

NGUYỄN MINH HIỀU

Tuyển tập đề thi

**CHỌN HỌC SINH GIỎI
LỚP 11 QUẢNG BÌNH
(2010-2023)**

ĐỒNG HỚI 2023

Mục lục

PHẦN I ĐỀ THI

1

1	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2022-2023.....	3
2	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2021-2022.....	5
3	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2020-2021.....	7
4	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2017-2018.....	9
5	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2016-2017.....	10
6	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2015-2016.....	11
7	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2014-2015.....	13
8	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2013-2014.....	15
9	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2012-2013.....	17
10	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2011-2012.....	18
11	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2010-2011.....	19
12	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2009-2010.....	20

PHẦN II LỜI GIẢI

21

1	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2022-2023.....	23
2	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2021-2022.....	31
3	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2020-2021.....	39
4	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2017-2018.....	48
5	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2016-2017.....	52
6	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2015-2016.....	56
7	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2014-2015.....	63
8	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2013-2014.....	69
9	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2012-2013.....	74
10	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2011-2012.....	79
11	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2010-2011.....	82
12	Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 11 Quảng Bình năm học 2009-2010.....	87

Phần



ĐỀ THI

 ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2022-2023

VÒNG 1

1.1 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình:

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1. \end{cases}$$

1.2 (2,5 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2+4} - 2}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi số thực m , phương trình

$$x^6 - 65 + m\sqrt[3]{2-x} = m(1 - \sqrt{x-1})$$

luôn có nghiệm.

1.3 (1,5 điểm)

a) Cho (H) là một đa giác đều có 252 đường chéo. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) . Tính xác suất để tam giác được chọn là một tam giác vuông không cân.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau đồng thời tổng lập phương của ba chữ số đó chia hết cho 3.

1.4 (3,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M di động trên cạnh AB (M khác A, B). Mặt phẳng (α) luôn đi qua M đồng thời song song với cả hai đường thẳng SA và BC .

a) Xác định thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) . Tìm vị trí của điểm M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

b) Điểm N nằm trên cạnh BC thỏa mãn $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{23}{5}$. Chứng minh rằng mặt phẳng (SMN) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động.

c) Chứng minh rằng $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$.

VÒNG 2

1.5 (2,5 điểm)

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq 2\sqrt{a+b+c+1}.$$

b) Cho tập hợp $A = \{1; 3; 5; \dots; 2n - 1\}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại 12 tập con $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i) $B_k \cap B_j = \emptyset$ (với $k = \overline{1; 12}, j = \overline{1; 12}, k \neq j$;
- ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{12} = A$;
- iii) Tổng các phần tử trong mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng nhau.

1.6 (2,5 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 &= 2023 \\ 7u_{n+1} &= u_n^2 + u_n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4}$. Tìm giới hạn của dãy số (v_n) .

1.7 (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^5 + n + 1$ chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất.

b) Cho a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a^{2022} = b^{2023}$. Tìm a khi b là số nhỏ nhất.

1.8 (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H ; AD, BE, CF là ba đường cao ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của BC , N là hình chiếu vuông góc của H trên AM ; AD cắt BN tại P , AM cắt CF tại Q .

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng BC, EF, HN đồng quy tại điểm T .

b) Chứng minh rằng đường thẳng PQ song song với đường thẳng BC .

c) Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại K , L là điểm đối xứng của K qua T . Chứng minh rằng $MONL$ là tứ giác nội tiếp.

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2021-2022

VÒNG 1

2.1 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin^2 x - \tan x.$$

b) Chứng minh rằng phương trình

$$m^2 x^{2022} + 2x^2 - x - m^2 = 0$$

luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt với mọi tham số m .

2.2 (2,0 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $1 \cdot C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = 16n$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển của nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^{2n+1}$, $x \neq 0$.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều là số nguyên và công sai d là một số dương. Biết rằng $u_{20} = m > 0$ và $u_m = 17$. Tính u_{2022} .

2.3 (2,0 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 9 \quad \text{và} \quad (n+3)u_{n+1} - (n+5)u_n = 22, \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021u_n}{25 + 4n + 2022n^2}.$

2.4 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, $AB = b$, $AD = c$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBD) .

a) Trong trường hợp $SA = \sqrt{7}$, $AB = AD = 1$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC . Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

b) Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác SBD .

c) Chứng minh rằng $a \cdot S_{HBD} + b \cdot S_{HSD} + c \cdot S_{HSB} \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}$, ở đây ký hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ .

2.5 (1,0 điểm) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 1000. Một số thuộc S được gọi là số “thú vị” nếu số đó là hợp số và không chia hết cho ba số 2, 3, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số “thú vị”.

VÒNG 2

2.6 (3,0 điểm)

- a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{x^3(y+z)} + \frac{2}{y^3(z+x)} + \frac{2}{z^3(x+y)}.$$

- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$, $b > 1$ để hai số $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là số nguyên dương.

2.7 (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = \frac{5}{2} \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 - 12u_n - 2002} + \frac{2022n + 2023}{n+1}, \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

- a) Chứng minh rằng $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2.8 (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC , D là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A , M là trung điểm của cạnh BC . Đường thẳng DG cắt cung nhỏ BC của (O) tại điểm E .

- a) Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .
- b) Đường trung trực của cạnh BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi N là trung điểm của đoạn PQ . Chứng minh rằng đường thẳng HM cắt đường thẳng AN tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

2.9 (2,0 điểm) Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi số chỉ được tô đúng một màu). Biết rằng có vô hạn các số được tô màu xanh và tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đỏ. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là q .

- a) Hãy chỉ ra (có chứng minh) một cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $q = 2$.
- b) Chứng minh rằng q là một số nguyên tố.

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2020-2021

VÒNG 1

3.1 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3} \sin^2 x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

b) Chứng minh phương trình

$$(m^2 - m + 1)x^{2020} + 2x - 2 = 0$$

luôn có nghiệm với mọi tham số m .

3.2 (2,0 điểm)

a) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $(1 + x^2 - x^3)^n$, biết n là số nguyên lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức

$$1 \cdot 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^3 + 3 \cdot 4 \cdot C_n^4 + \dots + (n-1)n C_n^n = 64n(n-1).$$

b) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Một số thuộc S được gọi là “số đẹp” nếu chữ số ở hàng trăm bằng trung bình cộng của hai chữ số ở hàng đơn vị và hàng chục nghìn. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số được chọn là “số đẹp”.

3.3 (2,0 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2020)^{2021} \sqrt{1 + 2021x} - 2020}{x}.$$

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = -2, u_2 = -1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}}, \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Tính u_{2021} .

3.4 (3,0 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BB' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (MNC') ;

b) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNC') và (ABC) . Từ đó tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a;

c) Gọi (α) là mặt phẳng thay đổi và luôn đi qua trung điểm I của $B'G$ và cắt các cạnh $B'A, B'B, B'C$ lần lượt tại X, Y, Z (không trùng B'). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{B'A}{B'X} \cdot \frac{B'B}{B'Y} \cdot \frac{B'C}{B'Z}.$$

3.5 (1,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{\cos A \cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C \cos A}{\cos B}} > 2.$$

VÒNG 2

3.6 (3,0 điểm)

- a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x^4 + y^4 + z^4) - (x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2).$$

- b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số $n^2 + np$ là một số chính phương.

3.7 (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n + 4n^2, \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{u_n}}{n+1}$.

3.8 (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D . Gọi M là điểm chính giữa cung BC (chứa A) của đường tròn (O) . Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt BC tại E , cắt (O) tại S (S khác A). Gọi F là giao điểm của DI và AM .

- a) Chứng minh đường thẳng MI đi qua trung điểm của đoạn EF .
- b) Kẻ đường cao AH (H thuộc BC), kẻ đường kính AK của (O) . Đường thẳng KS lần lượt cắt các đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại P, Q . Chứng minh rằng tam giác PIQ là tam giác vuông.

3.9 (1,5 điểm) Cho n ($n > 3$) điểm liên tiếp $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một phân biệt và cùng thuộc một đường thẳng sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$.

- a) Tìm n biết rằng trên đường thẳng có tất cả 2025 đoạn thẳng (có đầu mút là các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$) mà các đoạn thẳng này có trung điểm được lấy từ các điểm đã cho.
- b) Với $n = 20$, ta tiến hành tô màu 20 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ bằng đúng m màu khác nhau (mỗi điểm một màu, hai điểm khác nhau có thể được tô cùng màu). Tìm số m nhỏ nhất sao cho không có ba điểm A_i, A_j, A_k nào cùng màu mà ba số i, j, k lập thành một cấp số cộng (biết rằng các số m, i, j, k nguyên dương và $1 \leq i < j < k \leq 20$).

———— Hết ————

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2017-2018

4.1 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x - 3 \sin x - \cos x + 2}{\sin x} = 0.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4y} = y^2 + x^2. \end{cases}$$

4.2 (2,0 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}.$$

b) Một hộp đựng chín quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

4.3 (2,0 điểm)

a) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 5 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2 + n - 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}, \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Tính giới hạn $\lim (n \cdot u_n)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^{2n} + 3n^2 + 7$ là một số chính phương.

4.4 (3,0 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D$.

a) Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG) . Thiết diện đó là hình gì?

b) Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.

4.5 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2.$$

————— Hết —————

 ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2016-2017

5.1 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$(2 \cos 2x - 1)(\sin 2x + \cos 2x) = 1.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x - y + 2)(2x + y) + 6x - 3y + 6 = 0 \\ \sqrt{2x + 1} + \sqrt{y - 1} = 4. \end{cases}$$

5.2 (2,5 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 \cdot 2x + 1} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3x + 1} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 4x + 1} \cdots \sqrt[2017]{2016 \cdot 2017x + 1} - 1}{x}.$$

b) Tìm giới hạn dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{2n+1}{2^n}}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

5.3 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tâm O , cạnh $AB = a$ và $SA = SB = SC = SD = a$. Điểm M nằm trên đoạn AO sao cho $\frac{AM}{AO} = k$ ($0 < k < 1$). Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với AD, SO .

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích của thiết diện trên theo a, k .

c) Tìm k để thiết diện trên ngoại tiếp được một đường tròn.

5.4 (1,5 điểm) Cho x, y, z dương. Chứng minh:

$$\frac{1+x^2}{1+4\sqrt{1+y^3+3z^2}} + \frac{1+y^2}{1+4\sqrt{1+z^3+3x^2}} + \frac{1+z^2}{1+4\sqrt{1+x^3+3y^2}} \geq \frac{3}{5}.$$

5.5 (1,0 điểm) Trong một hội nghị khách hàng, mỗi người tham gia được chọn một số tự nhiên có hai chữ số ghi lên phiếu của mình và cứ 10 người thì được sắp xếp ngẫu nhiên vào một bàn. Một bàn được gọi là bàn “thân thiện” nếu trong 10 người của bàn đó có thể chọn ra hai nhóm người (số lượng người của mỗi nhóm là tùy ý và khác 0) sao cho tổng các số ghi trên phiếu của mỗi nhóm là bằng nhau. Chứng minh rằng tất cả các bàn trong hội nghị đều là bàn “thân thiện”.

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2015-2016

VÒNG 1

6.1 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình:

$$4 \sin^2 x \cos x + 2 \cos 2x = \cos x + \sqrt{3} \sin 3x.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) &= 5 \\ (x^2+y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) &= 9 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

6.2 (2,5 điểm)

a) Tìm giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

b) Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$, biết (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= 3u_n + 2n - 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

6.3 (2,5 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên đường chéo AC lấy điểm M sao cho $MA = 3MC$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'BD)$, cắt đường chéo AC' của hình hộp tại điểm N .

a) Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

b) Chứng minh N là trung điểm của AC' .

6.4 (1,0 điểm) Cho đa giác đều gồm 2017 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác gồm 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

6.5 (1,5 điểm) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $(x+2)(y+2) = 3(x^2 + y^2 + \sqrt{xy});$

ii) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 4(x^3 + y^3).$

Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.

VÒNG 2

6.6 (3,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$(1 - \sqrt{1-x}) \sqrt[3]{2-x} = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Chứng minh rằng phương trình

$$p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0$$

luôn có nghiệm, biết $a < b < c < d$ và p, q là hai số thực bất kỳ.

6.7 (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 &= 5 \\ u_{n+1} &= (u_n - 2)^2, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm $\lim \frac{u_1 \cdot u_2 \cdots u_n}{u_{n+1}}$.

6.8 (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC ; IJ cắt (O) tại M (khác A). Gọi N là điểm chính giữa của cung $\widehat{ABM}$; NI và NJ lần lượt cắt (O) tại S và T .

a) Chứng minh M là trung điểm của IJ .

b) Chứng minh IJ, BC và TS đồng quy.

6.9 (1,5 điểm) Xác định số cách chọn bộ 100 số từ tập hợp 2016 số nguyên dương đầu tiên sao cho bất kỳ một cặp 2 trong 100 số được chọn có hiệu số giữa số lớn và số bé lớn hơn hoặc bằng 2.

6.10 (1,5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{2n-1} - 2^n + 1$ là số chính phương.

————— Hết —————

 ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2014-2015

VÒNG 1

7.1 (3,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$8 \sin^2 x \cos x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{x} + y + \frac{2}{y} &= 6 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 &= 8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

7.2 (2,0 điểm) Cho dãy số $\begin{cases} u_1 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^{2015} + u_n + 1}{u_n^{2014} - u_n + 3} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

a) Chứng minh $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và (u_n) là dãy số tăng.

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2014} + 2}.$

7.3 (2,5 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp có độ dài bằng $\sqrt{2}$. Điểm M nằm trên đoạn AO và $AM = x$ ($0 < x < 1$). Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với AD và SO .

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) . Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích của thiết diện theo x .

7.4 (1,5 điểm) Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 chữ cái từ bộ chữ cái MAYMAN thành một hàng sao cho mỗi cách sắp xếp 2 chữ cái giống nhau không đứng cạnh nhau.

7.5 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{4b^2 + c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{4c^2 + a^2 + b^2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

VÒNG 2

7.6 (2,0 điểm) Tìm các giới hạn:

a) $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 25 + \dots + 5^n};$

b) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2014x} \cdot \sqrt[3]{1 + 2015x} - 1}{x}.$

7.7 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng phương trình:

$$2014x^{2015} - x^3 + mx^2 + 1 = m$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

b) Giải phương trình:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2}).$$

7.8 (2,0 điểm) Cho dãy số $\begin{cases} u_1 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{2n}{n+1}u_n - \frac{1}{n+1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

a) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) ;

b) Tìm n để nu_n là số chính phương.

7.9 (2,5 điểm) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song CD cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N . Các đường thẳng BC , BD lần lượt cắt MN tại P và Q . Các đường thẳng CM , DN cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE và CD vuông góc với nhau;

b) Tam giác EPQ cân.

7.10 (1,5 điểm) Mỗi số nguyên từ 1 đến n ($n \geq 3$) được tô bởi hai màu: xanh hoặc đỏ. Tìm số nguyên n nhỏ nhất để với mọi cách tô màu, đều tồn tại ba số cùng màu lập thành cấp số cộng.

———— Hết ————

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2013-2014

VÒNG 1

8.1 (3,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$(\sin 2x - \cos 2x) \sin x + \sin 3x = (\sin x + \cos x) \cos x.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

8.2 (2,5 điểm)

a) Một nhóm 10 học sinh gồm 6 bạn nam trong đó có An và 4 bạn nữ trong đó có Bình được xếp ngồi vào 10 cái ghế trên một hàng ngang (10 cái ghế được đánh số từ 1 đến 10 từ trái sang phải). Có bao nhiêu cách sắp xếp thỏa mãn giữa 2 bạn nữ gần nhau có 2 bạn nam, đồng thời An không ngồi cạnh Bình.

b) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục, nhận giá trị không âm trên $[0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất số $c \in [0; +\infty)$ thỏa mãn $f(c) = c$.

8.3 (3,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 3SM$. Giả sử (P) là mặt phẳng qua hai điểm A, M và luôn cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại N, P (N khác B, P khác D).

a) Nêu cách dựng các điểm N, P và tính giá trị của $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP}$;

b) Xác định vị trí mặt phẳng (P) để tam giác SNP có diện tích nhỏ nhất.

8.4 (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}.$$

VÒNG 2

8.5 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Hai bạn A và B mỗi người đều viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập X . Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

8.6 (3,0 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

b) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = c, x_2 = d & (c, d > 0) \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}} & (n = 2, 3, 4, \dots). \end{cases}$$

Tìm $\lim x_n$.

8.7 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^\circ$. Gọi AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$), M là trung điểm của AD . Đường tròn (τ) đường kính AC cắt BM tại E (E nằm giữa B và M), đường tròn (Ω) đường kính AB cắt CM tại F (F nằm giữa C và M). Gọi giao điểm thứ hai (khác A) của đường thẳng đi qua A vuông góc AD với các đường tròn (τ) , (Ω) lần lượt là L và K . Chứng minh rằng:

a) AD, BL, CK đồng quy;

b) Bốn điểm B, E, F, C cùng thuộc một đường tròn.

8.8 (1,5 điểm) Tìm tất cả các cặp (m, n) với m, n là các số nguyên không âm thỏa mãn phương trình:

$$\frac{n(n+2)}{4} = m^4 + m^2 - m + 1.$$

————— Hết —————

 ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2012-2013

9.1 (3,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{y} + \frac{x}{y} = 10 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + 2x = 12. \end{cases}$$

b) Giải phương trình:

$$(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2 \sin 3x.$$

9.2 (2,5 điểm)

a) Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^6 + 1} \right).$$

b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2013^n}}. \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn của dãy số (u_n) .

9.3 (2,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân ($AD \parallel BC$) và $BC = 2a$, $AB = AD = CD = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm AC và BD . Biết SD vuông góc AC .

a) Tính SD .

b) Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) . Biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

9.4 (1,5 điểm) Cho phương trình:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

a) Với $d = -2013$, chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt;

b) Với $d = 1$, giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2011-2012

10.1 (3,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+2)(2x+y) &= 9 \\ x^2 + 4x + y &= 6. \end{cases}$$

10.2 (2,0 điểm) Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2011}{1 - x^{2011}} - \frac{2012}{1 - x^{2012}} \right).$$

10.3 (3,0 điểm) Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$, mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm M của tứ diện, cắt cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F (khác S).

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{SD} \overrightarrow{SD} + \frac{1}{SE} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{SF} \overrightarrow{SF} \right)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}$.

10.4 (1,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = \frac{1}{6}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3(2y+3z)} + \frac{1}{8y^3(3z+x)} + \frac{1}{27z^3(x+2y)} < \frac{3}{2}.$$

10.5 (1,0 điểm) Trong một hình vuông có diện tích bằng 2, ta dựng 3 đa giác có diện tích đều bằng 1. Chứng minh rằng trong 3 đa giác đó có ít nhất một cặp đa giác có diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2010-2011

11.1 (3,0 điểm)

a) Giải phương trình:

$$\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} &= \frac{16}{3} \\ 2(x^2 + y^2) + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} &= \frac{100}{9}. \end{cases}$$

11.2 (2,0 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{30} \\ x_{n+1} = \sqrt{30x_n^2 + 3x_n + 2011}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

11.3 (3,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a có I là trọng tâm tam giác ABC , J là trọng tâm tam giác BCD , vẽ mặt phẳng đi qua IJ cắt AB , AC , DC , DB lần lượt tại các điểm M , N , P , Q với $AM = x$, $AN = y$ ($0 < x, y < a$).

a) Chứng minh rằng MN , PQ , BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng $a(x+y) = 3xy$. Từ đó suy ra $\frac{4a}{3} \leq x+y \leq \frac{3a}{2}$.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x+y$.

11.4 (1,0 điểm) Cho phương trình $ax^2 + (2b+c)x + 2d+e = 0$ có đúng một nghiệm không nhỏ hơn 4. Chứng minh phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ có nghiệm.

11.5 (1,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng rằng:

$$P = \frac{2xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{3zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{5}{3}.$$

———— Hết ————

 ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2009-2010

12.1 (2,0 điểm) Giải phương trình:

$$2 \sqrt[2010]{(1+x)^2} - 3 \sqrt[2010]{1-x^2} + \sqrt[2010]{(1-x)^2} = 0.$$

12.2 (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i+2}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

12.3 (2,5 điểm) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BB' sao cho $AM = BN = x$ ($0 \leq x \leq a$). Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và $C'D'$.

