cũng thuộc (C) .

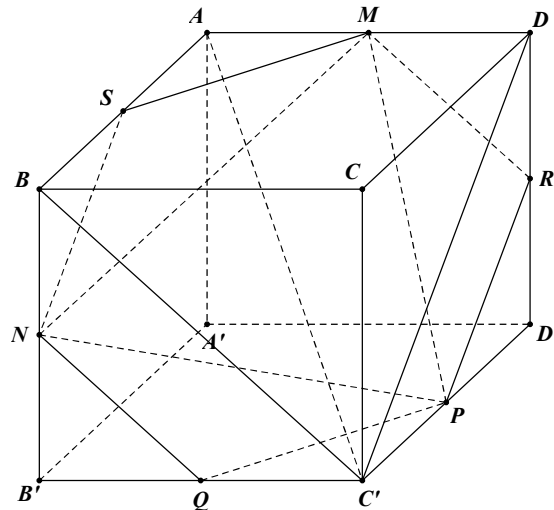
Mặt khác J là giao điểm thứ hai của BI với (C) nên khi I di động trên AC thì J di động trên cung nhỏ AC của (C) .

Do đó: SJ đạt min $\Leftrightarrow AJ$ đạt min $\Leftrightarrow I \equiv A \Leftrightarrow x = 0$.

SJ đạt max $\Leftrightarrow AJ$ đạt max $\Leftrightarrow I \equiv C \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$.

🔗 Câu 13: (HSG ĐỀ 053) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AD, BB', C'D'$. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. tính theo a diện tích thiết diện đó.

💬 Lời giải



Gọi S là trung điểm của AB , khi đó $MS \parallel BD \Rightarrow MS \parallel (BDC')$ và $NS \parallel C'D \Rightarrow NS \parallel (BDC')$ suy ra $(MNS) \parallel (BDC')$. Do $(MNS) \parallel BC'$ nên (MNS) cắt $(BCC'B')$ theo giao tuyến qua N song song với BC' cắt $B'C'$ tại Q .

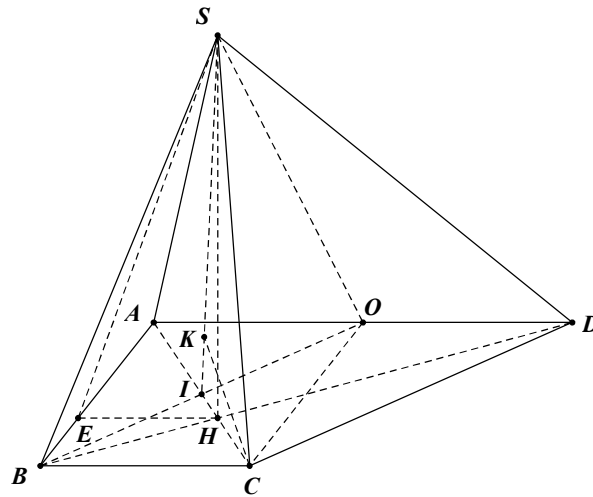
Do $(MNS) \parallel BD \parallel B'D'$ nên (MNS) cắt $(A'B'C'D')$ theo giao tuyến qua Q song song với $B'D'$ cắt $D'C'$ tại P , do P là trung điểm của $C'D'$ nên P trùng với P . Do $(MNS) \parallel C'D'$ nên (MNS) cắt $(CDD'C')$ theo giao tuyến qua P song song với $C'D$ cắt DD' tại R .

Do đó thiết diện cắt bởi (MNP) với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là lục giác đều $MSNQPR$ cạnh $MR = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và có tâm là O . Suy ra:

$$S_{MSNQPR} = 6S_{OMS} = 6 \cdot \frac{1}{2} OM \cdot OS \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}. \text{ Vậy } S_{MSNQPR} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Câu 14: (HSG ĐỀ 053) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB .

🗨️ Lời giải



Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH = (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $BH = \frac{1}{3}BD$.

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHE}$ nên $\widehat{SHE} = 60^\circ$.

$$\text{Mà } HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi O là trung điểm $AD \Rightarrow ABCO$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BO \perp AC$, mà $BO \perp SH \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Gọi $I = AC \cap BO$, kẻ $CK \perp SI$ mà $CK \perp BO$ (do $BO \perp (SAC)$) $\Rightarrow CK \perp (SBD)$.

Có $CD \parallel BO \Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SBD)) = d(C, (SBD)) = CK$.

Nhận thấy H là trọng tâm tam giác $BCO \Rightarrow IH = \frac{1}{3}IC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

$$\Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5\sqrt{2}a}{6}.$$

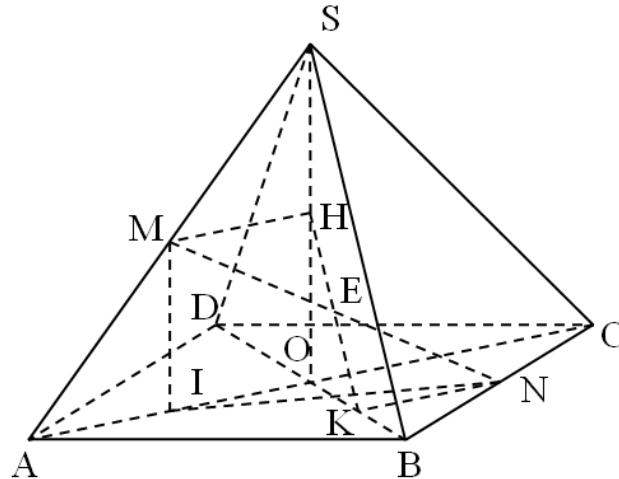
Trong tam giác SIC có: $S_{SIC} = \frac{1}{2}SH \cdot IC = \frac{1}{2}SI \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{SH \cdot IC}{SI} = \frac{2\sqrt{3}a}{5}$.

$$\text{Vậy } d(CD, SB) = \frac{2\sqrt{3}a}{5}.$$

🔗 Câu 15: (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2012) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a và SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

1. Tính độ dài các đoạn thẳng SO và MN theo a .
2. Tính cosin của góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

💡 Lời giải



Gọi I là trung điểm của $OA \Rightarrow MI \parallel SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$. Do đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNI} \Rightarrow \widehat{MNI} = 60^\circ$

$$+) IN^2 = IC^2 + NC^2 - 2IC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{10}}{4}, MN = \frac{NI}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$+) MI = NI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = 2MI = \frac{a\sqrt{30}}{2}$$

2. Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$. Gọi H, K là trung điểm của SO và OB

$\Rightarrow MH \parallel KN \parallel AC \Rightarrow MH \perp (SBD), KN \perp (SBD)$.

Do đó HK là hình chiếu của MN lên (SBD) . Gọi $E = MN \cap HK$ suy ra góc ϕ giữa MN và (SBD) là góc $\widehat{MEH}$.

$+) Do MH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC = KN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, nên $MHKN$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow E \text{ là trung điểm của } MN \Rightarrow ME = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

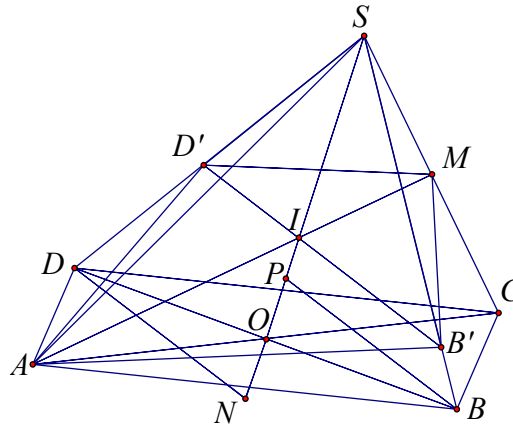
$$\text{Do tam giác } MHE \text{ vuông tại } H \text{ nên } \sin \phi = \frac{MH}{ME} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

🔗 Câu 16: (ĐỀ THI HSGTPDN - Toan11 - 2013) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và M là trung điểm của SC . Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại các điểm B', D' khác S . Chứng minh rằng:

a) $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 3$. b) $\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}$.

 Lời giải



Lấy $I = AM \cap B'D'$ và $O = AC \cap BD$,

Ta có: S, O, I là các điểm chung của 2 mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

$\Rightarrow S, O, I$ thẳng hàng.

Và I là trọng tâm các mặt chéo $SA \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

+ Vẽ $BP \parallel B'I$ và $DN \parallel D'I$ ($P, N \in SO$) $\Rightarrow OP = ON$. Đặt $x = \frac{SD}{SD'}$; $y = \frac{SB}{SB'}$

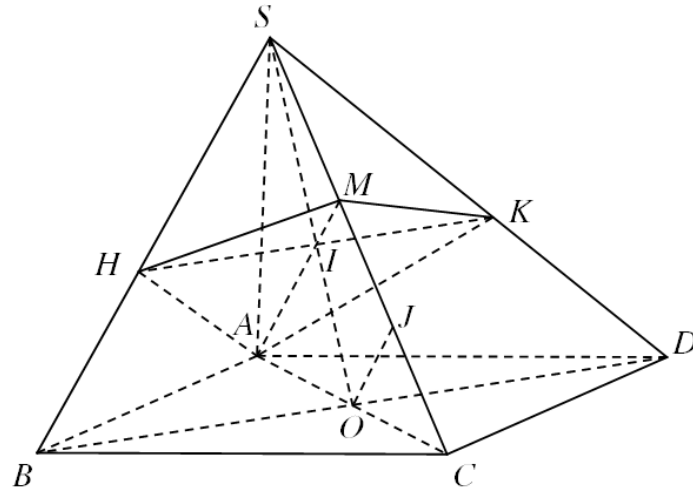
$$\Rightarrow x + y = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SP}{SI} + \frac{SN}{SI} = \frac{2SO}{SI} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow x, y \in [1; 2] \quad (*)$$

+ Suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3 \left(\frac{2}{x+y} \right)^2 = \frac{4}{3}$.

+ Từ (*): $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \geq 2 \Leftrightarrow xy \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2}$.

 **Câu 17:** (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2013) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm di động trên SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD . Tìm các giao điểm H và K của (P) với SB và SD . Chứng minh $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$ là một hằng số.

 Lời giải



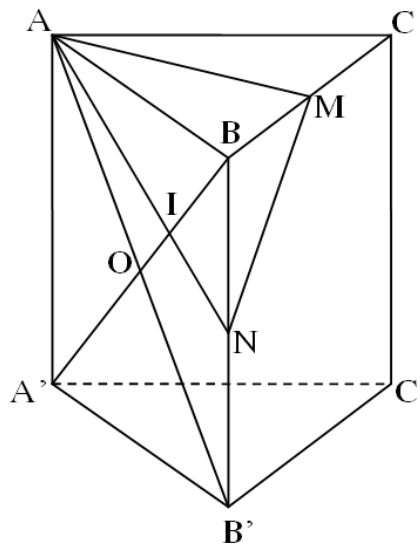
Gọi J là trung điểm của MC ; $I = HK \cap AM$

Ta có $HK \parallel BD, OJ \parallel AM$ do đó

$$\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM} = 2 \frac{SO}{SI} - \frac{SC}{SM} = 2 \frac{SI + IO}{SI} - \frac{SM + MC}{SM} = 2 + 2 \frac{IO}{SI} - 1 - \frac{2MJ}{SM} = 1 + 2 \frac{IO}{SI} - 2 \frac{IO}{SI} = 1.$$

 **Câu 18:** (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2013) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $B, AB = a, AC = 2a$, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BB' . Tính khoảng cách từ A' tới mặt phẳng (AMN) .

 Lời giải



$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

Ta có $AB \perp BC, AB \perp BB' \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$

Nên góc giữa AB' và $(BCC'B')$ là góc $\widehat{AB'B}$

$$\Rightarrow \widehat{AB'B} = 30^\circ \Rightarrow BB' = AB \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

Gọi $I = AN \cap A'B, O = AB' \cap A'B$.

Khi đó I là trọng tâm tam giác ABB' nên $BI = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}A'B \Rightarrow A'I = 2BI$.

Do $I = A'B \cap (AMN)$ nên

$$d(A', (AMN)) = 2d(B, (AMN)) = 2h$$

Do $BAMN$ là tứ diện vuông tại B nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{11}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{33}}{11}.$$

$$\text{Vậy } d(A', (AMN)) = \frac{2\sqrt{33}a}{11}.$$

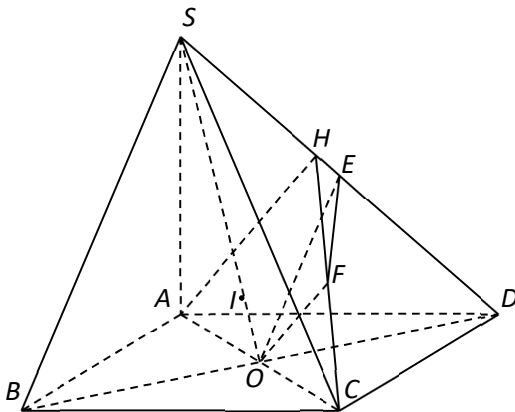
Câu 19: (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2015) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SCD) .

b) Gọi M là điểm bất kì trong không gian, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\Psi = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MS^2.$$

Lời giải



a) Gọi O là tâm của hình vuông, E là trung điểm của SD suy ra $OE \parallel SB$.

Ta có $CD \perp AD$, $CD \perp SA$ suy ra $CD \perp (SAD)$.

Kẻ $AH \perp SD$, $H \in SD \Rightarrow AH \perp CD$.

Gọi F là trung điểm của HC suy ra $OF \parallel AH \Rightarrow OF \perp (SCD)$ nên EF là hình chiếu vuông góc của OE lên mp $(SCD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Gọi γ là góc giữa SB và (SCD) , khi đó $\gamma = (\widehat{OE, EF}) = \widehat{OEF}$.

$$\text{Ta có } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7} \Rightarrow OE = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7} \Rightarrow OF = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{42}}{14}.$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{OF}{OE} = \frac{\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Với điểm } I \text{ bất kì ta luôn có } \Psi &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{MS}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS}). \end{aligned}$$

$$\text{Chọn } I \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IS} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IS} = -4\overrightarrow{IO}$$

Suy ra I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $IS = 4IO$.

$$\text{Khi đó } \Psi = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2.$$

Suy ra Ψ nhỏ nhất khi $M \equiv I$.

$$\text{Ta có } SO^2 = SA^2 + OA^2 = \frac{13a^2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 = 2IO^2 + \frac{BD^2}{2} + 2IO^2 + \frac{AC^2}{2} + \frac{16}{25}SO^2.$$

$$= 4IO^2 + AC^2 + \frac{16}{25}SO^2 = \frac{4}{25}SO^2 + AC^2 + \frac{16}{25}SO^2 = \frac{4}{5}SO^2 + AC^2 = \frac{36a^2}{5}.$$

$$\text{Vậy } \Psi \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{36a^2}{5} \text{ khi } M \equiv I.$$

 **Câu 20:** (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2014) Cho hình chóp $S.ABC$, G là trọng tâm của tam giác ABC . Một mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại A', B', C', G' . Chứng minh rằng $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$.

 Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c, \frac{SG}{SG'} = d. \text{ Theo bài ra ta suy ra } \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}, \overrightarrow{SG} = d\overrightarrow{SG'}.$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

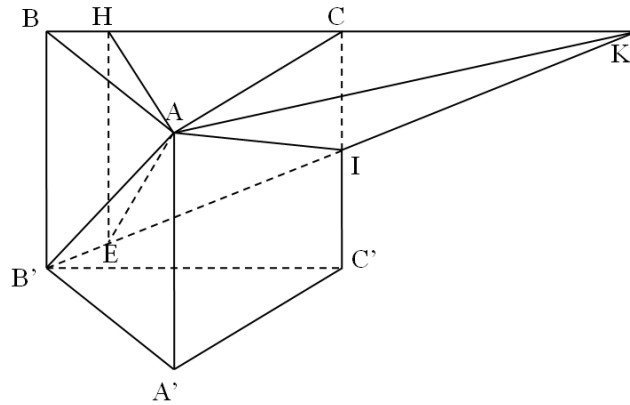
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SG'} = \frac{1}{3d}(a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'}).$$

Mặt khác do A', B', C', G' đồng phẳng nên từ đẳng thức trên ta có

$$\frac{a}{3d} + \frac{b}{3d} + \frac{c}{3d} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 3d \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$$

 **Câu 21:** (ĐỀ THI OLYMPIC 11 – BIM SON 2014) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BB' = a$, I là trung điểm của CC' . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

 Lời giải



Gọi $K = BC \cap B'I$.

Suy ra $AK = (ABC) \cap (AB'I)$.

Kẻ $AH \perp AK, H \in BC$.

Kẻ $HE \parallel BB', E \in B'I$, do $BB' \perp (ABC)$ nên $HE \perp (ABC) \Rightarrow HE \perp AK$

Khi đó $AK \perp (AHE)$

Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là $\varphi = (AH, AE) = \widehat{HAE}$.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

+) Ta thấy CI là đường trung bình của tam giác KBB' nên C là trung điểm của BK , do đó $BK = 2BC = 2a\sqrt{3}$.

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cdot \cos 30^\circ = 7a^2 \Rightarrow AK = a\sqrt{7}$$

$$\cos \widehat{AKB} = \frac{AK^2 + BK^2 - AB^2}{2AK \cdot BK} = \frac{9}{2\sqrt{21}} \Rightarrow HK = \frac{AK}{\cos \widehat{AKB}} = \frac{14\sqrt{3}a}{9}$$

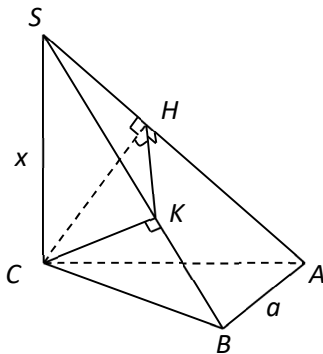
$$AH = \sqrt{HK^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{21}a}{9}.$$

$$+) \text{ Ta có } \frac{HE}{BB'} = \frac{KH}{KB} \Rightarrow HE = \frac{BB' \cdot KH}{KB} = \frac{7a}{9}, \tan \varphi = \tan \widehat{HAE} = \frac{HE}{AH} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

 **Câu 22:** (HSG ĐỀ 059) Cho hình chóp $SABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng α với $\sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}}$. Tính độ dài SC theo a .

 Lời giải



Gọi H, K là hình chiếu của C lên SA, SB .

Ta chứng minh được

$$CK \perp (SAB), SA \perp (CHK).$$

Suy ra $\triangle CHK$ vuông tại K và $SA \perp KH$.

Do đó $\alpha = \angle CHK$.

Đặt $SC = x > 0$. Trong tam giác vuông SAC ta có

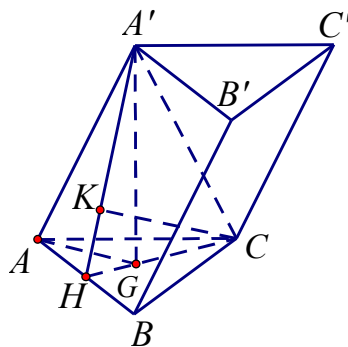
$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow CH^2 = \frac{3a^2x^2}{3a^2 + x^2}.$$

Tương tự, trong tam giác vuông SBC ta có $CK^2 = \frac{2a^2x^2}{2a^2 + x^2}$.

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}} \Leftrightarrow \frac{CK^2}{CH^2} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow \frac{2(3a^2 + x^2)}{3(2a^2 + x^2)} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow x = 6a, \text{ vì } x > 0. \text{ Vậy } SC = 6a.$$

🔗 **Câu 23:** (HSG ĐỀ 059) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , điểm A' cách đều ba điểm A, B, C . Góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CC' theo a .

💡 Lời giải



G là trọng tâm $\triangle ABC$. Ta có $A'G \perp (ABC)$ và $\widehat{(AA'; (ABC))} = \widehat{A'AG} = 60^\circ$

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Xét } \triangle A'AG \text{ có } A'G = AG \cdot \tan 60^\circ = a$$

Kẻ $CK \perp A'H \Rightarrow CC' \parallel AA'$

$$\Rightarrow d(CC', AA') = d(CC', (AA'B'B)) = CK$$

$$\text{Ta có } CK = \frac{A'G \cdot CH}{A'H} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} : \sqrt{A'G^2 + HG^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a\sqrt{13}}{13}$$

Câu 24: (HSG THPT LÊ VĂN HỮU LỚP 11) Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cố định. Trên các đoạn AB_1, C_1B lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = 2PB_1, C_1Q = 2QB$. Chứng minh đường thẳng PQ song song với mặt phẳng (ACC_1) .

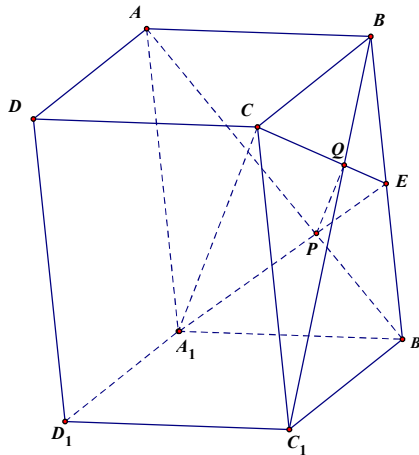
Lời giải

Gọi $D(m; m-4)$ Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HN} = 0 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow D(4; 0)$

Nhận xét H và C đối xứng qua DN tìm được $C(1; -4)$

Từ đó tìm được : $A(0; 3), B(-3; -1)$

Chứng minh $PQ \parallel (ACC_1)$



Gọi E là trung điểm của BB_1 .

Vì $\frac{EB_1}{AA_1} = \frac{PB_1}{PA} = \frac{1}{2}$ nên A_1, P, E theo thứ tự đó thẳng hàng và $\frac{PE}{PA_1} = \frac{1}{2}$

Tương tự, C, Q, E theo thứ tự đó thẳng hàng và $\frac{QE}{QC} = \frac{1}{2}$

Xét tam giác EA_1C có P, Q lần lượt thuộc các cạnh EA_1 và EC đồng thời $\frac{PE}{PA_1} = \frac{QE}{QC}$

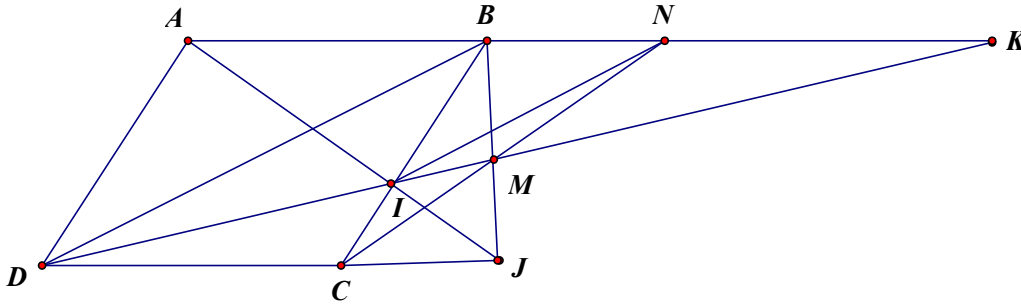
$\Rightarrow PQ \parallel A_1C$

Mặt khác $A_1C \subset (ACC_1) \Rightarrow PQ \parallel (ACC_1)$

Câu 25: (HSG THPT LÊ VĂN HỮU LỚP 11) Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cố định. Trên các đoạn AB_1, C_1B lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = 2PB_1, C_1Q = 2QB$. Gọi I là điểm thay đổi trên cạnh BC (I khác B và C). AI cắt CD tại J , DI cắt BJ tại M và CM cắt AB tại N . Chứng minh mặt phẳng (A_1NI) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Lời giải

Chứng minh mặt phẳng (A_1NI) luôn chứa một đường thẳng cố định



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $K = DM \cap AB$.