- Chứng minh bốn điểm M, N, I, J đồng phẳng;
- Tìm vị trí của M, N trên các cạnh AD và BB' sao cho chu vi thiết diện do mặt phẳng $(MINJ)$ cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có giá trị nhỏ nhất.

12.4 (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2010}\right)$ có nghiệm $x \in [0; 1]$.

12.5 (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

———— Hết ————

Phần



LỜI GIẢI

 ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2022-2023

Câu 1.1.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
 & 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 1 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) \\
 \Leftrightarrow & 2 - 2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\cos x \\
 \Leftrightarrow & \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện $x \neq -1; y \neq -1$. Khi đó ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y+1} \right)^2 + \left(\frac{y}{x+1} \right)^2 = \frac{1}{2} \\ 4xy = (x+1)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y+1} \right)^2 + \left(\frac{y}{x+1} \right)^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y+1} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{y+1} = u, \frac{y}{x+1} = v$, hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \pm 1 \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = \frac{1}{2} \\ u = v = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với $u = v = \frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{cases} \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Với $u = v = -\frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{cases} \frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{3} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1), (x; y) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

□

Câu 1.2.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2+4} - 2}$, ta có

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sqrt{4+4x} - x - 2}{x^2} + \frac{x + 2 - \sqrt[3]{8+12x}}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot \frac{x^2}{\sqrt{3x^2+4} - 2} \right].$$

Ta có

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + 4x - x^2 - 4x - 4}{x^2 (\sqrt{4+4x} + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4+4x} + x + 2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 - \sqrt[3]{8+12x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x^2}{x^2 [(x+2)^2 + (x+2)\sqrt[3]{8+12x} + (\sqrt[3]{8+12x})^2]} = \frac{1}{2}.$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{3x^2+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{3x^2+4} + 2)}{3x^2} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } L = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

b) Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó ta có phương trình tương đương

$$x^6 - 65 + m\sqrt[3]{2-x} - m(1 - \sqrt{x-1}) = 0.$$

Đặt

$$f(x) = x^6 - 65 + m\sqrt[3]{2-x} - m(1 - \sqrt{x-1})$$

Ta có

$$f(2) = -1 < 0; f(10) = 10^6 - 65 > 0 \Rightarrow f(2) \cdot f(10) < 0.$$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ nên liên tục trên $[2; 10]$. Do đó $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trên $(2; 10)$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

□

Câu 1.3.

a) Gọi số đỉnh của đa giác đều (H) là n ($n \in \mathbb{N}; n \geq 3$), ta có số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$. Theo giả thiết, ta có

$$C_n^2 - n = 252 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 252 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 504 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 24 \\ n = -21 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Do đó đa giác đều (H) có 24 đỉnh, suy ra số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) là $C_{24}^3 = 2024$. Gọi O là tâm của (H) , suy ra số đường chéo đi qua O là 12. Chọn 2 trong số 12 đường chéo này được một hình chữ nhật, suy ra số hình chữ nhật có đỉnh là đỉnh của (H) là $C_{12}^2 = 66$. Chọn 2 đường chéo vuông góc trong 12 đường chéo này ta được một hình vuông, suy ra số hình vuông có đỉnh là đỉnh của (H) là 6. Từ đó suy ra số hình chữ nhật không phải hình vuông là $66 - 6 = 60$. Mỗi hình chữ nhật không phải hình vuông tạo ra 4 tam giác vuông không cân, suy ra số tam giác vuông không cân có đỉnh là đỉnh của (H) là $60 \cdot 4 = 240$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{240}{2024} = \frac{30}{253}$.

b) Gọi số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abc}$. Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Do đó

$$(a^3 + b^3 + c^3) : 3 \Leftrightarrow (a + b + c)^3 : 3 \Leftrightarrow (a + b + c) : 3.$$

Đặt $A = \{3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{2; 5; 8\}$, ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 chữ số a, b, c cùng thuộc một trong các tập A, B, C , ta có $3 \cdot 3! = 18$ số.

TH2: Mỗi chữ số a, b, c thuộc một tập A, B, C , ta có $3^3 \cdot 3! = 162$ số.

TH3: Số cần tìm chứa chữ số 0 và 2 chữ số còn lại thuộc A , ta có $2 \cdot A_3^2 = 12$ số.

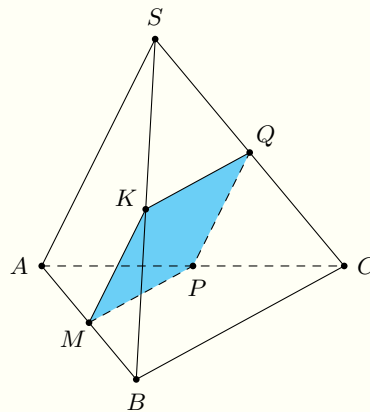
TH4: Số cần tìm chứa chữ số 0 và 2 chữ số còn lại mỗi chữ số thuộc một tập (B hoặc C), ta có $2 \cdot 3^2 \cdot 2! = 36$ số.

Vậy có $18 + 162 + 12 + 36 = 228$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 1.4.

a) Trong mặt phẳng (SAB) , kẻ $MK \parallel SA$ ($K \in SB$). Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $MP \parallel BC$ ($P \in AC$). Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $PQ \parallel SA$ ($Q \in SC$). Ta có $MPQK$ là thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (α) . Ta có $MP \parallel QK$ (vì cùng song song với BC); $MK \parallel PQ$ (vì cùng song song với SA), suy ra $MPQK$ là hình bình hành.



Đặt $\frac{AM}{AB} = x$ ($0 < x < 1$). Xét tam giác ABC có $MP \parallel BC$, suy ra $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = x$, hay $MP = xBC$. Xét tam giác SAB có $MK \parallel SA$, suy ra $\frac{MK}{SA} = \frac{BM}{AB} = 1 - x$, hay $MK = (1 - x)SA$. Diện tích thiết diện $MPQK$ là

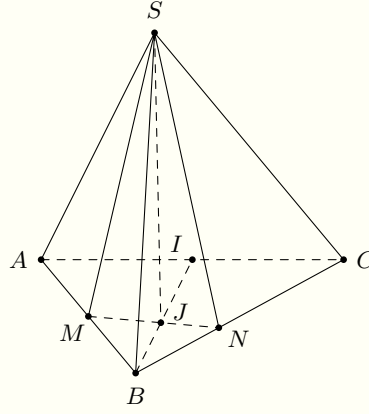
$$S_{MPQK} = MP \cdot MK \cdot \sin(\angle MPK) = x(1 - x)BC \cdot SA \cdot \sin(\angle BCA).$$

Vì $BC \cdot SA \cdot \sin(\angle BCA)$ không đổi nên S_{MPQK} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x(1 - x)$ đạt giá trị lớn nhất. Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy S_{MPQK} đạt giá trị lớn nhất khi M là trung điểm của AB .

b) Gọi I là trung điểm AC và J là giao điểm của MN và BI .



Ta có

$$\frac{S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle BAI}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI} \Rightarrow \frac{2S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI} \quad (1)$$

$$\frac{S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle BCI}} = \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI} \Rightarrow \frac{2S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\frac{2S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{2S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI} + \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BA} + \frac{BN}{BC} \right) \frac{BJ}{BI}. \quad (3)$$

Mặt khác

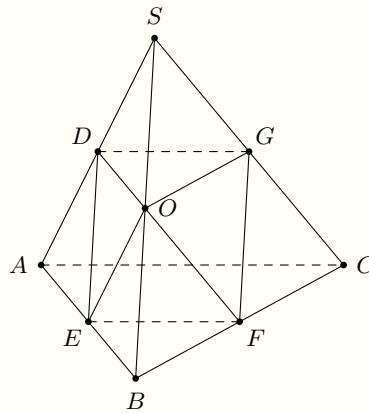
$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BA} + \frac{BN}{BC} \right) \frac{BJ}{BI} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \Leftrightarrow \frac{BI}{BJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} \right) \Leftrightarrow \frac{BI}{BJ} = \frac{23}{10}.$$

Từ đó suy ra J là điểm cố định, do đó (SMN) luôn chứa đường thẳng SJ cố định.

- c) Gọi D, E, F, G, O lần lượt là trung điểm SA, AB, BC, SC, SB . Khi đó $DEFG$ là hình bình hành và $O \notin (DEFG)$.



Do đó

$$OE + OG > EG; \quad OF + OD > DF. \quad (5)$$

Và

$$(SA + BC)^2 = (2OE + 2OG)^2; \quad (SC + AB)^2 = (2OF + 2OD)^2. \quad (6)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 EG^2 + DF^2 &= \overrightarrow{EG}^2 + \overrightarrow{DF}^2 \\
 &= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF})^2 + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG})^2 \\
 &= 2DE^2 + 2EF^2 + 2\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{EF}) \\
 &= \frac{1}{2}(SB^2 + AC^2).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (5), (6) và (7), suy ra

$$(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > 4(EG^2 + DF^2) = 2(SB^2 + AC^2) \geq (SB + AC)^2.$$

Vậy $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$.

□

Câu 1.5.

a) Ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 = \frac{ab + bc + ca}{abc} + 1 = ab + bc + ca + 1. \tag{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương $ab + bc$ và $ca + 1$, ta có

$$\begin{aligned}
 ab + bc + ca + 1 &\geq \sqrt{(ab + bc)(ca + 1)} \\
 &\geq 2\sqrt{a^2bc + abc^2 + ab + bc} \\
 &\geq 2\sqrt{a + c + ab + bc} \\
 &\geq 2\sqrt{a + c + b(a + c)}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$a^3 \geq abc \geq c^3 \Rightarrow a^3 \geq 1 \geq c^3 \Rightarrow a \geq 1 \geq c.$$

Suy ra

$$(a - 1)(c - 1) \leq 0 \Leftrightarrow a + c \geq ac + 1.$$

Do đó

$$b(a + c) \geq abc + b \Leftrightarrow b(a + c) \geq b + 1. \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3), suy ra

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq 2\sqrt{a + b + c + 1}.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn bài toán. Tổng tất cả các phần tử của tập A là

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Vì tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng nhau nên tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng $\frac{n^2}{12}$. Do đó $\frac{n^2}{12} \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 6m$, với $m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) là $3m^2$. Với $n = 6m$, ta có $2n - 1 = 12m - 1$. Vì $2n - 1$ thuộc một tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) nào đó nên $12m - 1 \leq 3m^2$, suy ra $m \geq 4 \Rightarrow n \geq 24$. Khi $n = 24$, ta có $A = \{1; 3; 5; \dots; 47\}$. Lúc đó

$$B_1 = \{1; 47\}, B_2 = \{3; 45\}, \dots, B_{12} = \{23; 25\}$$

là 12 tập con thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy số nguyên dương n nhỏ nhất cần tìm là $n = 24$.

□

Câu 1.6.a) Trước hết, ta chứng minh $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.Thật vậy, $u_1 = 2023 > 3$. Giả sử $u_k > 3, \forall k \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{k+1} - 3 = \frac{(u_k - 3)(u_k + 4)}{7} > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 3, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{7} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra (u_n) là dãy số tăng. Giả sử $\lim u_n = L$, ta có $L > u_1 = 2023$. Mặt khác lấy giới hạn hai vế đẳng thức $7u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 9$, ta có

$$7L = L^2 + L + 9 \Leftrightarrow (L - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 3 < 2023 \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy $\lim u_n = +\infty$.b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(u_n + 4)}{7} &\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{7}{(u_n - 3)(u_n + 4)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n + 4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}. \end{aligned}$$

Do đó

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - 3} - \frac{1}{u_{k+1} - 3} \right) = \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}.$$

$$\text{Vậy } \lim v_n = \lim \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} \right) = \frac{1}{2020}.$$

□

Câu 1.7.

a) Ta có

$$\begin{aligned} n^5 + n + 1 &= n^3(n^2 + n + 1) - n^2(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1 \\ &= (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1). \end{aligned}$$

Đặt $n^5 + n + 1 = p^r$, với $r \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố. Khi đó $(n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1) = p^r$.

- Với $n = 0$, ta có $n^5 + n + 1 = 1$ (không thỏa mãn).
- Với $n = 1$, ta có $n^5 + n + 1 = 3$ (thỏa mãn).
- Với $n = 2$, ta có $n^5 + n + 1 = 35$ (không thỏa mãn).
- Với $n \geq 3$, ta có $n^3 - n^2 = n^2(n - 1) \geq 2n^2 > n^2 + n$, suy ra

$$n^3 - n^2 + 1 > n^2 + n + 1 > 1.$$

Do đó $n^2 + n + 1 = p^a$ và $n^3 - n^2 + 1 = p^b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ và $a + b = r$. Lại có

$$\begin{aligned} p^b &= n^3 - n^2 + 1 \\ &= n(n^2 + n + 1) - 2(n^2 + n + 1) + n + 3 \\ &= n \cdot p^a - 2 \cdot p^a + n + 3 \\ &= p^a(n - 2) + n + 3. \end{aligned}$$

Vì $p^b : p^a$ nên $(n + 3) : p^a$. Từ đó suy ra $n + 3 \geq p^a$, hay $n + 3 \geq n^2 + n + 1 \Leftrightarrow n^2 \leq 2$ (vô lý).

Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề Nếu x, n là hai số nguyên dương và y là số hữu tỉ thỏa mãn $y^n = x$ thì y là số nguyên.

Thật vậy, đặt $y = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0; (a, b) = 1$. Vì $(a, b) = 1$ nên $(a^n, b^n) = 1$. Ta có $y^n = x$, suy ra $a^n = x \cdot b^n$, suy ra b^n là ước của a^n , mà $(a^n, b^n) = 1$ nên $b^n = 1 \Rightarrow b = 1$. Do đó $y = a \in \mathbb{Z}$ (đpcm).

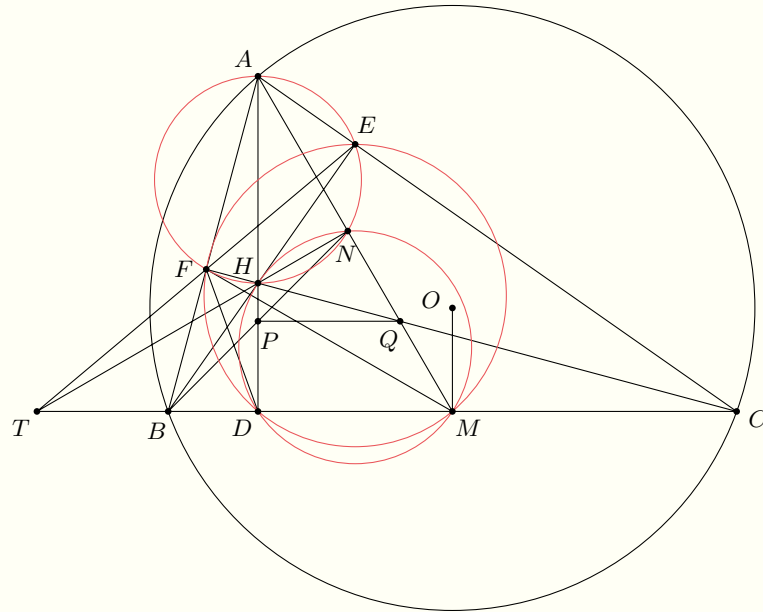
Trở lại bài toán, ta có

$$a^{2022} = b^{2023} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2022} = b.$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có $\frac{a}{b} = k$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $b = k^{2022}$. Vì b là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 nên k là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1, hay $k = 2$, suy ra $b = 2^{2022}$. Vậy $a = 2^{2023}$.

□

Câu 1.8.



a) Quy ước (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ ; (XY) là đường tròn đường kính XY . Ta có

$$A, E, F, H, N \in (AH); \quad D, M, E, F \in (DEF) \text{ (đường tròn Euler)}; \quad D, M, N, H \in (HM).$$

Từ đó suy ra

- DM (hay BC) là trục đẳng phương của hai đường tròn (DEF) và (HM) .
- EF là trục đẳng phương của hai đường tròn (DEF) và (AH) .
- HN là trục đẳng phương của hai đường tròn (AH) và (HM) .

Vì $AB < AC$ nên BC luôn cắt EF tại điểm T . Khi đó T là tâm đẳng phương của ba đường tròn (DEF) , (AH) và (HM) . Vậy ba trục đẳng phương BC , EF , HN của ba đường tròn (DEF) , (AH) và (HM) đồng quy tại tâm đẳng phương T .

b) Tứ giác $BDHF$ nội tiếp nên

$$\overline{AF} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}. \quad (1)$$

Tứ giác $DHNM$ nội tiếp nên

$$\overline{AN} \cdot \overline{AM} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}. \quad (2)$$

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2021-2022

Câu 2.1.

a) Điều kiện xác định: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin^2 x - \tan x \\ \Leftrightarrow 1 - \sin 2x &= 2\sin^2 x - \tan x \\ \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x \cos^2 x &= 2\sin^2 x \cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2\sin x \cos x(\sin x + \cos x) & \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} & \text{(thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) TH1: $m = 0$, phương trình trở thành $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn).

TH2: $m \neq 0$, đặt $f(x) = m^2 x^{2022} + 2x^2 - x - m^2$, ta có

$$f(-1) = 3, \quad f(0) = -m^2, \quad f(1) = 1,$$

suy ra

$$f(-1) \cdot f(0) < 0, \quad f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Mặt khác $f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên các đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 1]$. Do đó $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ hay $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt với mọi tham số m .

□

Câu 2.2.

a) Đặt

$$S = 1 \cdot C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n. \quad (1)$$

Sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$S = n \cdot C_n^0 + (n-1)C_n^1 + \dots + 1C_n^{n-1}. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta có

$$2S = n(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) \Leftrightarrow 2 \cdot 16n = n \cdot 2^n \Leftrightarrow 32 = 2^n \Leftrightarrow n = 5.$$

Khi đó

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{2n+1} = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (x^2)^{11-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-2)^k x^{22-3k}.$$

Số hạng chứa x^7 tương ứng số hạng chứa k thỏa mãn

$$22 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 5.$$

Vậy hệ số cần tìm là $C_{11}^5 (-2)^5 = -14\,784$.

b) Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} u_{20} = m \\ u_m = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = m \\ u_1 + (m-1)d = 17. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) và (2), ta có

$$(20-m)d = m-17 \Leftrightarrow m(d+1) = 20d+17 \Leftrightarrow m = \frac{20d+17}{d+1} \Leftrightarrow m = 20 - \frac{3}{d+1}.$$

Vì $m \in \mathbb{N}^*$ và $d > 0$ nên $d+1$ là ước lớn hơn 1 của 3, suy ra

$$d+1 = 3 \Leftrightarrow d = 2 \Rightarrow m = 19.$$

Vậy $u_{2022} = 4023$.

□

Câu 2.3.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$, ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+2x} - (x+1)}{x^2} + \frac{x+1 - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1+2x-x^2-2x-1}{x^2(\sqrt{1+2x}+x+1)} + \frac{x^3+3x^2+3x+1-1-3x}{x^2((x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1} + \frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = u_n + 11$, khi đó $v_1 = 20$ và

$$(n+3)(v_{n+1}-11) - (n+5)(v_5-11) = 22 \Leftrightarrow (n+3)v_{n+1} = (n+5)v_n.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{n+5}{n+3} v_n \\ &= \frac{(n+5)(n+4)}{(n+3)(n+2)} v_{n-1} \\ &= \frac{(n+5)(n+4)}{(n+2)(n+1)} v_{n-2} \\ &\dots \\ &= \frac{(n+5)(n+4)}{5 \cdot 4} v_1 \end{aligned}$$

$$= (n+5)(n+4).$$

Do đó

$$v_n = (n+4)(n+3) = n^2 + 7n + 12 \Rightarrow u_n = n^2 + 7n + 1.$$

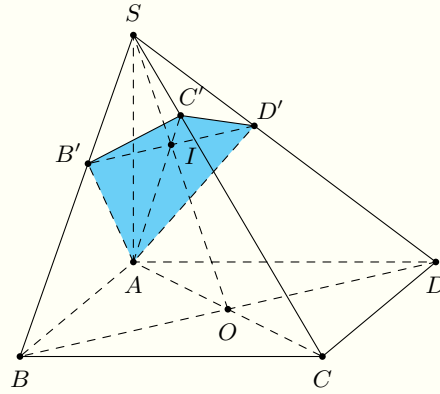
Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021u_n}{25 + 4n + 2022n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2021(n^2 + 7n + 1)}{25 + 4n + 2022n^2} = \frac{2021}{2022}.$$

□

Câu 2.4.

- a) Gọi C' là hình chiếu vuông góc của A trên SC , ta có $C' \in (P)$. Vì $AB = AD = 1$ nên $ABCD$ là hình vuông, do đó $BD \perp AC$.



Mặt khác $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp SC$. Lại có $(P) \perp SC$ nên $BD \parallel (P)$, suy ra $(P) \cap (SBD) \parallel BD$. Gọi I là giao điểm của AC' và SO , ta có $I \in (P)$ và $I \in (SBD)$. Trong (SBD) , qua I kẻ đường thẳng song song với BD lần lượt cắt SB tại B' và cắt SD tại D' , ta có $B', D' \in (P)$, hay $AB'C'D'$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) .

Ta có $B'D' \parallel BD$ và $BD \perp (SAC)$, suy ra $B'D' \perp (SAC)$, suy ra $B'D' \perp AC'$, do đó $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} B'D' \cdot AC'$. Tam giác SAC vuông tại A nên

$$AC' = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{7+2}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

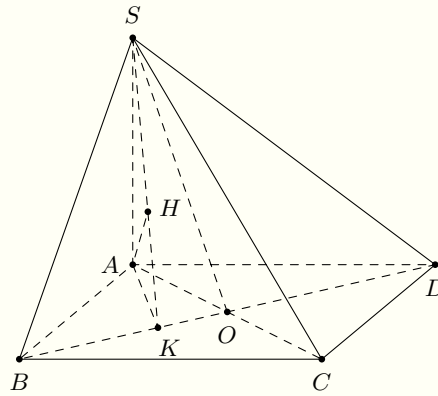
Ta có $CD \perp (SAD)$, suy ra $CD \perp AD'$. Lại có $SC \perp (P)$, suy ra $SC \perp AD'$. Từ đó suy ra $AD' \perp (SCD)$, suy ra $AD' \perp SD$. Tam giác SAD vuông tại A có SD' là hình chiếu của SA trên SD nên $SD' = \frac{SA^2}{SD}$. Vì $B'D' \parallel BD$ nên

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SD'}{SD} = \left(\frac{SA}{SD} \right)^2 \Rightarrow B'D' = \left(\frac{SA}{SD} \right)^2 \cdot BD = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Vậy diện tích thiết diện là

$$S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} = \frac{7\sqrt{7}}{24}.$$

- b) Ta có $BD \perp SA$ và $BD \perp AH$, suy ra $BD \perp SH$. Lại có $SB \perp AD$ và $SB \perp AH$, suy ra $SB \perp DH$. Từ đó suy ra H là trực tâm của tam giác SBD .



- c) Gọi K là giao điểm của SH và BD . Vì $BD \perp (SAK)$ nên góc giữa (ABD) và (SBD) bằng $\widehat{SKA} = \widehat{AKH}$. Lại có $AH \perp (SBD)$ nên $\triangle HDB$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle ABD$ trên (SBD) . Theo định lý hình chiếu, ta có

$$\frac{S_{HBD}}{S_{ABD}} = \cos \widehat{AKH} = \sin \widehat{ASH} = \frac{AH}{AS}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{S_{HSD}}{S_{ASD}} = \frac{AH}{AB}; \quad \frac{S_{HSB}}{S_{ASB}} = \frac{AH}{AD}.$$

Do đó

$$a \cdot S_{HBD} + b \cdot S_{HSD} + c \cdot S_{HSB} = \frac{abc}{2} \left(\frac{AH}{AS} + \frac{AH}{AB} + \frac{AH}{AD} \right).$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$, do đó theo bất đẳng thức Bunniacopxki, ta có

$$\left(\frac{AH}{AS} + \frac{AH}{AB} + \frac{AH}{AD} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{AH^2}{AS^2} + \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AD^2} \right) = 3,$$

hay $\frac{AH}{AS} + \frac{AH}{AB} + \frac{AH}{AD} \leq \sqrt{3}$. Vậy

$$a \cdot S_{HBD} + b \cdot S_{HSD} + c \cdot S_{HSB} \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Câu 2.5. Gọi A, B, C lần lượt là các tập hợp gồm các số thuộc S và chia hết cho 2; 3; 5. Giả sử $x \in A$, suy ra $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $1 \leq 2k \leq 999 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{999}{2} \Rightarrow k \in \{1; 2; \dots; 499\}$. Do đó số phần tử của A là $|A| = 499$. Lập luận tương tự ta cũng có: $|B| = 333$, $|C| = 199$.

Ta có

- $A \cap B$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 6, suy ra $|A \cap B| = 166$;
- $A \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 10, suy ra $|A \cap C| = 99$;
- $B \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 15, suy ra $|B \cap C| = 66$;
- $A \cap B \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 30, suy ra $|A \cap B \cap C| = 33$.

Dễ thấy tập hợp các số thuộc S chia hết cho ít nhất một trong ba số 2; 3; 5 là $A \cup B \cup C$ và

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733.$$

Do đó số các số tự nhiên nhỏ hơn 1000 và không chia hết cho cả ba số 2; 3; 5 là $999 - 733 = 266$. Trong tập hợp 266 số trên có cả số 1 và các số nguyên tố khác 2; 3; 5. Ta biết rằng có tất cả 165 số nguyên tố nhỏ hơn 1000 và khác 2; 3; 5. Do đó số các số “thứ vị” phải tìm là $266 - (165 + 1) = 100$ số.

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = 999$. Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{100}{999}$. $\square$

Câu 2.6.

a) Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, ta có $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a^3bc}{b+c} + \frac{2b^3ca}{c+a} + \frac{2c^3ab}{a+b} \\ &= 2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} &\geq a; \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} &\geq b; \\ \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} &\geq c. \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên, ta có

$$P \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $x = y = z = 1$.

b) Vì $a^3b - 1 = b(a^3 + 1) - (b + 1)$ và $a + 1$ là ước của $a^3 + 1$ nên $a + 1$ là ước của $b + 1$. (1)

Vì $b^3a + 1 = a(b^3 - 1) + (a + 1)$ và $b - 1$ là ước của $b^3 - 1$ nên $b - 1$ là ước của $a + 1$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $b - 1$ là ước của $b + 1$, suy ra $b - 1$ là ước của 2 nên $b = 2$ hoặc $b = 3$.

► Nếu $b = 2$ thì $a + 1$ là ước của 3, suy ra $a = 2$ nên $(a; b) = (2; 2)$.

► Nếu $b = 3$ thì $a + 1$ là ước của 4, suy ra $a = 1$ hoặc $a = 3$ nên $(a; b) = (1; 3)$ hoặc $(a; b) = (3; 3)$.

Vậy có 3 cặp số cần tìm là $(2; 2)$, $(1; 3)$ và $(3; 3)$. $\square$

Câu 2.7.

a) Ta có

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 - 12u_n + 20 + \frac{1}{n+1}}. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp.

Ta có, $u_1 = \frac{5}{2} > 2$. Giả sử $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, khi đó

$$u_{n+1} = \sqrt{(u_n + 4)(u_n - 2)^2 + 4 + \frac{1}{n+1}} > 2.$$

Vậy $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Trước hết ta chứng minh (u_n) là dãy giảm bằng phương pháp quy nạp.

Ta có $u_2 = \frac{7\sqrt{2}}{4} < u_1$. Giả sử $u_n < u_{n-1}, \forall n \geq 2$, ta sẽ chứng minh $u_{n+1} < u_n$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\Leftrightarrow u_{n+1}^2 < u_n^2 \\ &\Leftrightarrow u_n^3 - u_{n-1}^3 - 12(u_n - u_{n-1}) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \\ &\Leftrightarrow (u_n - u_{n-1})(u_n^2 + u_n \cdot u_{n-1} + u_{n-1}^2 - 12) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $u_n < u_{n-1}$ nên $u_n - u_{n-1} < 0$; $u_n, u_{n-1} > 2$ nên $u_n^2 + u_n \cdot u_{n-1} + u_{n-1}^2 - 12 > 0$ và $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$. Từ đó suy ra (2) đúng với mọi $n \geq 2$.

Như vậy (u_n) là dãy số giảm và bị chặn bởi 2 nên có giới hạn $\lim u_n = L$ với $2 \leq L \leq \frac{5}{2}$. Lấy giới hạn ở (1), ta có

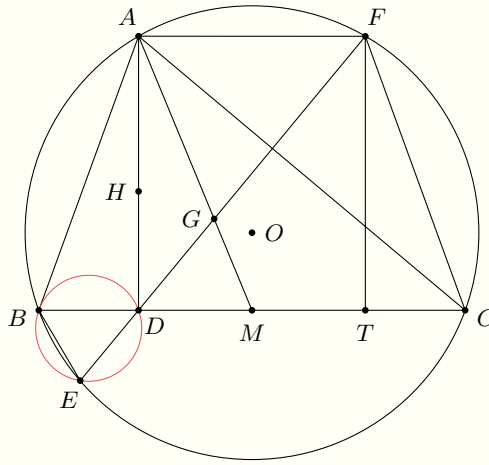
$$L = \sqrt{L^3 - 12L + 20} \Leftrightarrow L^3 - L^2 - 12L + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 2 \\ L = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

Vậy $\lim u_n = 2$.

□

Câu 2.8.

a) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại F ($F \neq A$). Ta chứng minh ba điểm D, G, F thẳng hàng.



Thật vậy: Vì $ABCF$ là hình thang nội tiếp (O) nên $ABCF$ là hình thang cân. Gọi T là hình chiếu vuông góc của F trên BC , ta có $BD = CT$, hay M là trung điểm của DT . Khi đó $\frac{DM}{FA} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$, kết hợp với $\widehat{GMD} = \widehat{GAF}$, suy ra $\triangle GMD \sim \triangle GAF$. Lúc đó $\widehat{DGM} = \widehat{FGA}$, hay ba điểm D, G, F thẳng hàng. Vì thế

$$\widehat{BED} = \widehat{BEF} = \widehat{BCF} = \widehat{ABC} = \widehat{ABD}.$$

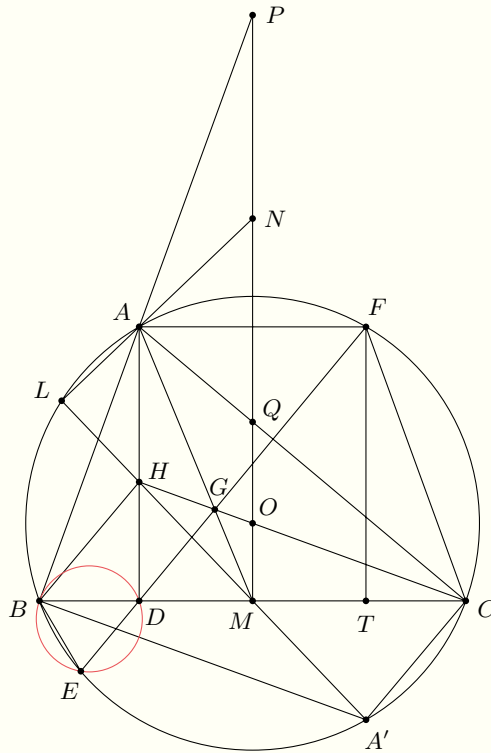
Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

b) Ta có

$$\widehat{APQ} = \widehat{BPM} = 90^\circ - \widehat{MBP} = 90^\circ - \widehat{CBA} = \widehat{HCB}; \quad (1)$$

$$\widehat{AQP} = \widehat{MQC} = 90^\circ - \widehat{QCM} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{CBH}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\triangle APQ \sim \triangle HCB$.



Lại có M, N lần lượt là trung điểm của BC và PQ , suy ra $\triangle AQN \sim \triangle HBM$, do đó $\widehat{ANQ} = \widehat{HMB}$. Gọi $L = AN \cap HM$, ta có

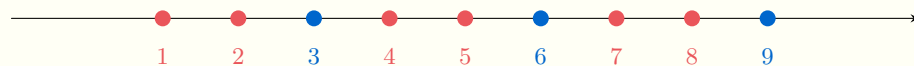
$$\widehat{MLN} = 180^\circ - \widehat{LNM} - \widehat{LMN} = 180^\circ - \widehat{LMB} - \widehat{LMN} = 90^\circ.$$

Kẻ đường kính A' , dễ dàng chứng minh được tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, suy ra H, A' đối xứng nhau qua M hay $A' \in MH$. Mặt khác $\widehat{A'LA} = \widehat{MLN} = 90^\circ$, kết hợp AA' là đường kính nên ta có $L \in (O)$.

□

Câu 2.9.

- a) Với $q = 2$ ta chỉ ra một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau: các số chia hết cho 3 ta tô màu xanh và các số không chia hết cho 3 ta tô màu đỏ.



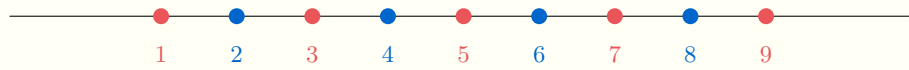
Cách tô như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán, thật vậy:

- ▶ Xét hai số nguyên dương y, z bất kỳ được tô bởi hai màu khác nhau. Chứng tỏ trong hai số này có một số chia hết cho 3 và một số không chia hết cho 3. Khi đó số $x = y + z$ là một số không chia hết cho 3 và sẽ được tô màu đỏ.
- ▶ Có vô hạn số nguyên dương chia hết cho 3 nên có vô hạn số được tô màu xanh.
- ▶ Số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là $q = 2$.

Như vậy khi $q = 2$ ta xây dựng được một cách tô màu phù hợp với yêu cầu bài toán.

- b) Ở câu a ta đã chỉ ra khi $q = 2$ thì có một cách tô màu phù hợp với yêu cầu bài toán.

- ▶ Với $q = 3$ ta chỉ ra một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau: Các số lẻ ta tô màu đỏ, các số chẵn ta tô màu xanh.

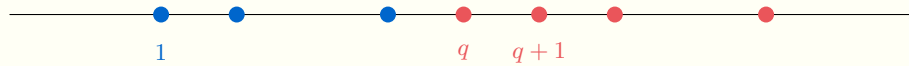


Cách tô như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán, thật vậy:

- ◇ Xét hai số nguyên dương b, c bất kỳ được tô bởi hai màu khác nhau. Chứng tỏ trong hai số này có một số chẵn và một số lẻ. Khi đó số $a = b + c$ là một số lẻ nên phải tô màu đỏ.
- ◇ Có vô hạn số chẵn nên có vô hạn số được tô màu xanh.
- ◇ Số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là $q = 3$.

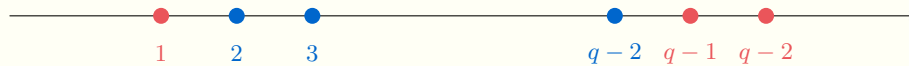
Như vậy, khi $q = 3$ ta xây dựng một được cách tô màu phù hợp với yêu cầu bài toán.

- Ta chứng minh số 1 phải được tô màu đỏ.



Thật vậy, giả sử số 1 được tô màu xanh. Vì q được tô màu đỏ nên $q + 1$ được tô màu đỏ. Số $q + 2 = (q + 1) + 1$ nên số $q + 2$ được tô màu đỏ. Cứ tiếp tục như vậy thì mọi số lớn hơn q đều được tô màu đỏ. Nên chỉ có một số hữu hạn số được tô màu xanh. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Chứng tỏ số 1 phải được tô màu đỏ.

- Với $q > 3$ ta chứng minh không thể thực hiện được yêu cầu của bài toán.



Thật vậy, giả sử tồn tại được cách tô ứng với $q > 3$. Khi đó $q - 2 \in \mathbb{N}^*$, $q - 2 < q$ và số $q - 2$ được tô màu xanh. Do $q - 1 = (q - 2) + 1$ nên số $q - 1$ được tô màu đỏ. Nhưng $q - 1 < q$, do đó ta có mâu thuẫn với giả thiết q là số nhỏ nhất được tô màu đỏ.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

□

 ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2020-2021

Câu 3.1.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 2x &= 2(1 + \cos x) - 1 \\ \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x &= 2\cos x \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đặt $f(x) = (m^2 - m + 1)x^{2020} + 2x - 2$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -2 < 0, f(1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(0) \cdot f(1) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ luôn có nghiệm trên $(0; 1)$, với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi tham số m .

□

Câu 3.2.

a) Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \cdots + x^nC_n^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \cdots + nx^{n-1}C_n^n.$$

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 3 \cdot 2x \cdot C_n^3 + \cdots + n(n-1)x^{n-2}C_n^n.$$

Chọn $x = 1$, ta có

$$n(n-1)2^{n-2} = 2C_n^2 + 3 \cdot 2 \cdot C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n.$$

Từ giả thiết, suy ra

$$n(n-1)2^{n-2} = 64n(n-1) \Leftrightarrow 2^{n-2} = 64 \Leftrightarrow n = 8.$$

Với $n = 8$, ta có khai triển

$$\begin{aligned}(1 + x^2 - x^3)^8 &= \sum_{k=0}^8 C_8^k (x^2 - x^3)^k \\&= \sum_{k=0}^8 C_8^k \sum_{i=0}^k C_k^i (x^2)^{k-i} (-x^3)^i \\&= \sum_{k=0}^8 \sum_{i=0}^k C_8^k C_k^i (-1)^i x^{2k+i}.\end{aligned}$$

Số hạng chứa x^8 tương ứng với số hạng chứa k, i thỏa mãn

$$\begin{cases} 2k + i = 8 \\ 0 \leq i \leq k \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k; i) = (4; 0) \\ (k; i) = (3; 2). \end{cases}$$

Vậy hệ số của x^8 là $C_8^4 C_4^0 (-1)^0 + C_8^3 C_3^2 (-1)^2 = 4C_8^4 + 3C_8^3$.

b) Số phần tử của tập hợp S là $9 \times 10^4 = 90000$.

Gọi “số đẹp” là $\overline{abcde}$. Theo giả thiết, ta có $a + e = 2c$, suy ra $a + e$ chẵn nên a, e phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: a, e cùng lẻ, ta có 5 cách chọn a ; 10 cách chọn b ; 10 cách chọn d ; 5 cách chọn e và 1 cách chọn c vì c là trung bình cộng của a và e . Do đó trường hợp này có $5 \times 10 \times 10 \times 5 \times 1 = 2500$ số.

TH2: a, e cùng chẵn, ta có 4 cách chọn a vì a khác 0; 10 cách chọn b ; 10 cách chọn d ; 5 cách chọn e và 1 cách chọn c vì c là trung bình cộng của a và e . Do đó trường hợp này có $4 \times 10 \times 10 \times 5 \times 1 = 2000$ số.

Từ đó suy ra trong S có $2500 + 2000 = 4500$ “số đẹp”. Vậy xác suất để chọn trong S được một “số đẹp” là $\frac{4500}{90000} = \frac{1}{20}$.

□

Câu 3.3.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2020)^{\sqrt[2021]{1+2021x}} - 2020}{x}$, ta có

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sqrt[2021]{1+2021x} + \frac{2020(\sqrt[2021]{1+2021x} - 1)}{x} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sqrt[2021]{1+2021x} + \frac{2020(1+2021x-1)}{x \left[(\sqrt[2021]{1+2021x})^{2020} + (\sqrt[2021]{1+2021x})^{2019} + \dots + 1 \right]} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sqrt[2021]{1+2021x} + \frac{2020 \cdot 2021}{(\sqrt[2021]{1+2021x})^{2020} + (\sqrt[2021]{1+2021x})^{2019} + \dots + 1} \right] \\&= \frac{2020 \cdot 2021}{2021} = 2020.\end{aligned}$$

Vậy $L = 2020$.

b) C1: Ta có

$$\begin{aligned}u_1 &= -2 = 1 - 3 \\u_2 &= -1 = 2 - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \sqrt{2(u_2^2 + 1) + 2u_1} = 0 = 3 - 3 \\ u_4 &= \sqrt{3(u_3^2 + 1) + 2u_2} = 1 = 4 - 3 \\ u_5 &= \sqrt{4(u_4^2 + 1) + 2u_3} = 2 = 5 - 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Từ đó ta dự đoán rằng $u_n = n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)

Thật vậy, $u_1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow (1)$ đúng, $u_2 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow (1)$ đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k - 1$ và $n = k$ ($k \geq 2$), tức là $u_{k-1} = k - 4$ và $u_k = k - 3$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} = k - 2$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \sqrt[3]{k(u_k^2 + 1) + 2u_{k-1}} = \sqrt[3]{k[(k-3)^2 + 1] + 2(k-4)} \\ &= \sqrt[3]{k^3 - 6k^2 + 12k - 8} = k - 2. \end{aligned}$$

Vậy $u_n = n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó $u_{2021} = 2018$.