Vì $AB \parallel CD$ nên:

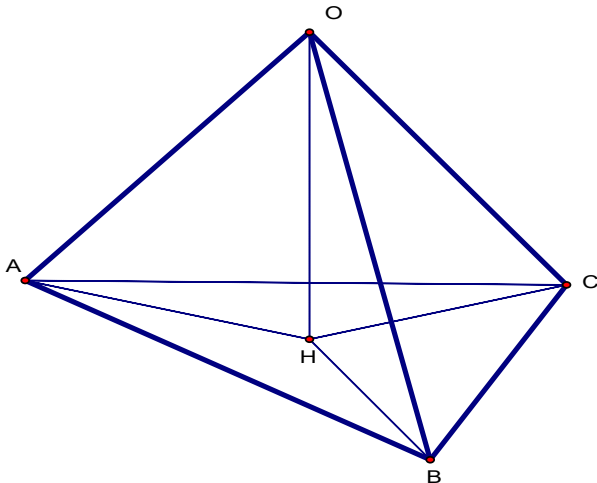
$$\frac{MB}{MJ} = \frac{BN}{CJ} = \frac{NK}{CD} \Rightarrow \frac{NK}{NB} = \frac{CD}{CJ}; \frac{AB}{CJ} = \frac{IB}{IC} = \frac{IK}{ID}.$$

$$\text{Mặt khác } AB = CD \Rightarrow \frac{NK}{NB} = \frac{IK}{ID} \Rightarrow IN \parallel BD$$

Qua A_1 kẻ đường thẳng d song song với IN . Suy ra d song song với BD và nằm trong mặt phẳng (A_1NI) . Vậy mp (A_1NI) chứa đường thẳng d cố định.

Câu 26: (HSG NÔNG CÔNG 4 – THANH HÓA NĂM 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng với mặt phẳng (ABC) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma)$

Lời giải



Gọi H là chân đường cao hạ từ O xuống mặt phẳng (ABC) . Khi đó ta chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \\ \Leftrightarrow \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó: } M = (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right)$$

Đặt $\sin^2 \alpha = a, \sin^2 \beta = b, \sin^2 \gamma = c$ với $a, b, c > 0$

$$\Rightarrow \text{Dạng } M = \left(2 + \frac{1}{a}\right) \left(2 + \frac{1}{b}\right) \left(2 + \frac{1}{c}\right) \text{ với } a + b + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq 27$$

$$\text{Biến đổi: } M = 8 + 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc}$$

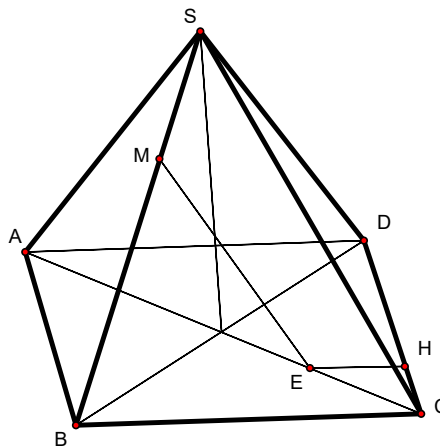
Áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có:

$$M \geq 8 + 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} + 2 \cdot 3 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^2} + \frac{1}{abc} \geq 125$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = 125 \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3} \text{ hay } \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 27: (HSG NÔNG CÔNG 4 – THANH HÓA NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M là điểm trên SB sao cho $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SB}$ và E là một điểm thay đổi trên cạnh AC . Xác định vị trí điểm E để ME vuông góc với CD .

Lời giải



Đặt $CE = xCA$. Kẻ $EH \perp CD, (H \in CD) \Rightarrow EH \parallel AD$ nên $CH = xCD$

Suy ra $\overrightarrow{CH} = x\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CD} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$$

$$\text{Do: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}$$

Để ME vuông góc với CD điều kiện là:

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ do } HE \perp CD$$

$$\Leftrightarrow \left[x\overrightarrow{CD} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \right) \right] \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow x\overrightarrow{CD}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ do } CB \perp CD$$

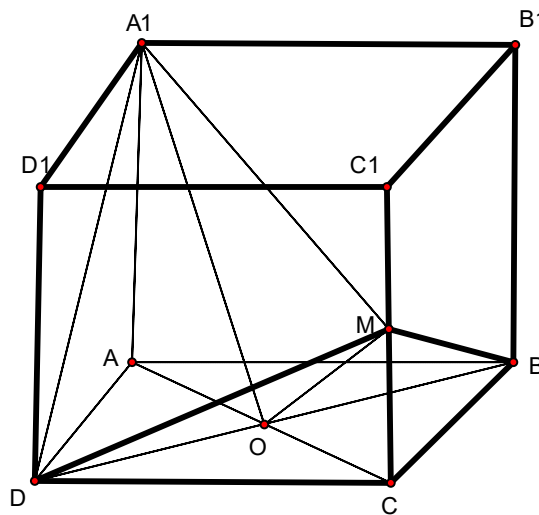
$$\text{Do } \Delta SCD \text{ đều nên } \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \cdot CD \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2.$$

$$\text{Do đó } x \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \left(x - \frac{1}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy E thuộc đoạn AC sao cho $CE = \frac{1}{3}CA$.

Câu 28: (HSG NÔNG CÔNG 4 – THANH HÓA NĂM 2017-2018) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = AD = a, AA_1 = b$. Gọi M là trung điểm của CC_1 . Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A_1BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có: } BD = (A_1BD) \cap (MBD), \begin{cases} AC \perp BD \\ AA_1 \perp BD \end{cases} \Rightarrow (ACC_1A_1) \perp BD$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} (ACC_1A_1) \perp BD \\ (ACC_1A_1) \cap (A_1BD) = OA_1 \\ (ACC_1A_1) \cap (MBD) = OM \end{cases} \text{ do đó góc giữa hai đường thẳng } OM \text{ và } OA_1 \text{ là góc giữa hai mặt}$$

phẳng (A_1BD) và (MBD) .

$$\text{Ta có: } OM = \frac{AC_1}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$$

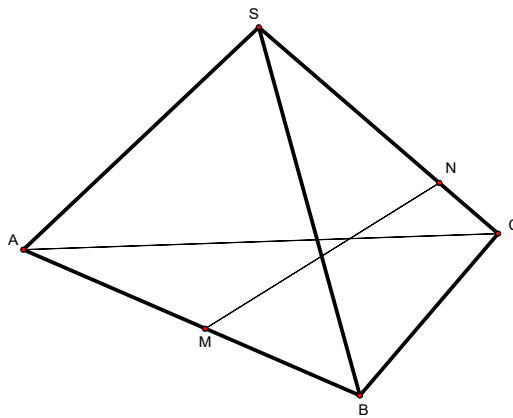
$$OA_1^2 = AO^2 + AA_1^2 = \frac{a^2}{2} + b^2; \quad MA_1^2 = A_1C_1^2 + MC_1^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4}$$

Hai mặt phẳng (A_1BD) và (MBD) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \Delta OMA_1$ vuông tại O

$$\Leftrightarrow OM^2 + OA_1^2 = MA_1^2 \Leftrightarrow \frac{2a^2 + b^2}{4} + \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) = a^2 + \frac{5b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

🔗 Câu 29: (HSG NÔNG CÔNG 4 – THANH HÓA NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{CSB} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .

💡 Lời giải



Đặt $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB} = m$ ($0 \leq m \leq 1$)

$$\Rightarrow \overrightarrow{NC} = m\overrightarrow{SC} = m\vec{c}, \quad \overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} = m(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} = -m(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} + \vec{c} - m\vec{c} = (m-1)\vec{a} - m\vec{b} + (1-m)\vec{c}$$

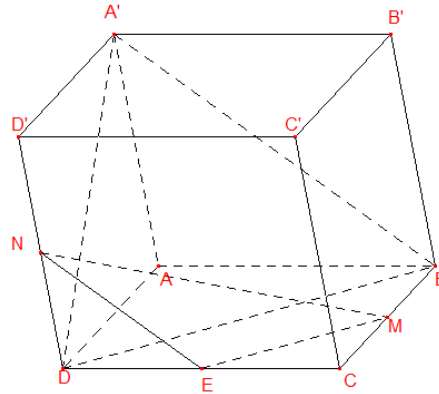
Do $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{a^2}{2}$ nên $MN^2 = (3m^2 - 5m + 3)a^2$

$$= 3a^2 \left(m - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}a^2 \geq \frac{11}{12}a^2 \Rightarrow MN \geq \frac{a\sqrt{33}}{12} \quad \forall m \in [0; 1]$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{5}{6}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $\frac{a\sqrt{33}}{6}$.

🔗 Câu 30: (HSG THPT TỈNH GIA 1 NĂM 2018-2019) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD' . Chứng minh rằng $MN \parallel (A'BD)$.

💡 Lời giải



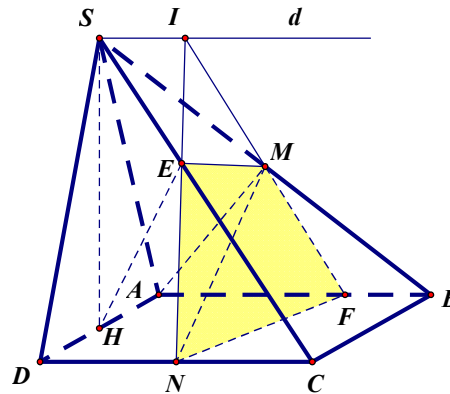
Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow \begin{cases} ME // BD \\ NE // A'B \end{cases} \Rightarrow (MNE) // (A'BD) \Rightarrow MN // (A'BD)$

Câu 31: (HSG THPT TỈNH GIA 1 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác (u_n) có đáy là

hình vuông cạnh $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_n = \sqrt{3u_{n-1} - 2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$ Tam giác (u_n) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng

vuông góc với mặt đáy. Gọi a lần lượt là trung điểm của các cạnh ABC Gọi O là trung điểm của I là chân đường vuông góc hạ từ AC lên M Chứng minh $MN \perp (SAB)$ và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$.

Lời giải



+ Đặt $\overrightarrow{HA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{HK} = \vec{y}$, $\overrightarrow{HS} = \vec{z}$ (K là trung điểm BC)

+ Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HS} - \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{x} + \vec{y})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{z}$

$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{z} + \vec{x} + \vec{y}$

+ Suy ra $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{x}^2 - \frac{1}{4}\vec{z}^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow MN \perp AM$ (1)

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = -\frac{3}{2}\vec{x}^2 + \frac{1}{2}\vec{z}^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow MN \perp SB \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2) ta suy ra $MN \perp (SAB)$.

$$+ \text{ Mặt khác } \overrightarrow{MN}^2 = \left(-\frac{3}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{z}\right)^2 = \frac{9}{4}\vec{x}^2 + \frac{1}{4}\vec{z}^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dựng thiết diện :

+ Qua S kẻ đường thẳng d song song với AB và $CD \Rightarrow d = (SAB) \cap (SCD)$

+ Trong mặt phẳng (SCD) kéo dài $NE \cap d = I$

+ Trong mặt phẳng (SAB) kéo dài $IM \cap AB = F$

+ Tứ giác $MENF$ là thiết diện cần tìm

+ Ta có $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{z} - \vec{x} + \vec{y}$

+ Giả sử $\overrightarrow{SE} = k\overrightarrow{SC} \Rightarrow \overrightarrow{SE} = k(-\vec{z} - \vec{x} + \vec{y})$

+ $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HS} + \overrightarrow{SE} = (1-k)\vec{z} - k\vec{x} + k\vec{y}$

+ Do $HE \perp SC$ nên $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (k-1)\vec{z}^2 + k\vec{x}^2 + k\vec{y}^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(k-1)}{4} + \frac{k}{4} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}, \text{ từ đây suy ra } \frac{ES}{EC} = \frac{3}{5}$$

+ Ta có $\frac{BF}{CN} = \frac{SI}{CN} = \frac{ES}{EC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BF = \frac{3CN}{5} = \frac{3a}{10}$

+ Do đó $NF = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} - BF\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{5}$ và $MF = \sqrt{NF^2 - MN^2} = \frac{a\sqrt{29}}{10}$

+ Diện tích tam giác INF là $dt(INF) = MN \cdot MF = \frac{a^2\sqrt{87}}{20}$

+ Gọi h là đường cao kẻ qua E của tam giác IEM $\frac{h}{MN} = \frac{IE}{IN} = \frac{SE}{SC} = \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow h = \frac{3MN}{8} = \frac{3a\sqrt{3}}{16}$$

+ Diện tích tam giác IEM là $dt(IEM) = \frac{1}{2}h \cdot IM = \frac{1}{2}h \cdot MF = \frac{3a^2\sqrt{87}}{320}$

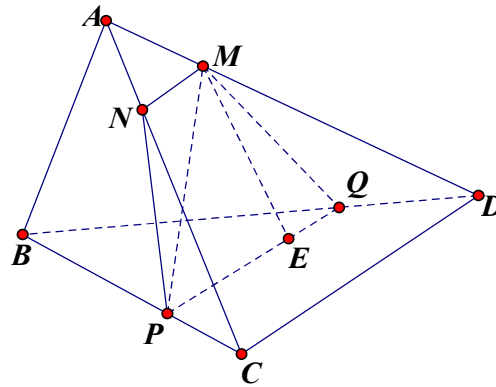
+ Vậy diện tích của thiết diện là $dt(MENF) = \frac{13a^2\sqrt{87}}{320}$

Câu 32: (HSG THPT CẨM THỦY 1) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x, (0 < x < a)$. Một mặt phẳng (α) đi qua MP và song song với CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện.

a. Thiết diện trên là hình gì?

b. Tìm x để thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

 Lời giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // CD \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN // CD (N \in AC)$$

$$\text{Tương tự } (\alpha) \cap (BCD) = PQ // CD (Q \in BD)$$

$$(\alpha) \cap (BAD) = MQ; (\alpha) \cap (ABC) = PN$$

Vậy thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Vì $MN // PQ // CD$ nên $MNPQ$ là hình thang.

$$\text{Hai tam giác } CNP \text{ và } DMQ \text{ bằng nhau vì } \begin{cases} CP = DQ \\ CN = DM \\ \angle PCN = \angle QDN = 60^\circ \end{cases}$$

Suy ra $NP = MQ$ hay thiết diện là hình thang cân.

b. Ta có $MN = AM = x$, $PQ = BP = a - x$

Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác MDQ ta có:

$$\begin{aligned} MQ^2 &= DQ^2 + DM^2 - 2DQ \cdot DM \cdot \cos \angle MDQ \\ &= x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x) = 3x^2 - 3ax + a^2 \end{aligned}$$

Dựng đường cao ME ta có:

$$\begin{aligned} ME^2 &= MQ^2 - QE^2 = 3x^2 - 3ax + a^2 - \left(\frac{PQ - MN}{2}\right)^2 \\ &= 3x^2 - 3ax + a^2 - \left(\frac{a - x - x}{2}\right)^2 = \frac{8x^2 - 8ax + 3a^2}{4} \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}}{2} \end{aligned}$$

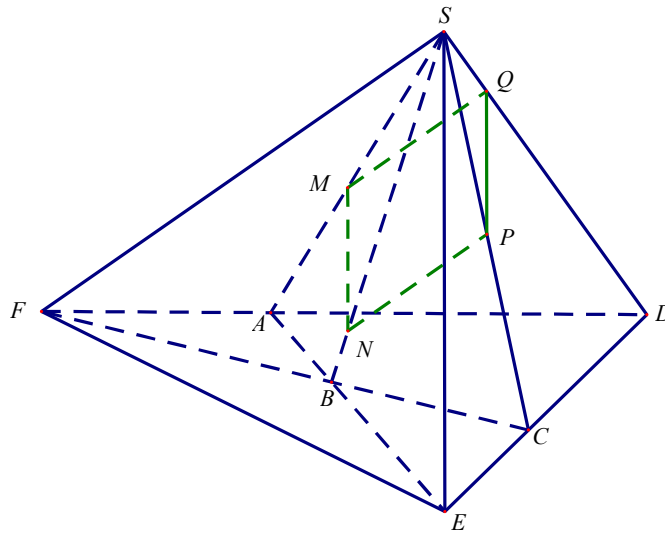
Diện tích thiết diện $MNPQ$ là:

$$S = \frac{(MN + PQ) \cdot ME}{2} = \frac{a}{4} \sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{a}{4} \sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \geq \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Min} S = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Câu 33: - (HSG THPT TRIỆU SƠN 2 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E là giao điểm của AB và CD , F là giao điểm của AD và BC . Mặt phẳng (α) không qua S , song song với mặt phẳng (SEF) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng $\frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD}$.

🗨️ Lời giải



$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SAB) = MN$, $MN, SE \subset (SAB)$ nên suy ra $MN \parallel SE$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SAD) = MQ$, $MQ, SF \subset (SAD)$ nên suy ra $MN \parallel SF$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SBC) = NP$, $NP, SF \subset (SBC)$ nên suy ra $NP \parallel SF$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$, $PQ, SE \subset (SCD)$ nên suy ra $PQ \parallel SE$.

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SQ} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \overrightarrow{SA} + \frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} = \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD}$$

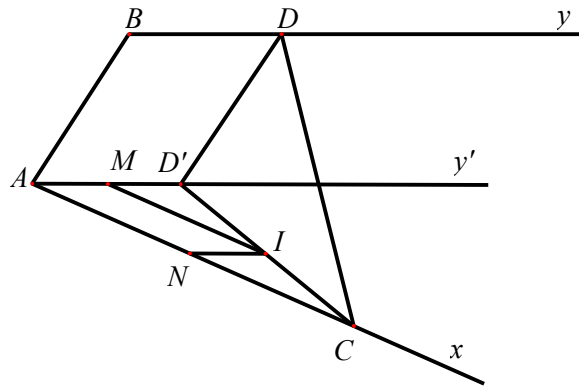
$$\Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \overrightarrow{SA} = -\frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} + \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \frac{SA}{SM} \left(-\frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} + \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD} \right)$$

$$\text{Vì bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng nên ta có } \frac{SA}{SM} \left(-\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD}$$

Câu 34: (HSG THPT TRIỆU SƠN 2 NĂM 2018-2019) Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Hai điểm C, D thay đổi lần lượt ở trên Ax và By sao cho $\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB}$, D' là điểm thứ tư của hình bình hành $ABDD'$. (P) là mặt phẳng chứa CD và song song với AB , (Q) là mặt phẳng chứa Ax và song song với By . Chứng minh rằng (P) luôn luôn đi qua một điểm cố định I trong mặt phẳng (Q) . Tìm vị trí của C và D sao cho diện tích S của tam giác $AD'C$ nhỏ nhất.

 Lời giải



Dựng $Ay' \parallel By$. D' trên Ay' sao cho $AD' = BD$. (P) là mặt phẳng (CDD') , (Q) là mặt phẳng (Ax, Ay')

Với I tùy ý trên CD' . Gọi M, N là các điểm trên Ay', Ax sao cho $MI \parallel Ax, NI \parallel Ay'$. Ta có:

$$\frac{AM}{AD'} + \frac{AN}{AC} = \frac{CI}{CD'} + \frac{D'I}{D'C} = \frac{CI + ID'}{CD'} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB:3}{AC} + \frac{2AB:3}{AD'} = 1 \quad (2).$$

Với C, D là hai điểm tùy ý thỏa mãn giả thiết. Trên CD' tồn tại điểm I sao cho $\frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC}$.

Ta được: $\frac{AN}{AC} = \frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC} \Rightarrow AN = \frac{AB}{3} \quad (3)$

và $\frac{AM}{AD'} = \frac{CI}{CD'} = 1 - \frac{D'I}{D'C} = 1 - \frac{AB:3}{AC} = \frac{2AB:3}{AD'} \Rightarrow AM = \frac{2AB}{3} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra M, N cố định nên I cố định. Do đó (P) luôn đi qua điểm cố định I trong (Q) .

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD' \sin A = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin A \text{ nên } S \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AC \cdot BD \text{ nhỏ nhất.}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $\frac{1}{AC}, \frac{1}{BD}$ ta có:

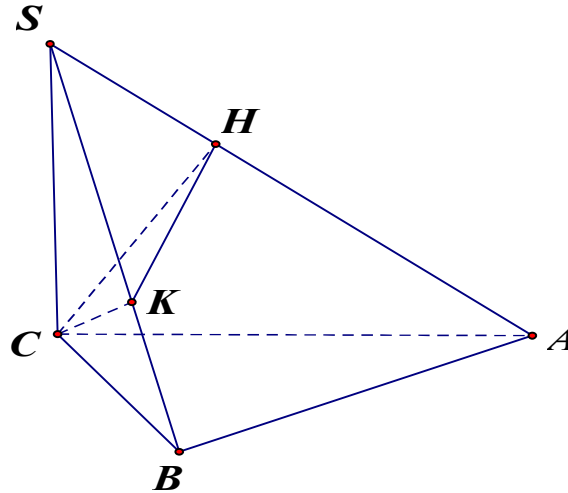
$$\frac{3}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} \geq 2\sqrt{\frac{1}{AC} \cdot \frac{2}{BD}} \Rightarrow AC \cdot BD \geq \frac{8}{9} AB^2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{AC} = \frac{2}{BD} = \frac{3}{2AB} \Leftrightarrow AC = \frac{2AB}{3} \text{ và } BD = \frac{4AB}{3}.$$

$$\text{Vậy } S \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } BD = \frac{4AB}{3}, AC = \frac{2AB}{3}.$$

Câu 35: (THPT ĐÔNG SƠN 1 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng α với $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{19}}$. Tính SC .