C2: Với mọi $n \geq 2$, ta có

$$u_{n+1} = \sqrt[3]{n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}} \Leftrightarrow u_{n+1}^3 = n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}. \quad (2)$$

Từ đó suy ra $u_n = n + k$, khi đó $u_{n+1}^3 = (n + k + 1)^3$, suy ra hệ số tự do của u_{n+1}^3 là $(k + 1)^3$. Lại có

$$n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1} = n[(n + k)^2 + 1] + 2(n + k - 1),$$

suy ra hệ số tự do của $n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}$ là $2(k - 1)$. Từ (2) và đồng nhất hệ số tự do, ta được

$$(k + 1)^3 = 2(k - 1) \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

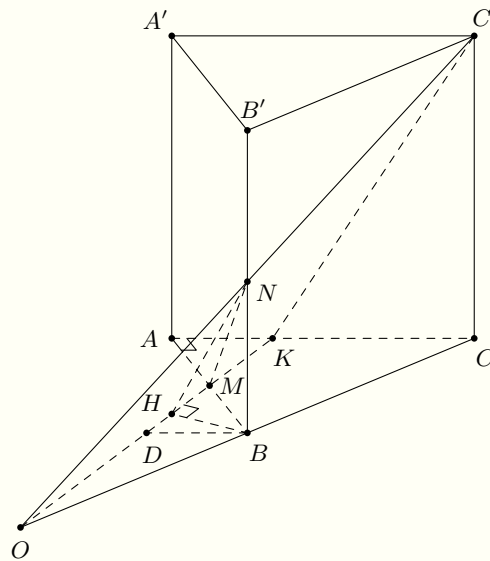
Với $k = -3 \Rightarrow u_n = n - 3$, thay vào (1) được

$$u_{n+1}^3 = n[(n - 3)^2 + 1] + 2(n - 4) \Leftrightarrow n^3 - 6n^2 + 12n - 8 = (n - 2)^3 \quad (\text{đúng}).$$

Vậy $u_n = n - 3$, suy ra $u_{2021} = 2018$.

□

Câu 3.4.



- a) Trong $(BCC'B')$, kéo dài $C'N$ và BC cắt nhau tại O , ta có $O \in BC \subset (ABC)$. Trong (ABC) , kéo dài OM cắt AC tại K , ta có $K \in (ACC'A')$. Trong $(ACC'A')$, nối KC' , ta có $MNC'K$ là thiết diện của lăng trụ cắt bởi (MNC') .

b) Gọi H là hình chiếu của B trên OM , ta có

$$\begin{cases} BH \perp OM \\ BN \perp OM \end{cases} \Rightarrow OM \perp (BMN).$$

Hơn nữa $OM = (MNC') \cap (ABC)$, do đó góc giữa (MNC') và (ABC) là $\widehat{NHB}$. Vì N trung điểm BB' , suy ra B là trung điểm của OC . Gọi D là trung điểm OK , ta có $AK = BD$ và $CK = 2BD$, suy ra $CK = 2AK$ hay $AK = \frac{1}{3}AC = \frac{a}{3}$. Ta có $\triangle HMB \sim \triangle AMK$, suy ra

$$BH = \frac{AK \cdot BM}{MK} = \frac{AK \cdot BM}{\sqrt{AM^2 + AK^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

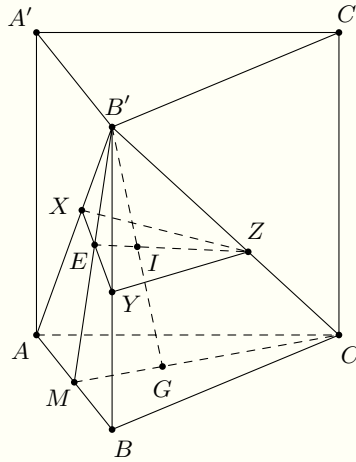
Trong tam giác BHN vuông tại B có

$$\cos \widehat{NHB} = \frac{BH}{NH} = \frac{BH}{\sqrt{BH^2 + BN^2}} = \frac{\sqrt{30}}{15}.$$

Ta có $S_{MBCK} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMK} = \frac{5a^2}{12}$. Vì $MBCK$ là hình chiếu của $MNC'K$ trên (ABC) , do đó

$$S_{MNC'K} = S_{MBCK} \cdot \cos \widehat{NHB} = \frac{\sqrt{30}}{36}.$$

c) Đặt $\frac{B'A}{B'X} = x, \frac{B'B}{B'Y} = y, \frac{B'C}{B'Z} = z$, với $x, y, z \geq 1$.



Vì G là trọng tâm tam giác ABC và I trung điểm $B'G$ nên ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C} &= 3\overrightarrow{B'G} \Leftrightarrow x\overrightarrow{B'X} + y\overrightarrow{B'Y} + z\overrightarrow{B'Z} = 6\overrightarrow{B'I} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{B'I} = \frac{x}{6}\overrightarrow{B'X} + \frac{y}{6}\overrightarrow{B'Y} + \frac{z}{6}\overrightarrow{B'Z}. \end{aligned}$$

Mặt khác $I \in (XYZ)$ nên

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 6.$$

Khi đó

$$T = xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$. Vậy $T_{\max} = 8$ khi X, Y, Z lần lượt là trung điểm $B'A, B'B, B'C$.

□

Câu 3.5. Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên ta có

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \Leftrightarrow \tan C \cos C &= \cos A \cos B (\tan A + \tan B) \\ \Leftrightarrow \frac{\cos A \cos B}{\cos C} &= \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}.\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos A} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C}; \quad \frac{\cos C \cos A}{\cos B} = \frac{\tan B}{\tan C + \tan A}.$$

Đặt $\tan A = x, \tan B = y, \tan C = z$. Vì A, B, C nhọn nên $x, y, z > 0$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} = \frac{2x}{2\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2x}{x+y+z}.$$

Tương tự, ta có

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{y+z+x}; \quad \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{z+x+y}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên, ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \quad (\text{không thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2.$

□

Câu 3.6.

a) Với mọi x dương ta luôn có

$$x^4 - x^3 + x^2 \geq 3x - 2.$$

Thật vậy,

$$x^4 - x^3 + x^2 \geq 3x - 2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+x+2) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}P &= (x^4 + y^4 + z^4) - (x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (x^4 - x^3 + x^2) - (y^4 - y^3 + y^2) + (z^4 - z^3 + z^2) \\ &\geq (3x - 2) + (3y - 2) + (3z - 2) = 3(x + y + z) - 6 = 3.\end{aligned}$$

Vậy p đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $x = y = z = 1$.

b) Ta có $n^2 + np$ là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + np = m^2$, với m là số nguyên dương. Khi đó $4n^2 + 4np = 4m^2$, suy ra

$$(2n + p)^2 - p^2 = 4m^2 \Leftrightarrow (2n + p)^2 - (2m)^2 = p^2 \Leftrightarrow (2n + p - 2m)(2n + p + 2m) = p^2. \quad (1)$$

Vì p là số nguyên tố nên p^2 có hai cách phân tích thành tích của hai số tự nhiên là $p^2 = p^2 \cdot 1 = p \cdot p$. Vì m là số nguyên dương nên $2n + p + 2m > 2n + p - 2m > 0$. Do đó từ (1), suy ra

$$\begin{cases} 2n + p + 2m = p^2 & (2) \\ 2n + p - 2m = 1. & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (2) và (3), ta có $4n + 2p = p^2 + 1$, suy ra $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Vì $p > 2$ nên p lẻ, hay $p-1$ chẵn, do đó n là số nguyên dương. Vậy, với mỗi số nguyên tố p lớn hơn 2 cho trước, chỉ có duy nhất số nguyên dương $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 3.7. Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}u_k + 4k^2$, hay

$$(k+2)u_{k+1} = (k+1)u_k + 4k^3 + 8k^2.$$

Lần lượt thay k bởi 1, 2, ..., n , ta có

$$\begin{aligned} 3u_2 - 2u_1 &= 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2; \\ 4u_3 - 3u_2 &= 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2; \\ &\dots \\ (n+2)u_{n+1} - (n+1)u_n &= 4 \cdot n^3 + 8 \cdot n^2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$(n+2)u_{n+1} - 2u_1 = 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 8(1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Lại có

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

và

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Do đó

$$(n+2)u_{n+1} - 2 = 4 \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 8 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Suy ra

$$u_{n+1} = \frac{3n^4 + 14n^3 + 15n^2 + 4n + 6}{3(n+2)}.$$

Vậy

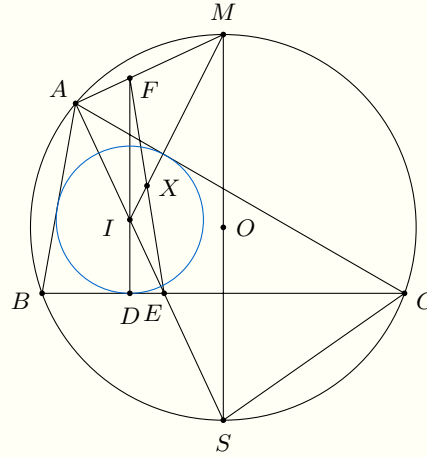
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{(n+2)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 14n^3 + 15n^2 + 4n + 6}{3(n+2)^4} = 1$$

hay $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{(n+2)^3} = 1$. Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{u_n}}{n+1} = 1$.

□

Câu 3.8.

- a) Gọi X là giao điểm của MI và EF . Từ giả thiết, suy ra MS là đường trung trực của đoạn thẳng BC , suy ra $MS \parallel DI$. (1)



Vì $\widehat{ASC} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{SAC} = \widehat{BAE}$ nên $\triangle SAC \sim \triangle BAE$ (g.g), suy ra $\frac{AB}{BE} = \frac{AS}{SC}$. (2)

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{AB}{BE} = \frac{IA}{IE}$. (3)

Theo giả thiết ta cũng có $SI = SC$. (4)

Khi đó từ (1) và (4) suy ra $\frac{AS}{SC} = \frac{AS}{SI} = \frac{AM}{MF}$. (5)

Theo (2), (3), (5) có $\frac{AM}{MF} = \frac{IA}{IE}$. (6)

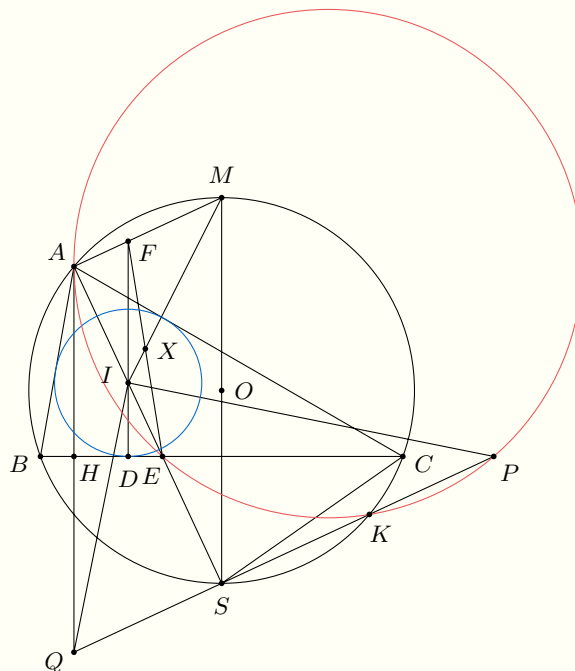
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AEF (có I, X, M thẳng hàng) thu được

$$\frac{AI}{IE} \cdot \frac{EX}{XF} \cdot \frac{MF}{MA} = 1,$$

kết hợp (6) ta được $\frac{EX}{XF} = 1$. Suy ra $XE = XF$ hay MI đi qua trung điểm của EF .

- b) Ta có

$$\widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}.$$



Vì AI là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC nên $\widehat{HAI} = \widehat{OAI}$. Suy ra tam giác AQK cân tại A , đường cao AS , do đó $SQ = SK$. Lại có

$$\widehat{EPK} = 90^\circ - \widehat{HQP} = 90^\circ - \widehat{AKS} = \widehat{EAK}.$$

Suy ra tứ giác $AEKP$ nội tiếp nên ta thu được $SK \cdot SP = SE \cdot SA$. Hơn nữa, dễ dàng chứng minh được $\triangle SEC \sim \triangle SCA$ nên $SC^2 = SE \cdot SA$. Từ các điều kiện trên ta có

$$SI^2 = SC^2 = SE \cdot SA = SK \cdot SP = SQ \cdot SP. \quad (7)$$

Từ (7) và kết hợp IS là đường cao tam giác PIQ , suy ra tam giác PIQ vuông tại I .

□

Câu 3.9.

a) Nhận xét rằng trong n điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán thì

- Các điểm A_1, A_n không là trung điểm của đoạn thẳng nào.
- Các điểm A_2, A_{n-1} là trung điểm của 1 đoạn thẳng.
- Các điểm A_3, A_{n-2} là trung điểm của 2 đoạn thẳng.
- ...
- Các điểm A_i, A_{n-i+1} là trung điểm của $i - 1$ đoạn thẳng với mọi $i = 2, 3, \dots$ thỏa $2i \leq n$.

Ta xét hai trường hợp sau:

TH1: Nếu n lẻ, khi đó $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}^*$ thì điểm chính giữa A_{m+1} là trung điểm của m đoạn thẳng. Do đó số đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm là

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + (m - 2) + (m - 1) + m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + 2 + 1 \\ &= m(m - 1) + m \\ &= m^2. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $m^2 = 2025$ nên $m = 45$, suy ra $n = 91$.

TH2: Nếu n chẵn, khi đó $n = 2m, n \in \mathbb{N}^*$ thì không có điểm chính giữa nào trong n điểm trên. Do đó số đoạn thẳng nhận một trong các điểm đã cho làm trung điểm là $S = m(m - 1)$. Theo giả thiết $m(m - 1) = 2025$, phương trình này vô nghiệm trên $\mathbb{N}^*$, nên không xảy ra trường hợp này.

Vậy $n = 91$.

b) Không mất tổng quát, ta đặt

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_{19} A_{20} = 1.$$

Khi đó, với 20 điểm đã cho trên đề bài ta đặt chúng vào một trục tọa độ $x'Ox$ sao cho điểm A_t có tọa độ bằng t (với $t \in \mathbb{N}^*$ và $t \leq 20$). Khi đó ta phát biểu lại bài toán như sau: “Tìm số màu nhỏ nhất để có thể tô màu các số $1, 2, \dots, 20$ (biết rằng một số một màu, hai số khác nhau có thể được tô cùng một màu) sao cho không có 3 số nào cùng màu lập thành một cấp số cộng”.

- Với $m = 1$, dễ dàng chứng minh không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, với một cách tô như sau:
 - ◇ Màu thứ nhất: Tô các số $1, 2, 6, 7, 9, 18, 20$.
 - ◇ Màu thứ hai: Tô các số $3, 4, 11, 12, 15, 16$.
 - ◇ Màu thứ ba: Tô các số $5, 8, 10, 13, 14, 17, 19$.

- Bây giờ ta chứng minh $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán: Tức là khi tô các số bởi 2 màu khác nhau luôn tồn tại ba số cùng màu lập thành một cấp số cộng.
Giả sử ngược lại là có một cách tô các số từ 1 đến 20 bởi hai màu khác nhau sao cho không có ba số nào cùng màu lập thành một cấp số cộng. Từ đây ta có nhận xét:

- ◇ Trong ba số liên tiếp (từ 1 đến 20) luôn có 2 số khác màu.
- ◇ Nếu hai số a, b cùng màu thì $2a - b, 2b - a$ khác màu với chúng.
($1 \leq a, b, 2a - b, 2b - a \leq 20; a, b \in \mathbb{N}^*$).

Xét ba số liên tiếp 9, 10, 11 có hai trường hợp xảy ra:

TH1: Số 10 khác màu với số 9 và số 11. Khi đó, từ nhận xét trên, ta có số 7 và số 13 cùng màu với số 10. Do đó ba số 7, 10, 13 cùng màu và lập thành cấp số cộng. Mâu thuẫn với điều giả sử.

TH2: Số 10 cùng màu với số 9 và khác màu với số 11. Khi đó số 8 cùng màu với số 11. Do đó số 5, số 14 cùng màu với số 9 và số 10. Và số 1, số 6 cùng màu với số 11. Do đó ba số 1, 6, 11 cùng màu và lập thành cấp số cộng. Mâu thuẫn với điều giả sử.
(Tương tự với trường hợp số 10 cùng màu với số 11).

Vậy, số màu nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3 màu, hay $m = 3$.

□

 ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 4.1.

a) Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 2x - \cos 2x - 3 \sin x - \cos x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x - \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x - \cos x + 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x(2 \sin x - 1) + (\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; \quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ký hiệu $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5} = 4(y^2 - x^2) & (1) \\ 5\sqrt[3]{x^4y} = y^2 + x. & (2) \end{cases}$

Để thấy $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Với $(x; y) \neq (0; 0)$, nhân theo vế (1) và (2), ta có

$$\begin{aligned} 15x^2y^2 &= 4(y^2 + x^2)(y^2 - x^2) \Leftrightarrow 4x^4 + 15x^2y^2 - 4y^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(\frac{x}{y}\right)^4 + 15\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow y = \pm 2x. \end{aligned}$$

Thay $y = 2x$ vào (2) ta có

$$5\sqrt[3]{2x^5} = 5x^2 \Leftrightarrow 2x^5 = x^6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \quad (\text{vì } (x; y) \neq (0; 0)).$$

Thay $y = -2x$ vào (2) ta có

$$5\sqrt[3]{-2x^5} = 5x^2 \Leftrightarrow -2x^5 = x^6 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4 \quad (\text{vì } (x; y) \neq (0; 0)).$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x; y) = (0; 0), (x; y) = (2; 4)$ và $(x; y) = (-2, 4)$.

□

Câu 4.2.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}$, ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{8x+8} - (x+3)}{(x-1)^2} - \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{8x+8 - (x+3)^2}{(x-1)^2 (\sqrt{8x+8} + x+3)} - \frac{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2 (\sqrt{8x+8} + x+3)} - \frac{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{(\sqrt{8x+8} + x+3)} - (x^2 + 2x + 3) \right] \\ &= -\frac{1}{8} - 6 = -\frac{49}{8}. \end{aligned}$$

b) Gọi x ($x \in \mathbb{Z}; 1 \leq x \leq 9$) là số quả cầu lấy ra, ta có số phần tử không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_9^x.$$

Trong chín quả cầu có 2 quả cầu đánh số chia hết cho 4 và 7 quả cầu đánh số không chia hết cho 4. Gọi A là biến cố: “có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4”. Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: “không có quả cầu nào ghi số chia hết cho 4”. Ta có

$$n(\overline{A}) = C_7^x \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{C_7^x}{C_9^x} = \frac{7!}{x!(7-x)!} \cdot \frac{x!(9-x)!}{9!} = \frac{(9-x)(8-x)}{9 \cdot 8} = \frac{x^2 - 17x + 72}{72}.$$

Do đó

$$P(A) = 1 - \frac{x^2 - 17x + 72}{72} = \frac{17x - x^2}{72}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$P(A) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{17x - x^2}{72} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12.$$

Vậy số quả cầu ít nhất cần lấy ra là 6.

□

Câu 4.3.

a) Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{2}{n} \right).$$

Đặt $v_n = u_n - \frac{2}{n}$, ta có $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, suy ra (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 3$ và $q = \frac{1}{2}$. Do đó

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}} \Rightarrow u_n = \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2}{n} \Rightarrow n \cdot u_n = \frac{12n}{2^{n+1}} + 2.$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh $2^{n+1} > n^2$. (1)

Thật vậy, dễ thấy (1) đúng với $n = 1, n = 2, n = 3$. Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 3$, suy ra

$2^{k+1} > k^2$. Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh $2^{k+2} > (k + 1)^2$.
Thật vậy

$$2^{k+2} = 2 \cdot 2^{k+1} > 2k^2 = (k + 1)^2 + (k - 1)^2 - 2 > (k + 1)^2, \forall k \geq 3.$$

Khi đó $0 < \frac{12n}{2^{n+1}} < \frac{12}{n}$, mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n}{2^{n+1}} = 0$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n}{2^{n+1}} + 2 \right) = 2$.

- b) Giả sử $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2$ với $b \in \mathbb{N}^*$, ta có $b^2 > 3^{2n}$ hay $b > 3^n \Rightarrow b \geq 3^n + 1$. Từ đó suy ra $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2 \geq (3^n + 1)^2 = 3^{2n} + 2 \cdot 3^n + 1$, suy ra $2 \cdot 3^n < 3n^2 + 6$.
Nếu $n \geq 3$ thì (2) không xảy ra vì

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^n &= 2 \cdot (1 + 2)^n = 2(C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots) \\ &= 2(1 + 2n + 2n(n-1) + \dots) \\ &> 2 + 4n^2 = 3n^2 + n^2 + 2 \\ &> 3n^2 + 6. \end{aligned}$$

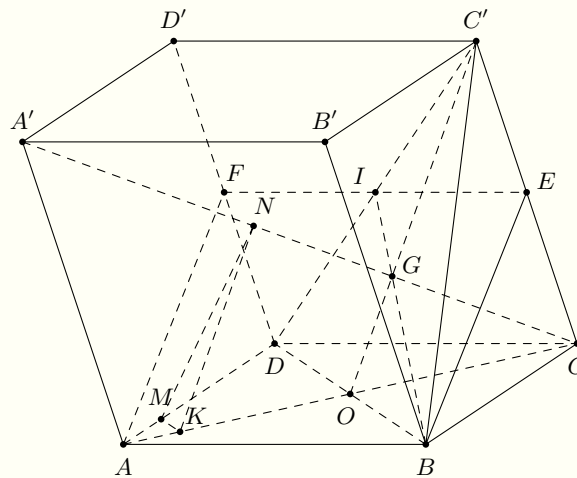
Do đó $n = 1$ hoặc $n = 2$.

- Với $n = 1$, ta có $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 19$ không phải là số chính phương.
- Với $n = 2$, ta có $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 100$ là số chính phương.

Vậy có duy nhất $n = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 4.4.



- a) Gọi I trung điểm DC' , ta có $I \in BG \subset (ABG)$. Qua I kẻ đường thẳng song song CD , cắt CC' và DD' lần lượt tại E và F . Ta có $EF \parallel CD \parallel AB \Rightarrow EF \subset (ABG)$, do đó thiết diện của hình hộp cắt bởi (ABG) là tứ giác $ABEF$. Dễ thấy $EF \parallel AB$ và $EF = AB$, do đó thiết diện $ABEF$ là hình bình hành.
- b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Trong $(ACC'A')$, ta thấy G là giao điểm của $A'C$ và $C'O$ và $\frac{CG}{CA'} = \frac{1}{3}$. Trong $(ABCD)$, qua M kẻ đường thẳng song song BD , cắt AC tại K , ta có

$$\begin{cases} MK \parallel BD \subset (BDC') \\ MN \parallel (BDC') \end{cases} \Rightarrow (MNK) \parallel (BDC') \Rightarrow NK \parallel (BDC') \Rightarrow NK \parallel GO.$$

Ta có

$$\frac{AK}{AO} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{CO}{CK} = \frac{4}{7}.$$

Vì $NK \parallel GO$ nên

$$\frac{CG}{CN} = \frac{CO}{CK} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{CN}{CA'} = \frac{7}{12}.$$

Vậy $\frac{CN}{CA'} = \frac{7}{12}.$

□

Câu 4.5. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề Cho các số thực dương m, n ta có

$$\sqrt[3]{4(m+n)} \geq \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}. \quad (1)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = n$.

Thật vậy: Đặt $x = \sqrt[3]{m}, y = \sqrt[3]{n}$ ($x, y > 0$), khi đó (1) trở thành $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$. Ta xét

$$\begin{aligned} 4(x^3 + y^3) - (x + y)^3 &= 3(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) \\ &= 3(x - y)(x^2 - y^2) \\ &= 3(x - y)^2(x + y) \geq 0, \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

Do đó $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ hay $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$ (bổ đề được chứng minh).

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{a}{16a + 16b + 4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b + 16c + 4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c + 16a + 4b}} < 1.$$

Áp dụng bổ đề ở trên, ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a}{16a + 16b + 4c}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4[4(a+b) + c]}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4(a+b)} + \sqrt[3]{c}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}.$$

Tương tự ta có

$$\sqrt[3]{\frac{b}{16b + 16c + 4a}} \leq \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}; \quad \sqrt[3]{\frac{c}{16c + 16a + 4b}} \leq \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a}{16a + 16b + 4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b + 16c + 4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c + 16a + 4b}} \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4a + 4b = c \\ 4b + 4c = a \Rightarrow 8(a + b + c) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (\text{mâu thuẫn}). \\ 4c + 4a = b \end{cases}$$

Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a}{16a + 16b + 4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b + 16c + 4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c + 16a + 4b}} < 1.$$

□

 ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2016-2017

Câu 5.1.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & 2 \cos 2x \sin 2x + 2 \cos^2 2x - \sin 2x - \cos 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sin 4x + \cos 4x = \sin 2x + \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi; x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq 1$. Ký hiệu $\begin{cases} (2x - y + 2)(2x + y) + 6x - 3y + 6 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x + 1} + \sqrt{y - 1} = 4. & (2) \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & (2x - y + 2)(2x + y) + 3(2x - y + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x - y + 2)(2x + y + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -2x - 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $y = 2x + 2$ thay vào (2), ta có

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x + 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 5.$$

Với $y = -2x - 3$ thay vào (2), ta có

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{-2x - 2} = 4 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 5 \right)$.

□

Câu 5.2.

a) Đặt $A_n = \sqrt[n+1]{n(n+1)x+1}$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_n - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n(n+1)x + 1 - 1}{x \left[\left(\sqrt[n+1]{n(n+1)x+1} \right)^n + \left(\sqrt[n+1]{n(n+1)x+1} \right)^{n-1} + \dots + 1 \right]} \\ &= \frac{n(n+1)}{n+1} = n. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_1 A_2 \cdots A_{2016} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_1 A_2 \cdots A_{2016} - A_1 A_2 \cdots A_{2015} + A_1 A_2 \cdots A_{2015} - \cdots + A_1 - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_1 A_2 \cdots A_{2015} (A_{2016} - 1) + A_1 A_2 \cdots A_{2014} (A_{2015} - 1) + \cdots + A_1 - 1}{x} \\
 &= 2016 + 2015 + \cdots + 1 = \frac{2016 \cdot 2017}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$\begin{aligned}
 u_{n+1}^2 &= u_n^2 + \frac{2n+1}{2^n} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{4n+6}{2^n} - \frac{2n+5}{2^n} \\
 &\Leftrightarrow u_{n+1}^2 + \frac{2(n+1)+3}{2^n} = u_n^2 + \frac{2n+3}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

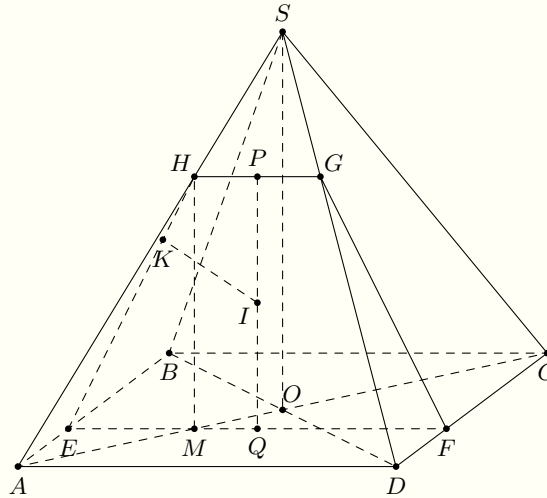
Đặt $v_n = u_n^2 + \frac{2n+3}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $v_{n+1} = v_n = \cdots = v_1 = 6$. Từ đó suy ra

$$u_n = \sqrt{6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}} \Rightarrow \lim u_n = \lim \sqrt{6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}} = \sqrt{6}.$$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{6}$.

□

Câu 5.3.



- a) Từ giả thiết suy ra $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Vì $M \in (P) \cap (ABCD)$ và $(P) \parallel AD$ nên qua M kẻ đường thẳng song song AD lần lượt cắt AB, CD tại E và F , ta có $EF = (P) \cap (ABCD)$. Vì $(P) \parallel SO$ nên qua M kẻ đường thẳng song song SO cắt SA tại H , ta có $HE = (P) \cap (SAB)$. Vì $(P) \parallel AD$ nên qua H kẻ đường thẳng song song AD cắt SD tại G , ta có $HG = (P) \cap (SAD)$ và $GF = (P) \cap (SCD)$. Từ đó suy ra $EFGH$ là thiết diện cần tìm. Theo cách vẽ ta có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AD). Mặt khác $\frac{AH}{AS} = \frac{DG}{DS} \Rightarrow AH = DG$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow AE = DF$, suy ra $\triangle HAE = \triangle GDF$ (c.g.c). Do đó $HE = GF$. Từ đó suy ra $EFGH$ là hình thang cân.

b) Ta có

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Lại có $HM \parallel SO \Rightarrow HM \perp (ABCD)$ và

$$\frac{HM}{SO} = \frac{AM}{AO} = k \Rightarrow HM = \frac{ak\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác $HG \parallel AD$ nên

$$\frac{HG}{AD} = \frac{SH}{SA} = \frac{OM}{OA} = 1 - k \Rightarrow HG = (1 - k)a.$$

Do đó

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH) \cdot HM = \frac{1}{2}[a + (1 - k)a] \cdot \frac{ak\sqrt{2}}{2} = \frac{(2k - k^2)a^2\sqrt{2}}{4}.$$

c) Giả sử $EFGH$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Khi đó (I) tiếp xúc HG tại trung điểm P , tiếp xúc EF tại trung điểm Q và tiếp xúc HE tại điểm K . Theo tính chất tiếp tuyến ta có

$$HE = HK + EK = HP + EQ = \frac{1}{2}(GH + EF) \Leftrightarrow 2HE = GH + EF. \quad (3)$$

Lại có

$$\frac{EM}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{k}{2} \Rightarrow EM = \frac{ak}{2} \Rightarrow EH = \sqrt{EM^2 + HM^2} = \frac{ak\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó

$$(3) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{ak\sqrt{3}}{2} = (1 - k)a + a \Leftrightarrow k\sqrt{3} = 2 - k \Leftrightarrow k = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}.$$

Vậy với $k = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$ thì $EFGH$ ngoại tiếp một đường tròn.

□

Câu 5.4. Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\sqrt{1 + y^3} = \sqrt{(1 + y)(1 - y + y^2)} \leq \frac{2 + y^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1 + x^2}{1 + 4\sqrt{1 + y^3} + 3z^2} \geq \frac{1 + x^2}{2(1 + y^2) + 3(1 + z^2)}.$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + y^2}{1 + 4\sqrt{1 + z^3} + 3x^2} &\geq \frac{1 + y^2}{2(1 + z^2) + 3(1 + x^2)}; \\ \frac{1 + z^2}{1 + 4\sqrt{1 + x^3} + 3y^2} &\geq \frac{1 + z^2}{2(1 + x^2) + 3(1 + y^2)}. \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1 + x^2}{1 + 4\sqrt{1 + y^3} + 3z^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1 + x^2}{2(1 + y^2) + 3(1 + z^2)}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* dạng phân thức ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1 + x^2}{2(1 + y^2) + 3(1 + z^2)} \geq \frac{(1 + x^2 + 1 + y^2 + 1 + z^2)^2}{5 \sum_{cyc} (1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, ta có

$$\frac{(1 + x^2 + 1 + y^2 + 1 + z^2)^2}{5 \sum_{cyc} (1 + x^2)(1 + y^2)} \geq \frac{3}{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

□

Câu 5.5. Chọn một bàn trong hội nghị và giả sử số ghi trên phiếu của các thành viên của bàn lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

TH1: Có hai thành viên của bàn có số giống nhau. Khi đó ta chọn hai nhóm, mỗi nhóm là một thành viên có số giống nhau. Suy ra bàn này là một bàn “thân thiện”.

TH2: Các thành viên của bàn đều có số ghi trên phiếu đôi một khác nhau. Đặt

$$B_1 = \{a_i\}; B_2 = \{a_i + a_j | i \neq j\}; \dots; B_9 = \{a_1 + \dots + a_{10} - a_i | 1 \leq i \leq 10\}.$$

Tổng các số ghi trên bàn chỉ nhận giá trị từ 145 đến 945. Mặt khác

$$|B_1| + |B_2| + |B_9| = C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^9 = 2^{10} - 2 = 2022.$$

Do đó chắc chắn sẽ có ít nhất hai tổng trong 1022 tổng tạo thành từ các số trên bàn bằng nhau. Suy ra bàn này là một bàn “thân thiện”.

Vậy tất cả các bàn trong hội nghị đều là bàn “thân thiện”. □

 ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2015-2016

Câu 6.1.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \sin x + 2 \cos 2x &= \cos x + \sqrt{3} \sin 3x \\ \Leftrightarrow \cos x - \cos 3x + 2 \cos 2x &= \cos x + \sqrt{3} \sin 3x \\ \Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x &= 2 \cos 2x \\ \Leftrightarrow \cos \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) &= \cos 2x. \end{aligned} \quad (1)$$

Giải phương trình (1) được hai họ nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{15} + l\frac{2\pi}{5}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

b) Với điều kiện $xy \neq 0$, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{y} \right)^2 = 13. \end{cases}$$

Đặt $S = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$; $P = \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(y + \frac{1}{y} \right)$, hệ trở thành

$$\begin{cases} S = 5 \\ S^2 - 2P = 13. \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1) được $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$, suy ra

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ y + \frac{1}{y} = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2) được $x = 1$; $y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $y = 1$. Vậy hệ có bốn nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right); \left(1; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 1 \right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1 \right) \right\}.$$

□

Câu 6.2.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$, ta có

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{1+3x} - (x+1)}{x^2} + \frac{(x+1) - \sqrt{1+2x}}{x^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + 3x - (x+1)^3}{x^2 \left(\sqrt[3]{(1+3x)^2} + (x+1)\sqrt[3]{1+3x} + (x+1)^2 \right)} + \frac{(x+1)^2 - (1+2x)}{x^2 (x+1 + \sqrt{1+2x})} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-3-x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2} + (x+1)\sqrt[3]{1+3x} + (x+1)^2} + \frac{1}{x+1 + \sqrt{1+2x}} \right] \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $L = -\frac{1}{2}$.

b) Ta có

$$u_{n+1} = 3u_n + 2n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + (n+1) = 3(u_n + n).$$

Do đó, đặt $v_n = u_n + n$, ta có dãy (v_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó (v_n) là một cấp số nhân với $v_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Suy ra

$$v_n = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n.$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n-1} - n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{n}{3^n} \right).$$

Đặt $a_n = \frac{n}{3^n}$, ta sẽ chứng minh

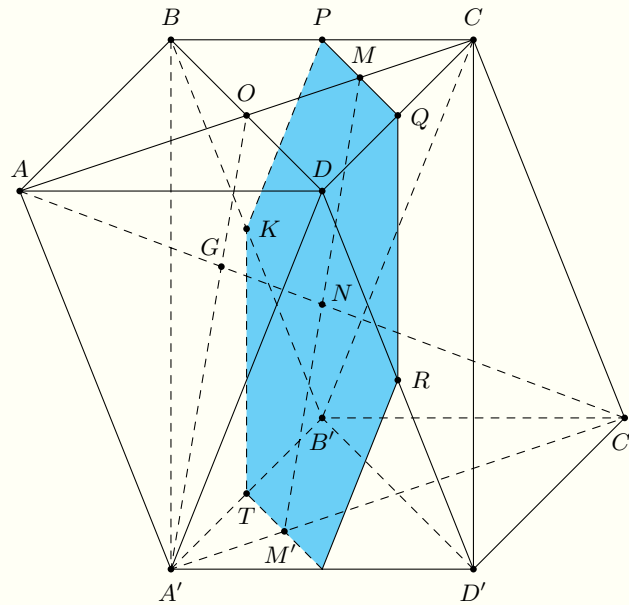
$$0 < a_n < \left(\frac{2}{3} \right)^n, \quad \forall n \geq 1. \quad (1)$$

Thật vậy, $a_n > 0, \forall n \geq 1$ là điều hiển nhiên. Hơn nữa $a_1 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ và giả sử $a_k < \left(\frac{2}{3} \right)^k, \forall k \geq 1$, cần chứng minh $a_{k+1} < \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1}, \forall k \geq 1$. Thật vậy,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k} = \frac{k+1}{3k} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow a_{k+1} \leq \frac{2}{3} a_k < \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1}, \quad \forall k \geq 1.$$

Do đó (1) đúng, suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \frac{2}{3}$.

□



a) Xét hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$ có

$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'B \parallel D'C \end{cases} \Rightarrow (A'BD) \parallel (CB'D').$$

Lại có $(\alpha) \parallel (A'BD)$, suy ra $(\alpha) \parallel (CB'D')$. Từ đó ta có cách dựng thiết diện như sau: Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng đường thẳng đi qua M song song BD cắt BC tại P và cắt CD tại Q ; trong mặt phẳng $(CDD'C')$ dựng đường thẳng đi qua Q song song CD' cắt DD' tại R ; trong mặt phẳng $(ADD'A')$ dựng đường thẳng đi qua R song song $A'D$ cắt $A'D'$ tại S ; trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ dựng đường thẳng đi qua S song song $B'D'$ cắt $A'B'$ tại T ; trong mặt phẳng $(ABB'A')$ dựng đường thẳng đi qua T song song $A'B$ cắt BB' tại K . Thiết diện là lục giác $PQRSTK$.

b) Gọi $M' = A'C' \cap TS$ và $N = AC' \cap MM'$, ta có

$$\begin{cases} N \in AC' \\ N \in MM' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow N = AC' \cap (\alpha).$$

Gọi $O = AC \cap BD$ và $G = A'O \cap AC'$, ta có

$$\frac{AG}{GC'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow AG = \frac{1}{3}AC' \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{cases} (A'BD) \cap (ACC'A') = OG \\ (\alpha) \cap (ACC'A') = MN \\ (A'BD) \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel OG.$$

Xét trong tam giác AMN có $MN \parallel OG$ nên

$$\frac{AN}{AG} = \frac{AM}{AO} = \frac{3}{2} \Rightarrow AN = \frac{3}{2}AG \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AN = \frac{1}{2}AC'$ hay N là trung điểm của AC' .

□

Câu 6.4. Đa giác đều có 2017 cạnh nên có 2017 đỉnh. Vì các đỉnh được sơn bằng 2 màu xanh và đỏ nên ắt phải tồn tại hai đỉnh kề nhau là M và N được sơn cùng một màu (chẳng hạn màu đỏ). Vì đa giác đã cho là đa giác đều có một số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN . Giả sử đó là đỉnh A .

- ▶ Nếu A sơn màu đỏ thì tam giác AMN là tam giác cân tại A có 3 đỉnh A, M, N được sơn cùng màu đỏ.
- ▶ Nếu A sơn màu xanh. Lúc đó ta gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với M và N . Có hai khả năng xảy ra:
 - ◊ Nếu cả B và C đều sơn màu xanh thì tam giác ABC cân tại A có 3 đỉnh được sơn màu xanh.
 - ◊ Nếu ngược lại một trong hai đỉnh B và C mà được sơn màu đỏ thì tam giác BMN hoặc tam giác CMN là tam giác cân có 3 đỉnh được sơn màu đỏ.