🗨️ Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên SA, SB . Ta chứng minh được $CK \perp (SAB)$, $SA \perp (CKH)$, suy ra tam giác CHK vuông tại K và $SA \perp KH$.
Do đó $\alpha = \widehat{CHK}$. Đặt $SC = x$

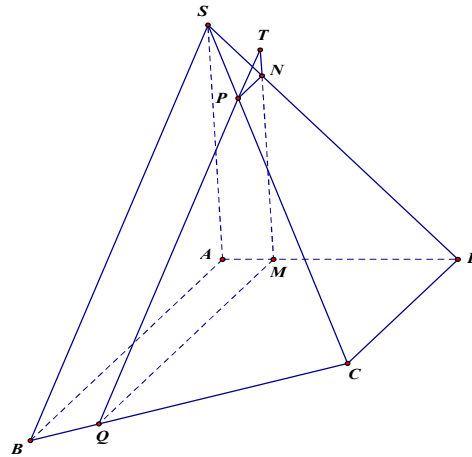
Trong tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow CH^2 = \frac{3a^2x^2}{3a^2 + x^2}$

Tương tự, trong tam giác vuông SBC ta có $CK^2 = \frac{2a^2x^2}{2a^2 + x^2}$

Ta có $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{CK^2}{CH^2} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow \frac{2(3a^2 + x^2)}{3(2a^2 + x^2)} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow x = 6a$. Vậy $SC = 6a$.

Câu 36: (THPT ĐÔNG SƠN 1 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), $AB = 2CD$. Gọi M và P lần lượt là điểm thuộc cạnh AD và SC thỏa mãn $\frac{MA}{MD} = \frac{PS}{PC} = x$. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) chứa MP và song song với AB . Tìm x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

🗨️ Lời giải



Ta có: $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AB \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ // AB (Q \in BC)$

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = PN // AB (N \in SD)$

Vậy thiết diện của (α) với hình chóp là tứ giác MNPQ. Vì $MQ // NP // AB$ nên MNPQ là hình thang

Gọi $T = MN \cap PQ$. Ta có: $QM = \frac{MD}{AD} AB + \frac{AM}{AD} CD = \frac{1}{1+x} AB + \frac{x}{1+x} CD = \frac{x+2}{2(x+1)} AB$

Vì $\frac{MA}{MD} = \frac{QB}{QC} = \frac{PS}{PC} = \frac{NS}{ND} \Rightarrow PQ // SB, MN // SA \Rightarrow \Delta SAB \sim \Delta TMQ$

Do đó $\frac{S_{TMQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB} \right)^2 = \left(\frac{x+2}{2(x+1)} \right)^2 \quad (1)$

Vì $\frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow NP = \frac{x}{x+1} CD = \frac{x}{2(x+1)} AB \Rightarrow \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2}$

Do đó $\frac{S_{TPN}}{S_{TMQ}} = \left(\frac{NP}{MQ} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{(x+2)^2}$

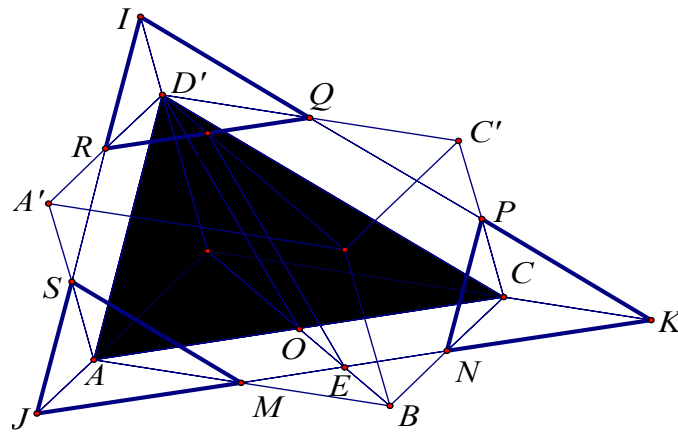
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = \frac{1}{x+1}$

Vậy $x=1$ ta có $\frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$

Câu 37: (HSG THPT HẬU LẬU 2 NĂM 2018-2019) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

- Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .
- Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

 Lời giải



a. Trong mp($ABCD$), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N .
 Trong mp($BDD'B'$), qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O=AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .
 Trong mp($A'B'C'D'$), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D', D'C'$ lần lượt tại R, Q .
 Trong mp($AA'D'D$), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .
 Trong mp($CC'D'D$), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .
 Thiết diện là lục giác $MNPQRS$

b. Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' .

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI, ACD', RQI, JMS, NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ=NK \text{ và } PK=QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI, JMS, NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI, ACD' lần lượt là S_2, S)

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{DC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC} \right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td} = S_2 - 3S_1$

$$S_{td} = 2S(-k^2 + k + \frac{1}{2}) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \text{)}$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

Câu 38: (ĐỀ HSG NÔNG CÔNG – THANH HÓA NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là điểm bất kì trong không gian, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\Psi = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MS^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với điểm } I \text{ bất kì ta luôn có } \Psi &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + \overrightarrow{MS}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS}) \end{aligned}$$

$$\text{Chọn } I \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IS} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IS} = -4\overrightarrow{IO}$$

Suy ra I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $IS = 4IO$ với O tâm đáy $ABCD$.

Khi đó $\Psi = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2$ Suy ra Ψ nhỏ nhất khi $M \equiv I$.

$$\text{Ta có } SO^2 = SA^2 + OA^2 = \frac{13a^2}{2}.$$

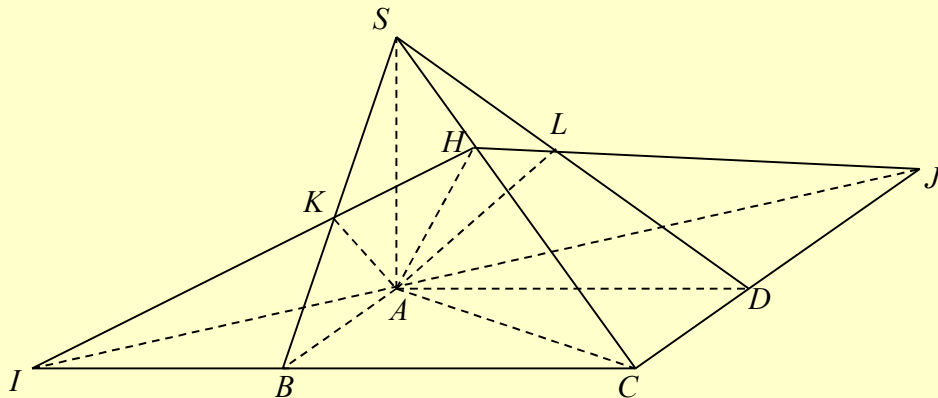
$$\begin{aligned} \text{Suy ra } IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + IS^2 &= 2IO^2 + \frac{BD^2}{2} + 2IO^2 + \frac{AC^2}{2} + \frac{16}{25}SO^2 \\ &= 4IO^2 + AC^2 + \frac{16}{25}SO^2 = \frac{4}{25}SO^2 + AC^2 + \frac{16}{25}SO^2 = \frac{4}{5}SO^2 + AC^2 = \frac{36a^2}{5} \end{aligned}$$

Vậy Ψ nhỏ nhất bằng $\frac{36a^2}{5}$ khi $M \equiv I$

Câu 39: (HSG ĐỀ 075) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ và $SD = a\sqrt{5}$.

a) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC . Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ) và chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

b) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.



Lời giải

Trong (SCD) gọi $L = SD \cap JH \Rightarrow L = SD \cap (HIJ)$

Trong (SBC) gọi $K = SB \cap IH \Rightarrow K = SB \cap (HIJ)$

Ta có $\begin{cases} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$, mà $AH \perp SC$. Suy ra $SC \perp (IJH)$.

Suy ra $AK \perp SC$. Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$. Vậy $AK \perp (SBC)$.

b) Ta có $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$; $AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; $AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Do $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$, do đó $KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Tương tự phần (a) thì $AL \perp (SCD) \Rightarrow AL \perp HL$. Từ đó tính được

$$LH = \sqrt{AH^2 - AL^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}.$$

Suy ra $S_{AKHL} = S_{AKH} + S_{ALH} = \frac{1}{2} AK \cdot KH + \frac{1}{2} AL \cdot LH = \frac{8a^2}{15}$.

Câu 40: (HSG THPT CẨM THỦY 1 NĂM 2018-2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x$, ($0 < x < a$). Một mặt phẳng (α) đi qua MP và song song với CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện.

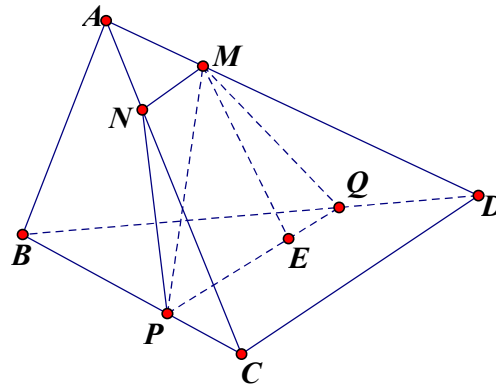
- Thiết diện trên là hình gì?
- Tìm x để thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

1. $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // CD \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN // CD (N \in AC)$

Tương tự $(\alpha) \cap (BCD) = PQ // CD (Q \in BD)$, $(\alpha) \cap (BAD) = MQ$; $(\alpha) \cap (ABC) = PN$

Vậy thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.



Vì $MN // PQ // CD$ nên $MNPQ$ là hình thang. Hai tam giác CNP và DMQ bằng nhau vì

$$\begin{cases} CP = DQ \\ CN = DM \\ \angle PCN = \angle QDN = 60^\circ \end{cases} \quad \text{Suy ra } NP = MQ \text{ hay thiết diện là hình thang cân.}$$

2. Ta có $MN = AM = x$, $PQ = BP = a - x$. Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác MDQ ta có:

$$MQ^2 = DQ^2 + DM^2 - 2DQ \cdot DM \cdot \cos \angle MDQ = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x) = 3x^2 - 3ax + a^2$$

Dựng đường cao ME ta có:

$$ME^2 = MQ^2 - QE^2 = 3x^2 - 3ax + a^2 - \left(\frac{PQ - MN}{2}\right)^2$$

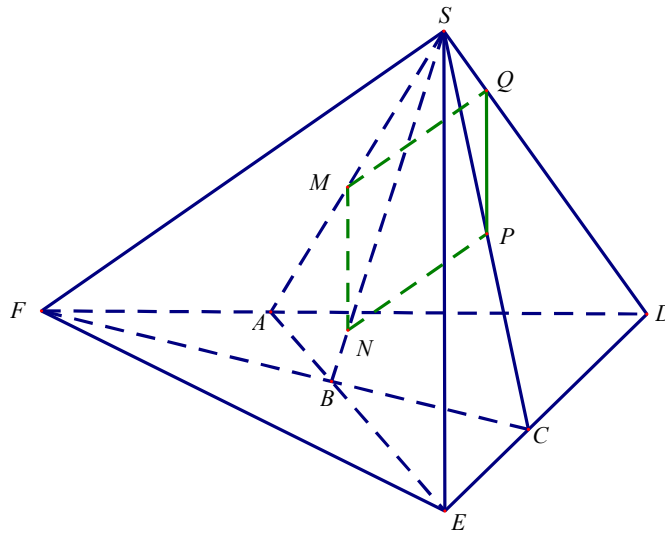
$$= 3x^2 - 3ax + a^2 - \left(\frac{a - x - x}{2}\right)^2 = \frac{8x^2 - 8ax + 3a^2}{4} \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}}{2}$$

$$\text{Diện tích thiết diện } MNPQ \text{ là: } S = \frac{(MN + PQ) \cdot ME}{2} = \frac{a}{4} \sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{a}{4} \sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \geq \frac{a^2}{4}.$$

$$\min S = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Câu 41: (THPT TRIỆU SƠN 2 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E là giao điểm của AB và CD , F là giao điểm của AD và BC . Mặt phẳng (α) không qua S , song song với mặt phẳng (SEF) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng $\frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD}$.

Lời giải



$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SAB) = MN$, $MN, SE \subset (SAB)$ nên suy ra $MN \parallel SE$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SAD) = MQ$, $MQ, SF \subset (SAD)$ nên suy ra $MN \parallel SF$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SBC) = NP$, $NP, SF \subset (SBC)$ nên suy ra $NP \parallel SF$.

$(\alpha) \parallel (SEF)$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$, $PQ, SE \subset (SCD)$ nên suy ra $PQ \parallel SE$.

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SQ} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \overrightarrow{SA} + \frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} = \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD}$$

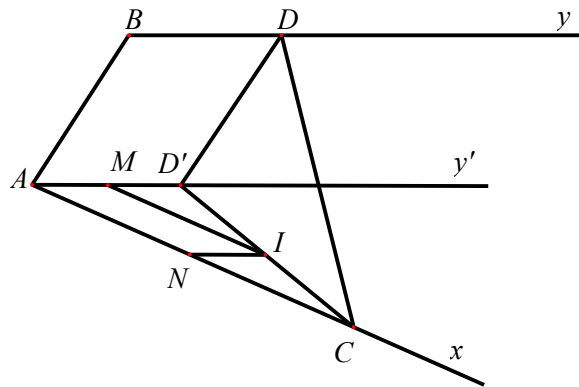
$$\Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \overrightarrow{SA} = -\frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} + \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \frac{SA}{SM} \left(-\frac{SP}{SC} \overrightarrow{SC} + \frac{SN}{SB} \overrightarrow{SB} + \frac{SQ}{SD} \overrightarrow{SD} \right)$$

$$\text{Vì bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng nên ta có } \frac{SA}{SM} \left(-\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD}.$$

Câu 42: (THPT TRIỆU SƠN 2 NĂM 2018-2019) Cho hai nửa đường thẳng Ax , By chéo nhau. Hai điểm C , D thay đổi lần lượt ở trên Ax và By sao cho $\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB}$, D' là điểm thứ tư của hình bình hành $ABDD'$. (P) là mặt phẳng chứa CD và song song với AB , (Q) là mặt phẳng chứa Ax và song song với By . Chứng minh rằng (P) luôn luôn đi qua một điểm cố định I trong mặt phẳng (Q) . Tìm vị trí của C và D sao cho diện tích S của tam giác $AD'C$ nhỏ nhất.

Lời giải



Dựng $Ay' \parallel By$. D' trên Ay' sao cho $AD' = BD$. (P) là mặt phẳng (CDD') , (Q) là mặt phẳng (Ax, Ay')

Với I tùy ý trên CD' . Gọi M , N là các điểm trên Ay' , Ax sao cho $MI \parallel Ax$, $NI \parallel Ay'$. Ta có:

$$\frac{AM}{AD'} + \frac{AN}{AC} = \frac{CI}{CD'} + \frac{D'I}{D'C} = \frac{CI + ID'}{CD'} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB:3}{AC} + \frac{2AB:3}{AD'} = 1 \quad (2).$$

Với C , D là hai điểm tùy ý thỏa mãn giả thiết. Trên CD' tồn tại điểm I sao cho $\frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC}$.

$$\text{Ta được: } \frac{AN}{AC} = \frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC} \Rightarrow AN = \frac{AB}{3} \quad (3)$$

$$\text{và } \frac{AM}{AD'} = \frac{CI}{CD'} = 1 - \frac{D'I}{D'C} = 1 - \frac{AB:3}{AC} = \frac{2AB:3}{AD'} \Rightarrow AM = \frac{2AB}{3} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra M , N cố định nên I cố định. Do đó (P) luôn đi qua điểm cố định I trong (Q) .

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD' \sin A = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin A \text{ nên } S \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AC \cdot BD \text{ nhỏ nhất.}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $\frac{1}{AC}$, $\frac{1}{BD}$ ta có:

$$\frac{3}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} \geq 2\sqrt{\frac{1}{AC} \cdot \frac{2}{BD}} \Rightarrow AC \cdot BD \geq \frac{8}{9} AB^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{AC} = \frac{2}{BD} = \frac{3}{2AB} \Leftrightarrow AC = \frac{2AB}{3}$ và $BD = \frac{4AB}{3}$.

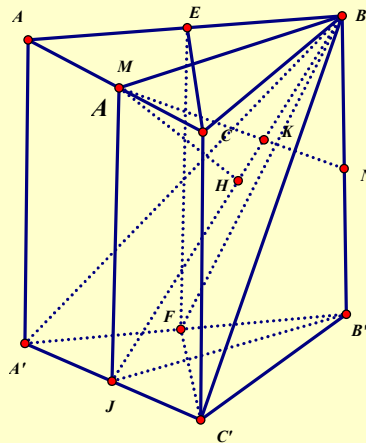
Vậy S nhỏ nhất khi và chỉ khi $BD = \frac{4AB}{3}$, $AC = \frac{2AB}{3}$.

Câu 43: (HSG ĐỀ 078) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . AA' vuông góc với (ABC) . Đường chéo BC' của mặt bên $BCC'B'$ hợp với $(ABB'A')$ một góc bằng 30° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BB' . Tính góc giữa MN và $(BA'C')$.

Lời giải

Ta tính được $AA' = BB' = CC' = a\sqrt{2}$. Gọi J là trung điểm của $C'A'$, H là hình chiếu của M lên BJ . Gọi φ là góc giữa MN và $(BA'C')$ thì ta có $\varphi = \widehat{MKH} = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BJ} \right)$, K là giao điểm của MN và BJ (Với qui ước lấy góc nhọn).

$$+ \text{ Ta có: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BJ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BB'} = \frac{a^2}{4}$$



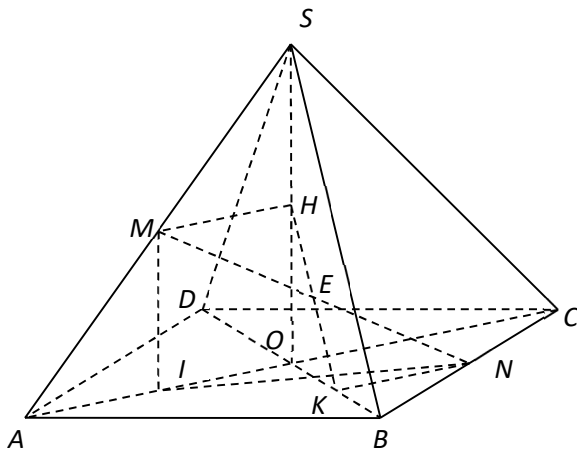
$$\Rightarrow MN \cdot BJ \cdot \cos \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BJ} \right) = \frac{a^2}{4}$$

+ Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông BMN và BMJ tính được $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $BJ = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

$$\Rightarrow \cos \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BJ} \right) = \frac{1}{\sqrt{55}} > 0 \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}.$$

Câu 44: (HSG ĐỀ 079) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a và SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính độ dài các đoạn thẳng SO , MN và tính cosin của góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $OA \Rightarrow MI \parallel SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$. Do đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNI} \Rightarrow \widehat{MNI} = 60^\circ$

$$IN^2 = IC^2 + NC^2 - 2IC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{10}}{4}, \quad MN = \frac{NI}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$MI = NI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = 2MI = \frac{a\sqrt{30}}{2}$$

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$. Gọi H, K là trung điểm của SO và OB .

$\Rightarrow MH \parallel KN \parallel AC \Rightarrow MH \perp (SBD), KN \perp (SBD)$.

Do đó HK là hình chiếu của MN lên (SBD) . Gọi $E = MN \cap HK$ suy ra góc φ giữa MN và (SBD) là góc MEH .

Do $MH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC = KN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, nên $MHNC$ là hình bình hành

$$\Rightarrow E \text{ là trung điểm của } MN \Rightarrow ME = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

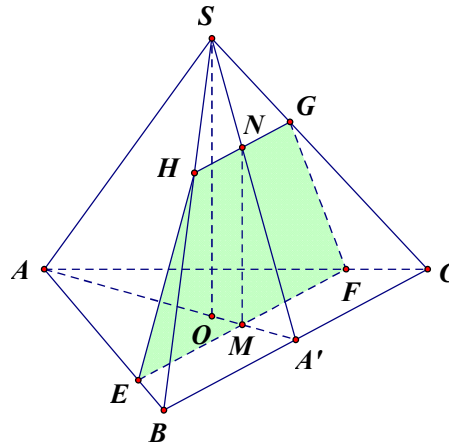
Do tam giác MHE vuông tại H nên $\sin \varphi = \frac{MH}{ME} = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

🔗 Câu 45: (HSG ĐỀ 080) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy a , đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC . Xét mặt phẳng (P) đi qua M và vuông

góc với AA' . Đặt $AM = x$ ($\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$). Tìm x để thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích lớn nhất.

 Lời giải



Vì $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên M thuộc OA' .

Ta có $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp AA'$, tam giác ABC đều nên $BC \perp AA'$. Vậy (P) qua M song song với SO và BC .

Xét (P) và (ABC) có M chung. Do $(P) \parallel BC$ nên kẻ qua M đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại E, F .

Tương tự kẻ qua M đường thẳng song song với SO cắt SA' tại N , qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC tại H, Q . Ta có thiết diện là tứ giác $EFGH$.

Ta có $EF \parallel BC \parallel GH$. M, N là trung điểm EF, GH và $MN \perp EF$ nên $EFGH$ là hình thang cân đáy EF, GH

$$\text{Khi đó: } S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH).MN$$

$$\text{Ta có } AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ nên } EF = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{HG}{BC} = \frac{SN}{SA'} = \frac{OM}{OA'} \Rightarrow HG = 2(x\sqrt{3} - a)$$

$$\frac{MN}{SO} = \frac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = 2(3a - 2x\sqrt{3})$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH).MN = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3})$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(6a - 4x\sqrt{3}) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (theo Cösi)}$$

S_{EFGH} đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện bằng $\frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

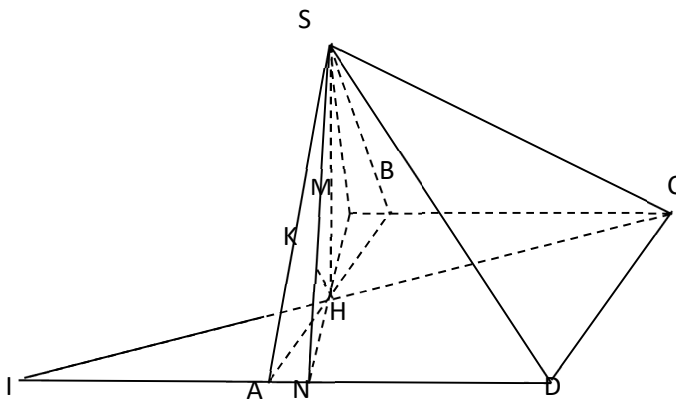
Câu 46: (HSG ĐỀ 080) Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AB = 2a$. Gọi H là trung điểm AB . Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H .

Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{4}BC$.

a. Khi $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh đường thẳng SM vuông góc với mặt phẳng (SAD) .

b. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.

Lời giải



a. Ta có $MB = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}HB$, $\widehat{HBM} = \widehat{HAD} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle HBM$ vuông tại M .

$$\Rightarrow HM = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi N là giao của HM và AD .