Tóm lại luôn tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân. □

Câu 6.5. Từ điều kiện ii) ta có

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3.$$

Suy ra

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq x + y \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2. \quad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \forall a, b \geq 0.$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a^6 + b^6 + 4a^3b^3 = (a^6 + a^3b^3 + a^3b^3) + (b^6 + a^3b^3 + a^3b^3) \geq 3a^4b^2 + 3a^2b^4.$$

Lại từ điều kiện ii) ta có

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ và từ i) ta có

$$3(x^2 + y^2 + \sqrt{xy}) = (x + 1 + 1)(y + 1 + 1) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1)^2 \geq 3(\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Suy ra

$$x^2 + y^2 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}} \text{ hay } \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$. □

Câu 6.6.

a) Với điều kiện $x \leq 1$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{1-x})(1 - \sqrt{1-x})\sqrt[3]{2-x} &= x(1 + \sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2-x} &= x(1 + \sqrt{1-x}). \end{aligned} \quad (1)$$

Phương trình (1) tương đương với $x = 0$ hoặc

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 + \sqrt{1-x}. \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{1-x} = a$; $\sqrt[3]{2-x} = b$ ($a \geq 0$), phương trình (2) trở thành

$$\begin{cases} b &= 1 + a \\ b^3 - a^2 &= 1. \end{cases}$$

Thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta có

$$(1+a)^3 - a^2 = 1 \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Với $a = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

b) Đặt

$$f(x) = p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d).$$

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(a) = q(a-b)(a-d), \quad f(c) = q(c-b)(c-d),$$

suy ra

$$f(a) \cdot f(c) = q^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d). \quad (3)$$

TH1: $q = 0$, từ (3), ta có $f(a) \cdot f(c) = 0$, suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm $x = a$ hoặc $x = c$.

TH2: $q \neq 0$, từ (3) và $a < b < c < d$, ta có $f(a) \cdot f(c) < 0$, suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; c)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với $a < b < c < d$ và p, q là hai số thực bất kỳ.

□

Câu 6.7. Trước hết ta chứng minh

$$u_n \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Thật vậy, $u_1 = 5 \geq 5$. Giả sử $u_n \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 \geq (5 - 2)^2 = 9 > 5 \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

Do đó

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)^2 - u_n = u_n(u_n - 5) + 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra (u_n) là dãy số tăng. Giả sử $\lim u_n = L \geq 5$, từ $u_{n+1} = (u_n - 2)^2$, chuyển qua giới hạn ta có

$$L = (L - 2)^2 \Leftrightarrow L^2 - 5L + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 1 \\ L = 4 \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Do đó $\lim u_n = +\infty$. Ta lại có $u_{n+1} - 4 = (u_n - 2)^2 - 4 = u_n(u_n - 4)$, hay $u_n = \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4}$, do đó

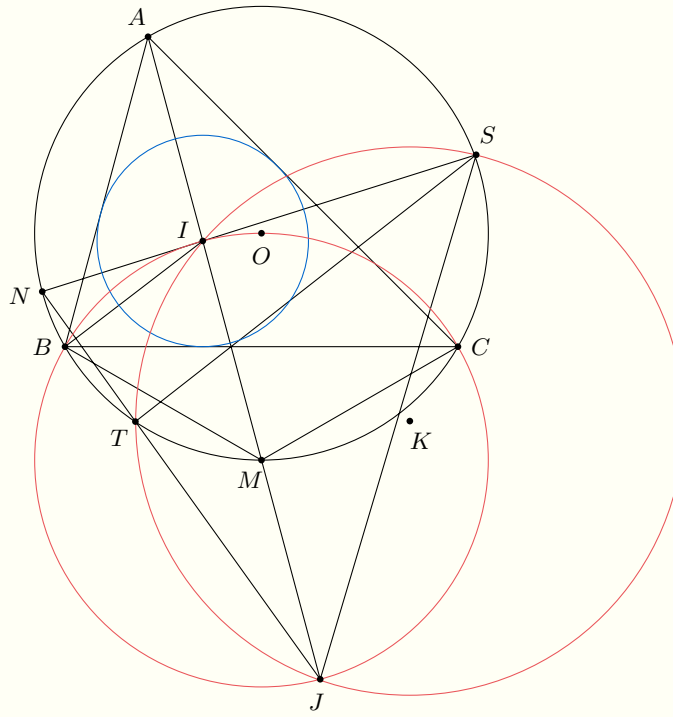
$$u_1 \cdot u_2 \cdots u_n = \frac{u_2 - 4}{u_1 - 4} \cdot \frac{u_3 - 4}{u_2 - 4} \cdots \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_1 - 4} = u_{n+1} - 4.$$

Vậy

$$\lim \frac{u_1 \cdot u_2 \cdots u_n}{u_{n+1}} = \lim \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1}} = \lim \left(1 - \frac{4}{u_{n+1}} \right) = 1.$$

□

Câu 6.8.



a) Ta có

$$\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{IBC} = \widehat{MAC} + \widehat{IBC} = \frac{1}{2} (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}); \quad (1)$$

$$\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{1}{2} (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\widehat{MBI} = \widehat{MIB} \Rightarrow MI = MB = MC.$$

Hơn nữa tứ giác $IBJC$ nội tiếp đường tròn đường kính IJ , do đó M là trung điểm IJ .

b) Ta có

$$\widehat{NTS} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{NA} + \text{sđ } \widehat{AS}) = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{NM} + \text{sđ } \widehat{AS}) = \widehat{NIM}. \quad (3)$$

Mặt khác

$$\widehat{NTS} + \widehat{JTS} = 180^\circ; \quad \widehat{NIM} + \widehat{JIS} = 180^\circ. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có $\widehat{JTS} = \widehat{JIS}$, suy ra tứ giác $JTIS$ nội tiếp đường tròn (K) . Hơn nữa tứ giác $JBIC$ nội tiếp đường tròn (M) . Khi đó IJ là trục đẳng phương của (K) và (M) ; BC là trục đẳng phương của (O) và (M) ; TS là trục đẳng phương của (O) và (K) . Theo tính chất tâm đẳng phương của ba đường tròn có tâm O, M, K không thẳng hàng, suy ra IJ, BC, TS đồng quy.

□

Câu 6.9. Gọi A là tập hợp tất cả các bộ 100 số $(a_1, a_2, \dots, a_{100})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu B là tập hợp 100 số phân biệt của 1917 số nguyên dương đầu tiên. Xét ánh xạ với quy ước sau:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ (a_1, a_2, \dots, a_{100}) &\longmapsto (a_1, a_2 - 1, \dots, a_{100} - 99) \end{aligned}$$

trong đó $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$.

Vì

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &\geq 2 \Rightarrow a_2 - 1 \geq a_1 + 1 > a_1 \\ a_3 - a_2 &\geq 2 \Rightarrow a_3 - 2 \geq a_2 > a_2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 - a_3 &\geq 2 \Rightarrow a_4 - 3 \geq a_3 - 1 > a_3 - 2 \\
&\dots \\
a_{100} - a_{99} &\geq 2 \Rightarrow a_{100} - 99 \geq a_{99} - 97 > a_{99} - 98
\end{aligned}$$

và

$$a_1 \geq 1, \quad a_{100} - 99 \leq 2016 - 99 = 1917$$

nên

$$(a_1, a_2 - 1, \dots, a_{100} - 99) \in B.$$

Như vậy với mỗi phần tử thuộc A ứng với duy nhất một phần tử thuộc B qua ánh xạ f . Tương tự với mỗi phần tử

$$(b_1, b_2, \dots, b_{100}) \in B$$

luôn tồn tại duy nhất phần tử

$$(b_1, b_1 + 1, \dots, b_{100} + 99) \in A$$

để

$$f((b_1, b_1 + 1, \dots, b_{100} + 99)) = (b_1, b_2, \dots, b_{100}).$$

Do đó f là một song ánh nên số phần tử của A bằng số phần tử của B và bằng C_{1917}^{100} . $\square$

Câu 6.10. Giả sử $2^{2n-1} - 2^n + 1$ là số chính phương. Khi đó tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$2^{2n-1} - 2^n + 1 = m^2. \quad (1)$$

TH1: $m = 1$, từ (1), ta có $2^{2n-1} - 2^n + 1 = 1 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

TH2: $m > 1$, từ (1) và $2^{2n-1} - 2^n + 1$ lẻ, suy ra m^2 lẻ, hay m lẻ. Khi đó

$$m \geq 3 \Rightarrow 2^{2n-1} - 2^n + 1 \geq 9 \Rightarrow n > 2.$$

Ta lại có

$$(1) \Leftrightarrow 2^{2n-2} + (2^{n-1} - 1)^2 = m^2 \Leftrightarrow 2^{2n-2} = (m - 2^{n-1} + 1)(m + 2^{n-1} - 1).$$

Đặt $a = m - 2^{n-1} + 1$, $b = m + 2^{n-1} - 1$, ta có a, b chẵn, $a < b$ và

$$ab = 2^{2n-2}. \quad (2)$$

Mặt khác $b - a = 2^n - 2 \equiv 2 \pmod{4}$, suy ra $a = 2$, $b = 2^n$, thế vào (2) được

$$2^{n+1} = 2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 3.$$

Với $n = 3$, ta có

$$2^{2n-1} - 2^n + 1 = 2^5 - 2^3 + 1 = 25 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy có hai giá trị nguyên dương $n = 1, n = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

 ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2014-2015

Câu 7.1.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & 4 \sin 2x \sin x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2(\cos x - \cos 3x) - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos 3x \\ \Leftrightarrow & \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện $x \neq 0; y \neq 0$. Biến đổi phương trình thứ nhất, ta có

$$2x + y + \frac{2x + y}{xy} = 6 \Leftrightarrow (2x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 6 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{xy} = \frac{6}{2x + y}. \quad (1)$$

Thay (1) vào phương trình thứ hai, ta có

$$36(x^2 + y^2) = 8(2x + y)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 32xy + 28y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 7y. \end{cases}$$

Với $x = y$ thay vào phương trình thứ nhất, ta có

$$3x + \frac{3}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Với $x = 7y$ thay vào phương trình thứ nhất, ta có

$$15y + \frac{15}{7y} = 6 \Leftrightarrow 35y^2 - 14y + 5 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

□

Câu 7.2.

a) Dễ thấy (u_n) là dãy số dương. Ta có $u_1 = 2 > 2$; giả sử $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cần chứng minh $u_{n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, ta có

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^{2015} + u_n + 1}{u_n^{2014} - u_n + 3} - 1 = \frac{(u_n - 1)(u_n^{2014} + 2)}{u_n^{2013}(u_n - 1) + 3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^{2015} + u_n + 1}{u_n^{2014} - u_n + 3} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^{2013}(u_n - 1) + 3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Vậy

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH) \cdot HM = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \sqrt{2}(1-x)] \cdot x = \frac{\sqrt{2}x(2-x)}{2}.$$

□

Câu 7.4. Gọi X tập hợp gồm tất cả các cách sắp xếp, ta có $n(X) = \frac{6!}{2!2!} = 180$. Gọi A là tập hợp các cách sắp xếp gồm hai chữ A đứng cạnh nhau. Hai chữ A đứng cạnh nhau có thể xem là một chữ A nên $n(A) = \frac{5!}{2!} = 60$. Tương tự, gọi M là tập hợp các cách sắp xếp gồm hai chữ M đứng cạnh nhau, ta có $n(M) = \frac{5!}{2!} = 60$. Ta có $A \cap M$ là tập hợp các cách sắp xếp gồm hai chữ A đứng cạnh nhau và hai chữ M đứng cạnh nhau. Hai chữ A đứng cạnh nhau và hai chữ M đứng cạnh nhau có thể xem là hai chữ A, M nên $n(A \cap M) = 4! = 24$. Vậy số cách sắp xếp cần tìm là

$$n(X) - n(A \cup M) = n(X) - [n(A) + n(M) - n(A \cap M)] = 180 - (60 + 60 - 24) = 84.$$

□

Câu 7.5. Đặt

$$P = \frac{a}{\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{4b^2 + c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{4c^2 + a^2 + b^2}}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$P^2 \leq 3 \left(\frac{a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2}{4c^2 + a^2 + b^2} \right).$$

Lại theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dạng *Engel*, ta có

$$\frac{a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(1+1)^2}{3a^2 + a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = \frac{1}{12} + \frac{a^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)}; \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{4b^2 + c^2 + a^2} = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{(1+1)^2}{3b^2 + b^2 + c^2 + a^2} \leq \frac{b^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{3b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 + a^2} \right) = \frac{1}{12} + \frac{b^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)}; \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{4c^2 + a^2 + b^2} = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{(1+1)^2}{3c^2 + c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{3c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{12} + \frac{c^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) được

$$\frac{a^2}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{2}.$$

Do đó $P^2 \leq \frac{3}{2}$, hay $P \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Câu 7.6.

a) Ta có 1, 2, 4, ..., 2^n là cấp số nhân có $n+1$ số hạng với $u_1 = 1$ và $q = 2$, do đó

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = \frac{1(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2 \cdot 2^n - 1.$$

Lại có 1, 5, 25, ..., 5^n là cấp số nhân có $n+1$ số hạng với $u_1 = 1$ và $q = 5$, do đó

$$1 + 5 + 25 + \dots + 5^n = \frac{1(5^{n+1} - 1)}{5 - 1} = \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4}.$$

Từ đó suy ra

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{\frac{5 \cdot 5^n - 1}{4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 \cdot 2^n - 4}{5 \cdot 5^n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8 \left(\frac{2}{5}\right)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} = 0.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2014x} \cdot \sqrt[3]{1+2015x} - \sqrt[3]{1+2015x} + \sqrt[3]{1+2015x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{1+2015x} (\sqrt{1+2014x} - 1)}{x} + \frac{\sqrt[3]{1+2015x} - 1}{x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{1+2015x} (1+2014x-1)}{x (\sqrt{1+2014x} - 1)} + \frac{1+2015x-1}{x ((\sqrt[3]{1+2015x})^2 + \sqrt[3]{1+2015x} + 1)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2014 \sqrt[3]{1+2015x}}{\sqrt{1+2014x} + 1} + \frac{2015}{(\sqrt[3]{1+2015x})^2 + \sqrt[3]{1+2015x} + 1} \right] \\
&= \frac{5036}{3}.
\end{aligned}$$

□

Câu 7.7.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$2014x^{2015} - x^3 + mx^2 + 1 - m = 0 \Leftrightarrow 2014x^{2015} - x^3 + m(x^2 - 1) + 1 = 0.$$

Đặt $f(x) = 2014x^{2015} - x^3 + m(x^2 - 1) + 1$, ta có $f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
 Lại có $f(-1) = -2012$, $f(1) = 2014$, suy ra $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 1)$, hay phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

b) Điều kiện xác định $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $u = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq u \leq 1$), phương trình trở thành

$$\sqrt{1+u} = x(1+2u).$$

Nhận thấy $-1 \leq x \leq 0$ không phải nghiệm phương trình. Với $0 < x \leq 1$ bình phương hai vế phương trình, ta có

$$1+u = x^2(1+4u+4u^2) \Leftrightarrow 1+u = (1-u^2)(1+4u+4u^2).$$

Vì $1+u > 0$ nên chia hai vế phương trình cho $1+u$, ta có

$$1 = (1-u)(1+4u+4u^2) \Leftrightarrow 4u^3 - 3u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Với $u = 0 \Rightarrow x = 1$; với $u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

□

Câu 7.8.

a) Ta có

$$u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} = 2nu_n - 1 \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - 1 = 2(nu_n - 1).$$

Đặt $v_n = nu_n - 1$, ta có $v_{n+1} = 2v_n$, suy ra (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 2$, $q = 2$. Do đó $v_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \Rightarrow u_n = \frac{2^n + 1}{n}$. Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2^n + 1}{n}$.

b) Ta có $nu_n = n \cdot \frac{2^n + 1}{n} = 2^n + 1$. Giả sử nu_n là số chính phương khi đó tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$2^n + 1 = m^2 \Leftrightarrow 2^n = (m + 1)(m - 1).$$

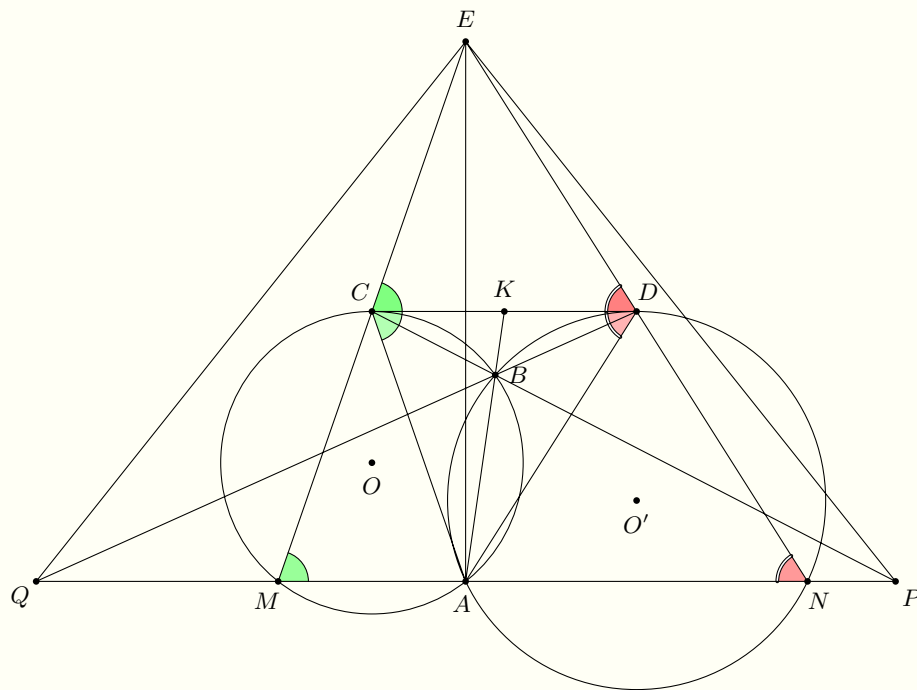
Từ đó suy ra $\begin{cases} m + 1 = 2^{n-k} & (1) \\ m - 1 = 2^k & (2) \end{cases}$, trong đó $k \in \mathbb{N}^*$ và $0 < k < \frac{n}{2}$. Trừ theo vế (1) và (2), ta có

$$2^{n-k} - 2^k = 2 \Leftrightarrow 2^k (2^{n-2k} - 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k = 2 \\ 2^{n-2k} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 3. \end{cases}$$

Vậy nu_n là số chính phương khi và chỉ khi $n = 3$.

□

Câu 7.9.



a) Ta có

$$\begin{cases} \widehat{ACD} = \widehat{AMC} \text{ (cùng chắn cung nhỏ } \widehat{AC}) \\ \widehat{ECD} = \widehat{AMC} \text{ (hai góc đồng vị)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ECD}. \quad (1)$$

Tương tự

$$\begin{cases} \widehat{ADC} = \widehat{AND} \text{ (cùng chắn cung nhỏ } \widehat{AD}) \\ \widehat{EDC} = \widehat{AND} \text{ (hai góc đồng vị)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{EDC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có AE là đường trung trực của CD hay AE vuông góc với CD .

b) Gọi K là giao điểm của AB và CD ta có $KC^2 = KB \cdot AK = KD^2$ hay K là trung điểm của CD . Lại có $PQ \parallel CD$ suy ra A là trung điểm của PQ mà $AE \perp PQ$ nên tam giác EPQ cân tại E .

□

Câu 7.10.

- Với $3 \leq n \leq 8$, ta tô màu xanh các số 1, 2, 5, 6 và tô màu đỏ các số 3, 4, 7, 8 thì không tồn tại ba số cùng màu nào lập thành cấp số cộng. Do đó $3 \leq n \leq 8$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $n = 9$, giả sử rằng không tồn tại ba số cùng màu lập thành cấp số cộng. Không mất tính tổng quát ta tô số 3 màu xanh. Vì các số 3, 4, 5 không tô cùng màu nên ta có các trường hợp sau:

TH1: Số 4 tô màu đỏ và số 5 tô màu xanh, ta có:

- ◊ Các số 1, 3, 5 không tô cùng màu nên số 1 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 1, 4, 7 không tô cùng màu nên số 7 tô màu xanh.

Lúc này các số 3, 5, 7 đều tô màu xanh nên mâu thuẫn giả thiết.

TH2: Số 4 tô màu xanh và số 5 tô màu đỏ, ta có:

- ◊ Các số 2, 3, 4 không tô cùng màu nên số 2 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 2, 5, 8 không tô cùng màu nên số 8 tô màu xanh.
- ◊ Các số 4, 6, 8 không tô cùng màu nên số 6 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 5, 6, 7 không tô cùng màu nên số 7 tô màu xanh.
- ◊ Các số 1, 4, 7 không tô cùng màu nên số 1 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 1, 5, 9 không tô cùng màu nên số 9 tô màu xanh.