Ta có: $HN = HM = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle SMN$ vuông tại S .

$$\begin{cases} SH \perp AD (SH \perp (ABCD)) \\ MN \perp DA (AD // BC) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp SM$$

Kết hợp với $SM \perp SN \Rightarrow SM \perp (SAD)$

b. Gọi φ là góc giữa SC và (SAD) ; K là hình chiếu vuông góc của H lên SN ; I là giao của HC với AD .

Lấy E đối xứng với I qua K .

Vì $AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp HK$. Kết hợp với $HK \perp SN \Rightarrow KH \perp (SAD)$.

Mà HK là đường trung bình của tam giác ICE nên $HK \parallel CE$.

Suy ra $CE \perp (SAD)$ tại E . Suy ra $\triangle SEC$ vuông tại E và SE là hình chiếu của SC trên (SAD) . Ta có $\varphi = \widehat{CSE}$.

Đặt $x = SH (x > 0)$. Tam giác SHN vuông tại H và HK là đường cao nên

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}} \Rightarrow CE = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

$$CH^2 = CM^2 + MC^2 = \frac{25a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = 7a^2$$

Tam giác SHC vuông tại H nên $SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{x^2 + 7a^2}$.

$$\sin \varphi = \frac{EC}{SC} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + 7a^2)}} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^4 + 21a^4) + 31a^2x^2}}.$$

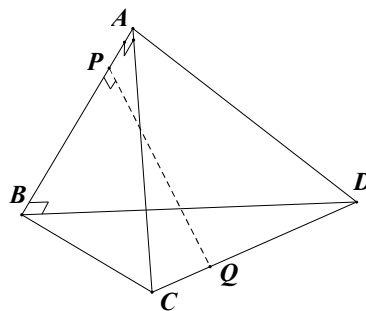
$$\Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21}a^2x^2 + 31a^2x^2}} \Rightarrow \sin \varphi \leq \sqrt{\frac{12}{4\sqrt{21} + 31}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt[4]{\frac{21}{4}} \cdot a$.

Vậy φ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \varphi$ lớn nhất khi và chỉ khi $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{4}} \cdot a$.

Câu 47: (HSG ĐỀ 081) Cho tứ diện $ABCD$, có $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt chia đoạn AB và CD theo cùng tỉ số k . Chứng minh hai đường thẳng AB và PQ vuông góc với nhau.

Lời giải



Chọn hệ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$ Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}^2$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AA} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = -\frac{k}{1-k} \cdot \vec{a}$$

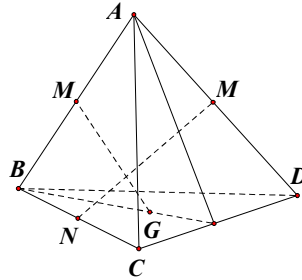
$$\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AD}}{1-k} = \frac{1}{1-k} \cdot \vec{b} - \frac{k}{1-k} \cdot \vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{k}{1-k} \cdot \vec{a} + \frac{1}{1-k} \cdot \vec{b} - \frac{k}{1-k} \cdot \vec{c} = \frac{k}{1-k} (\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{1-k} \cdot \vec{b}$$

$$AB.PQ = a \cdot \left[\frac{k}{1-k}(\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{1-k}\vec{b} \right] = -\frac{k}{1-k}(\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{c}) + \frac{1}{1-k} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{Vậy hai đường thẳng } AB \text{ và } PQ \text{ vuông góc với nhau.}$$

Câu 48: (HSG ĐỀ 081) Cho tứ diện đều $ABCD$. Mọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, AD và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính góc giữa hai đường thẳng MG và NP .

Lời giải



Đặt $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$ là các vectơ không đồng phẳng và $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên giả sử $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$$\text{Và } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{MG} = \vec{AG} - \vec{AM} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) \Rightarrow |\vec{MG}| = \frac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})^2} = \frac{1}{2}$$

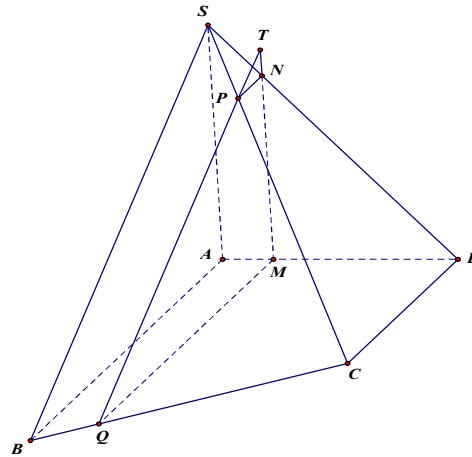
$$\vec{PN} = \vec{AN} - \vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow |\vec{PN}| = \frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{MG}, \vec{PN}) \right| = \frac{|\vec{MG} \cdot \vec{PN}|}{|\vec{MG}| \cdot |\vec{PN}|} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Câu 49: (HSG ĐỀ 082) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), $AB = 2CD$. Gọi M và P lần lượt là điểm thuộc cạnh AD và SC thỏa mãn $\frac{MA}{MD} = \frac{PS}{PC} = x$.

- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) chứa MP và song song với AB .
- Tìm x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Lời giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AB \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ // AB (Q \in BC)$$

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = PN // AB (N \in SD)$

Vậy thiết diện của (α) với hình chóp là tứ giác MNPQ. Vì $MQ // NP // AB$ nên MNPQ là hình thang

b. Gọi $T = MN \cap PQ$. Ta có: $QM = \frac{MD}{AD} AB + \frac{AM}{AD} CD = \frac{1}{1+x} AB + \frac{x}{1+x} CD = \frac{x+2}{2(x+1)} AB$

Vì $\frac{MA}{MD} = \frac{QB}{QC} = \frac{PS}{PC} = \frac{NS}{ND} \Rightarrow PQ // SB, MN // SA \Rightarrow \Delta SAB \sim \Delta TMQ$

Do đó $\frac{S_{TMQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB} \right)^2 = \left(\frac{x+2}{2(x+1)} \right)^2 \quad (1)$

Vì $\frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow NP = \frac{x}{x+1} CD = \frac{x}{2(x+1)} AB \Rightarrow \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2}$

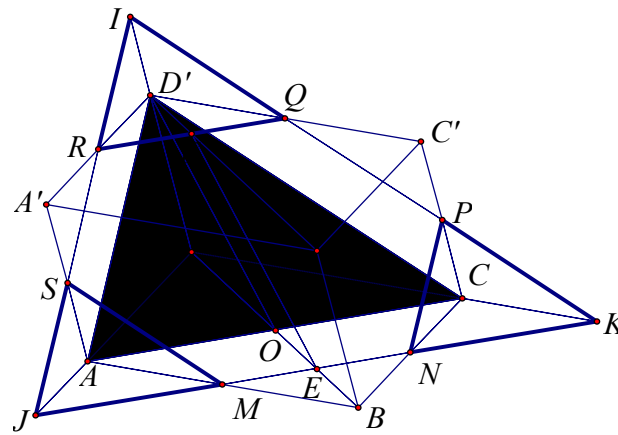
Do đó $\frac{S_{TPN}}{S_{TMQ}} = \left(\frac{NP}{MQ} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{(x+2)^2}$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = \frac{1}{x+1}$

Vậy $\frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

-  **Câu 50:** (HSG ĐỀ 083) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .
- a. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
- b. Tìm vị trí của điểm M để thiết diện đó có diện tích lớn nhất.

 Lời giải



a. Trong mp($ABCD$), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB , BC lần lượt tại E , N .
 Trong mp($BDD'B'$), qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O=AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .
 Trong mp($A'B'C'D'$), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D'$, $D'C'$ lần lượt tại R , Q .
 Trong mp($AA'D'D$), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .
 Trong mp($CC'D'D$), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .
 Thiết diện là lục giác $MNPQRS$

b. Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' . Các đường thẳng RS , MN , AD đồng quy tại J , các đường thẳng

MN , DC , QP đồng quy tại K , Các đường thẳng DD' , RS , QP đồng quy tại I

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI , ACD' , RQI , JMS , NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ=NK \text{ và } PK=QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI , JMS , NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI , ACD' lần lượt là S_2 , S)

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{DC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC} \right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$$

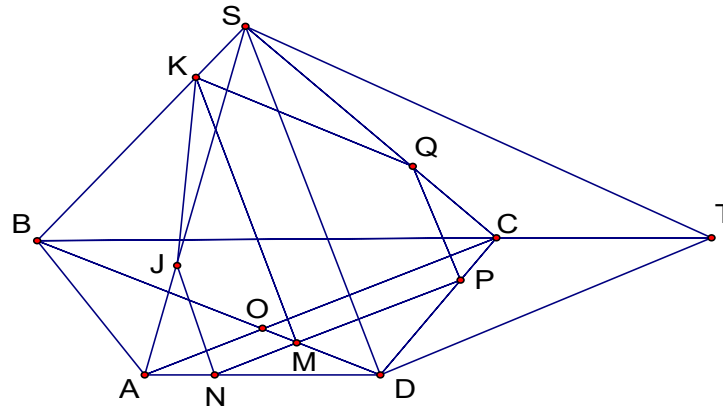
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td} = S_2 - 3S_1$

$$S_{td} = 2S \left(-k^2 + k + \frac{1}{2} \right) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \text{)}$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

Câu 51: (HSG THPT LAM KINH THANH HÓA NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$ $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC và mặt bên SBC là tam giác đều. Tính SD .

Lời giải



Trong $(ABCD)$, kẻ $DT \parallel AC$ (T thuộc BC) $\Rightarrow CT = AD = a$ và $DT \perp SD$.

Ta có: $DT = AC = a\sqrt{3}$.

ΔSCT có $SC = 2a$, $CT = a$, $\widehat{SCT} = 120^\circ \Rightarrow ST = a\sqrt{7}$.

ΔSDT có $\widehat{SDT} = 90^\circ$, $DT = a\sqrt{3}$, $ST = a\sqrt{7} \Rightarrow SD = 2a$.

Câu 52: (HSG THPT LAM KINH THANH HÓA NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$ $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC và mặt bên SBC là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OD (M không trùng O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) . Biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải

Trong $(ABCD)$, qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, DC lần lượt tại N, P .

Trong (SBD) , qua M kẻ đường thẳng song song với SD cắt SB tại K .

Trong (SAD) , qua N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SA tại J .

Trong (SDC) , qua P kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại Q .

Thiết diện là ngũ giác $NPQKJ$.

Ta có: $NJ \perp NP$; $MK \perp NP$; $PQ \perp NP$; $NJ = PQ$

$$S_{NPQKJ} = S_{NMKJ} + S_{MPQK} = \frac{1}{2}(NJ + MK)MN + \frac{1}{2}(MK + PQ)MP = \frac{1}{2}(NJ + MK)NP$$

$$\text{Xét } \Delta ACD \text{ có } \frac{NP}{AC} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow NP = \frac{AC \cdot MD}{OD} = \frac{x \cdot a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3x$$

$$\text{Xét } \Delta ASD \text{ và } \Delta AOD \text{ có } \frac{NJ}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow NJ = \frac{SD \cdot OM}{OD} = \frac{2a \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x \right)}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2(a - x\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \Delta BSD \text{ có } \frac{KM}{SD} &= \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM = \frac{SD \cdot BM}{BD} = \frac{2a \cdot (a\sqrt{3} - x)}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x) \\ S_{NPQKJ} &= 2(3a - 2\sqrt{3}x)x \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(3a - 2\sqrt{3}x)2\sqrt{3}x \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}[(3a - 2\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}x]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{Max } S_{NPQKJ} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4}a \end{aligned}$$

Câu 53: (HSG THPT LÊ LỢI NĂM 2018-2019) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân với $AD \parallel BC$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$ tam giác SAD vuông cân tại S và $SB = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SCD, H là giao điểm của BG và mp(SAC).

Chứng minh rằng $BM \parallel (SCD)$ và tính tỉ số $\frac{HB}{HG}$

Lời giải

Gọi N là trung điểm của AD

ta có $BC = DN = a$ và $BC \parallel DN$

$\Rightarrow$ tứ giác BCDN là hình bình hành

$\Rightarrow BN \parallel CD$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA và

AD nên $MN \parallel SD \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$

mà $BM \subset (BMN) \Rightarrow BM \parallel (SCD)$

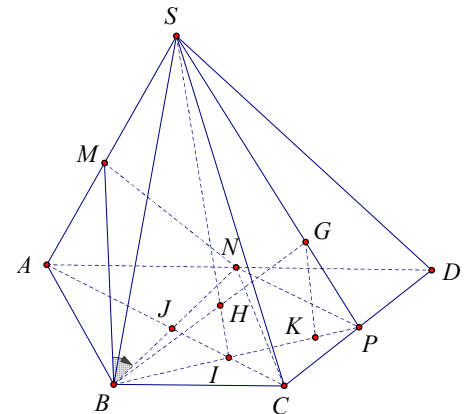
*) Gọi P là trung điểm của CD,

$I = AC \cap BP$; $H = SI \cap BG \Rightarrow H = BG \cap (SAC)$. Gọi J là

giao điểm của BN và AC, vì tứ giác BCNA là hình bình hành nên J là trung điểm của BN mà $IJ \parallel NP$ nên I là trung điểm của BP

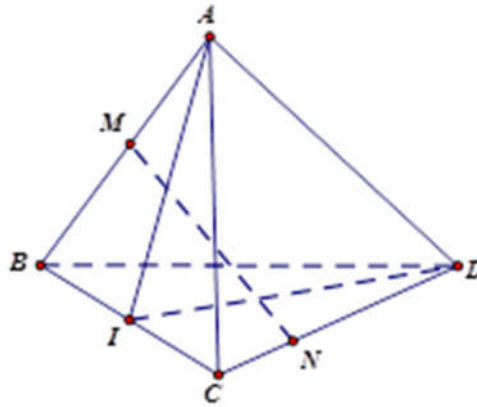
*) Trong tam giác SBP vẽ $GK \parallel SI$, ta có:

$$\frac{HB}{HG} = \frac{IB}{IK} = \frac{IP}{IK} = \frac{SP}{SG} = \frac{3}{2} \quad (\text{do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } SCD)$$



Câu 54: (HSG THPT LÊ LỢI NĂM 2018-2019) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Hai điểm M, N chạy tương ứng trên các đoạn AB và CD sao cho $BM = DN$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN.

Lời giải



Đặt $\frac{BM}{BA} = x$, với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{DN}{DC} = x$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BD}$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BD} - x\overrightarrow{BA}$

$$MN^2 = x^2a^2 + (1-x)^2a^2 + x^2a^2 + 2x(1-x)\frac{a^2}{2} - 2x^2 \cdot \frac{a^2}{2} - 2x(1-x)\frac{a^2}{2}$$

$$= a^2[x^2 + (1-x)^2 + x^2 + x(1-x) - x^2 - x(1-x)] = (2x^2 - 2x + 1)a^2$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\max f(x) = f(0) = f(1) = 1, \min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

MN đạt giá trị lớn nhất bằng a khi $M \equiv B, N \equiv D$ hoặc $M \equiv A, N \equiv C$.

 **Câu 55:** (TRƯỜNG THPT LÊ LỢI NĂM 2017 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều $AB = AD = DC = a > 0, BC = 2a$

Mặt bên SBC là tam giác đều, SD vuông góc với AC , O là giao điểm của AC, BD . Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OB (M không trùng với B), song song với SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) và tìm x để diện tích thiết diện đó lớn nhất biết $BM = x\sqrt{3}$.

 **Lời giải**

Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) .

+) Xác định được thiết diện là tam giác NPQ (với N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh BA, BC, BS)

$$+) \text{ Ta có: } \begin{cases} MQ \parallel SD, NP \parallel AC \\ SD \perp AC \end{cases} \Rightarrow NP \perp MQ$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích thiết diện: } S_{NPQ} = \frac{1}{2} NP \cdot MQ$$

Gọi J là điểm nằm trên BC sao cho $ACJD$ là hình bình hành.

Trong tam giác SCJ có $SC = 2a; CJ = a; \widehat{SCJ} = 120^\circ$

$$SJ = \sqrt{SC^2 + CJ^2 - 2.SC.CJ.\cos C} = a\sqrt{7}$$

Trong tam giác ABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SDJ vuông tại D vì SD vuông góc AC.

$$SD = \sqrt{SJ^2 - DJ^2} = 2a$$

Trong tam giác ABC có: $BO = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

+) Trong tam giác SBD: $\frac{BM}{BD} = \frac{MQ}{SD} \Rightarrow MQ = 2x$

Trong tam giác BAC $\frac{NP}{AC} = \frac{BM}{BO} \Rightarrow NP = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$ $NP = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$

+) Diện tích thiết diện: $S_{NPQ} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$

+) Vì M thuộc đoạn BO ($M \neq B$) nên $0 < x\sqrt{3} \leq BO = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{2a}{3}$

Do đó, $S_{NPQ} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Vậy, $\min S_{NPQ} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 56: (THPT NÔNG CỐNG - NHƯ THANH NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = CB = 2, AC = 1$. Mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P sao cho tam giác MNP đều. Tính cosin góc tạo bởi (P) và (ABC)

Lời giải

Từ C dựng CE song song với PM , E thuộc AA' , CF song song với PN , F thuộc BB' . Ta có $(CEF) \parallel (PMN)$ nên $EF \parallel MN$ và tam giác CEF là một tam giác đều. Đặt $AE = x$, $BF = y$, $CE = CF = EF = a$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x^2 + 1 = a^2 (1) \\ y^2 + 4 = a^2 (2) \\ (x - y)^2 + 4 = a^2 (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 = 2a^2 - 5$. Kết hợp (3) suy ra $xy = \frac{a^2 - 1}{2}$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 y^2 = (a^2 - 1)(a^2 - 4)$. Do đó: $\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = (a^2 - 1)(a^2 - 4)$

Giải được: $a^2 = 1$ (l), $a^2 = 5$. Suy ra $S_{ACEF} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Gọi φ là góc cần tìm. Theo định lí hình chiếu ta có $\cos \varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{\sqrt{15}/4}{5\sqrt{3}/4} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Vậy

góc của (P) và (ABC) là $\arccos(\frac{\sqrt{5}}{5})$

Câu 57: (THPT NÔNG CỐNG - NHƯ THANH NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và $AB = 3a, AD = AA' = 4a$. Mặt phẳng (P) đi qua O và cắt các tia AB', AC, AD' tương ứng tại ba điểm phân biệt M, N, P . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = AM \cdot AN \cdot AP$.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Vì M, N, P, O đồng phẳng nên $\begin{cases} \overrightarrow{AO} = x.\overrightarrow{AM} + y.\overrightarrow{AN} + z.\overrightarrow{AP} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = m.\overrightarrow{AB'} = m(\vec{a} + \vec{b}), \overrightarrow{AN} = n.\overrightarrow{AC} = n(\vec{b} + \vec{d}), \overrightarrow{AP} = p(\vec{a} + \vec{d})$.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{d})$. Suy ra $mx = ny = pz = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 4$

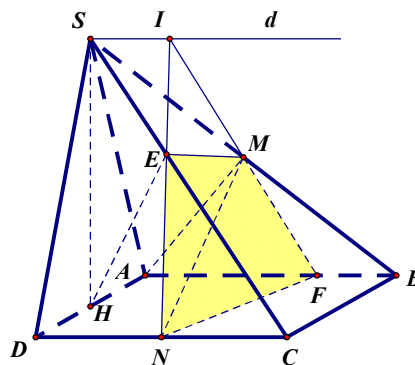
$\Rightarrow \frac{AB'}{AM} + \frac{AC}{AN} + \frac{AD'}{AP} = 4 \Rightarrow \frac{5a}{AM} + \frac{5a}{AN} + \frac{4a\sqrt{2}}{AD'} = 4 \Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{4\sqrt{2}}{5AD'} = \frac{4}{5}$

BDT Cauchy: $\frac{4}{5} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{2}}{5T}} \Rightarrow T \geq \frac{675\sqrt{2}}{16}$

Vậy $\min T = \frac{675\sqrt{2}}{16}$. Khi $AM = AN = \frac{15}{4}, AD' = 3\sqrt{2}$

Câu 58: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, CD . Gọi H là trung điểm của AD , E là chân đường vuông góc hạ từ H lên SC . Chứng minh $MN \perp (SAB)$ và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNE) .

Lời giải



+ Đặt $\overrightarrow{HA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{HK} = \vec{y}$, $\overrightarrow{HS} = \vec{z}$ (K là trung điểm BC)

+ Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HS} - \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{x} + \vec{y})$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{2}(\vec{z} - \vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{z} + \vec{x} + \vec{y}$$

$$+ \text{ Suy ra } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{x}^2 - \frac{1}{4}\vec{z}^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow MN \perp AM \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = -\frac{3}{2}\vec{x}^2 + \frac{1}{2}\vec{z}^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow MN \perp SB \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2) ta suy ra $MN \perp (SAB)$.

$$+ \text{ Mặt khác } \overrightarrow{MN}^2 = \left(-\frac{3}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{z}\right)^2 = \frac{9}{4}\vec{x}^2 + \frac{1}{4}\vec{z}^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dựng thiết diện :

+ Qua S kẻ đường thẳng d song song với AB và CD $\Rightarrow d = (SAB) \cap (SCD)$

+ Trong mặt phẳng (SCD) kéo dài NE $\cap d = I$

+ Trong mặt phẳng (SAB) kéo dài IM $\cap AB = F$

+ Tứ giác MENF là thiết diện cần tìm

$$+ \text{ Ta có } \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{z} - \vec{x} + \vec{y}$$

$$+ \text{ Giả sử } \overrightarrow{SE} = k\overrightarrow{SC} \Rightarrow \overrightarrow{SE} = k(-\vec{z} - \vec{x} + \vec{y})$$

$$+ \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HS} + \overrightarrow{SE} = (1-k)\vec{z} - k\vec{x} + k\vec{y}$$

$$+ \text{ Do } HE \perp SC \text{ nên } \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (k-1)\vec{z}^2 + k\vec{x}^2 + k\vec{y}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(k-1)}{4} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}, \text{ từ đây suy ra } \frac{ES}{EC} = \frac{3}{5}$$

$$+ \text{ Ta có } \frac{BF}{CN} = \frac{SI}{CN} = \frac{ES}{EC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BF = \frac{3CN}{5} = \frac{3a}{10}$$

$$+ \text{ Do đó } NF = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} - BF\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{5} \text{ và } MF = \sqrt{NF^2 - MN^2} = \frac{a\sqrt{29}}{10}$$

$$+ \text{ Diện tích tam giác } INF \text{ là } dt(INF) = MN \cdot MF = \frac{a^2\sqrt{87}}{20}$$

$$+ \text{ Gọi } h \text{ là đường cao kẻ qua } E \text{ của tam giác } IEM \quad \frac{h}{MN} = \frac{IE}{IN} = \frac{SE}{SC} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3MN}{8} = \frac{3a\sqrt{3}}{16}$$

+ Diện tích tam giác IEM là $dt(IEM) = \frac{1}{2} h.IM = \frac{1}{2} h.MF = \frac{3a^2\sqrt{87}}{320}$

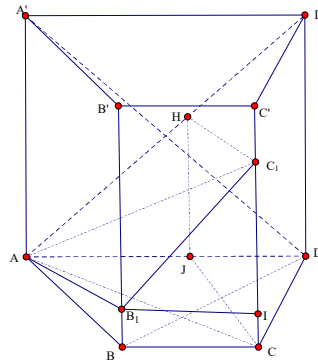
+ Vậy diện tích của thiết diện là $dt(MENF) = \frac{13a^2\sqrt{87}}{320}$.

Câu 59: (HSG ĐỀ 095)

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là nửa lục giác đều với $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Đường cao của hình lăng trụ là h , (P) là mặt phẳng qua AD' , cắt các cạnh BB' , CC' lần lượt tại B_1, C_1 .

- a) Thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi (P) là hình gì? Tìm liên hệ giữa a và h và tìm vị trí của điểm B_1, C_1 sao cho $(P) \perp AD'$.
- b) Định vị trí của (P) để chu vi thiết diện nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất ấy.

Lời giải



Ta có
$$\begin{cases} (ADD'A') \parallel (BCC'B') \\ (P) \cap (ADD'A') = AD' \Rightarrow AD' \parallel B_1C_1 \\ (P) \cap (BCC'B') = B_1C_1 \end{cases}$$

Qua B_1 dựng đường thẳng song song với BC , cắt CC' tại I . Hai tam giác ADD' và B_1IC_1 có các cạnh song song từng từng đôi một nên chúng đồng dạng suy ra $\frac{AD}{B_1C_1} = \frac{AD'}{B_1I} = \frac{AB}{BC}$ (do $B_1I = BC$)

Mặt khác vì $AD = 2BC$ (do $ABCD$ là nửa lục giác đều) suy ra $AD' = 2B_1C_1$.

Vậy thiết diện là hình thang $AD'C_1B_1$.

Tìm liên hệ giữa a và h và tìm vị trí B_1, C_1 sao cho $(P) \perp A'D$.

Ta có $ADD'A'$ là hình chữ nhật nên khi $(P) \perp A'D$ thì $A'D \perp AD'$ suy ra $ADD'A'$ là hình vuông. Suy ra $AA' = AD$ tức $h = 2a$.

Hơn nữa theo tính chất của nửa lục giác đều ta có: $BD \perp AB, AC \perp CD$

Do đó
$$\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABB'A') \Rightarrow BD \perp AB_1 \Rightarrow AB_1 \perp A'B \text{ vì } AB_1 \perp A'D$$

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ACC'A') \Rightarrow CD \perp AC_1 \Rightarrow AC_1 \perp A'C \text{ vì } AC_1 \perp A'D.$$

$$\text{Vậy khi } \begin{cases} h = 2a \\ AC_1 \perp A'C \\ AB_1 \perp A'B \end{cases} \text{ thì } (P) \perp A'D.$$

Xác định vị trí của (P) để chu vi thiết diện nhỏ nhất.

Gọi p là chu vi của thiết diện, ta có:

$$p = AD' + B_1C_1 + AB_1 + D'C_1 = \frac{3}{2}AD' + AB_1 + D'C_1$$

Vì AD' có độ dài không đổi nên chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi $AB_1 + D'C_1$ nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } BB_1 = x, \text{ khi đó } CI = x, C_1I = \frac{DD'}{2} = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Ta có } CC_1 = CC' - (C_1I + CI) = h - \left(\frac{h}{2} + x\right) = \frac{h}{2} - x$$

$$\text{Ta có } AB_1 + D'C_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} + \sqrt{C'D^2 + C'C_1^2} = \sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{Đặt } \vec{u}(a; x), \vec{v}\left(a; \frac{h}{2} - x\right) \text{ thì } \vec{u} + \vec{v} = \left(2a; \frac{h}{2}\right)$$

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4a^2 + \frac{h^2}{4}}$$

$$\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \frac{a}{a} = \frac{\frac{h}{2} - a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{4}$$

$$T = \sqrt{4a^2 + \frac{h^2}{4}} \Rightarrow \min p = \frac{3}{2}\sqrt{4a^2 + h^2} + \sqrt{4a^2 + \frac{h^2}{4}} \text{ đạt được khi } x = \frac{h}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất đạt được khi (P) cắt BB' tại B_1 với $BB_1 = \frac{h}{4}$.

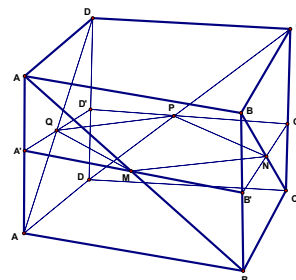
Câu 60: (HSG ĐỀ 095) Cho hình lăng trụ tứ giác $ABC D.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với hai đáy của lăng trụ, cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 tương ứng lần lượt các điểm M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (P) sao cho tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) cắt AA_1, BB_1, CC_1, DD_1

tương ứng tại A', B', C', D'. Khi đó ta có

$$\frac{AA'}{AA_1} = \frac{BB'}{BB_1} = \frac{CC'}{CC_1} = \frac{DD'}{DD_1} = x$$



$$S_{MNPQ} = S$$

Đặt

Theo định lí Ta- lét ta có

$$\frac{A'M}{A'B'} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AA'}{AA_1} = x$$

$$\frac{A'Q}{A'D'} = \frac{A_1Q}{A_1D} = \frac{A_1A'}{A_1A} = 1 - x$$

Do đó ta được

$$\frac{s(A'MQ)}{s(A'B'D')} = \frac{A'M}{A'B'} \cdot \frac{A'Q}{A'D'} = x(1-x) \Rightarrow S(A'MQ) = x(1-x) \cdot S(A'B'D') \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có: $S(B'MN) = x(1-x) \cdot S(B'A'C') \quad (2)$

$$S(C'NP) = x(1-x) \cdot s(C'B'D') \quad (3)$$

$$S(D'PQ) = x(1-x) \cdot S(D'C'A') \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có

$$\begin{aligned} S(MNPQ) &= S(A'B'C'D') - S(A'MQ) - S(B'MN) - S(C'NP) - S(D'PQ) = \\ &= S - x(1-x) (S(A'B'D') + S(B'A'C') + S(C'B'D') + S(D'C'A')) = S - x(1-x) \cdot 2S = S(2x^2 - 2x + 1) \\ &= S \cdot \left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right] \geq \frac{1}{2} \cdot S \end{aligned}$$

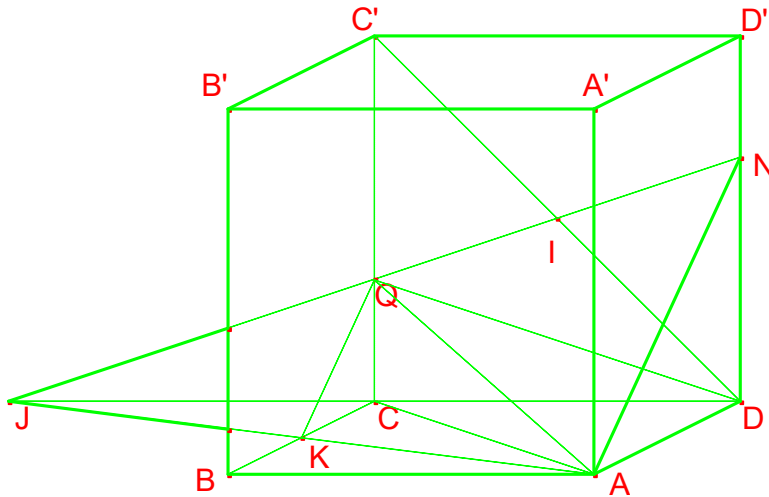
Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{S}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm $AA_1 \Leftrightarrow (P)$ song song và cách đều hai đáy.

 **Câu 61:** (HSG ĐỀ 098) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi I là tâm của hình vuông $CDD'C'$, K là trung điểm của cạnh CB .

1. Dựng thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (AKI) . Tính diện tích của thiết diện theo a .

2. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng $A'D'$ và AQ với Q là giao điểm của (AKI) và CC' .

 Lời giải



1). Gọi J là giao điểm của AK và CD.

Q là giao điểm của JI và CC'; N là giao điểm của IJ và DD'.

Thiết diện là tứ giác AKQN.

Chứng minh được AKQN là hình thang có 2 đáy là KQ, AN.

Chứng minh được C là trung điểm của JD, K là trung điểm JA, Q là trung điểm của JN.

$$\frac{S_{\Delta KQ}}{S_{\Delta JN}} = \frac{JK}{JA} \cdot \frac{JQ}{JN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AKQN} = S_{\Delta JAN} - S_{\Delta KQ} = 3S_{\Delta KQ}.$$

$$CQ = \frac{1}{2}ND = QC' \Rightarrow \frac{CQ}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow CQ = \frac{1}{3}a$$

$$\text{Tính được } KQ = \frac{a\sqrt{13}}{6}; JK = \frac{a\sqrt{5}}{2}; JQ = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos KJQ = \frac{JQ^2 + JQ^2 - KQ^2}{2JK \cdot JQ} = \frac{6}{\sqrt{50}}, \sin KJQ = \sqrt{1 - \cos^2 KJQ} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$S_{\Delta KQ} = \frac{1}{2} JK \cdot JQ \cdot \sin KJQ = \frac{\sqrt{14}a^2}{12}, S_{AKQN} = 3S_{\Delta KQ} = \frac{\sqrt{14}a^2}{4}.$$

2). Vì A'D' // AD nên góc tạo bởi A'D', AQ bằng góc tạo bởi AQ, AD

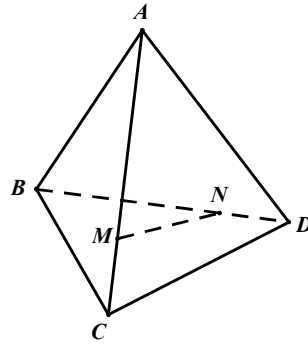
$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow AC' = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tính được } AQ = \frac{a\sqrt{19}}{3}; AD = a; QD = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

$$\cos QAD = \frac{AQ^2 + AD^2 - QD^2}{2AQ \cdot AD} = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

 **Câu 62:** Cho tứ diện ABCD, các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$ ($x, y \neq 1$).
Tìm điều kiện giữa x và y để ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng.

 Lời giải



+) Cho hệ véc tơ: $\vec{a} = \overrightarrow{DA}, \vec{b} = \overrightarrow{DB}, \vec{c} = \overrightarrow{DC}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

+) Ta có $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = -\frac{1}{x-1}\vec{a} + \frac{x}{x-1}\vec{c} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{1-y}\vec{b} \quad (2)$$

$$+) \text{ Từ (1) và (2) suy ra } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \frac{-1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c} \quad (3)$$

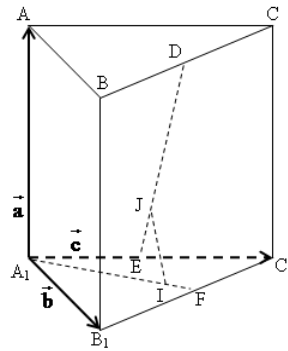
+) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc tơ không cùng phương nên ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng khi và chỉ khi ba véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD} = m(\vec{b} - \vec{a}) - n\vec{c} = -m\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c} \quad (4)$

$$+) \text{ Do } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ không đồng phẳng nên từ (3) và (4) ta có hệ: } \begin{cases} m = \frac{1}{1-x} \\ m = \frac{1}{1-y} \\ n = -\frac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng khi và chỉ khi $x = y$.

🔗 Câu 63: Cho lăng trụ $ABD.A_1B_1C_1$ có tất cả các mặt bên là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, A_1C_1 , B_1C_1 . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng A_1F , DE.

💡 Lời giải



+) Chọn hệ véc tơ $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A}, \vec{b} = \overrightarrow{A_1B_1}, \vec{c} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Khi đó: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = 0, \vec{b}\vec{c} = \frac{1}{2}$.

+) Ta có $\overrightarrow{A_1F} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1E} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

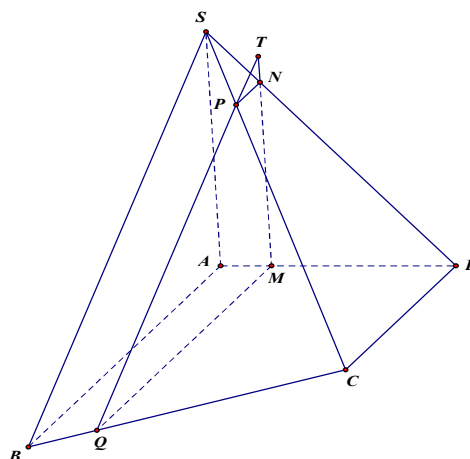
+) Tính $\cos(A_1F, DE)$: $A_1F = \sqrt{A_1F^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $DE = \sqrt{DE^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$, \overrightarrow{A_1F} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos(A_1F, DE) = \left| \cos(\overrightarrow{A_1F}, \overrightarrow{DE}) \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1F} \cdot \overrightarrow{DE}|}{A_1F \cdot DE} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

 **Câu 64:** Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

 **Lời giải**



Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

$$\text{Hệ thức (1)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Hệ thức (2)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}.$$

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Ta có: $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AB \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ // AB (Q \in BC)$

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = PN // AB (N \in SD)$

Vậy thiết diện của (α) với hình chóp là tứ giác MNPQ. Vì $MQ // NP // AB$ nên MNPQ là hình thang

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$), $AB = 2CD$. Gọi M và P lần lượt là điểm thuộc cạnh AD và SC thỏa mãn $\frac{MA}{MD} = \frac{PS}{PC} = x$. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) chứa MP và song song với AB . Tìm x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Lời giải

$$\text{Gọi } T = MN \cap PQ. \text{ Ta có: } QM = \frac{MD}{AD} AB + \frac{AM}{AD} CD = \frac{1}{1+x} AB + \frac{x}{1+x} CD = \frac{x+2}{2(x+1)} AB$$

$$\text{Vì } \frac{MA}{MD} = \frac{QB}{QC} = \frac{PS}{PC} = \frac{NS}{ND} \Rightarrow PQ // SB, MN // SA \Rightarrow \triangle SAB \sim \triangle TMQ$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{TMQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB} \right)^2 = \left(\frac{x+2}{2(x+1)} \right)^2 = \frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow NP = \frac{x}{x+1} CD = \frac{x}{2(x+1)} AB \Rightarrow \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2}$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{TPN}}{S_{TMQ}} = \left(\frac{NP}{MQ} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{TMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+2)^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$$

Câu 66: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Một mặt phẳng đi qua AG cắt các cạnh SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P . Chứng minh rằng: $\frac{BM}{SM} + \frac{CN}{SN} + \frac{DP}{SP} = 1$.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ suy ra

$$\vec{SO} = \frac{1}{4}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}).$$

$$\text{Do } \vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } \vec{GS} + 4\vec{GO} = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{SG} = 4\vec{GO} \Leftrightarrow \vec{SG} = \frac{4}{5}\vec{SO} = \frac{1}{5}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}) = \\ &= \frac{1}{5}\left(\vec{SA} + \frac{SB}{SM}\vec{SM} + \frac{SC}{SN}\vec{SN} + \frac{SD}{SP}\vec{SP}\right). \end{aligned}$$

Vì A, G, M, N, P đồng phẳng nên ta có

$$1 + \frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} + \frac{SD}{SP} = 5 \Leftrightarrow \frac{SM+BM}{SM} + \frac{SN+CN}{SN} + \frac{SP+DP}{SP} = 4 \Leftrightarrow \frac{BM}{SM} + \frac{CN}{SN} + \frac{DP}{SP} = 1.$$

Câu 67: Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bất kỳ trong tam giác ABC . Các đường thẳng đi qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD)$ tại A', B', C' . Tìm vị trí M sao cho $MA' \cdot MB' \cdot MC'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

+ Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $AM \cap BC = \{A_1\}$, $BM \cap AC = \{B_1\}$, $CM \cap AB = \{C_1\}$

+ Trong (DAA_1) , kẻ đường thẳng qua M song song với AD cắt DA_1 tại A'

$$\text{Xét tam giác } DAA_1 \text{ có } MA' \parallel AD \text{ nên } \frac{MA'}{DA} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\text{Tương tự có } \frac{MB'}{BD} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}, \quad \frac{MC'}{DC} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} = 1 \quad (\text{Do } S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAC} + S_{\Delta MAB} = S_{\Delta ABC})$$

$$+ \text{ Ta có: } \frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{MA'}{DA} \cdot \frac{MB'}{DB} \cdot \frac{MC'}{DC}} \Rightarrow MA' \cdot MB' \cdot MC' \leq \frac{1}{27} DA \cdot DB \cdot DC \quad (\text{không đổi})$$

$$\Rightarrow MA' \cdot MB' \cdot MC' \text{ đạt giá trị lớn nhất là } \frac{1}{27} DA \cdot DB \cdot DC \text{ khi}$$

$$\frac{MA'}{DA} = \frac{MB'}{DB} = \frac{MC'}{DC} = \frac{1}{3} \text{ hay } M \text{ là trọng tâm tam giác } ABC.$$

Vậy $MA' \cdot MB' \cdot MC'$ đạt giá trị lớn nhất khi M là trọng tâm tam giác ABC .

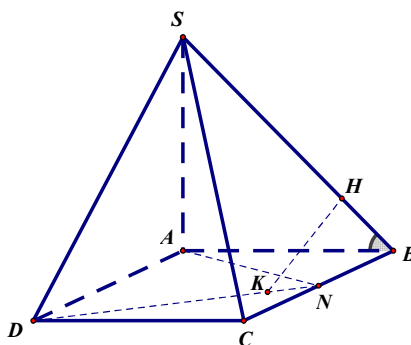
Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi N là trung điểm của BC .

1. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SD và AN .

2. Gọi H, K là hai điểm lần lượt thuộc các đường thẳng SB và DN sao cho $HK \perp SB, HK \perp DN$.

Tính độ dài đoạn HK theo a .

Lời giải



1.

+ Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AS} = \vec{c}$ với $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a, |\vec{c}| = a\sqrt{3}$

+ Ta có $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$ và $\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $|\overrightarrow{SD}| = \sqrt{\overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2} = 2a$, $|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\widehat{\text{Vây}} \cos(\overline{SD}, \overline{AN}) = \frac{\frac{a^2}{2}}{2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} > 0$$

$$\text{ Suy ra } \cos (SD, AN)=\frac{1}{2 \sqrt{5}} .$$

2.

+ Ta có $\overrightarrow{SB} = \vec{a} - \vec{c}$ và $\overrightarrow{DN} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NK} = x\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BN} + y\overrightarrow{DN} = x\left(\vec{a} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{b} + y\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NK} = (x+y)\vec{a} + \frac{1-y}{2}\vec{b} - x\vec{c}$$

$$\text{O} \begin{cases} HK \perp SB \\ HK \perp DN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\bar{a}^{-2} + x\bar{c}^{-2} = 0 \\ (x+y)\bar{a}^{-2} + \frac{y-1}{4}\bar{b}^{-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)a^2 + 3xa^2 = 0 \\ (x+y)a^2 + \frac{y-1}{4}a^2 = 0 \end{cases}$$

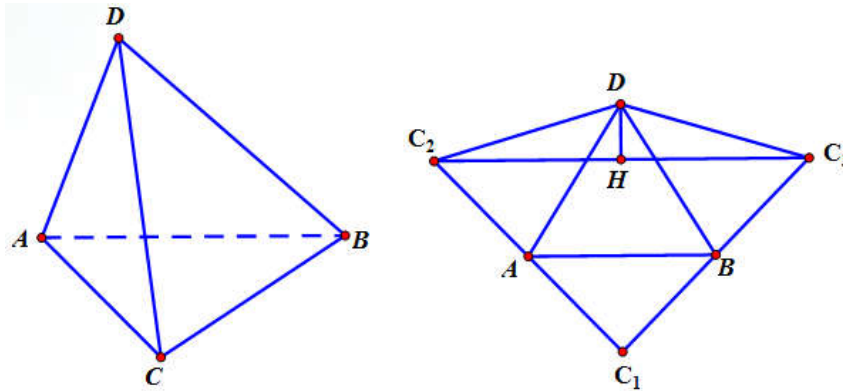
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{HK} = \frac{3}{16}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{1}{16}\vec{c} \Rightarrow HK = \sqrt{\left(\frac{3}{16}a\right)^2 + \left(\frac{3}{8}b\right)^2 + \left(\frac{1}{16}c\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{\dot{y}} \text{ HK} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Câu 69: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = \widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$; $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác ABC bằng 3. Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất của S .

Lời giải



Cắt tứ diện $ABCD$ theo các cạnh DC , BC , AC và trải tứ diện $ABCD$ xuống mặt phẳng (ABD) như sau: $\triangle ACB \rightarrow \triangle AC_1B$; $\triangle ACD \rightarrow \triangle AC_2B$; $\triangle DCB \rightarrow \triangle DC_3B$.

Ta có: $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{C_2AD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC_1} = 180^\circ$ nên C_2, A, C_1 thẳng hàng.

$\widehat{C_3BD} + \widehat{ABD} + \widehat{ABC_1} = 180^\circ$ nên C_1, B, C_3 thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{BCD} = \widehat{AC_2D} + \widehat{BC_3D} = 180^\circ$ suy ra tứ giác nội tiếp $C_1C_2DC_3$.

Suy ra $\widehat{C_2DC_3} = 180^\circ - \widehat{AC_1B} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$.

Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ bằng diện tích tứ giác $C_1C_2DC_3$.

Đặt $CA = x$; $CB = y$ theo định lý Cosin, suy ra $AB = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$. Do chu vi tam giác ABC bằng 3 nên $x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 3$ (*)

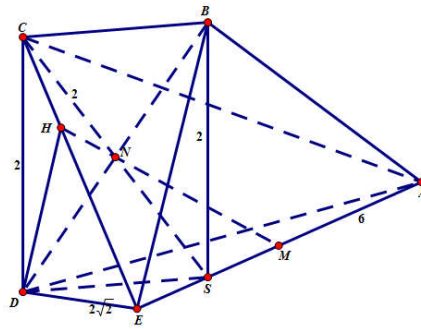
Ta có $S_{C_1C_2DC_3} = S_{C_1C_2C_3} + S_{DC_2C_3} = \frac{1}{2} 2x \cdot 2y \sin 60^\circ + \frac{1}{2} C_2C_3 \cdot DH = \frac{1}{\sqrt{3}} (x + y)^2$

Lại có $\sqrt{x^2 + y^2 - xy} \geq \frac{1}{2} (x + y)$ nên kết hợp với (*) ta được $x + y \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{4}{\sqrt{3}}$, đạt tại $x = y = 1$.

Câu 70: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6$; $SB = 2$, $SC = 4$, $AB = 2\sqrt{10}$ và góc $\widehat{SBC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của cạnh SC đồng thời vuông góc với (SAC) , cắt SA tại M . Tính tỷ số $\frac{SM}{SA}$.

Lời giải



Ta có $SB \perp BC$; $SB^2 + SA^2 = AB^2 \Rightarrow SB \perp SA$, dựng hình bình hành $SBCD$ thì $CD \perp (SAD)$. Mặt cắt chính là mặt qua DB và vuông góc với (SAC) .

Từ D kẻ DE vuông góc với SA , kẻ DH vuông góc với CE thì DH vuông góc với (SAC) , như vậy (DBH) vuông góc với (SAC) nên M là giao của NH với SA .

Tính được $SD = BC = 2\sqrt{3}$; $CD = 2$; $AC = \sqrt{76}$; $BD = 4$,

$$\Delta ACD \text{ có } \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow AD = 6\sqrt{2} \Rightarrow \cos \widehat{ASD} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow SE = 2 \Rightarrow DE = 2\sqrt{2}; CE = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{CH}{CE} = \frac{CD^2}{CE^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HE}{HC} = 2.$$

$$\text{Menelaus} \Rightarrow \frac{NC}{NS} \cdot \frac{MS}{ME} \cdot \frac{HE}{HC} = 1 \Rightarrow \frac{MS}{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow MS = SE = 2$$

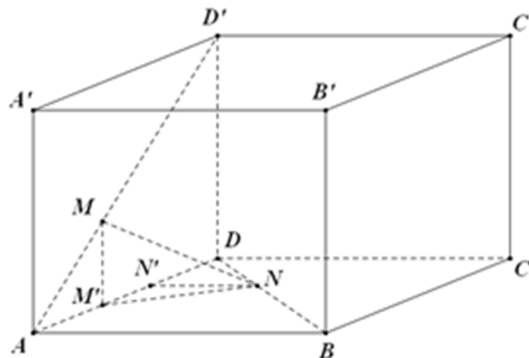
$$\Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tỷ số cần tìm là $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$.

 **Câu 71:** (HSG THPT YÊN ĐỊNH 1 NĂM 2017-2018) Cho hình lập phương $ABC D.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

- Tìm độ dài đoạn MN .
- Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

 Lời giải



Câu 72: (HSG THPT YÊN ĐỊNH 1 NĂM 2017-2018) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có

Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N lên AD

Ta có $MN^2 = M'M^2 + M'N'^2 = M'M^2 + M'N'^2 + N'N^2$

Tam giác $M'AM$ vuông cân tại M' nên có $M'A = M'M = \frac{x\sqrt{2}}{2}$;

Tam giác $N'DN$ vuông cân tại N' nên có $N'D = N'N = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$M'N' = AD - M'A - N'D = a - x\sqrt{2}$

Khi đó $MN^2 = \frac{x^2}{2} + \left(a - x\sqrt{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2$

$MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2 + \frac{a^2}{3} \geq \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN \geq \frac{a\sqrt{3}}{3}$

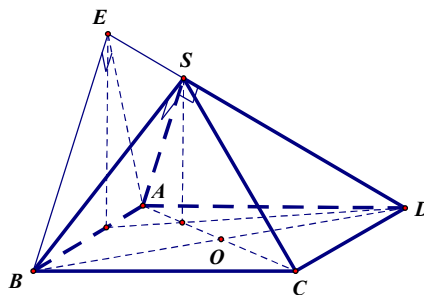
Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ đạt được khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a , $\widehat{ASB} = \widehat{ASD} = 90^\circ$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài SD cắt mặt phẳng (P) tại E .

a. Chứng minh $\widehat{AEB} = 90^\circ$

b. Biết $SA = SO$. Tính độ dài đoạn thẳng CE .

Lời giải



a.

+ Vì $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBD) \Rightarrow BE \perp SA \quad (1)$

+ Mặt khác $(P) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB

mà $AD \perp AB \Rightarrow AD \perp (P) \Rightarrow BE \perp AD \quad (2)$

+ Từ (1) và (2) suy ra $BE \perp (SAD) \Rightarrow BE \perp AE$ hay $\widehat{AEB} = 90^\circ$

b.

+ Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

+ Vì $SA = SO \Rightarrow \Delta SAO$ vuông cân tại S nên $SA = \frac{AO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$

$$+ \text{ Dễ thấy } \Delta SAE \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{SA}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AE = \sqrt{AE^2 + a^2} \Rightarrow AE^2 = \frac{a^2}{3}$$

+ Khi đó $BE^2 = AB^2 - AE^2 = \frac{2a^2}{3}$

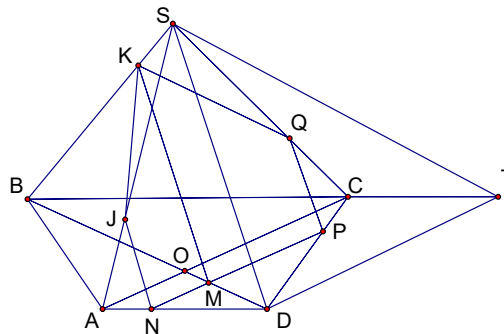
$$+ \text{Vây } CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

a) Tính SD .

b) Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC. **Ⓢ**. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (α). Biết MD = x. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

 **Lời giải**



a) Dễ thấy đáy ABCD là nửa hình lục giác đều cạnh a.

Kẻ $DT \parallel AC$ (T thuộc BC). Suy ra $CT=AD=a$ và DT vuông góc SD .

Ta có: $DT=AC=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SCT có SC=2a, CT=a, $\angle SCT = 120^\circ \Rightarrow ST = a\sqrt{7}$

Xét tam giác vuông SDT có $DT = a\sqrt{3}$, $ST = a\sqrt{7} \Rightarrow SD = 2a$

b) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, DC lần lượt tại N, P.

Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với SD cắt SB, SA, SC lần lượt tại K, J, Q. Thiết diện là ngũ giác NPQKJ.

Ta có: NJ, MK, PQ cùng vuông góc với NP.

$$\text{dt}(\text{NPQKJ}) = \text{dt}(\text{NMKJ}) + \text{dt}(\text{MPQK}) = \frac{1}{2}(NJ + MK)MN + \frac{1}{2}(MK + PQ)MP$$

$$= \frac{1}{2}(NJ + MK).NP \text{ (do } NJ=PQ).$$

$$\text{Ta có: } \frac{NP}{AC} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow NP = \frac{AC.MD}{OD} = \frac{x.a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3x$$

$$\frac{NJ}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow NJ = \frac{SD.OM}{OD} = \frac{2a.\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x\right)}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2(a - x\sqrt{3})$$

$$\frac{KM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM = \frac{SD.BM}{BD} = \frac{2a.(a\sqrt{3} - x)}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x)$$

$$\text{Suy ra: } dt(NPQKJ) = \frac{1}{2} \left(2(a - x\sqrt{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x) \right) 3x = 2(3a - 2\sqrt{3}x)x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(3a - 2\sqrt{3}x)2\sqrt{3}x \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[(3a - 2\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}x \right]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{Diện tích } NPQKJ \text{ lớn nhất bằng } \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

 **Câu 74:** (HSG THPT TRIỆU SƠN 2 NĂM 2017) Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc giữa các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ với (ABC) .

Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \leq \frac{3}{4}.$$

 Lời giải

$$\text{Chứng minh } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} &= \frac{\cos^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{2 - \sin^2 \beta} + \frac{\cos^2 \gamma}{2 - \sin^2 \gamma} \leq \frac{3}{4} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{1 + \cos^2 \beta} + \frac{\cos^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} = 3 - \left(\frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos^2 \beta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \gamma} \right) \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\alpha = \beta = \gamma$

 **Câu 75:** (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA)

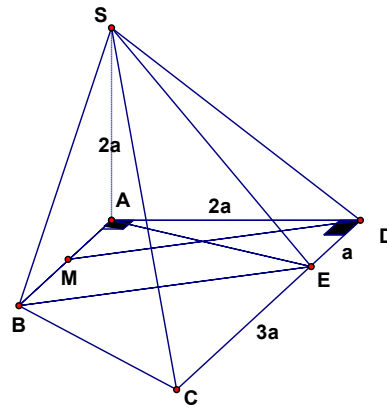
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2a$,

$SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, SB, SD .

1/ Tính góc hợp bởi giữa đường thẳng SB và DM .

2/ Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (ANK) .

 Lời giải



1/ Kẻ $BE \parallel DM$. Ta tính được: $BE = MD = AE = a\sqrt{5}, SB = 2a\sqrt{2}, SE = 3a$

+ Áp dụng định lí cosin trong tam giác SBE ta có:

$$\cos SBE = \frac{SB^2 + BE^2 - SE^2}{2 \cdot SB \cdot BE} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0$$

$$\Rightarrow (SB, MD) = (SB, BE) = \angle SBE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

2/ Cách dựng thiết diện:

Gọi $O = AC \cap BD, F = SO \cap NK$. Trong (SAC), $H = SC \cap AF$. Thiết diện là ANHK

$$\text{Ta có: } AN = AK = \frac{SD}{2} = a\sqrt{2}, NK = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ANK \text{ đều} \Rightarrow S_{ANK} = \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

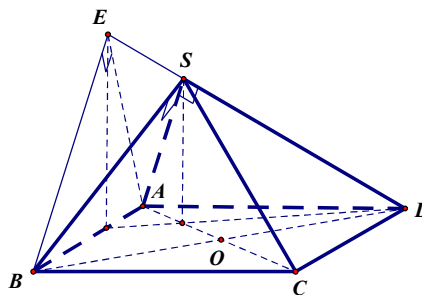
$$S_{HNK} = \frac{1}{2}S_{ANK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{TD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Câu 76: (HSG THPT HẬU LỘC 1 NĂM 2017-2018) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $a, \widehat{ASB} = \widehat{ASD} = 90^\circ$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài SD cắt mặt phẳng (P) tại E .

a. Chứng minh $\widehat{AEB} = 90^\circ$

b. Biết $SA = SO$. Tính độ dài đoạn thẳng CE .

Lời giải



a.

$$+ \text{ Vì } \begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBD) \Rightarrow BE \perp SA \quad (1)$$

+ Mặt khác $(P) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB

$$\text{mà } AD \perp AB \Rightarrow AD \perp (P) \Rightarrow BE \perp AD \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2) suy ra $BE \perp (SAD) \Rightarrow BE \perp AE$ hay $\widehat{AEB} = 90^\circ$

b.

$$+ \text{ Ta có } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$+ \text{ Vì } SA = SO \Rightarrow \Delta SAO \text{ vuông cân tại } S \text{ nên } SA = \frac{AO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

$$+ \text{ Dễ thấy } \Delta SAE \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{SA}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AE = \sqrt{AE^2 + a^2} \Rightarrow AE^2 = \frac{a^2}{3}$$

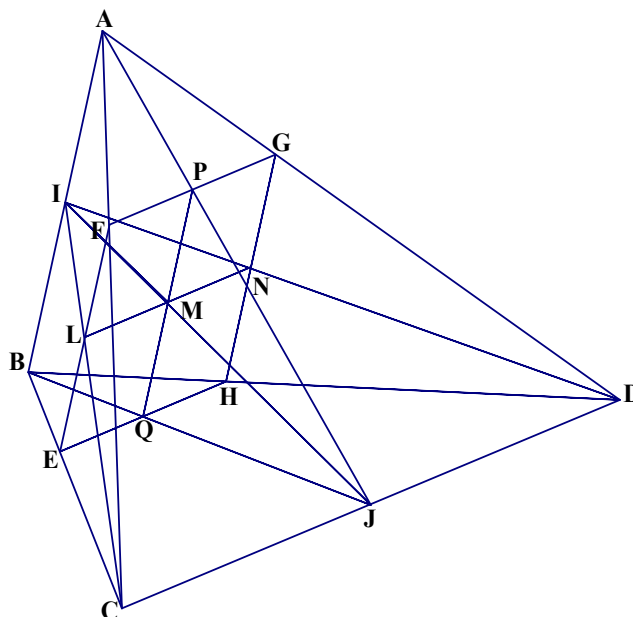
$$+ \text{ Khi đó } BE^2 = AB^2 - AE^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$+ \text{ Vậy } CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Câu 77: (HSG THPT HẬU LỘC 3 NĂM 2017-2018)

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Giả sử $AB \perp CD$, M nằm trên đoạn IJ sao cho $IM = \frac{1}{3}IJ$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua M song song với AB, CD và tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Xác định thiết diện của $(ABCD)$

với mặt phẳng (α) : Ta có:
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow EF // AB$ (1)

Tương tự:
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$$

$\Rightarrow HG // AB$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $EF // HG // AB$ (3)

Ta có:
$$\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$$

$\Rightarrow FG // CD$ (4)

Tương tự:
$$\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH // CD$$
 (5)

Từ (4) và (5), suy ra $FG // EH // CD$ (6)

Từ (3) và (6), suy ra EFGH là hình bình hành

Mà $AB \perp CD$ (*)

Từ (3), (6) và (*), suy ra EFGH là hình chữ nhật

Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật biết $IM = \frac{1}{3}IJ$:

Ta có: $S_{EFGH} = EF.FG = PQ.LN$

Tính LN:

Xét tam giác ICD: Ta có: $LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$ (7)

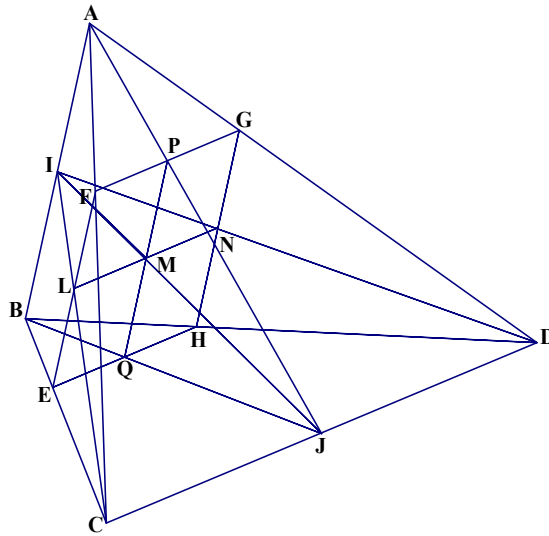
Xét tam giác IJD: Ta có: $MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$ (8)

Từ (7) và (8), suy ra $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{CD}{3} = \frac{b}{3}$

Tương tự: $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}.AB = \frac{2}{3}.a$ Vậy: $S_{EFGH} = \frac{2ab}{9}$

Câu 78: (HSG THPT HẬU LỘC 3 NĂM 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Giả sử $AB \perp CD$, M nằm trên đoạn IJ sao cho $IM = \frac{1}{3}IJ$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua M song song với AB, CD và tứ diện $ABCD$.

 Lời giải



Xác định thiết diện của $(ABCD)$

với mặt phẳng (α) : Ta có:
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow EF // AB$ (1)

Tương tự:
$$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$$

$\Rightarrow HG // AB$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $EF // HG // AB$ (3)

Ta có:
$$\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$$

$\Rightarrow FG // CD$ (4)

Tương tự:
$$\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH // CD$$
 (5)

Từ (4) và (5), suy ra $FG // EH // CD$ (6)

Từ (3) và (6), suy ra EFGH là hình bình hành

Mà $AB \perp CD$ (*)

Từ (3), (6) và (*), suy ra EFGH là hình chữ nhật

Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật biết $IM = \frac{1}{3}IJ$:

Ta có: $S_{EFGH} = EF.FG = PQ.LN$

Tính LN:

Xét tam giác ICD: Ta có: $LN \parallel CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$ (7)

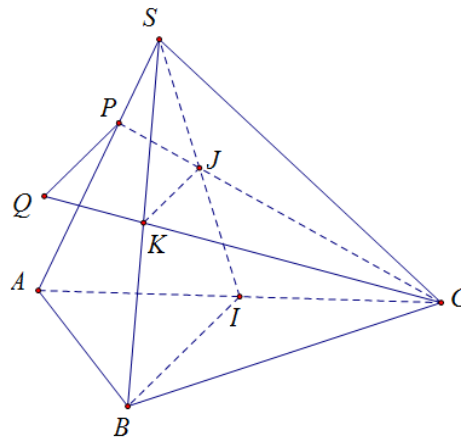
Xét tam giác IJD: Ta có: $MN \parallel JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$ (8)

Từ (7) và (8), suy ra $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{CD}{3} = \frac{b}{3}$

Tương tự: $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}.AB = \frac{2}{3}.a$ Vậy: $S_{EFGH} = \frac{2ab}{9}$

Câu 79: (HSG THPT BA ĐÌNH NĂM 2017-2018) Cho tứ diện đều $SABC$ có độ dài cạnh bằng 1, gọi I, K là trung điểm của các cạnh AC và SB . Trên các đường thẳng AS và CK lấy các điểm P, Q sao cho PQ song song với BI . Tính độ dài đoạn thẳng PQ .

Lời giải



Kẻ $KJ \parallel BI$ (J thuộc SI), P là giao của CJ với SA , kẻ $PQ \parallel JK$ (Q thuộc CK) thì được PQ thỏa mãn P thuộc SA , Q thuộc CK và $PQ \parallel BI$.

Ta có ΔABC đều cạnh 1 nên $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Qua cách dựng PQ thì J là trung điểm của SI nên $KJ = \frac{1}{2}BI = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Xét ΔSAI với 3 điểm P, J, C thẳng hàng ta có $1 = \frac{PS}{PA} \cdot \frac{CA}{CI} \cdot \frac{JI}{JS} = \frac{PS}{PA} \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{PS}{PA} = \frac{1}{2}$

Xét ΔAPC với 3 điểm thẳng hàng S, J, I ta có $1 = \frac{JP}{JC} \cdot \frac{IC}{IA} \cdot \frac{SA}{SP} = \frac{JP}{JC} \cdot 1 \cdot 3 \Rightarrow \frac{JP}{JC} = \frac{1}{3}$

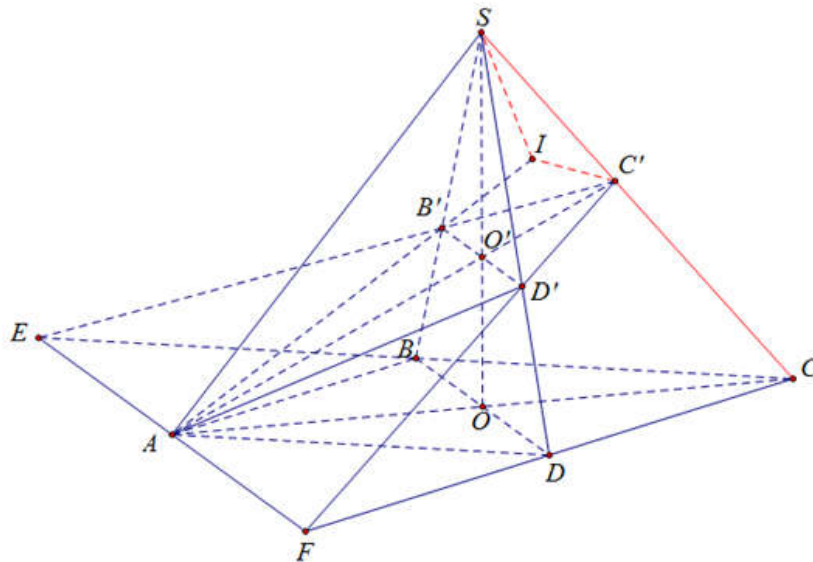
Suy ra $\frac{CJ}{CP} = \frac{3}{4}$

Suy ra $\frac{JK}{PQ} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{4}{3}JK = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $PQ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

 **Câu 80:** (HSG THPT BA ĐÌNH NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $OA = 2OB = 2a$ và SO vuông góc với đáy $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính cosin góc giữa (SAB) với (α) biết $\Delta B'C'D'$ đều.

 Lời giải



$(\alpha) \cap (ABCD) = EF$ trong đó E đối xứng với C qua B và F đối xứng với C qua D, E đối xứng với F qua A và $EF = 2BD = 4a$. Tam giác $B'C'D'$ đều nên tam giác EFC' đều.

$$CC' = x \Rightarrow C'F = \sqrt{20a^2 - x^2} = EF = 4a \Rightarrow x = 2a; AC' = \sqrt{AC^2 - CC'^2} = \sqrt{16a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{3}$$

$$SC^2 = SA^2 = AC'^2 + SC'^2 = AC'^2 + (SC - CC')^2$$

$$\Rightarrow SC^2 = 12a^2 + (SC - 2a)^2 = 16a^2 - 4a.SC + SC^2 \Rightarrow SC = 4a \Rightarrow SO = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Hạ } C'I \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SC'I) \Rightarrow ((SAB); (AB'C')) = \widehat{SIC'};$$

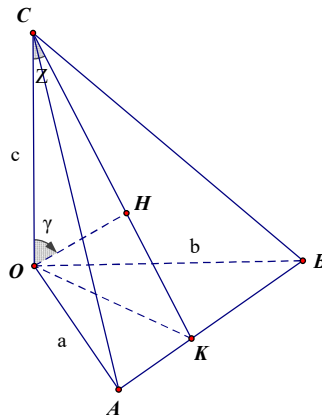
$$AO' = \frac{2}{3}AC' = \frac{4a\sqrt{3}}{3}; O'B' = \frac{2a}{3} \Rightarrow \cot \widehat{IAC'} = \frac{AO'}{O'B'} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{IAC'} = \frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow IC' = AC' \cdot \sin \widehat{IAC'} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

$$\text{Từ đó ta có } \tan \varphi = \tan \widehat{SIC'} = \frac{SC'}{IC'} = \frac{13}{\sqrt{39}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

 **Câu 81:** (HSG THPT SẦM SƠN NĂM 2017-2018) Cho $OABC$ là tứ diện có OA, OB, OC đôi một vuông góc. H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi OH với OA, OB, OC . Chứng minh rằng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

 Lời giải



Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (ABC)

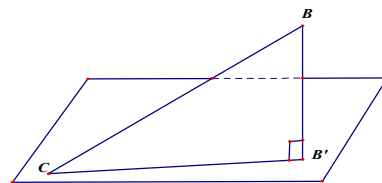
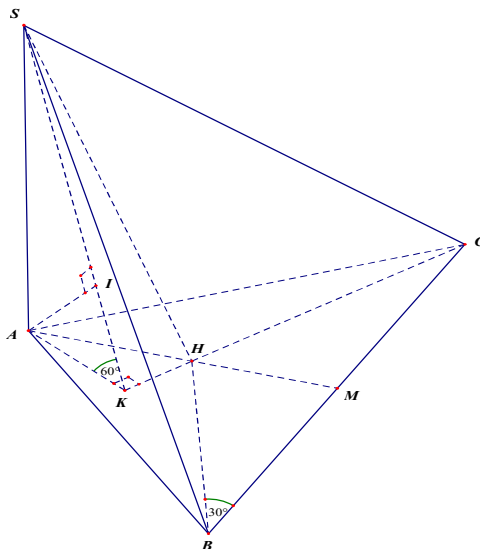
Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Ta có $\cos \gamma = \frac{OH}{OC} \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{OH^2}{OC^2}$. Tương tự: $\cos^2 \alpha = \frac{OH^2}{OA^2}; \cos^2 \beta = \frac{OH^2}{OB^2}$. Nên

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = OH^2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) = 1$$

🔗 Câu 82: (HSG THPT SẦM SƠN NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC = a$, $\angle HBC = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính SA và cosin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) .

💡 Lời giải



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên HC .

Ta có $AH = HM = HB \sin 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow AK = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Góc giữa (SHC) và (ABC) là $\angle SKA = 60^\circ \Rightarrow SA = AK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

* Gọi B' là hình chiếu của B trên (SHC) , suy ra góc giữa BC' và (SHC) là $\angle BCB'$. Gọi I là hình chiếu của A trên $SK \Rightarrow AI \perp (SHC)$.

*Ta có $BB' = d(B, (SHC)) = 2d(M, (SHC)) = 2d(A, (SHC)) = 2AI$.

Trong tam giác vuông SAK , ta có $AI = \frac{AK \cdot AS}{\sqrt{AK^2 + AS^2}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{3a}{8} \Rightarrow BB' = \frac{3a}{4}$.

Do đó $\sin \angle BCB' = \frac{BB'}{BC} = \frac{3a}{4 \cdot 2BM} = \frac{3a}{8 \cdot HB \cdot \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\cos \angle BCB' = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

Câu 83: (HSG THPT THƯỜNG XUÂN) Cho tứ diện $ABCD$, hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều cạnh $2a$.

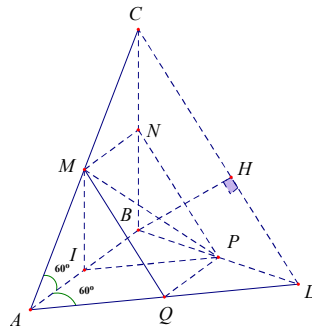
a. Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, BD, DA . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AD , biết $MP = a\sqrt{3}$

c. Gọi BH là độ dài đường cao của tam giác BCD , H nằm trên CD sao cho CD, BH, BD theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó và tính độ dài đoạn CD .

Lời giải

a.



Ta có: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ = 0$

Vậy $CD \perp AB$

* Ta có: $MN \parallel PQ \parallel AB$ và $MN = PQ = \frac{AB}{2}$

Nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vì $MN \parallel AB$ và $NP \parallel CD$ mà $AB \perp CD$ nên hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b. Gọi I là trung điểm của AB .

Ta có: $\left. \begin{array}{l} IP // AD \\ IM // BC \end{array} \right\} \Rightarrow (CB, AD) = (IM, IP).$

Xét tam giác IMP có: $IM = IP = a, MP = a\sqrt{3}.$

Do đó, $\cos \widehat{MIP} = \frac{IM^2 + IP^2 - MP^2}{2 \cdot IM \cdot IP} = \frac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIP} = 120^\circ$

Vậy: $(CB, AD) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

c. Theo bài ra: CD, BH, BD theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Gọi q là công bội của cấp số nhân trên, $q > 0$.

Khi đó ta có: $BH = CD \cdot q; BD = CD \cdot q^2$

$HC = HD = \frac{CD}{2}$ (Vì tam giác BCD cân tại B).

Trong tam giác BHD vuông tại H nên ta có: Khi đó: $CD = \frac{BD}{q^2} = \frac{2a}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{1+\sqrt{2}}$

$BD^2 = BH^2 + HD^2 \Rightarrow BD^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow (CD \cdot q^2)^2 = \frac{CD^2}{4} + (CD \cdot q)^2$

$\Leftrightarrow CD^2 \cdot q^4 = \frac{CD^2}{4} + CD^2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ q^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Do $q^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

Vậy $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$

Khi đó: $CD = \frac{BD}{q^2} = \frac{2a}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{1+\sqrt{2}}.$

Câu 84: (HSG 11 THPT THIỆU HÓA THANH HÓA) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

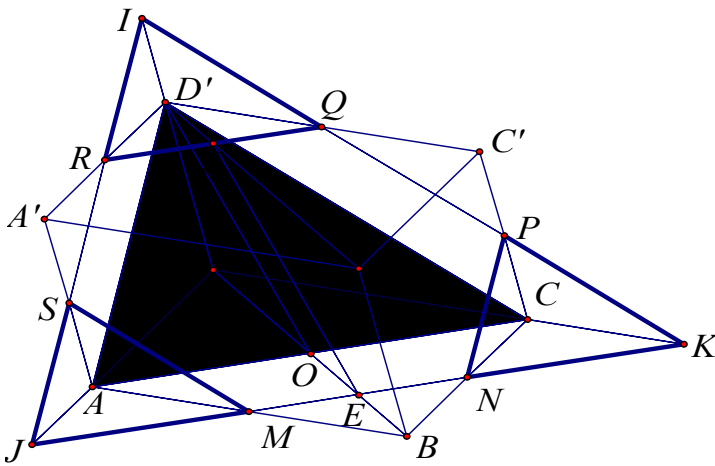
a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .

b) Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

c) Gọi C_1 là trung điểm của CC' . Mặt phẳng (Q) đi qua AC_1 cắt $C'B, C'D$ lần lượt tại B_1, D_1 khác

C' . Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} \leq \frac{C'B_1}{C'B} + \frac{C'D_1}{C'D} \leq \frac{3}{2}$

 Lời giải



a) • Trong mp($ABCD$), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB , BC lần lượt tại E , N .
 Trong mp($BDD'B'$), qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O=AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .
 Trong mp($A'B'C'D'$), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D'$, $D'C'$ lần lượt tại R , Q .
 Trong mp($AA'D'D$), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .
 Trong mp($CC'D'D$), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .
 Thiết diện là lục giác $MNPQRS$

b) • Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' .

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI , ACD' , RQI , JMS , NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ=NK \text{ và } PK=QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI , JMS , NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI , ACD' lần lượt là S_2 , S)

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{DC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$$

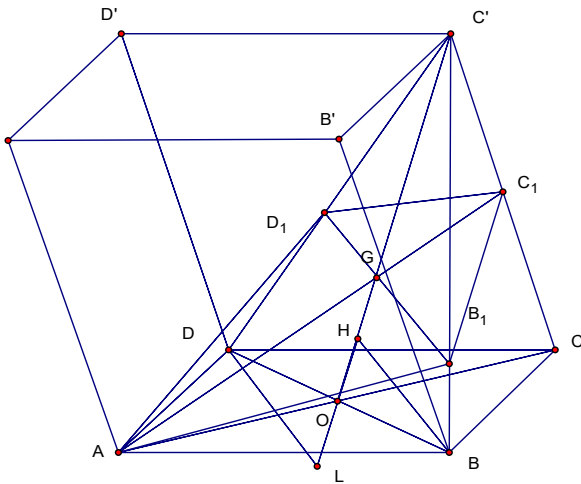
$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC} \right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td} = S_2 - 3S_1$

$$S_{td} = 2S(-k^2 + k + \frac{1}{2}) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \text{)}$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

c.



• Lấy $G = AC_1 \cap B_1D_1$ và $O = AC \cap BD$,

ta có: C', O, G là các điểm chung của 2 mặt phẳng $(C'AC)$ và $(C'BD)$

$\Rightarrow C', O, G$ thẳng hàng.

Và G là trọng tâm của tam giác $C'AC$

$$\Rightarrow \frac{C'G}{C'O} = \frac{2}{3}$$

Vẽ $BH \parallel GB_1$ và $DL \parallel D_1G$ ($H, L \in C'O$) $\Rightarrow OH = OL$. Đặt $x = \frac{C'D}{C'D_1}$; $y = \frac{C'B}{C'B_1}$

$$\Rightarrow x + y = \frac{C'D}{C'D_1} + \frac{C'B}{C'B_1} = \frac{C'L}{C'G} + \frac{C'H}{C'G} = \frac{2C'O}{C'G} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow x, y \in [1; 2] \quad (*)$$

• Suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3 \left(\frac{2}{x+y} \right)^2 = \frac{4}{3} \quad (1)$

Từ (*): $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \geq 2 \Leftrightarrow x \cdot y \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$; Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm

Câu 85: (TRƯỜNG THPT TỈNH GIA 1-2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$), AC cắt BD tại điểm O . Cạnh bên $SD = 2a$. Gọi mặt phẳng (α) là mặt phẳng đi qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD, AC . Mặt phẳng (α) cắt AD, SA lần lượt tại N và I .

a. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) .

b. Đặt $MD = x$ ($x > 0$). Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất, biết MN vuông góc với NI .

Lời giải

a) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, DC lần lượt tại N, P .

Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với SD cắt SB, SA, SC lần lượt tại K, J, Q . Thiết diện là ngũ giác $NPQKJ$.

b) Ta có: NJ, MK, PQ cùng vuông góc với NP .

$$\begin{aligned} dt(NPQKJ) &= dt(NMKJ) + dt(MPQK) = \frac{1}{2}(NJ + MK)MN + \frac{1}{2}(MK + PQ)MP \\ &= \frac{1}{2}(NJ + MK).NP \quad (\text{do } NJ=PQ). \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \frac{NP}{AC} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow NP = \frac{AC.MD}{OD} = \frac{x.a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3x$$

$$\frac{NJ}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow NJ = \frac{SD.OM}{OD} = \frac{2a.\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x\right)}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2(a - x\sqrt{3})$$

$$\frac{KM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM = \frac{SD.BM}{BD} = \frac{2a.(a\sqrt{3} - x)}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } dt(NPQKJ) &= \frac{1}{2} \left(2(a - x\sqrt{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x) \right) 3x = 2(3a - 2\sqrt{3}x)x \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(3a - 2\sqrt{3}x)2\sqrt{3}x \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[(3a - 2\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}x \right]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Diện tích NPQKJ lớn nhất bằng } \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

 **Câu 86:** (HSG THPT SẦM SƠN NĂM HỌC 2017-2018) Cho tứ diện đều ABCD có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đặt $AM = x$, $AN = y$. Chứng minh rằng $x + y = 3xy$. Tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện DAMN nhỏ nhất.

 **Lời giải**

Kẻ $DH \perp MN$, do $(DMN) \perp (ABC)$ suy ra $DH \perp (ABC)$.

$$\text{Ta có: } S_{AMN} = \frac{1}{2}.AM.AN.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy; S_{AMN} = S_{AMH} + S_{ANH}$$

$$= \frac{1}{2}.AM.AH.\sin 30^\circ + \frac{1}{2}.AN.AH.\sin 30^\circ = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y).$$

Mà ABCD là tứ diện đều, nên suy ra H là tâm của tam giác đều ABC

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{3}}{4}xy = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y) \Rightarrow x+y = 3xy \quad (0 \leq x, y \leq 1).$$

Diện tích toàn phần của tứ diện DAMN:

$$S = S_{AMD} + S_{AND} + S_{DMN} + S_{AMN}$$

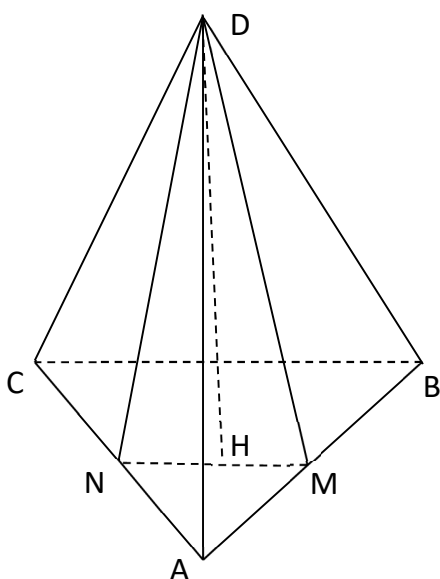
$$= \frac{1}{2}AD.AM.\sin 60^\circ + \frac{1}{2}AD.AN.\sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} DH.MN + \frac{1}{2} AM.AN.\sin 60^\circ$$

$$= \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy-1)}.$$

$$\text{Từ } 3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}.$$

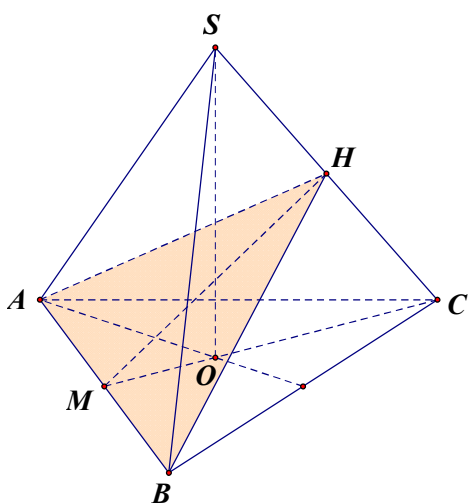
$$\text{Suy ra } \min S = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{2})}{9}, \text{ khi } x = y = \frac{2}{3}.$$



🔗 **Câu 87:** (HSG THPT SẦM SƠN NĂM HỌC 2017-2018) Cho hình chóp đều S.ABC đỉnh S, chiều cao h, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Qua AB dựng mp (P) vuông góc với SC.

1. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P).
2. Tính diện tích thiết diện theo a và h.

💬 Lời giải



Gọi O là trọng tâm tam giác ABC ta có $SO \perp (ABC)$ khi đó $SO \perp AB$, gọi M là trung điểm AB do tam giác ABC đều nên $CM \perp AB$ vậy $AB \perp (SMC)$.

Trong mp(SMC) kẻ $MH \perp SC$ ta có mặt phẳng $(AHB) \perp SC$.

Thiết diện là tam giác AHB .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB.$$

$$\text{Theo giả thiết } AB = a. \text{ ta có } MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OC = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SO = h, SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$$

$$\text{Ta có: } MH \cdot SC = SO \cdot MC \Rightarrow MH = \frac{h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}} = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}$$

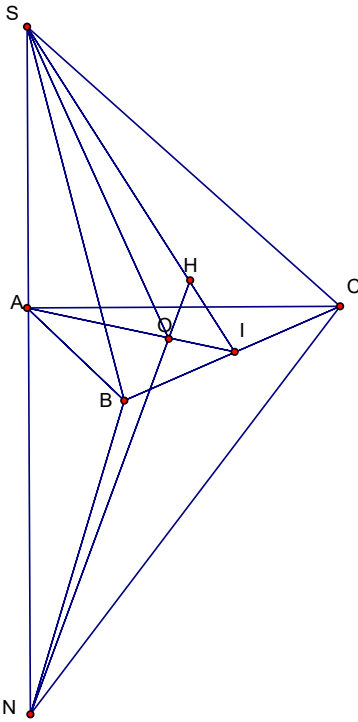
$$S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB = \frac{3a^2h}{4\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

 **Câu 88:** (HSG THPT TRIỆU SƠN 5 NĂM 2017-2018) Cho hình chóp SABCD có ABCD là tam giác đều. Gọi H, O lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC. OH cắt SA tại N.

1. Giả sử $SA \perp (ABC)$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$ và tứ diện BCSN có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

2. Giả sử $SH \perp (ABC)$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy; β là góc giữa hai mặt bên kề nhau. Chứng minh rằng $2\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{3}\sin\alpha$.

 Lời giải



Chứng minh $OH \perp (SBC)$

+ AO cắt BC tại I. $BC \perp AO$ (ΔABC đều)

$BC \perp SA$

nên $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AI$ nên H nằm trên đường AI. OH nằm trong $(SAI) \Rightarrow BC \perp OH$ (1)

+ Có $BO \perp AC$; $BO \perp SA \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow$

$BO \perp SC$

$BH \perp SC \Rightarrow SC \perp (BOH) \Rightarrow AC \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $OH \perp (SBC)$

+) Chứng minh BCSN có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SN \perp BC$

$SC \perp (BOH) \Rightarrow SC \perp BN$ (vì N nằm trên OH)

Chứng minh tương tự ta có

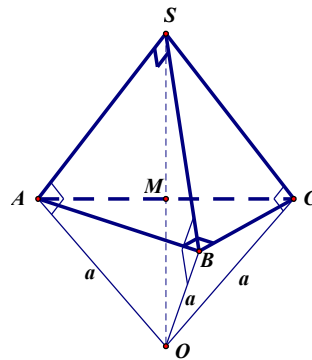
$SB \perp (COH) \Rightarrow SB \perp CN$ (N nằm trên OH)

Câu 89: (HSG THPT VINH LỘC NĂM 2017-2018) Cho điểm O cố định và một số thực a không đổi. Một hình chóp $S.ABC$ thay đổi thỏa mãn $OA = OB = OC = a$, $SA \perp OA$, $SB \perp OB$, $SC \perp OC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Chứng minh rằng:

a. ΔABC là tam giác vuông.

b. Khoảng cách SO không thay đổi.

 Lời giải



a.

+ Đặt $SO = x$.

+ Vì các tam giác SAO, SBO, SCO lần lượt vuông tại A, B, C nên $SA = SB = SC = \sqrt{x^2 - a^2}$

+ Tam giác SAB vuông tại S nên $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 2(x^2 - a^2)$ (1)

+ Xét tam giác SBC ta có $\widehat{BSC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta SBC$ đều nên $BC^2 = x^2 - a^2$ (2)

+ Xét tam giác SCA ta có $CA^2 = SC^2 + SA^2 - 2SC.SA.\cos 120^\circ = 3(x^2 - a^2)$ (3)

+ So sánh (1), (2) và (3) ta thấy $CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B .

b.

+ Gọi M là trung điểm của AC

+ Vì ABC là tam giác vuông tại B nên $MA = MB = MC$ (4)

+ Mặt khác $SA = SB = SC$ (5) và $OA = OB = OC$ (6)

+ Từ (4) và (5) suy ra M là hình chiếu của S lên (ABC)

+ Từ (4) và (6) suy ra M là hình chiếu của O lên (ABC)

+ Từ đây suy ra $SO \perp (ABC)$ tại M . Do đó AM là đường cao của tam giác vuông SAO

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{OA^2} \Leftrightarrow \frac{4}{CA^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{OA^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3(x^2 - a^2)} = \frac{1}{(x^2 - a^2)} + \frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow 3(x^2 - a^2) = a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4a^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

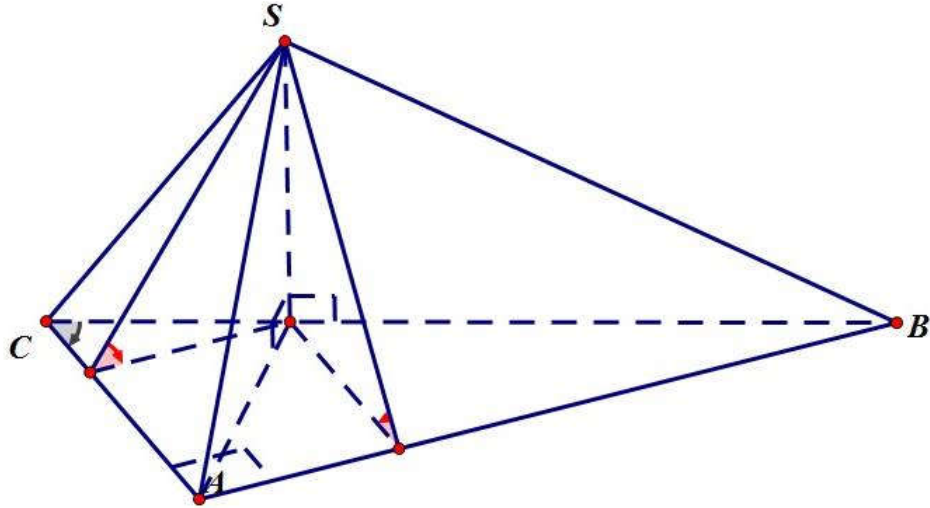
+ Vậy $SO = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ đpcm.

 **Câu 90:** (HSG SGD&ĐT HÀ TĨNH NĂM 2006-2007) Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\angle ACB = \alpha$ và cạnh $BC = a$. Mặt bên SBC vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với đáy góc β . Các góc SBC và SCB đều nhọn.

a) Cho $\alpha = 45^\circ$ và $\beta = 60^\circ$, hãy xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

b) Khi α và β không đổi, tìm giá trị của α để đường cao SH của hình chóp có độ dài lớn nhất.

 Lời giải



Do mp(SBC) vuông góc với đáy ABC và các góc SBC, SCB đều nhọn nên H thuộc cạnh BC của tam giác ABC.

Vẽ $HM \perp AC, HN \perp AB$ suy ra $AC \perp SM, AB \perp SN$ nên $\angle SMH = \angle SNH = \beta$ do đó 2 tam giác vuông: SMH, SNH bằng nhau, suy ra $MH = NH$, từ đó ta có tứ giác AMHN là hình vuông.

a) Khi $\alpha = 45^\circ$ thì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC, AH = \frac{a}{2}$.

Vẽ tia phân giác của góc SMH cắt SH tại K thì mp(KAC) và mp(KAB) thứ tự là mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện cạnh AC, AB của hình chóp S.ABC. Để thấy giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng AK.

Vẽ tia phân giác của góc SHA cắt AK tại I thì I cách đều 4 mặt của hình chóp S.ABC nên nó là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Để thấy $HM = \frac{a}{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

Xét tam giác vuông KHM: $KH = HM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ (do $\angle KMH = 30^\circ$)

Vẽ $IE \perp AH, IF \perp HK$ thì $IE = IF = r$ với r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC.

Ta có: $IE \cdot AH + IF \cdot HK = AH \cdot HK$ (vì mỗi vế cùng bằng 2 lần diện tích $\triangle AHK$)

$$\Rightarrow r = \frac{AH \cdot HK}{AH + HK} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{6}}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2\sqrt{6}}} = \frac{a}{2(\sqrt{6} + 1)}$$

b) Đặt $HM = HN = x$. Xét tam giác vuông NBH: $BH = \frac{NH}{\cos \alpha} \Rightarrow BH = \frac{x}{\cos \alpha}$ (1)

Xét tam giác vuông MCH: $HC = \frac{HM}{\sin \alpha} \Rightarrow HC = \frac{x}{\sin \alpha}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $a = \frac{x(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \Rightarrow x = \frac{a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

Xét tam giác vuông SHM:

$$SH = x \cdot \tan \beta = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \cdot \tan \beta$$

Do a, β không đổi nên SH lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương ta được:

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \leq \frac{\left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2}\right)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{4}(\sin \alpha + \cos \alpha) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$

Gía trị thỏa mãn là $\alpha = 45^\circ$

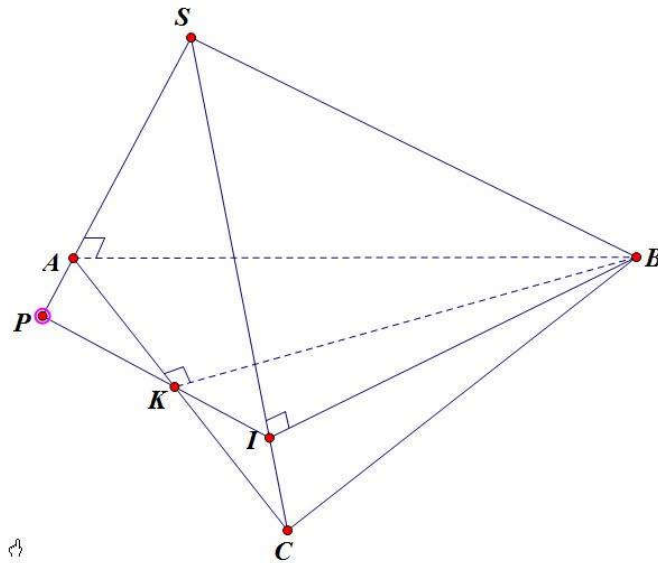
Vậy đường cao SH của hình chóp S.ABC lớn nhất khi và chỉ khi $\alpha = 45^\circ$.

 **Câu 91:** (HSG ĐỀ 142) Cho hình chóp S.ABC với đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi I, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B của tam giác BSC, BA. Đường thẳng IK cắt đường thẳng SA tại P.

a) Chứng minh tứ diện SPBC có các cặp cạnh đối vuông góc.

b) Tam giác ABC cố định có $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, điểm S di động. Tìm độ dài đoạn thẳng SA trong trường hợp diện tích tam giác SPC đạt giá trị nhỏ nhất.

 Lời giải



a) • $SP \perp BC$ (do $SA \perp (ABC)$) $\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow PC \perp BK, BK \perp SC$

• $\begin{cases} SC \perp BI \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BIK) \Rightarrow SC \perp BP, SC \perp PI$

• Trong (SPC) $\begin{cases} CK \perp SP \\ PK \perp SC \end{cases} \Rightarrow K$ là trực tâm tam giác $SPC \Rightarrow PC \perp SK$

• $\begin{cases} PC \perp SK \\ PC \perp BK \end{cases} \Rightarrow PC \perp (SBK) \Rightarrow PC \perp SB$

• Tứ diện $SPBC$ có $\begin{cases} SP \perp BC \\ SC \perp BP \\ PC \perp SB \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ diện $SPBC$ có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau

b) Ta có $\triangle SAK \sim \triangle CAP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SA}{AC} = \frac{AK}{AP} \Rightarrow SA \cdot AP = AK \cdot AC$ không đổi

$\Rightarrow S_{SPC} = \frac{1}{2} AC \cdot SP = \frac{1}{2} AC \cdot (SA + AP) \geq AC \cdot \sqrt{SA \cdot AP} = AC \cdot \sqrt{AK \cdot AC}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow SA = AP = \sqrt{AK \cdot AC}$

$\Leftrightarrow SA = \sqrt{BK \cdot \cot(180^\circ - \alpha - \beta) \cdot \frac{CH}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}}$

$\Leftrightarrow SA = \sqrt{a \cdot \sin \beta \cdot \cot(180^\circ - \alpha - \beta) \cdot \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}}$

$\Leftrightarrow SA = \sqrt{a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \frac{\cos(180^\circ - \alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}}$

$$\Leftrightarrow SA = a \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

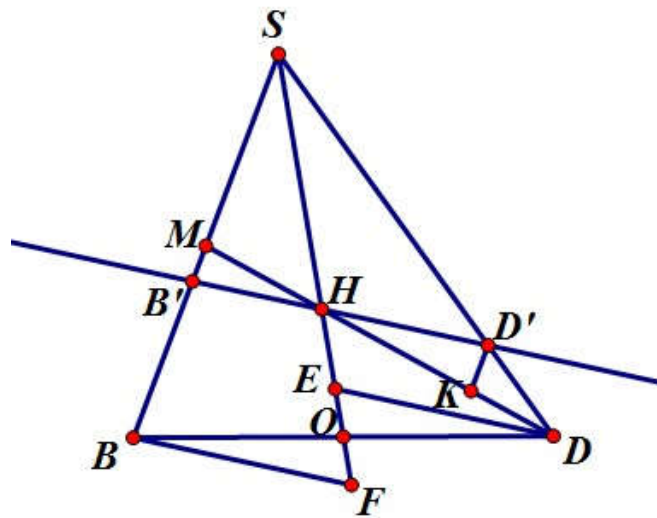
$$(CH \perp AB, H \in AB)$$

$$\text{Vậy khi } S_{SPC} \text{ đạt giá nhỏ nhất thì } SA = a \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha - \beta)}.$$

Câu 92: (HSG ĐỀ 143) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của SC . Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại các điểm B', D' khác S . Chứng minh rằng

$$\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của BD và AC , suy ra $SO = (SBD) \cap (SAC)$.

Gọi H là giao điểm của $B'D'$ và AM . Ta có:

$$\begin{cases} (SBD) \cap (SAC) = SO \\ B'D' \in (SBD) \\ AM \in (SAC) \\ B'D' \cap AM = \{H\} \end{cases} \Rightarrow H \in SO$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$$\frac{SM}{MC} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{OH}{HS} = 1 \Leftrightarrow 1.2 \cdot \frac{OH}{HS} = 1 \Leftrightarrow \frac{OH}{HS} = \frac{1}{2}$$

Mà H thuộc trung tuyến AO suy ra H là trọng tâm tam giác SBD

Xét mặt phẳng (SBD) :

+ Lấy $E, F \in SO$ sao cho $BF \parallel DE \parallel B'D'$. Suy ra ta có:

$$\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = \frac{SH}{SF} + \frac{SH}{SE} = SH \left(\frac{1}{SF} + \frac{1}{SE} \right) \geq \frac{4SH}{SF + SE} = \frac{4SH}{2SO} = \frac{4}{3}$$

Vậy $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \geq \frac{4}{3}$

+Vẽ trung tuyến DM của tam giác SBD

Do vai trò của B và D là bình đẳng nhau nên vai trò B' và D' cũng bình đẳng nhau

Giả sử $HD' \geq HB'$ (trường hợp ngược lại chứng minh tương tự)

Theo định lý Talet ta có $\frac{D'K}{B'M} = \frac{HK}{HM} \geq 1 \Rightarrow D'K \geq B'M$

Lấy K thuộc DM sao cho $D'K \parallel SB$.Ta có

$$\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = \left(\frac{SM}{SB} + \frac{MB'}{SB} \right) + \left(\frac{SD}{SD} - \frac{DD'}{SD} \right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{DD'}{SD} - \frac{MB'}{SB} \right)$$

Mặt khác lại có $\frac{DD'}{SD} = \frac{D'K}{SM} = \frac{2D'K}{SB} \geq \frac{MB'}{SB} \Rightarrow \frac{DD'}{SD} - \frac{MB'}{SB} \geq 0$

Suy ra $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = \frac{3}{2} - \left(\frac{DD'}{SD} - \frac{MB'}{SB} \right) \leq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}$ (dpcm)

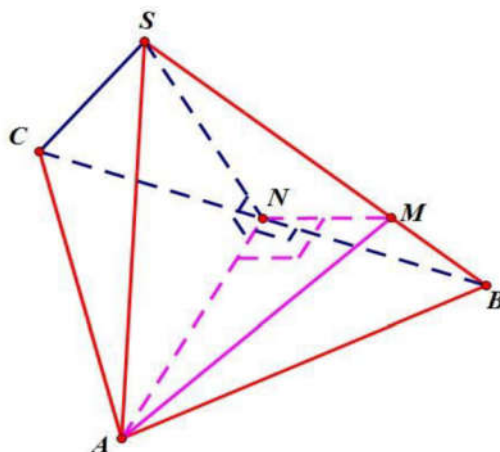
🔗 Câu 93: (HSG ĐỀ 145) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = AB = AC = a$, diện tích tam giác SBC là S_0 . Gọi M là điểm di động trên SB, N là trung điểm của BC. Biết AN vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN theo a và S_0 .

💡 Lời giải

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = AB = AC = a$, diện tích tam giác SBC là S_0 .

Gọi M là điểm di động trên SB, N là trung điểm của BC. Biết AN vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN theo a và S_0 .



• Ta có $BN = CN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{SA^2 - AN^2} = SN$.

Suy ra $\triangle SBC$ vuông tại S, do đó ta có $SC = \frac{2S_0}{a}$ và $BC = \sqrt{SC^2 + SB^2} = \sqrt{\frac{4S_0^2}{a^2} + a^2}$.

• Xét $\triangle CAN$ vuông tại N ta có $AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}BC^2} = \sqrt{\frac{a^4 - 4S_o^2}{2a^2}}$.

• Ta có $S_{AMN} = \frac{1}{2}AN.MN \geq \frac{1}{2}AN.d(N, SB) = \frac{1}{2}AN \cdot \frac{1}{2}SC = \frac{1}{4} \cdot \frac{2S_o}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^4 - 4S_o^2}{2a^2}}$.

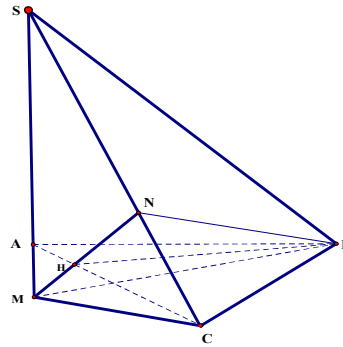
Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là $\frac{S_o}{2a} \cdot \sqrt{\frac{a^4 - 4S_o^2}{2a^2}}$.

Câu 94: (HSG ĐỀ 147) Cho tam giác nhọn ABC cố định. Trên tia $Ax \perp (ABC)$ lấy điểm S khác A. Kẻ các đường cao BH của các tam giác BAC. Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc với SB, giả sử (P) cắt tia đối của tia AS tại M. Đường thẳng MH cắt SC tại N.

a) Chứng minh tứ diện SMBC có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau và $SC \perp (MBN)$

b) Biết cạnh $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$; $\angle ACB = \beta$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác SPC theo a, α, β khi S di động trên tia Ax (S khác A).

Lời giải



a) Ta có $BC \perp SM$ (giả thiết) (1)

Mà $MC \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra S.MBC là tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc nên cặp thứ 3 cũng vuông góc

Ta có $BH \perp (SAC)$ nên $SC \perp HB$

Theo chứng minh trên thì $SC \perp BM$, do đó ta có $SC \perp (MBN)$

b) Từ câu a ta có $SC \perp MN$, do đó $\triangle AHM, \triangle ASC$ đồng dạng (g.g)

do đó $\frac{AH}{SA} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow SA \cdot AM = AH \cdot AC$

$S_{\triangle SMC} = \frac{1}{2}SM \cdot AC = \frac{1}{2}(SA + AM)AC \geq \sqrt{SA \cdot AM} \cdot AC = \sqrt{AH \cdot AC} \cdot AC$

Có “=” khi $SA = AM$

Theo định lý hàm số sin ta có

$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB}{\sin \beta} \Rightarrow AC = a \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; AB = a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

$AH = AB \cos(\alpha + \beta) = a \sin \beta \cot(\alpha + \beta)$

$$S_{\Delta SMC} \geq \sqrt{AH \cdot AC} \cdot AC = \frac{a^2 \sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}$$

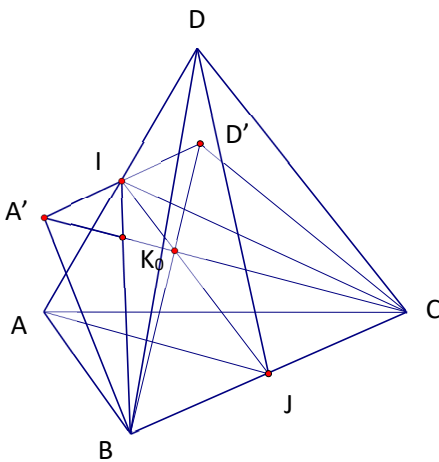
$$\text{Có "=" khi } SA = \frac{1}{2} \sqrt{AH \cdot AC} = \frac{a}{2 \sin(\alpha + \beta)} \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}$$

Câu 95: (HSG HUẾ 2000-2001) Cho tứ diện $ABCD$ có hai cạnh đối bằng b, c và các cạnh còn lại bằng a .

a/ Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm tùy ý trong không gian đến các đỉnh của tứ diện.

b/ Giả sử tứ diện $ABCD$ thay đổi vị trí trong không gian nhưng có ba đỉnh A, B, C lần lượt ở trên mặt cầu cố định và đồng tâm. Chứng minh rằng đỉnh D luôn ở trong một hình cầu cố định khi độ dài a, b, c thay đổi thỏa các giả đã cho.

Lời giải



a) Ta có thể giả sử $AD = b, BC = c$ và các cạnh còn lại bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Ta dễ dàng suy ra IJ vuông góc với AD và BC và IJ chính là trục đối xứng của tứ diện.

Lấy M tùy ý trong không gian, M' là điểm đối xứng của M qua IJ suy ra trung điểm K của MM' chính là hình chiếu của M trên đường thẳng IJ và ta có:

$$\begin{aligned} 2(MA + MB + MC + MD) &= MA + MB + MC + MD + M'A + M'B + M'C + M'D \\ &= (MA + M'A) + (MB + M'B) + (MC + M'C) + (MD + M'D) \\ &\leq 2KA + 2KB + 2KC + 2KD \quad (1). \end{aligned}$$

Do tính chất: trung tuyến của một tam giác thì bé hơn nửa tổng của hai cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của nó).

Do đó: $MA + MB + MC + MD \leq KA + KB + KC + KD$. Bài toán trở thành tìm điểm K trên IJ sao cho $KA + KB + KC + KD$ bé nhất.

Trong mặt phẳng (BCI) dựng hình thang $BCD'A'$ sao cho IJ là trung điểm của hai đáy và $IA = IA', ID = ID'$. Ta thấy rằng: với K tùy ý trên IJ thì $KA = KA'$ và $KD = KD'$. Do đó:
 $KA + KB + KC + KD = KA' + KB + KC + KD'$
 $= (KA' + KC) + (KB + KD') \leq A'C + BD'$.

Vậy $KA + KB + KC + KD$ nhỏ nhất khi K chính là giao điểm K_0 của hai đường chéo $A'C$ và BD' .

Tính IJ : $IJ^2 = DJ^2 - ID^2 = DC^2 - JC^2 - ID^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow IJ = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$.

Tính BD' : $BD'^2 = \left(\frac{BC + A'D'}{2}\right)^2 + IJ^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} = a^2 + \frac{bc}{2}$.

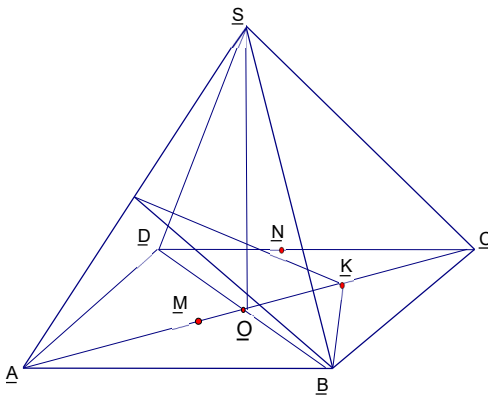
Tổng các khoảng cách nhỏ nhất là: $d = 2BD' = \sqrt{4a^2 + 2bc}$.

b) Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính các mặt cầu tâm O và lần lượt đi qua các đỉnh A, B, C. Ta có:

$OD < OC + DC < OC + AB < OC + OA + OB = r_1 + r_2 + r_3$. Do đó D ở trong hình cầu cố định tâm O, bán kính $R = r_1 + r_2 + r_3$.

Câu 96: (HSG HUẾ 1998-1999) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = b, SA = SB = SC = SD = c$. K là hình chiếu vuông góc của P xuống AC .
 a/ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và BK .
 b/ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AK và CD . Chứng minh: Các đường thẳng BM và MN vuông góc nhau.

Lời giải



Câu a / (2.5 điểm)

+ Theo giả thiết ta được: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$

Mà $BK \subset (SAC)$ và $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp SA$

+ Gọi H là hình chiếu của K xuống SA

$\Rightarrow HK \perp SA$ và $HK \perp BK$ (vì $HK \subset (SAC)$)

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SA và BK .

Suy ra được: $BH \perp SA$ và $\triangle HKB$ vuông tại K .

+ Do $\triangle ABC$ vuông đỉnh A nên: $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

+ $\triangle SAB$ cân đỉnh S , BH là đường cao nên $HB = \frac{SI \cdot AB}{SA} = \frac{\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} \cdot a}{c}$

+ Do $\triangle HKB$ vuông tại K nên:

$$HK^2 = HB^2 - BK^2 = \frac{(4c^2 - a^2)a^2}{4c^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$HK^2 = \frac{(4c^2 - a^2 - b^2)a^4}{4c^2(a^2 + b^2)} \Rightarrow HK = \frac{a^2}{2c} \sqrt{\frac{(4c^2 - a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)}}$$

Câu b (2.5 điểm)

+ $\overrightarrow{2BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}$ (vì M là trung điểm của AK)

+ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

+ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}$.

+ Do đó:

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}) \cdot (\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{KB} \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{KB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CK}) = \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{CK} = 0 \end{aligned}$$

Vậy: $BM \perp MN$.

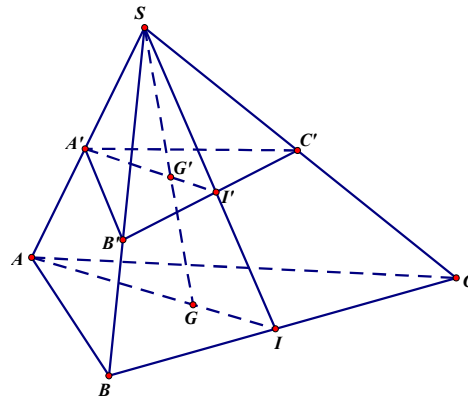
(Có thể tính và áp dụng định lý Pythagor).

 **Câu 97:** (HSG SỞ GD&ĐT NGHỆ AN NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (P) di động luôn cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Tìm giao điểm của SG với mp (P)

b) Biết rằng $2\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8$. Chứng minh rằng mp (P) luôn đi qua một điểm cố định.

 Lời giải



a. Gọi I là giao của AG và BC nên I là trung điểm của B C. SI cắt B'C' tại I'

Trong tam giác SAI: A'I' cắt SG tại G'

Khi đó G' là giao của SG và mặt phẳng (P)

$$\text{b. Ta có } \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \frac{SI}{SI'} \quad (1)$$

Thật vậy: từ B kẻ $BM \parallel B'C'$ cắt SI tại M, từ C kẻ $CN \parallel B'C'$ cắt SI tại N

Khi đó vì I là trung điểm BC nên $SM+SN=2SI$

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SM}{SI'} + \frac{SN}{SI'} = \frac{SM + SN}{SI'} = \frac{2.SI}{SI'}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8 \Leftrightarrow 2 \frac{SA}{SA'} + 2 \frac{SI}{SI'} = 8 \quad (*)$$

Gọi O là trung điểm AI , $A'I'$ cắt SO tại O' khi đó mặt phẳng (P) đi qua O'

Mặt khác từ (*) ta chứng minh tương tự (1) có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SI}{SI'} = 2 \frac{SO}{SO'} = 4 \text{ vậy } O' \text{ là trung điểm của } SO.$$

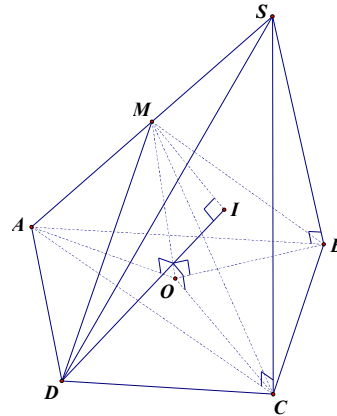
Hay O' là điểm cố định nên (P) luôn đi qua điểm cố định là O'

Câu 98: (HSG SỞ GD&ĐT NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB // CD$) nội tiếp đường tròn tâm O và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA .

a) Chứng minh rằng $MO \perp (ABCD)$.

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC . Chứng minh rằng $\cos \varphi < \frac{BC}{SA}$.

 **Lời giải**



a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$

Xét các tam giác $\triangle MHA, \triangle MHB, \triangle MHC$ có

$$\widehat{MHA} = \widehat{MHB} = \widehat{MHC} = 90^\circ$$

$$MH \text{ chung } MA = MB = MC = \frac{1}{2} SA$$

Suy ra $\triangle MHA = \triangle MHB = \triangle MHC$ nên $HA = HB = HC$

Do đó $H \equiv O$, vì vậy $MO \perp (ABCD)$.

b. Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC là góc giữa hai đường thẳng CD và SC ,

$$\text{suy ra } \cos \varphi = |\cos \widehat{SCD}| = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{SCD}} \quad (*)$$

Gọi điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (SCD)

Ta có $MD = MC = \frac{1}{2} SA$ nên $\triangle SDA$ vuông tại D

Mặt khác lại có $MS = MD = MC$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SCD$. Khi đó

$$\sin \widehat{SCD} = \frac{SD}{2ID} > \frac{SD}{2MD} = \frac{SD}{SA} \quad (\text{vì } \triangle MID \text{ vuông tại } I \text{ nên } ID < MD)$$

Từ (*) suy ra

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{SCD}} < \sqrt{1 - \frac{SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{SA^2 - SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{AD^2}{SA^2}} = \frac{AD}{SA} = \frac{BC}{SA}$$

$$\cos \varphi < \frac{BC}{SA} \quad (\text{đpcm})$$

 **Câu 99:** (HSG NAM ĐỊNH NĂM 2015-2016) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = 4a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB , biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) bằng $a\sqrt{10}$. Tính thể tích của khối chóp $S.HBCD$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và HD .

 Lời giải

Ta có: $AH = \frac{3}{5}HN \Rightarrow HN = \frac{10}{3}a \Rightarrow BN = \frac{4}{3}a.$

Ta có: $SN = \sqrt{SH^2 + HN^2} = \sqrt{\frac{208}{3}}a; \quad CN = \sqrt{BN^2 + BC^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}a.$

+) Áp dụng định lý Côsin trong tam giác SCN, ta có $\cos \widehat{SCN} = \frac{SC^2 + CN^2 - SN^2}{2SC.CN} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$

+) $\cos(SC, HD) = \cos(CN, SC) = |\cos \widehat{SCN}|$

Vậy $\cos(SC, HD) = |\cos \widehat{SCN}| = \frac{\sqrt{5}}{4}.$