Lúc này các số 7, 8, 9 đều tô màu xanh nên mâu thuẫn giả thiết.

TH3: Số 4 và số 5 đều tô màu đỏ, ta có:

- ◊ Các số 4, 5, 6 không tô cùng màu nên số 6 tô màu xanh.
- ◊ Các số 3, 6, 9 không tô cùng màu nên số 9 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 1, 5, 9 không tô cùng màu nên số 1 tô màu xanh.
- ◊ Các số 1, 2, 3 không tô cùng màu nên số 2 tô màu đỏ.
- ◊ Các số 2, 5, 8 không tô cùng màu nên số 8 tô màu xanh.
- ◊ Các số 5, 7, 9 không tô cùng màu nên số 7 tô màu xanh.

Lúc này các số 6, 7, 8 đều tô màu xanh mâu thuẫn giả thiết.

Như vậy với $n = 9$ thì mọi cách tô màu đều tồn tại ba số cùng màu lập thành một cấp số cộng.

Vậy số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 9$. □

 ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2013-2014

Câu 8.1.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 2x \sin x - \cos 2x \sin x + \sin(2x + x) = \cos x(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow & \sin 2x \sin x - \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \cos x(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow & \sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos x(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow & \cos x(2 \sin x - 1)(\sin x + \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \tan x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Giải các phương trình trên ta có nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện $x + y > 0$. Biến đổi phương trình thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} & [(x + y)^2 - 2xy](x + y) + 8xy = 16(x + y) \\ \Leftrightarrow & (x + y)[(x + y)^2 - 16] - 2xy(x + y - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + y - 4)[(x + y)(x + y + 4) - 2xy] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + y - 4)[x^2 + y^2 + 4(x + y)] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 + y^2 + 4(x + y) = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Với $y = 4 - x$ thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y) = (2; 2)$ và $(x; y) = (-3; 7)$.

□

Câu 8.2.

a) Vì giữa 2 bạn nữ gần nhau có 2 bạn nam nên 4 bạn nữ chỉ có thể ngồi vào các vị trí 1, 4, 7, 10 của dãy 10 ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 10; từ trái sang phải.

TH1: Bình ngồi vào vị trí 1 hoặc 10, khi đó An có 5 cách chọn vị trí để không ngồi cạnh Bình. Suy ra số cách sắp xếp là $2 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 5! = 7200$.

TH2: Bình ngồi vào vị trí 4 hoặc 7, khi đó An có 4 cách chọn vị trí để không ngồi cạnh Bình. Suy ra số cách sắp xếp là $2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 5! = 5760$.

Vậy số cách sắp xếp thỏa mãn điều kiện bài toán là 12 960.

b) Ta có $f(x)$ là hàm số liên tục, nhận giá trị không âm trên $[0; +\infty)$, suy ra $f(0) \geq 0$.

TH1: $f(0) = 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: $f(0) > 0$, theo giả thiết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$ nên tồn tại số thực $a > 0$ sao cho $\frac{f(a)}{a} < 1$ hay $f(a) - a < 0$. Đặt $g(x) = f(x) - x$, ta có $g(x)$ liên tục trên $[0; a]$ và

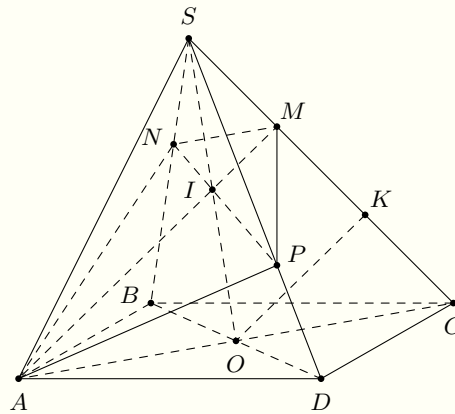
$$g(0) \cdot g(a) = f(0) \cdot [f(a) - a] < 0.$$

Do đó tồn tại ít nhất số thực $c \in (0; a)$ thỏa mãn $g(c) = 0$ hay $f(c) = c$.

Như vậy luôn tồn tại ít nhất số $c \in [0; +\infty)$ thỏa mãn $f(c) = c$.

□

Câu 8.3.



a) Trong $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD ; trong (SAC) , nối SO cắt AM tại I . Trong (SBD) , qua I dựng đường thẳng Δ luôn cắt hai cạnh SB , SD và không qua B , D . Khi đó N là giao điểm của Δ và SB và P là giao điểm của Δ và SD . Gọi K trung điểm $MC \Rightarrow OK \parallel AM$. Vì $SC = 3SM$ nên M trung điểm $SK \Rightarrow I$ trung điểm SO . Theo công thức tỷ số diện tích tam giác ta có

$$\frac{S_{\triangle SNP}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SD}. \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle SNP}}{S_{\triangle SBD}} &= \frac{S_{\triangle SNI} + S_{\triangle SPI}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{S_{\triangle SNI}}{2S_{\triangle SBO}} + \frac{S_{\triangle SPI}}{2S_{\triangle SDO}} \\ &= \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SP}{SD} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SP}{SD} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{4} \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SP}{SD} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{SN}{SB} + \frac{SP}{SD} \right) \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SD}{SP} = 4 \Leftrightarrow \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP} = 4.$$

b) Theo kết quả câu a), ta có

$$\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP} = 4 \Rightarrow \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SD}{SP} \leq 4$$

hay

$$\frac{S_{\triangle SBD}}{S_{\triangle SNP}} \leq 4 \Leftrightarrow S_{\triangle SNP} \geq \frac{1}{4} S_{\triangle SBD}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{SB}{SN} = \frac{SD}{SP}$ hay $NP \parallel BD$. Vậy tam giác SNP có diện tích nhỏ nhất khi (P) qua A , M và song song với BD .

□

Câu 8.4. Bất đẳng thức tương đương

$$a - \frac{a^2b}{ab+1} + b - \frac{b^2c}{bc+1} + c - \frac{c^2a}{ca+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{ab+1} + \frac{b^2c}{bc+1} + \frac{c^2a}{ca+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$\frac{a^2b}{ab+1} + \frac{b^2c}{bc+1} + \frac{c^2a}{ca+1} \leq \frac{a^2b}{2\sqrt{ab}} + \frac{b^2c}{2\sqrt{bc}} + \frac{c^2a}{2\sqrt{ca}} = \frac{1}{2} (\sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3c} + \sqrt{c^3a}).$$

Do đó cần chứng minh

$$\sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3c} + \sqrt{c^3a} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}. \quad (1)$$

Đặt $x = a + \sqrt{bc} - \sqrt{ab}$, $y = b + \sqrt{ca} - \sqrt{bc}$, $z = c + \sqrt{ab} - \sqrt{ca}$, ta có

$$x + y + z = a + b + c \text{ và } xy + yz + zx = \sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3c} + \sqrt{c^3a}.$$

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} \quad (\text{luôn đúng}).$$

Vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Câu 8.5.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2+5} = 3x-5. \quad (1)$$

Vì $\sqrt{x^2+12} > \sqrt{x^2+5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $3x-5 > 0$ hay $x > \frac{5}{3}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12} - 4 = 3x-6 + \sqrt{x^2+5} - 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x+2) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} \right) = 3 \end{cases} \quad \left(\text{vô nghiệm vì } x > \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

b) Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau từ tập X là $A_5^3 = 60$. Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau từ tập X và không có chữ số 5 là $A_4^3 = 24$. Gọi X_1, X_2 lần lượt là các biến cố hai bạn A và B viết lên bảng được số không có mặt chữ số 5, ta có

$$P(X_1) = P(X_2) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\overline{X_1}) = P(\overline{X_2}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Gọi X là biến cố trong hai số viết lên bảng có đúng một số có chữ số 5, ta có

$$X = \overline{X_1}X_2 \cup X_1\overline{X_2}.$$

Hai bạn A, B viết ngẫu nhiên lên bảng nên các biến cố $X_1, X_2, \overline{X_1}, \overline{X_2}$ là độc lập. Do đó xác suất của biến cố X là

$$P(X) = P(\overline{X_1})P(X_2) + P(X_1)P(\overline{X_2}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

□

Câu 8.6.

a) Đặt $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$, ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} + \frac{8 - (8-x)}{x(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + (\sqrt[3]{8-x})^2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + (\sqrt[3]{8-x})^2} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \frac{13}{12}.$$

b) Xét hai dãy số (u_n) và (v_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \min\{c, d, 4\} \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} v_1 = \max\{c, d, 4\} \\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Ta có $u_1 \leq 4$; giả sử $u_k \leq 4, \forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$u_{k+1} = 2\sqrt{u_k} \leq 4 \Rightarrow u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(2 - \sqrt{u_n}) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 4 nên hội tụ. Giả sử (u_n) hội tụ về L ta có

$$L = 2\sqrt{L} \Leftrightarrow \begin{cases} L \geq 0 \\ L^2 - 4L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \quad (\text{loại}) \\ L = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4.$$

Tương tự chứng minh được (v_n) giảm, bị chặn dưới và có giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$. Tiếp theo ta chứng minh $u_n \leq \min\{x_{2n-1}, x_{2n}\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_1 = \min\{c, d, 4\} = \min\{x_1, x_2, 4\} \leq \min\{x_1, x_2\}.$$

Giả sử $u_k \leq \min\{x_{2k-1}, x_{2k}\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, cần chứng minh

$$u_{k+1} \leq \min\{x_{2k+1}, x_{2k+2}\}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$u_{k+1} = 2\sqrt{u_k} = \sqrt{u_k} + \sqrt{u_k} \leq \sqrt{x_{2k-1}} + \sqrt{x_{2k}} = x_{2k+1}.$$

Suy ra

$$u_{k+1} = 2\sqrt{u_k} \leq \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}} \leq \sqrt{x_{2k}} + \sqrt{x_{2k+1}} = x_{2k+2}.$$

Do đó

$$u_{n+1} \leq \min\{x_{2n+1}, x_{2n+2}\}.$$

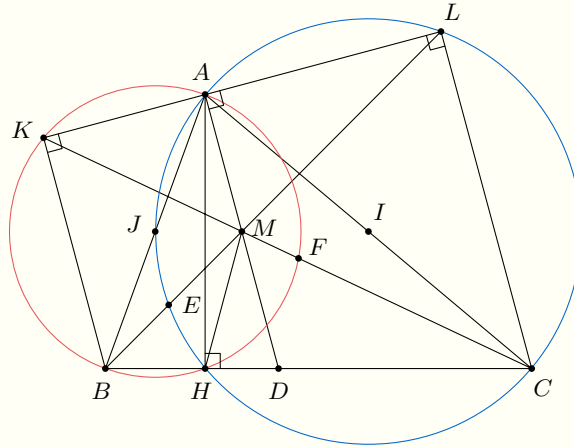
Tương tự chứng minh được $v_{n+1} \geq \max\{x_{2n+1}, x_{2n+2}\}$. Do đó

$$u_{n+1} \leq \min\{x_{2n+1}, x_{2n+2}\} \leq \max\{x_{2n+1}, x_{2n+2}\} \leq v_{n+1}.$$

Lại có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 4$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$.

□

Câu 8.7.



a) Gọi N là giao điểm của AD và BL , vì $KB \parallel AD \parallel LC$ nên ta có

$$\frac{AN}{KB} = \frac{LA}{LK} \Rightarrow AN = \frac{KB \cdot LA}{LK}; \quad \frac{DN}{CL} = \frac{BD}{BC} = \frac{KA}{KL} \Rightarrow DN = \frac{CL \cdot KA}{KL}. \quad (1)$$

Lại có

$$\widehat{KAB} = \widehat{LAC} \Rightarrow \triangle KAB \sim \triangle LAC \Rightarrow \frac{KA}{LA} = \frac{KB}{LC} \Leftrightarrow KA \cdot LC = KB \cdot LA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $AN = DN$ hay N là trung điểm AD , do đó N trùng với M . Chứng minh tương tự ta cũng có CK đi qua M , từ đó ta có AD, BL, CK đồng quy tại M .

b) Gọi H là giao điểm thứ hai của (τ) và (Ω) , ta có

$$\widehat{CLE} = \widehat{DME} \text{ và } \widehat{CLE} + \widehat{EHC} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{DME} + \widehat{EHC} = 180^\circ.$$

Từ đó suy ra tứ giác $MEHD$ nội tiếp đường tròn; tương tự tứ giác $MHDF$ nội tiếp đường tròn. Suy ra M, E, H, D, F nằm trên một đường tròn nên $\widehat{MED} = \widehat{MHD}$ và $\widehat{MDE} = \widehat{MFE}$. Hơn nữa tam giác MHD cân tại M nên $\widehat{MHD} = \widehat{MDH}$, suy ra $\widehat{MED} = \widehat{MHD} = \widehat{MDH}$. Lại có $\widehat{MBD} = 180^\circ - \widehat{MDH} - \widehat{BMD}$ và $\widehat{MDE} = 180^\circ - \widehat{MED} - \widehat{DME}$. Từ đó suy ra $\widehat{MBD} = \widehat{MDE}$, do đó $\widehat{MBD} = \widehat{MFE}$. Vậy bốn điểm B, E, F, C cùng thuộc một đường tròn.

□

Câu 8.8. Ta có phương trình tương đương

$$n^2 + 2n - 4(m^4 + m^2 - m + 1) = 0.$$

Xem phương trình là phương trình bậc hai theo ẩn n ta có $\Delta' = 4m^4 + 4m^2 - 4m + 5$. Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi Δ' là một số chính phương.

TH1: $m = 0$, ta có $\Delta' = 5$ không thỏa mãn.

TH2: $m > 0$, ta có $\Delta' = (2m^2)^2 + (2m - 1)^2 + 1 > 2m^2$.

$$\text{Mặt khác } \Delta' = (2m^2 + 1)^2 - 4(m - 1) \leq (2m^2 + 1)^2.$$

$$\text{Do đó } \Delta' \text{ là số chính phương khi và chỉ khi } \Delta' = (2m^2 + 1)^2 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Với } m = 1 \text{ thay vào phương trình được } n^2 + 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -4 \end{cases} \text{ (loại).}$$

Vậy $(m, n) = (1; 2)$.

□

 ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2012-2013

Câu 9.1.

a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 1 + \frac{1}{y} + (x+1)\frac{1}{y} = 11 \\ (x+1)^2 + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$$

Đặt $x + 1 = u$, $\frac{1}{y} = v$, hệ trở thành

$$\begin{cases} u + v + uv = 11 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u+v) + 2uv = 22 \\ (u+v)^2 - 2uv = 13. \end{cases}$$

Cộng theo về các phương trình trong hệ, ta có

$$(u+v)^2 + 2(u+v) = 35 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 5 \\ u+v = -7. \end{cases}$$

► Với $u+v = -7 \Rightarrow uv = 18$ (vô nghiệm).

$$\begin{aligned} \text{► Với } u+v = 5 \Rightarrow uv = 6 \Rightarrow & \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right); (x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$4 \sin^2 x \sin^2 3x = 6 + 2 \sin 3x. \quad (1)$$

Ta có $4 \sin^2 x \sin^2 3x \leq 4$ và $6 + 2 \sin 3x \geq 4$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin^2 3x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

□

Câu 9.2.

a) Đặt $L = \lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^6 + 1} \right)$, ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 + n^2 - \sqrt[3]{n^6 + 1} \right) \\ &= \lim \left(\frac{n^4 + n^2 + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} + \frac{n^6 - (n^6 + 1)}{n^4 + n^2 \sqrt[3]{n^6 + 1} + (\sqrt[3]{n^6 + 1})^2} \right) \\ &= \lim \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1 \right)} - \frac{1}{n^4 \left[1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^6}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^6}} \right)^2 \right]} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $L = \frac{1}{2}$.

b) Nhận thấy rằng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết ta có

$$u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2013^n} \Leftrightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2013^n}.$$

Do đó

$$u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2013^1}; \quad u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2013^2}; \dots; u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2013^{n-1}}.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên được

$$u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2013^1} + \frac{1}{2013^2} + \dots + \frac{1}{2013^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2013} \right)^{n-1}}{2012}.$$

Từ đó suy ra

$$u_n = \sqrt[n]{2013 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2013} \right)^{n-1}}{2012}}.$$

Dễ thấy

$$1 < u_n = \sqrt[n]{2013 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2013} \right)^{n-1}}{2012}} < \sqrt[n]{2014}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ có

$$\sqrt[n]{2014} < \frac{\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1 \text{ số } 1} + 2014}{n} = 1 + \frac{2013}{n}.$$

Do đó

$$1 < u_n < 1 + \frac{2013}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lại có

$$\lim \left(1 + \frac{2013}{n} \right) = 1 \Rightarrow \lim u_n = 1.$$

Vậy $\lim u_n = 1$.

□

Khi đó

$$S_{IJKQP} = \frac{1}{2} 3x \left(2a - 2x\sqrt{3} + 2a - \frac{2x}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} (\sqrt{3}a - 2x) 2x.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$S_{IJKQP} \leq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}a - 2x + 2x}{2} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{3}a - 2x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện $IJKQP$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

Câu 9.4.

a) Với $d = -2013$, phương trình trở thành

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2013 = 0.$$

Đặt

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2013.$$

Khi đó $f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại hai số $\alpha < 0$ và $\beta > 0$ sao cho $f(\alpha) > 0$ và $f(\beta) > 0$. Lại có $f(0) = -2013 < 0$ nên $f(\alpha) \cdot f(0) < 0$ và $f(\beta) \cdot f(0) < 0$. Vậy phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc hai khoảng $(\alpha; 0)$ và $(0; \beta)$.

b) Với $d = 1$, phương trình trở thành

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + ax + c \cdot \frac{1}{x} + b = 0.$$

Giả sử phương trình có nghiệm x_0 . Khi đó

$$x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + c \cdot \frac{1}{x_0} + b = 0 \Rightarrow \left(ax_0 + c \cdot \frac{1}{x_0} + b \right)^2 = \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* có

$$\left(ax_0 + c \cdot \frac{1}{x_0} + b \right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1 \right).$$

Hay

$$\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1 \right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2}{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1}.$$

Đặt $x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = t \geq 2$, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{t^2}{t+1}.$$

Lại có

$$\frac{t^2}{t+1} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+2) \geq 0 \quad (\text{đúng do } t \geq 2).$$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$. Ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$t = 2 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = c = \frac{2}{3} \\ a = c = -b = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

□

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2011-2012

Câu 10.1.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & (\cos x + \sin x)^3 - 3 \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos^2 x - 2 \cos^3 x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos^2 x (\sin x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \\ (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -3 \\ y = 9. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = (-3; 9)$.

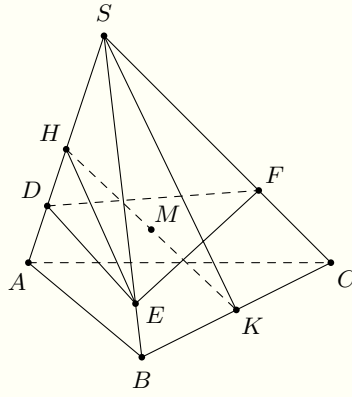
□

Câu 10.2. Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2011(1 - x^{2012}) - 2012(1 - x^{2011})}{(1 - x^{2011})(1 - x^{2012})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)[2011(1 + x + \dots + x^{2011}) - 2012(1 + x + \dots + x^{2010})]}{(1 - x)^2(1 + x + \dots + x^{2011})(1 + x + \dots + x^{2010})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(-1 - x - \dots - x^{2010} + 2011x^{2011})}{(1 - x)^2(1 + x + \dots + x^{2011})(1 + x + \dots + x^{2010})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)[(x^{2011} - 1) + x(x^{2010} - 1) + \dots + x^{2010}(x - 1)]}{(1 - x)^2(1 + x + \dots + x^{2011})(1 + x + \dots + x^{2010})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)[(x - 1)(x^{2010} + \dots + 1 + x(x^{2009} + \dots + 1) + \dots + x^{2010})]}{(1 - x)^2(1 + x + \dots + x^{2011})(1 + x + \dots + x^{2010})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-[x^{2010} + \dots + 1 + x(x^{2009} + \dots + 1) + \dots + x^{2010}]}{(1 + x + \dots + x^{2011})(1 + x + \dots + x^{2010})} \\
 &= -\frac{2011 + 2010 + \dots + 2 + 1}{2012 \cdot 2011} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Câu 10.3.



- a) Gọi H, K lần lượt là trung điểm SA và BC . Theo giả thiết M là trọng tâm tứ diện nên M là trung điểm HK . Do đó ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{SK}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})\right] = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD} + \frac{SB}{SE}\overrightarrow{SE} + \frac{SC}{SF}\overrightarrow{SF}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{SD}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{SE}\overrightarrow{SE} + \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}\right).\end{aligned}$$

- b) Từ câu a), ta có

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{4SD}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{4SE}\overrightarrow{SE} + \frac{1}{4SF}\overrightarrow{SF}.$$

Mặt khác $M \in (DEF)$ nên ta có

$$\frac{1}{4SD} + \frac{1}{4SE} + \frac{1}{4SF} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = 4.$$

Đặt $\frac{1}{SD} = a, \frac{1}{SE} = b, \frac{1}{SF} = c$, ta có $a + b + c = 4$. Khi đó

$$\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD} = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{16}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{4}{3} \Rightarrow SD = SE = SF = \frac{3}{4}.$$

Vậy $\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16}{3}$ khi $SD = SE = SF = \frac{3}{4}$.

□

Câu 10.4. Đặt $a = x, b = 2y, c = 3z$. Từ giả thiết ta có $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow &\frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow &\frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{bc+ba} + \frac{a^2b^2}{ca+cb} \geq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{ab+ac}{4} \geq bc; \quad (1)$$

$$\frac{c^2a^2}{bc+ba} + \frac{bc+ba}{4} \geq ca; \quad (2)$$

$$\frac{a^2b^2}{ca+cb} + \frac{ca+cb}{4} \geq ab. \quad (3)$$

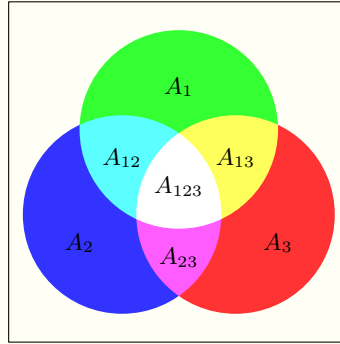
Cộng theo vế (1), (2) và (3) được

$$\frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{bc+ba} + \frac{a^2b^2}{ca+cb} \geq \frac{bc+ca+ab}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Câu 10.5. Gọi ba đa giác cân dựng lần lượt là M, N, P và đặt

$$\begin{aligned} A_{123} &= M \cap N \cap P; \\ A_{12} &= (M \cap N) \setminus A_{123}; \quad A_{13} = (M \cap P) \setminus A_{123}; \quad A_{23} = (N \cap P) \setminus A_{123}; \\ A_1 &= M \setminus (N \cup P); \quad A_2 = N \setminus (M \cup P); \quad A_3 = P \setminus (M \cup N). \end{aligned}$$



Ký hiệu S_H là diện tích hình H ta có

$$\begin{cases} S_{A_1} + S_{A_{12}} + S_{A_{13}} + S_{A_{123}} = S_M \\ S_{A_2} + S_{A_{12}} + S_{A_{23}} + S_{A_{123}} = S_N \\ S_{A_3} + S_{A_{13}} + S_{A_{23}} + S_{A_{123}} = S_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{A_1} + S_{A_{12}} + S_{A_{13}} + S_{A_{123}} = 1 & (1) \\ S_{A_2} + S_{A_{12}} + S_{A_{23}} + S_{A_{123}} = 1 & (2) \\ S_{A_3} + S_{A_{13}} + S_{A_{23}} + S_{A_{123}} = 1. & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta có

$$3S_{A_{123}} + 2(S_{A_{12}} + S_{A_{13}} + S_{A_{23}}) + S_{A_1} + S_{A_2} + S_{A_3} = 3. \quad (I)$$

Giả sử diện tích phần chung của các cặp đa giác đều nhỏ hơn $\frac{1}{3}$ ta có

$$\begin{cases} S_{A_{12}} + S_{A_{123}} < \frac{1}{3} & (4) \\ S_{A_{13}} + S_{A_{123}} < \frac{1}{3} & (5) \\ S_{A_{23}} + S_{A_{123}} < \frac{1}{3}. & (6) \end{cases}$$

Cộng theo vế (4), (5) và (6), ta có

$$3S_{A_{123}} + S_{A_{12}} + S_{A_{13}} + S_{A_{23}} < 1. \quad (II)$$

Trừ theo vế (I) và (II), ta có

$$S_{A_{12}} + S_{A_{13}} + S_{A_{23}} + S_{A_1} + S_{A_2} + S_{A_3} > 2.$$

Điều này vô lý do hình vuông có diện tích bằng 2. Ta có điều phải chứng minh. □

📖 ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2010-2011

Câu 11.1.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3 \sin x - 4 \sin^3 x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2(\cos x - \sin x) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 5(\sin x - \cos x) - 4(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $\sin x - \cos x = t$, $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$, phương trình trở thành

$$5t - 4t \left(1 + \frac{1-t^2}{2} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 5t - 4t - 2t(1-t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với $t = -1 \Rightarrow \sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k2\pi, x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y+x-y+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y} & = \frac{16}{3} \\ (x+y)^2+(x-y)^2+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x-y)^2} & = \frac{100}{9}. \end{cases}$$

Đặt $a = x+y+\frac{1}{x+y}, b = x-y+\frac{1}{x-y}$, hệ trở thành

$$\begin{cases} a+b = \frac{16}{3} \\ a^2-2+b^2-2 = \frac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{16}{3} \\ (a+b)^2-2ab = \frac{136}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{16}{3} \\ ab = \frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{10}{3} \\ a=\frac{10}{3} \\ b=2. \end{cases}$$

► Với $\begin{cases} a=2 \\ b=\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{x+y}=2 \\ x-y+\frac{1}{x-y}=\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \begin{cases} x-y=3 \\ x-y=\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$

► Với $\begin{cases} a=\frac{10}{3} \\ b=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{x+y}=\frac{10}{3} \\ x-y+\frac{1}{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=\frac{1}{3} \end{cases} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm

$$(x; y) = (2; 1), (x; y) = (2; -1), (x; y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ và } (x; y) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

□

Câu 11.2. Dễ thấy $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ là dãy số dương. Từ công thức xác định có

$$0 < \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{30x_n^2 + x_n + 2011}} < \frac{1}{x_n},$$

suy ra tồn tại giới hạn của $\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = L$ và từ $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{30x_n^2 + x_n + 2011}}$, ta có

$$\begin{aligned} L &= \frac{L}{\sqrt{30 + L + 2011L^2}} \Leftrightarrow L^2(2011L^2 + L + 30) = L^2 \\ &\Leftrightarrow L^2(2011L^2 + L + 29) = 0 \\ &\Leftrightarrow L = 0. \end{aligned}$$

Lại có

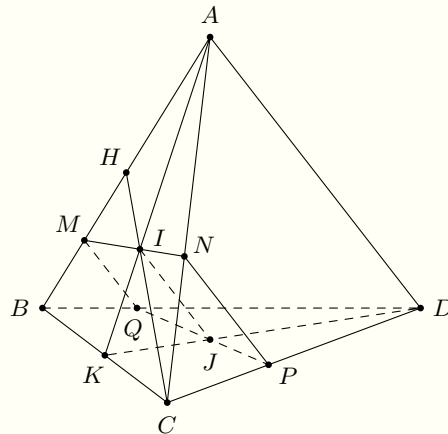
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{30x_n^2 + x_n + 2011}}{x_n} = \sqrt{30 + \frac{1}{x_n} + 2011\left(\frac{1}{x_n}\right)^2}.$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{30 + \frac{1}{x_n} + 2011\left(\frac{1}{x_n}\right)^2} = \sqrt{30}.$$

□

Câu 11.3.



$$\text{a) Ta có } \begin{cases} (MNPQ) \cap (ABC) = MN \\ (MNPQ) \cap (BCD) = PQ \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \end{cases} \Rightarrow MN, PQ, BC \text{ đôi một song song hoặc đồng quy.}$$

- Trường hợp $MN \parallel PQ \parallel BC$, dễ thấy $MNPQ$ là hình chữ nhật nên là hình thang cân.
- Trường hợp MN, PQ, BC đồng quy dễ thấy

$$MQ \neq NP. \quad (1)$$

Gọi K là trung điểm BC ta có

$$\begin{cases} (KAD) \cap (MNPQ) = I \\ (KAD) \cap (BAD) = AD \\ (MNPQ) \cap (BAD) = MQ \\ IJ \parallel AD \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AD.$$

Suy ra

$$\begin{cases} (BAD) \cap (MNPQ) = MQ \\ (CAD) \cap (MNPQ) = NP \\ (BAD) \cap (CAD) = AD \\ MQ \parallel AD \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel NP. \quad (2)$$

Tứ diện $ABCD$ đều nên

$$\begin{cases} AM = DQ \\ AN = DP \\ \widehat{MAN} = \widehat{QDP} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN = \triangle DQP \Rightarrow MN = QP. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Ký hiệu S_H là diện tích hình H ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle MAN} &= \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} xy \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy \\ S_{\triangle MAI} &= \frac{1}{2} AM \cdot AI \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} ax \\ S_{\triangle NAI} &= \frac{1}{2} AN \cdot AI \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} y \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} ay \end{aligned}$$

Khi đó

$$S_{\triangle MAI} + S_{\triangle NAI} = S_{\triangle MAN} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} ax + \frac{\sqrt{3}}{12} ay = \frac{\sqrt{3}}{4} xy \Leftrightarrow a(x+y) = 3xy.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a(x+y)}{3} \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{4a}{3} \leq x+y.$$

Gọi H là trung điểm AB , ta có

$$\begin{cases} HM = AM - AH = x - \frac{a}{2} \\ NC = AC - AN = a - y. \end{cases}$$

Xét tam giác IHM và ICN có

$$\begin{cases} IH = \frac{1}{2} IC \\ IM \leq \frac{1}{2} IN \end{cases} \Rightarrow HM < NC \Leftrightarrow x - \frac{a}{2} < a - y \Leftrightarrow x + y < \frac{3a}{2}.$$

Do đó $\frac{4a}{3} \leq x+y < \frac{3a}{2}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}MQ &= BM = a - x; \quad NP = CN = a - y; \\MN &= \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}\end{aligned}$$

Gọi h là chiều cao của hình thang $MNPQ$ ta có

$$h = \sqrt{MN^2 - \frac{|MQ - NP|^2}{4}} = \sqrt{x^2 + y^2 - xy - \frac{(x - y)^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3(x^2 + y^2) - 2xy}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}S_{MNPQ} &= \frac{1}{2}(MQ + NP)h = \frac{1}{4}(a - x + a - y)\sqrt{3(x^2 + y^2) - 2xy} \\&= \frac{1}{4}[-(x + y)]\sqrt{3(x + y)^2 - 8xy} = \frac{1}{4}[2a - (x + y)]\sqrt{3(x + y)^2 - \frac{8a(x + y)}{3}} \\&= \frac{1}{4}(2a - s)\sqrt{3s^2 - \frac{8as}{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(2a - s)\sqrt{9s^2 - 8as}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(2a - s)\sqrt{9s^2 - 8as}.$$

□

Câu 11.4. Đặt $f(x) = ax^2 + (2b + c)x + 2d + e$, $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ta có $f(4) = g(2)$.

TH1: $a = b = c = d = 0$, ta có $f(x)$ có nghiệm nên $e = 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.

TH2: $a = b = c = 0$ ta có $f(x)$ có nghiệm nên $2d + e = 0 \Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.

TH3: $a = b = 0$, $c \neq 0$, ta có $f(x) = cx + 2d + e$ và $g(x) = cx^2 + dx + e$.

- ▶ Nếu $c > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow g(2) = f(4) \leq 0$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.
- ▶ Nếu $c < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow g(2) = f(4) \geq 0$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.

TH4: $a = 0$, $b \neq 0$, ta có $g(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$ là đa thức bậc ba nên có nghiệm.

TH5: $a \neq 0$, khi đó

- ▶ Nếu $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow g(2) = f(4) \leq 0$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.
- ▶ Nếu $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow g(2) = f(4) \geq 0$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow g(x)$ có nghiệm.

Như vậy phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ luôn có nghiệm.

□

Câu 11.5. Ta có

$$P = \frac{2}{\left(\frac{z}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{y} + 1\right)} + \frac{2}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)\left(\frac{x}{z} + 1\right)} + \frac{3}{\left(\frac{y}{z} + 1\right)\left(\frac{y}{x} + 1\right)}.$$

Đặt $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, suy ra $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Ta có

$$\begin{aligned}P &= \frac{2}{(c + 1)\left(\frac{1}{b} + 1\right)} + \frac{2}{(a + 1)\left(\frac{1}{c} + 1\right)} + \frac{3}{(b + 1)\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \\&= \frac{2b}{(c + 1)(1 + b)} + \frac{2c}{(a + 1)(1 + c)} + \frac{3a}{(b + 1)(1 + a)}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 P \geq \frac{5}{3} &\Leftrightarrow \frac{2b}{(c+1)(1+b)} + \frac{2c}{(a+1)(1+c)} + \frac{3a}{(b+1)(1+a)} \geq \frac{5}{3} \\
 &\Leftrightarrow 3[2b(1+a) + 2c(1+b) + 3a(1+c)] \geq 5(1+a)(1+b)(1+c) \\
 &\Leftrightarrow 6b + 6ab + 6c + 6bc + 9a + 9ac \geq 5(1+a+b+c+ab+bc+ca+abc) \\
 &\Leftrightarrow 4a + b + c + ab + bc + 4ca \geq 10.
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{cases} 4a + bc \geq 2\sqrt{4abc} = 4 & (1) \\ b + 4ca \geq 2\sqrt{4abc} = 4 & (2) \\ c + ab \geq 2\sqrt{abc} = 2. & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

📖 ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 QUẢNG BÌNH NĂM HỌC 2009-2010

Câu 12.1. Điều kiện xác định $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $u = \sqrt[2010]{1+x}$, $v = \sqrt[2010]{1-x}$ ($u, v \geq 0$), phương trình trở thành

$$2u^2 - 3uv + v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(2u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = v. \end{cases}$$

Với $u = v$, suy ra

$$\sqrt[2010]{1+x} = \sqrt[2010]{1-x} \Leftrightarrow 1+x = 1-x \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Với $2u = v$, suy ra

$$2 \sqrt[2010]{1+x} = \sqrt[2010]{1-x} \Leftrightarrow 2^{2010}(1+x) = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1-2^{2010}}{1+2^{2010}} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{1-2^{2010}}{1+2^{2010}}$. □

Câu 12.2. Để thấy (u_n) là dãy số dương nên từ công thức xác định ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{(u_n^2 + 3u_n)(u_n^2 + 3u_n + 2) + 1} \\ &= \sqrt{(u_n^2 + 3u_n)^2 + 2(u_n^2 + 3u_n) + 1} \\ &= \sqrt{(u_n^2 + 3u_n + 1)^2} \\ &= u_n^2 + 3u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Khi đó

$$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 3u_n + 2 = (u_n + 1)(u_n + 2), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó

$$\frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{(u_n + 1)(u_n + 2)} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hay

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó

$$v_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{u_i + 1} - \frac{1}{u_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{u_1 + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + 3u_n + 1) - u_n = (u_n + 1)^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

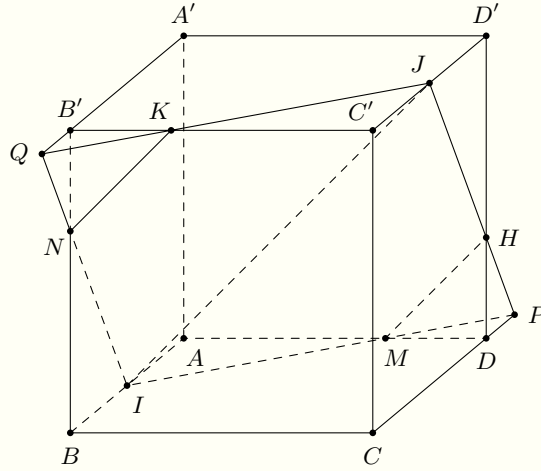
Suy ra (u_n) là dãy số tăng, giả sử (u_n) có giới hạn là L ta có

$$L = L^2 + 3L + 1 \Leftrightarrow L = -1 \quad (\text{vô lý}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

□

Câu 12.3.

a) Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AD'} = \vec{b} + \vec{c}; \\ \overrightarrow{IM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI} = \frac{x}{a}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \\ \overrightarrow{IN} &= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BI} = \frac{x}{a}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \frac{x}{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{x}{a}\overrightarrow{IJ}.$$

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng. Vậy bốn điểm M , N , I , J đồng phẳng.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi P là giao điểm của IM và CD , ta có $P \in (MINJ)$. Trong mặt phẳng $(CDD'C')$, gọi H là giao điểm của PJ và DD' , ta có $H \in (MINJ)$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi Q là giao điểm của IN và $A'B'$, ta có $Q \in (MINJ)$. Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, gọi K là giao điểm của QJ và $B'C'$, ta có $K \in (MINJ)$. Từ đó suy ra $MINKJH$ là thiết diện của hình lập phương cắt bởi $(MINJ)$. Ta có

$$\frac{DH}{D'H} = \frac{DP}{D'J} = \frac{DP}{AI} = \frac{DM}{AM} \Rightarrow D'H = x.$$

Tương tự

$$\frac{B'K}{C'K} = \frac{B'Q}{C'J} = \frac{B'Q}{BI} = \frac{B'N}{BN} \Rightarrow C'K = x.$$

Suy ra

$$IM = IN = JK = JH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}; \quad MH = NK = \sqrt{2}(a - x).$$

Gọi p là chu vi của thiết diện $MINKJH$, ta có

$$p = 4\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} + 2\sqrt{2}(a - x).$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \leq 2\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x\right)^2.$$

Do đó

$$p \geq 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2} + x\right) + 2\sqrt{2}(a - x) = 3\sqrt{2}a.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a}{2}$. Vậy chu vi của thiết diện $MINKJH$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt{2}a$ khi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BB' .

□

Câu 12.4. Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2010}\right) - f(x)$. Hàm số $g(x)$ xác định và liên tục trên $\left[0; \frac{2009}{2010}\right]$. Ta có

$$\begin{aligned} g(0) &= f\left(\frac{1}{2010}\right) - f(0); \\ g\left(\frac{1}{2010}\right) &= f\left(\frac{2}{2010}\right) - f\left(\frac{1}{2010}\right); \\ g\left(\frac{2}{2010}\right) &= f\left(\frac{3}{2010}\right) - f\left(\frac{2}{2010}\right); \\ &\dots \\ g\left(\frac{2009}{2010}\right) &= f(1) - f\left(\frac{2009}{2010}\right). \end{aligned}$$

Cộng theo về các đẳng thức trên, ta được

$$g(0) + g\left(\frac{1}{2010}\right) + g\left(\frac{2}{2010}\right) + \dots + g\left(\frac{2009}{2010}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Do đó tồn tại i, j (với $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ và $i, j \leq 2009$) sao cho $g\left(\frac{i}{2010}\right) \cdot g\left(\frac{j}{2010}\right) \leq 0$. Vậy $g(x)$ luôn có ít nhất 1 nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{2009}{2010}\right]$, hay phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2010}\right)$ có nghiệm $x \in [0; 1]$. □

Câu 12.5. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^3}} \geq 1.$$

Đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}} + \sqrt{\frac{1}{1+y^3}} + \sqrt{\frac{1}{1+z^3}} \geq 1.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(x^2-x+1)}} \geq \frac{2}{x^2+2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{1}{1+y^3}} \geq \frac{2}{y^2+2}; \quad \sqrt{\frac{1}{1+z^3}} \geq \frac{2}{z^2+2}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{y^2+2} + \frac{1}{z^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Tức là cần chứng minh

$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2} + \frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+2} + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 2} = \frac{a^2}{(b+c)^2 + 2a^2} \geq \frac{a^2}{2(b^2 + c^2) + 2a^2} = \frac{a^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + 2} \geq \frac{b^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}; \quad \frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 2} \geq \frac{c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □