

CHINH PHỤC
OLYMPIC TOÁN



Các bài toán

VẬN DỤNG CAO
DÃY SỐ

HAPPY NEW YEAR 2019



TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU
TOÁN HỌC

LỜI GIỚI THIỆU

Nhân dịp năm mới 2019 thay mặt nhóm quản trị viên Tạp chí và tư liệu toán học, lời đầu tiên xin gửi tới các bạn đọc, các thầy cô theo dõi fanpage một lời chúc sức khỏe, mong rằng sang năm mới các thầy cô sẽ đạt được nhiều thành công hơn trong công việc, các bạn học sinh sẽ thực hiện ước mơ nguyện vọng vào các trường Đại học của mình. Chuyên đề "CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO DẪY SỐ" được 2 thành viên trong nhóm *Chinh Phục Olympic Toán* sưu tầm và biên soạn với mục đích chào xuân năm mới cũng như là một món quà với các bạn theo dõi page trong suốt 1 năm vừa qua và đồng thời ủng hộ bọn mình phát triển tới nay, xin gửi lời cảm ơn tới tất cả mọi người. Như các bạn đã biết, trước kia thì dãy số tuy không phải là một phần quan trọng trong kì thi THPT Quốc Gia, kì thi đại học nhưng trong 2 năm gần đây vấn đề này đã được các trường kết nối với các mảng khác như hàm số, mũ – logarit, tích phân... và cũng gây ra không ít những ngỡ ngàng, những sự lúng túng cho các bạn lần đầu gặp những bài như thế. Vì vậy trong chủ đề này, chúng mình và các bạn sẽ cùng tìm hiểu các bài toán liên quan tới chúng, hy vọng phần nào sẽ giúp mọi người có kinh nghiệm và hướng giải quyết khi gặp các bài toán như thế này. Để hoàn thành được chuyên đề này bọn mình cũng đã sưu tầm và tham khảo, đồng thời cũng nhận được sự giúp đỡ của các thầy cô, xin gửi lời cảm ơn tới

- **NHÓM STRONG TEAM TOÁN VD – VDC.**
- **ANH PHẠM MINH TUẤN – ADMIN NHÓM PI**
- **CÁC THÀNH VIÊN TRONG NHÓM CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN**

Mặc dù chuyên đề được biên soạn cẩn thận tuy nhiên sẽ không thể tránh khỏi những thiếu sót, mọi ý kiến thắc mắc vui lòng gửi về 1 trong 2 địa chỉ sau

NGUYỄN MINH TUẤN

Sinh viên K14 – Đại học FPT

Email: tuangenk@gmail.com

Facebook: <https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt>

NGUYỄN NHẬT LINH

Chuyên Thái Bình

Email: linhnhatnhatlinhnguyen@gmail.com

Facebook: <https://www.facebook.com/profile.php?id=100009880805520>

MỘT LẦN NỮA, XIN GỬI LỜI CẢM ƠN MỌI NGƯỜI ĐÃ THEO DÕI FANPAGE TRONG SUỐT THỜI GIAN QUA, HY VỌNG CÁC BẠN SẼ TIẾP TỤC ỦNG HỘ BỌN MÌNH PHÁT TRIỂN HƠN NỮA

THANK YOU! HAPPY NEW YEAR!

CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO DÃY SỐ

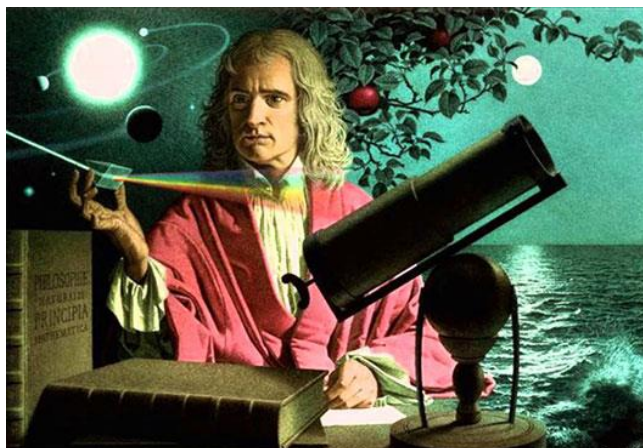
Nguyễn Minh Tuấn – Nguyễn Nhật Linh

CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU

Trước khi cùng nhau đi vào tìm hiểu các bài toán dãy số của chuyên đề này, bọn mình muốn gửi tới các bạn một bài viết rất hay về nhà bác học Newton để phần nào làm giảm bớt độ nhạt nhẽo của chuyên đề, bài viết mang tên **"10 phát minh nổi tiếng của Newton"** Mời các bạn cùng thưởng thức!

Nhắc tới nhà phát minh vĩ đại Isaac Newton, chắc hẳn ai cũng nghĩ tới câu chuyện "quả táo rơi vào đầu" đã làm nên thuyết vạn vật hấp dẫn. Không chỉ vậy, ông còn sở hữu nhiều phát minh vĩ đại giúp thay đổi thế giới: ba định luật chuyển động, vi phân, tích phân, giả thuật kim...

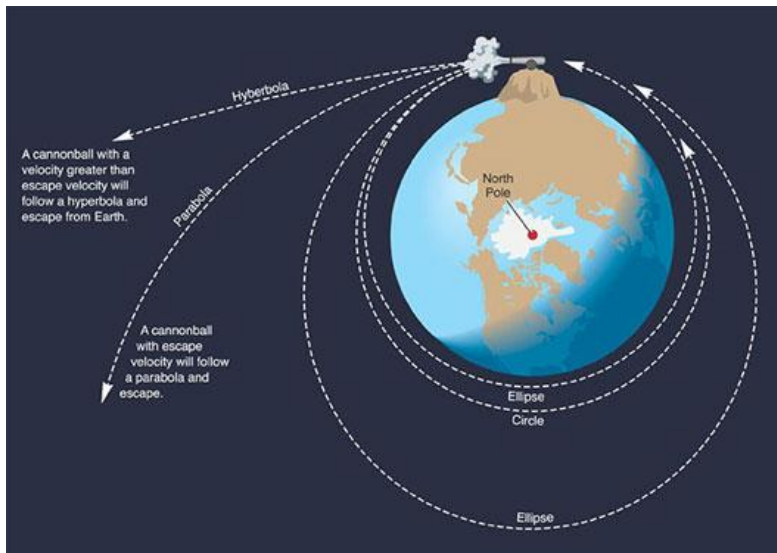
Tại nhà thờ Westminster Abbey, một dòng chữ bằng tiếng Latin đã được khắc lên trên bia mộ của Newton "*Hic depositum est, quod mortale fuit Isaac Newtoni*" với ý nghĩa là "Một con người đã từng tồn tại và trang hoàng cho sự phát triển của nhân loại". Lời ca tụng trên không hề quá mức đối với những di sản mà thiên tài Newton đã để lại cho loài người. Cùng điểm lại 10 phát minh quan trọng và nổi tiếng nhưng cũng hết sức thú vị



Của Isaac Newton trong suốt sự nghiệp sáng tạo của ông mà có thể chúng ta ít khi chú ý đến.

I. Ý TƯỞNG CỦA NEWTON KHẨU PHÁO BẮN VÀO QUỸ ĐẠO.

Đối với một số ý kiến xuyên tạc sẽ cho rằng làm sao một người đàn ông đang ngáy ngủ và một quả táo vô tình rơi xuống lại làm nên một phát minh vĩ đại đến như vậy? Kết quả của quá trình "chờ sung rụng" chăng? Không hề, điều đó chỉ đến với một bộ óc thiên tài luôn suy nghĩ về các quy luật vật lý mà cụ thể là lực hấp dẫn. Không chỉ dừng lại ở trọng lực mà Newton còn đưa ra nhiều ý tưởng khác đi trước thời đại. Trong định luật hấp dẫn phổ quát, Newton đã diễn tả đến một ngọn núi khổng lồ mà đỉnh của nó là khoảng trên bầu khí quyển của Trái Đất, trên đỉnh có đặt một khẩu pháo vô cùng lớn có thể bắn một viên đạn theo chiều ngang ra ngoài không gian.



Ý tưởng của Newton khẩu pháo bắn vào quỹ đạo

Newton không hề có ý định tạo ra một loại siêu vũ khí nhằm bắn những kẻ xâm lược ngoài hành tinh! Khẩu pháo của ông là một ý tưởng thí nghiệm nhằm giải thích làm thế nào để đưa một vật thể vào một quỹ đạo quay quanh Trái Đất.

Nếu lực hấp dẫn tác động lên quá pháo, nó sẽ bay theo đường tùy thuộc vào vận tốc ban đầu của nó. Tốc độ thấp, nó chỉ đơn giản là sẽ rơi trở lại trên Trái đất. Nếu tốc độ là tốc độ quỹ đạo, nó sẽ đi lòng vòng xung quanh Trái đất theo một quỹ đạo tròn cố định giống như mặt trăng. Tốc độ cao hơn so với vận tốc quỹ đạo, nhưng không đủ lớn để rời khỏi trái đất hoàn toàn (thấp hơn vận tốc thoát) nó sẽ tiếp tục xoay quanh Trái đất dọc theo một quỹ đạo hình elip. Tốc độ rất cao, nó thực sự sẽ rời khỏi quỹ đạo và bay ra ngoài vũ trụ.

Thí nghiệm trên đã được trình bày trong Principia Mathematica vào năm 1687, theo đó, tất cả mọi hạt đều gây ra một lực hấp dẫn và bị hấp dẫn bởi những vật thể khác. Lực tương tác này phụ thuộc vào trọng lượng và khoảng cách của hạt hay vật thể đó. Quy tắc này chi phối tất cả các hiện tượng từ mưa rơi cho đến quỹ đạo của các hành tinh. Đây chính là tác phẩm nổi tiếng với nhiều đóng góp quan trọng cho vật lý học cổ điển và cung cấp cơ sở lý thuyết cho du hành không gian cũng như sự phát triển của tên lửa sau này. Sau đó, Einstein cùng các nhà vật lý thế kỷ 16, 17 đã tiếp tục củng cố học thuyết của Newton để cho chúng ta những hiểu biết về lực hấp dẫn như ngày nay.

II. CÁNH CỬA DÀNH CHO CHÓ MÈO.

Không chỉ có tầm nhìn mang tính vĩ mô như khẩu pháo không gian và phát hiện ra mối liên hệ giữa vạn vật trong vũ trụ, Newton cũng dùng trí tuệ tuyệt vời của mình để giải quyết những vấn đề thường thức trong đời sống hàng ngày. Điển hình là phương pháp

giúp các mèo không cần cào cấu vào cánh cửa nhờ vào tạo ra một lối đi dành riêng cho chúng.

Như chúng ta đã biết, Newton không kết hôn và cũng có ít các mối quan hệ bạn bè, đôi lại ông chọn mèo và chó làm bầu bạn trong căn phòng của của mình. Hiện nay, có nhiều giả thuyết và lập luận cho rằng ông dành nhiều mối quan tâm đến những "người bạn" bé nhỏ của mình. Một số sử gia đương đại cho rằng Newton là một người rất yêu động vật.



Một số còn chỉ ra rằng ông đặt tên cho một con chó của mình là Diamond (kim cương). Dù vậy, một số nhà sử học vẫn nghi ngờ về giả thuyết trên.

Một câu chuyện kể rằng trong quá trình nghiên cứu của Newton tại Đại học Cambridge, các thí nghiệm của ông liên tục bị gián đoạn bởi một con mèo của ông luôn cào vào cánh cửa phòng thí nghiệm gây ra những âm thanh phiền toái. Để giải quyết vấn đề, ông đã mời một thợ mộc tại Cambridge để khoét 2 cái lỗ trên cửa ra vào phòng thí nghiệm: 1 lỗ lớn dành cho mèo mẹ và 1 lỗ nhỏ dành cho mèo con!

Dù câu chuyện trên là đúng hay sai thì theo các ghi chép đương thời sau khi Newton qua đời thì có một sự thật hiển nhiên rằng người ta đã tìm thấy 1 cánh cửa với 2 cái lỗ tương ứng với kích thước của mèo mẹ và mèo con. Cho tới ngày nay vẫn còn nhiều tranh cãi xung quanh câu chuyện trên. Tuy nhiên, nhiều ý kiến vẫn cho rằng chính Newton mới là tác giả của cánh cửa dành cho chó mèo vẫn còn được sử dụng ngày nay.

III. BA ĐỊNH LUẬT CHUYỂN ĐỘNG CỦA NEWTON.

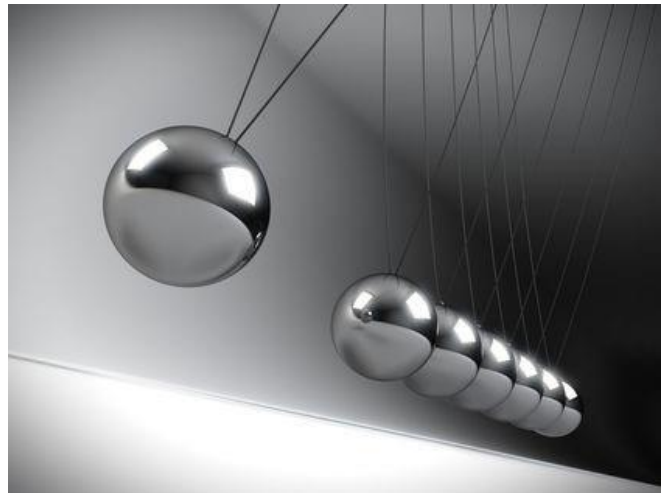
Trong khi các sử gia vẫn còn tranh cãi về những cánh cửa dành cho thú cưng có phải là của Newton hay không thì không một ai có thể phủ nhận đóng góp của Newton cho hiểu biết của con người trong vật lý học ngày nay. Tầm quan trọng tương đương với việc phát hiện ra định luật vạn vật hấp dẫn, 3 định luật về chuyển động được Newton giới thiệu vào năm 1687 trong tác phẩm *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Các nguyên lý toán học trong triết học tự nhiên). 3 định luật của ông đã đặt nền móng vững chắc cho sự phát triển của cơ học cổ điển (còn gọi là cơ học Newton) trong thời gian sau này.

3 định luật của ông được miêu tả ngắn gọn như sau:

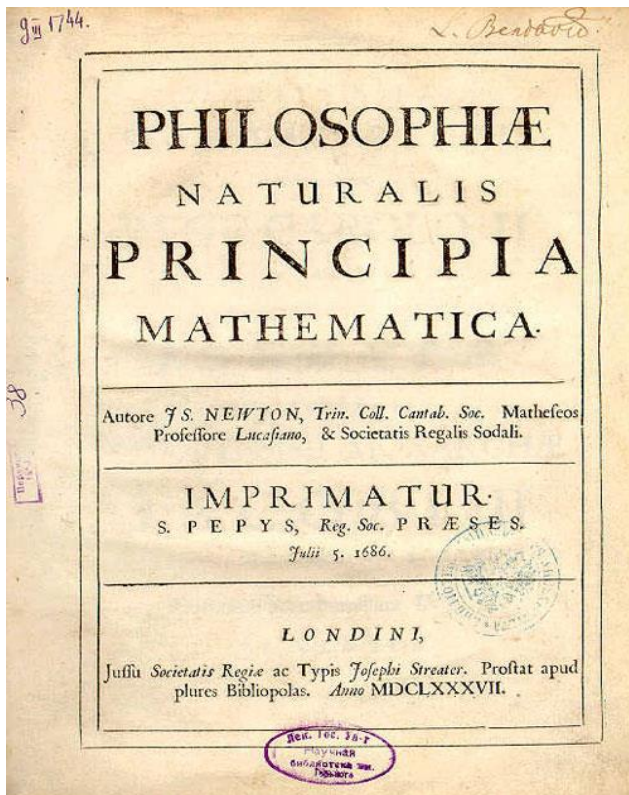
1. Nếu một vật không chịu tác dụng của lực nào hoặc chịu tác dụng của các lực có hợp lực bằng không thì nó giữ nguyên trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

2. Gia tốc của 1 vật cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỷ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật.

3. Trong mọi trường hợp, khi vật A tác dụng lên vật B một lực, thì vật B cũng tác dụng lại vật A một lực. Hai lực này có cùng giá, cùng độ lớn nhưng ngược chiều.



Ba định luật chuyển động của Newton



Bìa quyển sách *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Các nguyên lý toán học trong triết học tự nhiên) xuất bản năm 1687

nhà khoa học có thể hiểu được tất cả mọi thứ chuyển động từ của các hạt electron cho tới chuyển động xoắn ốc của cả thiên hà.

Ngày nay, chúng ta có thể dễ dàng phát biểu và hiểu về 3 định luật nổi tiếng trên. Tuy nhiên, các học giả trong lịch sử đã phải vật lộn với những khái niệm cơ bản về chuyển động trong suốt nhiều thế kỷ. Nhà triết học Hy Lạp Aristotle từng nghĩ rằng sở dĩ khối có thể bay lên trên không là vì khối chứa nhiều không khí. Trước đó, các học giả khác lại nghĩ rằng khối bay lên trời để tự hợp cùng với những đám khối "bạn bè" của chúng. Nhà triết học Pháp René Descartes đã từng nghĩ tới những lý thuyết về chuyển động tương tự như Newton nhưng cuối cùng, ông vẫn cho rằng Thiên Chúa mới chính là động lực của các chuyển động.

3 định luật Newton như một vẻ đẹp đến từ sự tối giản trong khoa học. Dù đơn giản như thế, nhưng đây chính là căn cứ để các

IV. HÒN ĐÁ PHÙ THỦY CỦA “NHÀ GIẢ KIM THUẬT” NEWTON.

Trong một bức vẽ về một nhà giả kim thuật, chúng ta thấy các biểu tượng hành tinh diễn tả các kim loại trong một quyển sách đang mở ra dưới sàn nhà. Đây được cho là các biểu tượng mà Newton đã sử dụng trong các ghi chép của ông.

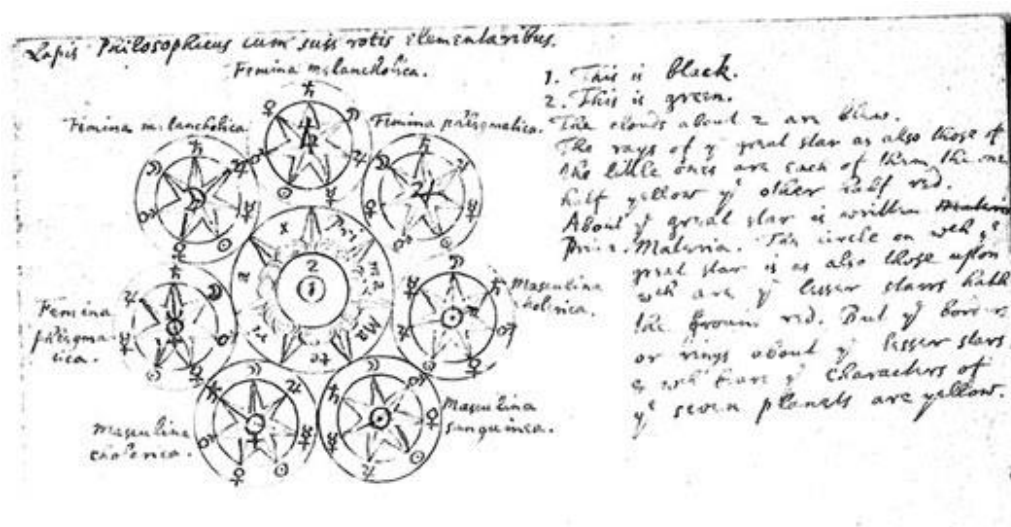
Newton đã cống hiến rất nhiều cho nhân loại với những khám phá khoa học của ông. Bên cạnh đó, người ta cũng nhắc đến ông như 1 trong những nhà giả kim học lỗi lạc nhất: huyền thoại giả kim thuật với hòn đá phù thủy. Các văn bản ghi chép lại còn được lưu trữ đến ngày nay đã có nhiều mô tả khác nhau về hòn đá này: từ khả năng tạo nên người từ đá cho tới khả năng chuyển hóa từ chì thành vàng. Thậm chí, những người bấy giờ còn cho rằng



Hòn đá phù thủy của “nhà giả kim thuật” Newton

hòn đá của ông có thể chữa bệnh hoặc có thể biến một con bò không đầu thành một bầy ong

Có lẽ các bạn sẽ thắc mắc tại sao một biểu tượng của khoa học lại trở thành một nhà giả kim thuật? Để trả lời câu hỏi đó, hãy nghĩ đến bối cảnh bấy giờ, cuộc cách mạng khoa học chỉ mới đạt được động cơ hơi nước vào những năm 1600. Các nhà giả kim thuật bấy giờ vẫn còn tồn tại cùng với những thủ thuật lỗi thời của họ cùng với các học thuyết và triết học huyền bí nhằm mê hoặc một số người. Dù vậy, các ghi chép giả kim thuật vẫn được cho là những thí nghiệm hóa học.



Bút tích còn lưu lại của Newton về nghiên cứu giả kim

Tuy nhiên, những ghi chép trong suốt 30 năm làm thí nghiệm của Newton đã tiết lộ rằng ông cũng hy vọng về một cái gì đó hơn là những phản ứng hóa học bình thường, thậm chí

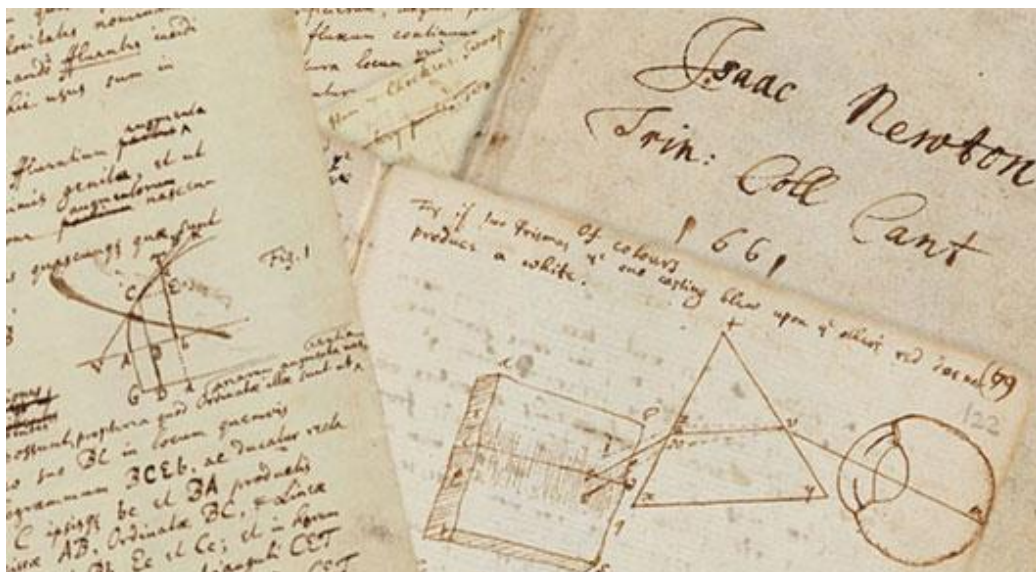
là hứa hẹn về việc biến các nguyên tố khác thành vàng. Theo sử gia William Newman, ông cho rằng Newton muốn tìm kiếm những "quyền lực siêu hạn trong tự nhiên."

Đây chính là những căn cứ cho lập luận rằng Newton cũng đã có những nghiên cứu và để lại ghi chép về giả kim mà người đương thời gọi là "hòn đá phù thủy." Các ghi chép cho thấy ông đã tìm cách tạo nên những loại nguyên tố bí ẩn lúc bấy giờ. Trên thực tế, Newton đã có những nỗ lực nhằm tạo ra một loại hợp kim đồng màu tím. Dù vậy, nghiên cứu của ông đã thất bại.

Đây có thể không phải là một sáng chế của Newton, nhưng nó cũng cho chúng ta một cái nhìn về những suy nghĩ cũng như thời gian mà ông dành cho các nghiên cứu khoa học. Vào năm 2005, nhà sử học Newman cũng đã tạo nên một "hòn đá phù thủy" dựa trên các ghi chép 300 năm trước của Newton và dĩ nhiên, không có sự chuyển hóa tạo thành vàng xảy ra.

V. CHA ĐẼ CỦA CÁC PHÉP TÍNH VI PHÂN.

Nếu bạn đã hoặc đang đau đầu với môn toán học mà đặc biệt là tích phân và vi phân đã cày nát bộ não của bạn, bạn có thể đổ một phần lỗi cho Newton! Trên thực tế, hệ thống toán học chính là một công cụ để chúng ta có thể tìm hiểu được mọi thứ trong vũ trụ này. Giống như nhiều nhà khoa học cùng thời, Newton cũng đã nhận thấy rằng các lý thuyết đại số và hình học trước đó không đủ cho yêu cầu nghiên cứu khoa học của ông. Hệ thống toán học đương thời không đủ để phục vụ ông.



Bút tích của Newton còn lưu giữ đến ngày nay

Các nhà toán học lúc bấy giờ có thể tính toán được vận tốc của một con tàu nhưng họ vẫn không thể tính toán được mối liên hệ với gia tốc của nó cũng như tỷ lệ của lực tác động.

Họ vẫn chưa thể tính toán được góc bắn là bao nhiêu để viên đạn pháo bay đi xa nhất. Các nhà toán học đương thời vẫn cần một phương pháp để tính toán các hàm có nhiều biến.

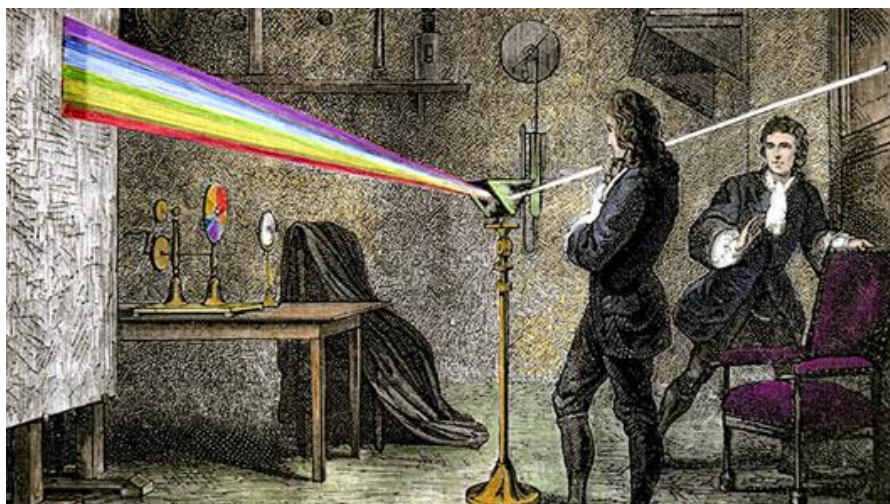
Một sự kiện đã xảy đến trong quá trình nghiên cứu của Newton, một đợt bùng phát bệnh dịch hạch đã khiến hàng loạt người chết trên khắp các đường phố tại Cambridge. Tất cả các cửa hàng đều đóng cửa và dĩ nhiên, Newton cũng phải hạn chế đi ra ngoài. Đó là khoảng thời gian 18 tháng nghiên cứu của Newton để rồi ông xây dựng nên một mô hình toán học và đặt tên là "*khoa học của sự liên tục*".

Ngày nay, chúng ta biết đó chính là các phép tính vi-tích phân. Một công cụ quan trọng trong vật lý, kinh tế học và các môn khoa học xác suất. Vào những năm 1960, chính các hàm số vi-tích phân này đã cung cấp công cụ cho phép các kỹ sư phi thuyền Apollo có thể tính toán được các số liệu trong sứ mạng đặt chân lên Mặt Trăng.

Dĩ nhiên, một mình Newton không tạo nên phép toán mà chúng ta sử dụng ngày nay. Ngoài Newton, nhà toán học người Đức Gottfried Leibniz (1646-1716) cũng đã độc lập phát triển mô hình phép tính vi - tích phân trong cùng thời gian với Newton. Dù vậy, chúng ta vẫn phải công nhận tầm quan trọng của Newton trong sự phát triển toán học hiện đại với các đóng góp không nhỏ của ông.

VI. SINH SỰ VỚI CẦU VỒNG.

Cầu vồng? Cầu vồng là gì? Bạn nghĩ rằng Newton để yên cho những bí mật bên trong cầu vồng? Không hề! Thiên tài của chúng ta đã quyết tâm giải mã những điều ẩn chứa bên trong hiện tượng thiên nhiên này. Vào năm 1704, ông đã viết một quyển sách



Thí nghiệm của Newton

về vấn đề khúc xạ ánh sáng với tiêu đề "Opticks". Quyển sách đã góp một phần không nhỏ trong việc thay đổi cách nghĩ của chúng ta về ánh sáng và màu sắc.

Các nhà khoa học bấy giờ đều biết rằng cầu vồng được hình thành khi ánh sáng bị khúc xạ và phản xạ trong những hạt nước mưa trong không khí. Dù vậy, họ vẫn chưa thể lý giải rõ

ràng được tại sao cầu vồng lại chứa nhiều màu sắc như vậy. Khi Newton bắt đầu nghiên cứu tại Cambridge, các lý thuyết phổ biến trước đó vẫn cho rằng các hạt nước bằng cách nào đó đã nhuộm nhiều màu sắc khác nhau lên tia sáng Mặt Trời.

Bằng cách sử dụng một lăng kính và một chiếc đèn, Newton đã thực hiện thí nghiệm bằng cách cho ánh sáng chiếu qua lăng kính. Và kết quả như tất cả chúng ta đều biết, ánh sáng bị tách ra thành các màu như cầu vồng.

VII. KÍNH VIỄN VỌNG PHẢN XẠ.

Newton được sinh ra trong thời kỳ mà sự hiện diện của kính viễn vọng vẫn còn khá mờ nhạt. Mặc dù vậy, các nhà khoa học đã có thể chế tạo nên các mô hình sử dụng một tập hợp các thấu kính thủy tinh để phóng to hình ảnh. Trong thí nghiệm với các màu sắc của Newton, ông đã biết được các màu sắc khác nhau sẽ khúc xạ với các góc độ khác nhau, từ đó tạo nên một hình ảnh mờ mờ cho người xem.



Một bản sao của chiếc kính viễn vọng phản xạ do Newton chế tạo và đã trình bày trước Hội đồng hoàng gia vào năm 1672

Để cải tiến chất lượng hình ảnh, Newton đã đề xuất sử dụng một gương khúc xạ thay cho các thấu kính khúc xạ trước đó. Một tấm gương lớn sẽ bắt lấy hình ảnh, sau đó một gương nhỏ hơn sẽ phản xạ hình ảnh bắt được tới mắt của người ngắm. Phương pháp này không chỉ tạo nên hình ảnh rõ ràng hơn mà còn cho phép tạo nên một kính viễn vọng với kích thước nhỏ hơn. Một số ý kiến cho rằng, nhà toán học người Scotland James Gregory là người đầu tiên đề

xuất ý tưởng chế tạo kính viễn vọng phản xạ vào năm 1663 dù mô hình này vẫn chưa thể hoạt động hoàn chỉnh. Tuy nhiên, dựa trên các ghi chép còn lưu trữ lại, các nhà sử học cho rằng Newton mới là người đầu tiên có thể chế tạo một chiếc kính viễn vọng phản xạ dựa trên lý thuyết do ông đề xuất.

Trên thực tế, Newton đã tự mài các tấm gương, lắp ráp một mẫu thử nghiệm và trình bày nó với Hội đồng hoàng gia vào năm 1672. Đó chỉ đơn thuần là 1 thiết bị dài 15 cm, có khả

năng loại bỏ sự khúc xạ và có độ phóng đại lên tới 40 lần. Đến ngày nay, gần như tất cả các đài thiên văn học đều sử dụng các biến thể của thiết kế ban đầu nói trên của Newton.

VIII. ĐỒNG XU HOÀN HẢO.

Vào những cuối những năm 1600, hệ thống tài chính tại Anh lâm vào tình trạng khủng hoảng nghiêm trọng. Bấy giờ, toàn bộ hệ thống tiền tệ trong cả nước Anh đều sử dụng các đồng xu bạc và dĩ nhiên, bản thân bạc có giá trị cao hơn so với giá trị định danh được in trên mỗi đồng xu. Lúc đó nảy sinh ra một vấn đề, có người sẽ cắt xén bớt hàm lượng bạc và thêm vào các kim loại khác trong quá trình nấu và đúc tiền. Lượng bạc cắt xén được sẽ bị "chảy máu" sang Pháp thông qua đường biên giới để bán được giá cao hơn.



Những đồng 2 pound tại Anh với các khía 2 xung quanh cạnh

Thậm chí, bấy giờ còn là cuộc khủng hoảng của việc tranh giành nhau nhận thầu đúc tiền. Do đó, lòng tin của người dân vào hệ thống tài chính suy giảm nghiêm trọng. Đồng thời, các tổ chức tội phạm làm tiền giả cũng mặc sức lan tràn do đã không còn một đồng tiền chuẩn đáng tin tưởng nào đang lưu thông. Mặt khác, sự gian lận cũng diễn ra ngay trong quá trình đúc tiền. Sau khi đúc mỗi mẻ tiền xu, người ta sẽ cân mỗi đồng xu lấy ra và xem nó lệch so với tiêu chuẩn là bao nhiêu. Nếu giá trị bạc dư ra lớn hơn so với giá trị in trên nó, những kẻ đầu cơ sẽ mua chúng, nấu chảy ra và tiếp tục bán lại cho chính xưởng đúc tiền để kiếm lời.

Trước tình hình đó, vào năm 1696, chính phủ Anh đã kêu gọi Newton giúp tìm ra giải pháp tìm ra giải pháp chống nạn sao chép và cắt xén đồng xu bạc. Newton đã có một bước

đi hết sức táo bạo là thu hồi toàn bộ tiền xu trên khắp đất nước, tiến hành nấu lại và đúc theo một thiết kế mới của ông. Bước đi này đã khiến cho toàn bộ nước Anh không có tiền trong lưu thông trong suốt 1 năm.

Bấy giờ, Newton đã làm việc cật lực trong suốt 18 giờ mỗi ngày để rồi cuối cùng, thiết kế tiền xu mới cũng được ra đời. Những đồng tiền mới được đúc ra với chất lượng bạc cao hơn, đồng thời rìa mỗi đồng xu đều được khía các cạnh theo một công thức đặc biệt. Nếu không có các cỗ máy khía cạnh chuyên dụng thì sẽ không thể nào tạo ra được các đồng xu mang đặc trưng như do Hoàng gia đúc ra.

IX. SỰ MẤT NHIỆT.

Trong các nghiên cứu của mình, Newton cũng đã dành nhiều thời gian để tìm hiểu khía cạnh vật lý của hiện tượng lạnh đi của các chất. Vào cuối những năm 1700, ông đã tiến hành các thí nghiệm với quả cầu sắt nung đỏ. Ông đã lưu ý trong các ghi chép rằng có sự khác biệt giữa nhiệt độ của quả bóng sắt và không khí xung quanh. Cụ thể, nhiệt độ chênh lệch lên tới 10 độ C. Và ông cũng nhận ra rằng tốc độ mất nhiệt tỷ lệ thuận với sự khác biệt về nhiệt độ.

Từ đó, Newton hình thành nên định luật về trạng thái làm mát. Theo đó, tốc độ mất nhiệt của cơ thể tỷ lệ thuận với sự khác biệt về nhiệt độ giữa môi trường xung quanh so với nhiệt độ cơ thể. Sau này, nhà hóa học người Pháp Piere Dulong và nhà vật lý Alexis Prtot đã hoàn thiện định luật trên vào năm 1817 dựa trên nền tảng từ nghiên cứu của Newton. Nguyên tắc của Newton đã đặt nền móng cho nhiều nghiên cứu khác của vật lý hiện đại từ lò phản ứng hạt nhân an toàn cho tới việc thám hiểm không gian.

X. DỰ ĐOÁN CỦA NEWTON VỀ NGÀY TẬN THẾ.

Ngày tận thế luôn là nỗi ám ảnh của con người. Dù vậy, Newton không phải là dạng người có thể dễ dàng chấp nhận nỗi sợ hãi về ngày tận thế qua những câu chuyện hay những truyền thuyết. Bản thân Newton là một người thực tế và luôn tìm cách kiểm định, đưa ra các quan điểm của mình trong quá trình nghiên cứu Kinh Thánh.

Trong quá trình nghiên cứu, Newton đã không đặt nặng khía cạnh Thần học mà dùng các kiến thức của mình nhằm cố lý giải vấn đề. Theo các ghi chép cách đây 300 năm còn được lưu trữ đến ngày nay cho thấy Newton đã nghiên cứu Book of Daniel. Để phục vụ nghiên cứu, ông đã tự học tiếng Do Thái, tập trung nghiên cứu triết học Do Thái bí truyền.



Hình vẽ 4 loài thú dữ xuất hiện vào ngày tận thế mô tả trong Book of Daniel

Qua nghiên cứu, ông dự đoán ngày tận cùng của thế giới là vào năm 2060 hoặc có thể là sau đó nhưng không thể sớm hơn. Dù sao đi nữa, đó vẫn là những gì mà ông tuyên bố với mọi người vào thế kỷ 18. Dĩ nhiên, ngày nay, các nhà khoa học đã có một lời giải đáp hoặc dự đoán tốt hơn cho hiện tượng tận thế nói chung. Qua đó, chúng ta phần nào hiểu được thêm về quan điểm của 1 nhà khoa học vào thế kỷ 18 về ngày tàn của nhân loại.

A. ĐỀ BÀI.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , ..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$.

- A. $n = 685$ B. $n = 679$ C. $n = 672$ D. $n = 675$

Câu 2. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 2^{50}$, diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \dots$. Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$

- A. $S = 2^{101} - 2$ B. $S = 2^{101} - 1$ C. $S = 2^{100} - 2$ D. $S = 2^{100} - 1$

Câu 3. Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V , khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1 , các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể tích V_2 , các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n , các đỉnh A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Tính $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{2018}$.

- A. $S = \frac{(3^{2018} - 1)V}{2 \cdot 3^{2018}}$ B. $S = \frac{(27^{2019} - 1)V}{26 \cdot 27^{2019}}$ C. $S = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}$ D. $S = \frac{(3^{2019} - 1)V}{2 \cdot 3^{2019}}$

Câu 4. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

- A. $S = \frac{15\pi}{4}$ B. $S = 4\pi$ C. $S = \frac{9\pi}{2}$ D. $S = 5\pi$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{6}\right]$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) bằng bao nhiêu?

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Khi đó $u_{2019} = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = -3$ B. $S = 4$ C. $S = 9$ D. $S = -2$

Câu 7. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{x}{y}$ với $x, y \in \mathbb{N}$ và $\frac{x}{y}$ tối giản. Tính giá trị của $x + y$.

- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 8. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \geq 1 \end{cases}$. Tính giá trị của u_{2018} ?

- A. $u_{2018} = 10^{2018}$ B. $u_{2018} = 2018^{2018}$ C. $u_{2018} = 2018$ D. $u_{2018} = 10^{2018} + 2018$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$, $n \geq 1$. Đặt $S_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $S_n > \frac{2019}{2020}$?

- A. 2019 B. 2020 C. 2018 D. 2021

Câu 10. Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$. Tìm phần nguyên của $S = \sum_{i=1}^{2018} u_i$.

- A. 2020 B. 2017
C. 2019 D. 2018.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_n = -\frac{2019}{n}(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}), n > 1 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2.u_1 + 2^2.u_2 + \dots + 2^{2019}.u_{2019}$.

- A. 3^{2019} B. 2019 C. 3 D. 2

Câu 12. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2 \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 = \frac{2n + 1 - 3x_n}{n^2 + 3x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

- A. $\frac{2018^2}{2019}$ B. $\frac{8144648}{12105}$ C. $\frac{8144648}{12107}$ D. $\frac{8144648}{12103}$

Câu 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{au_n^2 + 1}$, $\forall n \geq 1, a \neq 1$. Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$?

- A. -1 B. -2 C. 1 D. 2

Câu 14. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, (n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2019 số hạng đầu tiên của dãy số đó ?

- A. $\frac{4036}{4035}$ B. $\frac{4035}{4034}$ C. $\frac{4038}{4037}$ D. $\frac{4038}{4039}$

Câu 15. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n \end{cases},$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

Tính $\lim \left(\frac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \frac{u_3^{2019}}{u_4 + 2018} + \dots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} \right)$.

- A. $\frac{4}{2019}$ B. $\frac{3}{2019}$ C. $\frac{2}{2019}$ D. $\frac{1}{2019}$

Câu 16. Xét dãy số nguyên $x_1 = 34, x_2 = 334, x_3 = 3334, \dots, x_n = 33\dots34$ (có n số 3). Hỏi có bao nhiêu chữ số 3 trong số $9x_{2018}^3$?

- A. 6054 B. 6055 C. 6056 D. 6057

Câu 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}}$ với n nguyên dương.

Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n}$

- A. $\sqrt{\frac{2019}{2018}}$ B. $\sqrt{2018}$ C. $\sqrt{\frac{2018}{2019}}$ D. 0

Câu 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}}$ với n nguyên dương.

Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$

- A. $\frac{2018}{2019}$ B. $\frac{2017}{2019}$ C. $\frac{2017}{2018}$ D. $\frac{2019}{2017}$

Câu 19. Cho dãy số (x_n) có $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$.

Biết $\lim y_n = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, b nguyên dương. Khi đó tọa độ $M(a; b)$ nằm trên đường tròn nào?

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$
C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ D. $(x+1)^2 + y^2 = 10$

Câu 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{16} \\ u_{n+1} = 9u_n + 4\sqrt{1+3u_n} + 4, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $u_n > 10^8$.

- A. 9. B. 10. C. 12. D. 13.

Câu 21. Xét các cấp số nhân có $2n+1$ số hạng dương (n là số nguyên dương) thỏa tổng tất cả các số hạng của nó bằng 400 và tổng tất cả các nghịch đảo của các số hạng của nó bằng 4. Giá trị lớn nhất của n là?

- A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

Câu 22. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_0 = 2018 \\ u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}; \forall n \geq 1 \end{cases}$$
. Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 3^{2018} D. 3^{2019}

Câu 23. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = 2u_n - \frac{n+3}{n^2+3n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi u_{2018} thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2^{2015}; 2^{2016})$ B. $(2^{2016}; 2^{2017})$ C. $(2^{2017}; 2^{2018})$ D. $(2^{2018}; 2^{2019})$

Câu 24. Cho dãy số (u_n) xác định
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2nu_n}{n+3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Tính $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} \right)$

- A. $L = \frac{1}{2}$ B. $L = \frac{3}{4}$ C. $L = 1$ D. $L = \frac{3}{2}$

Câu 25. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(3x_n+1)^{2019}}{2019} + x_n$ với n là số nguyên dương. Đặt $u_n = \frac{(3x_1+1)^{2018}}{3x_2+1} + \frac{(3x_2+1)^{2018}}{3x_3+1} + \frac{(3x_3+1)^{2018}}{3x_4+1} + \dots + \frac{(3x_n+1)^{2018}}{3x_{n+1}+1}$. Tính $\lim u_n$

- A. $\frac{2019}{4}$ B. $\frac{2019}{3}$ C. $\frac{673}{3}$ D. $\frac{673}{4}$

Câu 26. Cho dãy số thực (u_n) tăng xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_n^2 + 2018u_n - 2020u_{n+1} + 1 = 0, \forall n \geq 1 \end{cases} (1)$$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1+2019} + \frac{1}{u_2+2019} + \dots + \frac{1}{u_n+2019}$. Tính $\lim S_n$

- A. 2018 B. $\frac{1}{2018}$ C. 2019 D. $\frac{1}{2019}$

Câu 27. Cho dãy số: $(u_n) \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1+5^n \cdot u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

- A. $k = 1616$ B. $k = 808$ C. $k = 404$ D. $k = 1212$

Câu 28. Cho dãy số (u_n) được xác định
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$

- A. 1 B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2018}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giả sử giới hạn

$\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + 3b$.

- A. 1012 B. 1021 C. 1015 D. 1018

Câu 30. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau $x_1 = \frac{2}{3}; x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, (n = 1, 2, \dots)$

Hỏi tổng của 2018 số hạng đầu tiên là bao nhiêu?

- A. $\frac{4035}{4036}$ B. $\frac{2017}{2018}$ C. $\frac{2018}{2019}$ D. $\frac{4036}{4037}$

Câu 31. Cho dãy số (u_n) $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1; \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = 1 + 2 + \dots + 2017 - u_{2018} + u_{2019}$

có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 2039190 B. 2035153 C. 2037171 D. 2033136

Câu 32. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{4}{3} \\ (n+2)^2 u_n + (n+1)u_n u_{n+1} = n^2 u_{n+1} \end{cases}, n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = 2$ B. $\lim u_n = -4$ C. $\lim u_n = \frac{3}{4}$ D. $\lim u_n = -3$

Câu 33. Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$. Giả sử ta có tổng sau

$$S = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{100} - c}{b - a}$$

Trong đó a, b, c là các số nguyên dương và a, b là hai số dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó $S = a + c = ?$

- A. 151 B. 153 C. 152 D. 154

Câu 34. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_n = \sqrt[n]{u_{n-1}^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}}, \forall n = 2; 3, \dots \end{cases}$.

Tính giá trị của u_{2018} ?

- A. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot 3^{2018}}$ B. $u_{2018} = \sqrt[2018]{9 + 3 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot 3^{2018}}$
C. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2017} + 2 \cdot 3^{2017}}$ D. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2018} + 3^{2018}}$.

Câu 35. Cho dãy số thực $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 2008 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n, \forall n > 1 \end{cases}$. Tính giá trị của a_{2008} .

- A. $\frac{1}{2009}$ B. $\frac{2}{2007}$ C. $\frac{1}{2007}$ D. $\frac{2}{2009}$

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho $u_n < \frac{1999}{1000}$.

- A. 11 B. 10 C. 15 D. Vô số

Câu 37. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{4}$. Biết rằng

$$x_n = \frac{x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + (n-1)^2 x_{n-1}}{n^2(n-1)}, \forall n = 2, 3, \dots$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (30n^2 - 12n + 2018)x_n$

- A. 15 B. 30 C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{15}{2}$

Câu 38. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2019u_{n+1} = u_n^2 + 2018u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy số (S_n) xác định bởi công thức $S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$.

- A. $\lim S_n = 2018$ B. $\lim S_n = 2019$ C. $\lim S_n = \frac{2018}{2019}$ D. $\lim S_n = 1$

Câu 39. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1)}{2019n}$.

- A. $\lim S_n = 2018$ B. $\lim S_n = 2019$ C. $\lim S_n = \frac{2018}{2019}$ D. $\lim S_n = 1$

Câu 40. Cho các số $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ lập thành cấp số cộng với công sai d và $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 > 0$ lập thành cấp số nhân với công bội q . Biết rằng $a_1 = b_1$ và $a_5 = b_5$. Hỏi có bao nhiêu khẳng định luôn đúng trong các khẳng định sau?

- i) $a_2 \geq b_2$ ii) $a_3 \geq b_3$ iii) $a_4 \geq b_4$ iv) $d \geq q$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 41. Cho dãy số (u_n) biết: $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{n}u_n + 2n^3 - 3n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n + n^3 > n \cdot 3^{2018}$ là bao nhiêu?

- A. $n = 2019$ B. $n = 2018$ C. $n = 2017$ D. $n = 2020$

Câu 42. Cho dãy số không âm (u_n) , $(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi công thức sau

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{m+n+1}^2 + u_{m-n+1}^2 = \frac{1}{2}(u_{2m+1}^2 + u_{2n+1}^2) \end{cases} (\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n)$$

Khi đó tổng của 2019 số hạng đầu tiên của dãy khi viết dưới dạng thập phân có chữ số ở hàng đơn vị bằng bao nhiêu?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 43. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 2019, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$. Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = 2019 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$. Khi đó $\lim y_n$ bằng?

- A. $\frac{2018}{2019}$ B. $\frac{2019}{2018}$ C. 2018 D. 2019

Câu 44. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ (4n^2 + 16n)u_{n+1} = (n^2 + 6n + 5)u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Gọi $k = \lim \left(\frac{4^n}{n^2} \cdot u_n \right)$ thì k có giá trị là?

- A. $k = 1616$ B. $k = 808$ C. $k = 404$ D. $k = 1212$

Câu 45. Cho dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{\sqrt{1+u_{n-1}^2}-1}{u_{n-1}}; \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$, đặt

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. (u_n) là dãy bị chặn. B. $S_n \leq 1 + \frac{\pi}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]$
C. (u_n) là dãy giảm D. $S_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 46. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm giới hạn của dãy số (s_n) với $s_n = n^3 u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- A. $\lim(s_n) = +\infty$ B. $\lim(s_n) = 0$
C. $\lim(s_n) = 1$ D. $\lim(s_n) = \frac{1}{2}..$

Câu 47. Cho các dãy (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_{n+1} + 4u_n^2 - 4u_n = 0 \\ u_{2018} = \frac{1}{2} \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó u_1 có thể nhận tất cả

bao nhiêu giá trị?

A. 2^{2017}

B. 2^{2018}

C. 2^{2019}

D. $2^{2018} - 1$.

Câu 48. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1; u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là?

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

Câu 49. Cho 2 dãy cấp số cộng $u_n = u_1; u_2; \dots; u_n$ có công sai d_1 và $v_n = v_1; v_2; \dots; v_n$ có công sai d_2 . Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 7n + 1$ và $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = 14n + 27$. Tính tỉ số của $\frac{u_{11}}{v_{11}}$

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $\frac{5}{4}$

Câu 50. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_{n+1} = q.a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0, q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng

$a_n = \alpha.q^{n-1} + \beta \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha + 2\beta$?

A. 13

B. 9

C. 11

D. 16

Câu 51. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$; trong đó $u_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Biết rằng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 2018, T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = 2019$ và $P = u_1.u_2.u_3 \dots u_n > \frac{1}{100}$.

Hỏi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn P là?

A. 9295

B. 9296

C. 18592

D. 18591

Câu 52. Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

A. $q \in (3; 4)$

B. $q \in (1; 2)$

C. $q \in (2; 3)$

D. $q \in (0; 1)$

Câu 53. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n = 1, 2, \dots$. Tính giới hạn của tổng

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$.

A. $\frac{1}{4}$

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-10 & \text{khi } x > 2018 \\ f(f(x+11)) & \text{khi } x \leq 2018 \end{cases}$. Tính giá trị $f(1) + f(2018)$.

A. 1999

B. 2009

C. 4018

D. 4036

Câu 55. Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn $25.2^{2u_5+1} - 15.2^{u_1+u_5+2} + 5.2^{u_5} + 15.2^{u_1} - 4 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 8$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2019$.

- A. 512. B. 258. C. 511. D. 257.

Câu 56. Cho một cấp số cộng : u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa $|u_1 u_4 - u_2 u_3| \leq 6$. Tìm tập xác định D của hàm $f(x) = \sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)+9}$

- A. $D = (-\infty; 6)$ B. $D = (6; +\infty)$ C. $D = \mathbb{R}$ D. $D = (-6; 6)$

Câu 57. Biết tổng $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$. Giá trị nhỏ nhất của n để

$$S_n > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

- A. 41 B. 40 C. 51 D. 50

Câu 58. Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geq 1$. Tính giá trị của

$$M = \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

- A. $M = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$ B. $M = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ C. $M = \frac{3 + \sqrt{31}}{3}$ D. $M = \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$. Biết rằng :

$$f(2) + f(3) + \dots + f(2018) = \ln a - \ln b + \ln c - \ln d$$

trong đó a, c, d là các số nguyên tố và $a < b < c < d$. Tính $P = a + b + c + d$

- A. 1986 B. 1698 C. 1689 D. 1989

Câu 60. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

- A. 247 B. 248 C. 229 D. 290

Câu 61. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n \cdot e^{\forall n \geq 1}$. Tìm u_1

- A. e B. e^2 C. e^{-3} D. e^{-4}

Câu 62. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?

- A. 1419 B. 1418 C. 1420 D. 1417

Câu 63. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1} - a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

- A. $n = 123$ B. $n = 41$ C. $n = 39$ D. $n = 49$

Câu 64. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

- A. 725 B. 682 C. 681 D. 754

Câu 65. Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau: $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng?

- A. 11 B. 8 C. 9 D. 10

Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

- A. 2008 B. 2006 C. 2018 D. 2007

Câu 67. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

- A. 230 B. 231 C. 233 D. 234

Câu 68. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

- A. 18 B. 17 C. 16 D. 19

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

- A. -2018 B. 2018 C. 1 D. -1

Câu 70. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn điều kiện $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$.

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 71. Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là

- A. 16 B. 15 C. 17 D. 18

Câu 72. Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

- A. 234 B. 229 C. 333 D. 292

Câu 73. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2 + u_3 + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{8}\right) = e^{4u_2-7} + e^{6u_1-6} - 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}\left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

- A. 3472 B. 3245 C. 3665 D. 3453

Câu 74. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdots f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024}$.

- A. $n = 23$ B. $n = 29$ C. $n = 21$ D. $n = 33$

Câu 75. Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2) \dots\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(\log 2017; \log 2018)$ B. $(\log 2019; \log 2020)$
C. $(\log 2018; \log 2019)$ D. $(\log 2020; \log 2021)$

Câu 76. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \frac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a .

- A. 37 B. 36 C. 38 D. 40

Câu 77. Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời

$$\sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + \dots + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n+2} + 1}}} = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1. \text{ Số tự nhiên } n \text{ nhỏ nhất để } u_n > 5^{100} \text{ là?}$$

- A. 232 B. 233 C. 234 D. 235

Câu 78. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và đồng thời $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$

- A. 100 B. 99 C. 101 D. 102

Câu 79. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

A. 235

B. 255

C. 233

D. 241

Câu 80. Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

A. $q \in (3; 4)$

B. $q \in (1; 2)$

C. $q \in (2; 3)$

D. $q \in (0; 1)$

Câu 81. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với n nguyên dương. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+2}}{I_n}$.

A. -1

B. 1

C. 2

D. $+\infty$

Câu 82. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Câu 83. Đặt $I_n = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{\frac{(x+1)^{2n}(2x^2+1)}{(x^2+1)^{2n+1}}} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}} \right) dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. -1

D. $\frac{3}{2}$

Câu 84. Ta đặt $F_n(x) = \int \frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}} dx$. Biết $F_n(1) = 0 \forall n$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(2)$.

A. 1

B. $-\infty$

C. -1

D. $+\infty$

Câu 85. Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1 \cdot (I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + \dots + n(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L \in (-1; 0)$

B. $L \in (-2; -1)$

C. $L \in (0; 1)$

D. $L \in (1; 2)$

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2$$

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(2018x+2017) = 2018f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$?

- A. $\frac{4}{3}[f(-1)]^2$ B. $\frac{5}{3}[f(-1)]^2$ C. $\frac{7}{3}[f(-1)]^2$ D. $\frac{8}{3}[f(-1)]^2$

Câu 88. Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Câu 89. Cho dãy số xác định bởi $\begin{cases} U_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ U_{n+1} = 2U_n^2 - 1 \end{cases}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$. $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n}$ có giá trị là ?

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{4}$

Câu 90. Cho dãy số U_n xác định bởi $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 - n(U_n - 1) + n^2}{n}, n \geq 1 \end{cases}$

Khi đó $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \dots + \frac{1}{U_n} \right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; -1)$ B. $(-1; 2)$ C. $(-1; -2)$ D. $(-1; 1)$

Câu 91. Trong dịp hội trại hè 2017, bạn Anh thả một quả bóng cao su từ độ cao 6(m) so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng ?

- A. 44(m) B. 45(m) C. 42(m) D. 43(m)

Câu 92. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây trồng muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 (m) và 25 (m) để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

- A. luôn chọn A.
B. luôn chọn B.
C. giếng 20 (m) chọn A còn giếng 25 (m) chọn B.
D. giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn B.

Câu 93. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng sau?

$$S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}$$

- A. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$ B. $1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}$ C. 2018 D. 1

Câu 94. Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \dots + 44\dots4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng?

- A. $\frac{40}{9}(10^{2018} - 1) + 2018$. B. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$.
C. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} + 2018\right)$. D. $\frac{4}{9}(10^{2018} - 1)$.

Câu 95. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

- A. 2587 B. 2590 C. 2593 D. 2584

Câu 96. Cho hai cấp số cộng $(a_n): a_1 = 4; a_2 = 7; \dots; a_{100}$ và $(b_n): b_1 = 1; b_2 = 6; \dots; b_{100}$. Hỏi có bao nhiêu số có mặt đồng thời trong cả hai dãy số trên?

- A. 32 B. 20 C. 33 D. 53

Câu 97. Cho tam giác ABC cân tại A . Biết rằng độ dài cạnh BC , trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q . Tìm công bội q của cấp số nhân đó?

- A. $q = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ B. $q = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$ C. $q = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ D. $q = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$

Câu 98. Cho hàm số $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{\cos(2017\pi x)}$ và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức tổng quát $u_n = \log f(1) + \log f(2) + \dots + \log f(n)$. Tìm tổng tất cả các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018} = 1$

- A. 21 B. 18 C. 3 D. 2018

Câu 99. Biết rằng $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018}n}}} = \frac{a^{2019} + b}{c}$ Trong đó (u_n) xác định

bởi $u_1 = 0; u_{n+1} = u_n + 4n + 3$ và a, b, c , là các số nguyên dương và $b < 2019$. Tính $S = a + b - c$

- A. -1 B. 0 C. 2017 D. 2018

Câu 100. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^2 + 8bc} + 3}{\sqrt{(2a + c)^2 + 1}}$ có dạng $x\sqrt{y} (x, y \in \mathbb{N})$ Hỏi $x + y$ bằng bao nhiêu?

- A. 9 B. 11 C. 13 D. 7

Câu 101. Cho các số hạng dương a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $\log_2 a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 102. Cho $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ và $\cot a, \cot b, \cot c$ Tạo thành cấp số cộng. Giá trị của $\cot a \cdot \cot c$ bằng?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

B. LỜI GIẢI.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , ..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$.

- A. $n = 685$ B. $n = 679$ C. $n = 672$ D. $n = 675$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$$x^3 - 2009x = (3x_1^2 - 2009)(x - x_1) + x_1^3 - 2009x_1 \quad (1).$$

Phương trình (1) có một nghiệm kép $x_1 = 1$ và một nghiệm x_2 .

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$.

Áp dụng định lý Viét cho phương trình bậc ba, ta có
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1 \\ x_1^2 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4, \dots, x_n = (-2)^{n-1}$.

Ta có: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0 \Leftrightarrow 2009x_n + x_n^3 - 2009x_n + 2^{2013} = 0$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = -2^{2013} \Leftrightarrow 3n-3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672.$$

Chọn ý C.

Câu 2. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 2^{50}$, diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \dots$. Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$

- A. $S = 2^{101} - 2$ B. $S = 2^{101} - 1$ C. $S = 2^{100} - 2$ D. $S = 2^{100} - 1$

Lời giải

Để thấy $S_1 = 2^{100}; S_2 = 2^{99}; S_3 = 2^{98}; \dots; S_{100} = 2$

Như vậy $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{100}$ là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$.

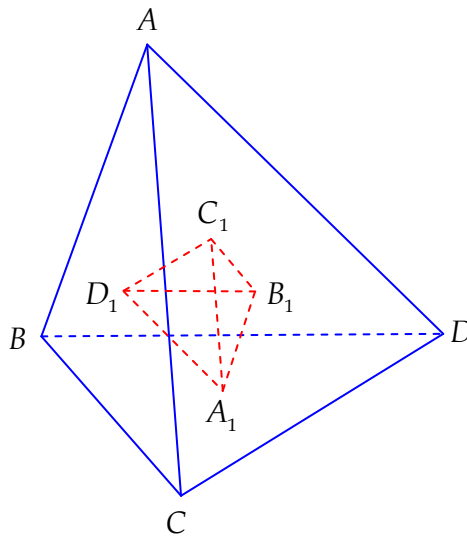
$$\text{Khi đó ta có } S = S_1 + S_2 + \dots + S_{100} = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2 = \frac{2^{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{101} - 2$$

Chọn ý B.

Câu 3. Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V , khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ có thể tích V_1 , các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Khối tứ diện $A_2B_2C_2D_2$ có thể tích V_2 , các đỉnh A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$. Cứ tiếp tục như thế ta được khối tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n , các đỉnh A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Tính $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{2018}$.

A. $S = \frac{(3^{2018} - 1)V}{2 \cdot 3^{2018}}$ B. $S = \frac{(27^{2019} - 1)V}{26 \cdot 27^{2019}}$ C. $S = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}$ D. $S = \frac{(3^{2019} - 1)V}{2 \cdot 3^{2019}}$

Lời giải



Ta có $(B_1C_1D_1) \parallel (BCD)$ nên $d(A_1, (B_1C_1D_1)) = d(D_1, (BCD)) = \frac{1}{3}d(A, (BCD))$.

Lại có $\Delta B_1C_1D_1 \sim \Delta BCD$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$ nên $S_{B_1C_1D_1} = \frac{1}{9}S_{BCD}$.

Do đó $V_1 = \frac{1}{27}V$. Tương tự ta có $V_2 = \frac{1}{27}V_1 = \frac{1}{27^2}V$, $V_3 = \frac{1}{27}V_2 = \frac{1}{27^3}V$, ..., $V_{2018} = \frac{1}{27^{2018}}V$.

$$\Rightarrow S = \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{27^2} + \dots + \frac{1}{27^{2018}} \right) V = \frac{1}{27} \cdot \frac{1 - \frac{1}{27^{2018}}}{1 - \frac{1}{27}} V = \frac{(27^{2018} - 1)V}{26 \cdot 27^{2018}}.$$

Câu 4. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

A. $S = \frac{15\pi}{4}$ B. $S = 4\pi$ C. $S = \frac{9\pi}{2}$ D. $S = 5\pi$.

Lời giải

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Với $n=3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán kính $R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.

Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{6} \right]$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) bằng bao nhiêu?

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $u_{n+6} = \cos \left[(2n+11) \frac{\pi}{6} \right] = \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{6} + 2\pi \right] = \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{6} \right] = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_7 = u_{13} = \dots = u_{2011} = u_{2017} \\ u_2 = u_8 = u_{14} = \dots = u_{2012} = u_{2018} \\ u_3 = u_9 = u_{15} = \dots = u_{2013} \\ u_4 = u_{10} = u_{16} = \dots = u_{2014} \\ u_5 = u_{11} = u_{17} = \dots = u_{2015} \\ u_6 = u_{12} = u_{18} = \dots = u_{2016} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_1 + u_2 + \dots + u_6 &= u_7 + u_8 + \dots + u_{12} = \dots = u_{2011} + u_{2012} + \dots + u_{2016} \\ \Rightarrow S_{2018} &= (u_1 + u_2 + \dots + u_6) + (u_7 + u_8 + \dots + u_{12}) + \dots + (u_{2011} + u_{2012} + \dots + u_{2016}) + (u_{2017} + u_{2018}) \\ &= 336 \cdot (u_1 + u_2 + \dots + u_6) + (u_1 + u_2) \\ &= 336 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* . \end{cases}$$

Khi đó $u_{2019} = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = -3$ B. $S = 4$ C. $S = 9$ D. $S = -2$

Lời giải

Ta có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ vì $\tan \frac{\pi}{8} > 0$

Do đó $u_2 = \frac{u_1 + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_1} = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right)$

$$u_3 = \frac{u_2 + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_2} = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right) + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right) \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{8} \right)$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $u_n = \tan \left[\frac{\pi}{3} + (n-1) \frac{\pi}{8} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó $u_{2019} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + 2018 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow S = -3$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{x}{y}$ với $x, y \in \mathbb{N}$ và $\frac{x}{y}$ tối giản. Tính giá trị của $x + y$.

- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} a + c = 2b &\Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow 3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $x + y = 1 + 3 = 4$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, n \geq 1 \end{cases}$. Tính giá trị của u_{2018} ?

A. $u_{2018} = 10^{2018}$

B. $u_{2018} = 2018^{2018}$

C. $u_{2018} = 2018$

D. $u_{2018} = 10^{2018} + 2018$

Lời giải

Cách 1.

$$\text{Ta nhận thấy } \begin{cases} u_1 = 11 = 10 + 1 \\ u_2 = 10u_1 + 1 - 9 = 10 \cdot 11 - 8 = 102 = 10^2 + 2 \\ u_3 = 10u_2 + 1 - 18 = 10 \cdot 102 - 17 = 1003 = 10^3 + 3 \end{cases}$$

Nên dự đoán $u_n = 10^n + n$

Chứng minh bằng quy nạp. Ta có $u_1 = 11 = 10 + 1$. Giả sử đúng với $n = k \geq 1 \Rightarrow u_k = 10^k + k$ khi đó $u_{k+1} = 10 \cdot u_k + 1 - 9k = 10 \cdot (10^k + k) + 1 - 9k = 10^{k+1} + k + 1$.

Vậy $u_n = 10^n + n$ nên $u_{2018} = 10^{2018} + 2018$.

Cách 2. Ta có $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n)$

Đặt $v_n = u_n - n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$ và $v_1 = u_1 - 1 = 10$

Ta có dãy số $\begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = 10v_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$, (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 10$ và $v_1 = 10$.

Ta có công thức tổng quát $v_n = v_1 q^{n-1} \Leftrightarrow v_n = 10 \cdot 10^{n-1} = 10^n \Leftrightarrow u_n - n = 10^n \Leftrightarrow u_n = 10^n + n$

$$\text{Do đó } u_{2018} = 10^{2018} + 2018$$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, n \geq 1$. Đặt $S_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $S_n > \frac{2019}{2020}$?

A. 2019

B. 2020

C. 2018

D. 2021

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1$. Do đó $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ là cấp số cộng có $\frac{1}{u_1} = 2$ và công sai $d = 1$,

Từ đó suy ra $\frac{1}{u_n} = 2 + (n-1) = n+1, \forall n \geq 1$.

$$\text{Do đó } u_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Ta có } S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Khi đó $S_n > \frac{2019}{2020} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} > \frac{2019}{2020} \Leftrightarrow n > 2019$. Do đó $n = 2020$.

Câu 10. Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$. Tìm phần nguyên của $S = \sum_{i=1}^{2018} u_i$.

A. 2020

B. 2017

C. 2019

D. 2018.

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 + \frac{3}{u_n - 1}$.

Đặt $a_n = \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow a_0 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n + 1 \Rightarrow a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \Rightarrow u_n = 1 + \frac{2}{3^{n+1} - 1}$.

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{2018} u_i = 2018 + 2 \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{3^{i+1} - 1} \Rightarrow 2018 < S < 2018 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{3^i} < 2019$$

Phần nguyên của S bằng 2018.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_n = -\frac{2019}{n}(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}), n > 1 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2.u_1 + 2^2.u_2 + \dots + 2^{2019}.u_{2019}$.

A. 3^{2019}

B. 2019

C. 3

D. 2

Lời giải

Ta có đẳng thức sau $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{1}{n+1} \cdot C_{n+1}^{k+1}$

Suy ra $S = \frac{1}{k+1}C_{2018}^k.u_1 = \frac{1}{2019}C_{2019}^{k+1}.2019 = C_{2019}^{k+1}$

Từ giả thiết ta có $nu_n = -2019(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}) - 2019u_{n-1}$

$$= (n-1)u_{n-1} - 2019u_{n-1} = (n-2020)u_{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{n-2020}{n}u_{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = -\frac{2018}{2}u_1 = -\frac{1}{2}C_{2018}^1u_1 = -\frac{1}{2}C_{2018}^1.2019 = -C_{2019}^2 \\ u_3 = \frac{2017.2018}{2.3}u_1 = \frac{1}{3}C_{2018}^2.u_1 = C_{2019}^3 \\ u_4 = -\frac{2016.2017.2018}{2.3.4}u_1 = -\frac{1}{4}C_{2018}^3u_1 = -C_{2019}^4 \\ \dots \\ u_{2019} = \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}u_1 = C_{2019}^{2019} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 2.C_{2019}^1 - 2^2.C_{2019}^2 + 2^3.C_{2019}^3 - 2^4.C_{2019}^4 + \dots + 2^{2019}.C_{2019}^{2019} = (2-1)^{2019} + 1 = 2.$$

Câu 12. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 = \frac{2n+1-3x_n}{n^2+3x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

A. $\frac{2018^2}{2019}$

B. $\frac{8144648}{12105}$

C. $\frac{8144648}{12107}$

D. $\frac{8144648}{12103}$

Lời giải

Ta có $\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 = \frac{2n+1-3x_n}{n^2+3x_n} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{(n+1)^2 x_n}{n^2+3x_n} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n}{n^2+3x_n} = \frac{\frac{x_n}{n^2}}{1+3\frac{x_n}{n^2}}$

Đặt dãy số $y_n = \frac{x_n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1+3y_n} \Leftrightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} + 3$ và $y_1 = 2$

Đặt $u_n = \frac{1}{y_n}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 3$

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = \frac{1}{2}$ và công sai $d = 3$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2} + (n-1)3 = 3n - \frac{5}{2} \Rightarrow x_n = \frac{2n^2}{6n-5}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{2018} = \frac{8144648}{12103}$$

Câu 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{au_n^2 + 1}, \forall n \geq 1, a \neq 1$. Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$?

A. -1

B. -2

C. 1

D. 2

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1}^2 = au_n^2 + 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - \frac{1}{1-a} = a \left(u_n^2 - \frac{1}{1-a} \right)$

Đặt $v_n = u_n^2 - \frac{1}{1-a} \Rightarrow v_{n+1} = av_n \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân với công bội $q = a$

Suy ra $v_n = v_1 a^{n-1} = \left(u_1^2 - \frac{1}{1-a} \right) a^{n-1} = a^{n-1} \cdot \frac{a}{a-1} \Rightarrow u_n^2 = a^{n-1} \cdot \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a}$

Ta có
$$\begin{cases} u_1^2 = \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a} \\ u_2^2 = a \cdot \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a} \\ \dots \\ u_n^2 = a^{n-1} \cdot \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a} \end{cases} \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \frac{a}{a-1} (1 + a + \dots + a^{n-1}) + \frac{1}{1-a} \cdot n$$

$$\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - \frac{1}{1-a} \cdot n = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

Thực hiện phép đồng nhất ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{1-a} = 2 \\ b = \lim \left(\frac{a}{a-1} \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \lim \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} - 1} \right] = -2 \end{cases} \Rightarrow T = -1$$

Câu 14. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, (n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2019 số hạng đầu tiên của dãy số đó ?

- A. $\frac{4036}{4035}$ B. $\frac{4035}{4034}$ C. $\frac{4038}{4037}$ D. $\frac{4038}{4039}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} &= \frac{1}{u_n} + 4n + 2 = \left(\frac{1}{u_{n-1}} + 4(n-1) + 2 \right) + 4n + 2 = \frac{1}{u_1} + (4.1 + 2) + (4.2 + 2) + \dots + (4n + 2) \\ &= \frac{3}{2} + 2n^2 + 4n = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow S_{2019} = 1 - \frac{1}{2.2019 + 1} = \frac{4038}{4039}.$$

Câu 15. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n \end{cases}, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$

Tính $\lim \left(\frac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \frac{u_3^{2019}}{u_4 + 2018} + \dots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} \right)$.

- A. $\frac{4}{2019}$. B. $\frac{3}{2019}$. C. $\frac{2}{2019}$. D. $\frac{1}{2019}$.

Lời giải

Ta dễ dàng thấy rằng $u_n \geq 1$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Xét $u_{n+1} - u_n = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} > 0$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$, nên dãy (u_n) tăng.

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên, khi đó (u_n) có giới hạn. Giả sử $\lim u_n = a \geq 1$.

Từ hệ thức $u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n$ chuyển qua giới hạn có

$$a = a^{2020} + 2018a^{2019} + a \Rightarrow a = 0 \vee a = -2018 \text{ - Điều này vô lý}$$

Vậy, dãy (u_n) không bị chặn trên. Suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Ta có

$$\frac{u_k^{2019}}{u_{k+1} + 2018} = \frac{u_k^{2019}(u_k + 2018)}{(u_{k+1} + 2018)(u_k + 2018)} = \frac{u_{k+1} - u_k}{(u_{k+1} + 2018)(u_k + 2018)} = \frac{1}{u_k + 2018} - \frac{1}{u_{k+1} + 2018}.$$

$$\Rightarrow \frac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \frac{u_3^{2019}}{u_4 + 2018} + \dots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} = \frac{1}{u_1 + 2018} - \frac{1}{u_{n+1} + 2018}$$

Vậy $\lim \left(\frac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \frac{u_3^{2019}}{u_4 + 2018} + \dots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} \right) = \lim \left(\frac{1}{u_1 + 2018} - \frac{1}{u_{n+1} + 2018} \right)$

$$= \frac{1}{u_1 + 2018} = \frac{1}{2019}.$$

Câu 16. Xét dãy số nguyên $x_1 = 34, x_2 = 334, x_3 = 3334, \dots, x_n = 33\dots34$ (có n số 3). Hỏi có bao nhiêu chữ số 3 trong số $9x_{2018}^3$?

- A. 6054 B. 6055 C. 6056 D. 6057

Lời giải

Ta đặt $u_n = 3x_n - 2$. Khi đó $u_n = 10^{n+1}$

$$\Rightarrow x_n = \frac{10^{n+1} + 2}{3} \Rightarrow 9x_n^3 = \frac{(10^{n+1} + 2)^3}{3} = \frac{10^{3n+3} - 1}{3} + 2 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 3$$

Lại có $10^{3n+3} - 1 = (10 - 1)(10^{3n+2} + 10^{3n+1} + \dots + 10 + 1)$

$$\Rightarrow \frac{10^{3n+3} - 1}{3} = 3(10^{3n+2} + 10^{3n+1} + \dots + 10 + 1)$$

$$\Rightarrow 9x_n^3 = 3(10^{3n+2} + 10^{3n+1} + \dots + 10 + 1) + 2 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 3$$

Để ý rằng $10^{3n+2} + 10^{3n+1} + \dots + 10 + 1 = 111\dots111$ (có $3n + 2$ số 1)

$2 \cdot 10^{2n+2} = 2000\dots00$ (có $2n + 2$ số 0) và $4 \cdot 10^{n+1} = 400\dots00$ (có $n + 1$ số 0)

$$\Rightarrow 9x_n^3 = 33\dots33533\dots33733\dots336$$

(trước 5 có n số 3, giữa 5 và 7 có n số 3, giữa 7 và 6 có n số 3)

$\Rightarrow 9x_n^3$ có $3n$ số 3.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}}$ với n nguyên dương.

Tính giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$

- A. $\sqrt{\frac{2019}{2018}}$ B. $\sqrt{2018}$ C. $\sqrt{\frac{2018}{2019}}$ D. 0

Lời giải

Do $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}} \rightarrow 2018^{n+1}u_{n+1} = 2018^n u_n + \left(\frac{2018}{2019}\right)^{n+1}$.

Đặt $v_n = 2018^n u_n$ ta được $v_1 = 2018$ và $v_{n+1} = v_n + \left(\frac{2018}{2019}\right)^{n+1}$ với n nguyên dương.

Suy ra $v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_2 - v_1) + v_1$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2018}{2019} \right)^k + 2018 = \frac{2018}{2019} \left(\frac{1 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2018}{2019}} \right) + 2018 \\
 &= 2018 \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) \rightarrow u_n = \frac{v_n}{2018^n} = \frac{2018}{2018^n} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2018^{n-1}} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

Vì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2018^{n-1}} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) \right) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}}$ với n nguyên dương.

Tính giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$

- A. $\frac{2018}{2019}$ B. $\frac{2017}{2019}$ C. $\frac{2017}{2018}$ D. $\frac{2019}{2017}$

Lời giải

Do $u_{n+1} = \frac{u_n}{2018} + \frac{1}{2019^{n+1}} \rightarrow 2018^{n+1} u_{n+1} = 2018^n u_n + \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1}$.

Đặt $v_n = 2018^n u_n$ ta được $v_1 = 2018$ và $v_{n+1} = v_n + \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1}$ với n nguyên dương.

Suy ra $v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_2 - v_1) + v_1$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2018}{2019} \right)^k + 2018 = \frac{2018}{2019} \left(\frac{1 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2018}{2019}} \right) + 2018 \\
 &= 2018 \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{2018^n} = \frac{2018}{2018^n} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2018^{n-1}} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2018 \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{2018^n} = \frac{2018}{2018^n} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2018^{n-1}} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

Do đó $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2018^{k-1}} \left(2 - \left(\frac{2018}{2019} \right)^k \right) = 4036 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2018^k} - 2018 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2019^k}$

Áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn ta được

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = 4036 \times \frac{\frac{1}{2018}}{1 - \frac{1}{2018}} - 2018 \times \frac{\frac{1}{2019}}{1 - \frac{1}{2019}} = \frac{4036}{2017} - 1 = \frac{2019}{2017}$$

Câu 19. Cho dãy số (x_n) có $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \end{cases}; n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i+2}$.

Biết $\lim y_n = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, b nguyên dương. Khi đó tọa độ $M(a; b)$ nằm trên đường tròn nào?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

D. $(x+1)^2 + y^2 = 10$

Lời giải

Từ giả thiết $x_{n+1} = \sqrt{(x_n^2 + 3x_n)(x_n^2 + 3x_n + 2) + 1} = \sqrt{(x_n^2 + 3x_n + 1)^2} = x_n^2 + 3x_n + 1$

Lại có $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + 2x_n + 1 = (x_n + 1)^2 > 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (x_n) là một dãy số tăng. Giả sử (x_n) là dãy bị chặn trên

$\Rightarrow \lim x_n = a \Rightarrow a^2 + 3a + 1 = a \Leftrightarrow a = -1$. Vô lý. Vậy $\lim x_n = +\infty$.

Mặt khác $x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 \Leftrightarrow x_{n+1} + 1 = (x_n + 1)(x_n + 2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_n + 2)(x_n + 1)} = \frac{1}{x_{n+1} + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_{n+1} + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}.$$

Vậy $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \Rightarrow \lim y_n = \frac{1}{2} \Rightarrow M(2; 1)$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{16} \\ u_{n+1} = 9u_n + 4\sqrt{1+3u_n} + 4, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $u_n > 10^8$.

A. 9.

B. 10.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Đặt dãy số $x_n = \sqrt{1+3u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $x_n \geq 0$ và $x_n^2 = 1+3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n = \frac{x_n^2 - 1}{3}$

Thay vào giả thiết ta được $\frac{x_{n+1}^2 - 1}{3} = 9 \frac{x_n^2 - 1}{3} + 4x_n + 4 \Leftrightarrow x_{n+1}^2 = (3x_n + 2)^2$

Suy ra $x_{n+1} = 3x_n + 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử $x_{n+1} - \alpha = 3(x_n - \alpha)$ thì $\alpha = -1$.

Xét dãy (y_n) xác định bởi $y_n = x_n + 1$. Khi đó (y_n) là cấp số nhân với $y_1 = x_1 + 1 = \frac{9}{4}$, công

bội $q = 3 \Rightarrow y_n = \frac{9}{4} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow x_n = \frac{9}{4} \cdot 3^{n-1} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{\left(\frac{9}{4} \cdot 3^{n-1} - 1\right)^2 - 1}{3}$

Có $u_n > 10^8 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4} \cdot 3^{n-1} - 1\right)^2 > 3 \cdot 10^8 + 1 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot 3^{n-1} - 1 > \sqrt{3 \cdot 10^8 + 1}$

$$\Leftrightarrow n > \log_3 \left[\left(\left(\sqrt{3 \cdot 10^8 + 1} + 1 \right) \cdot \frac{4}{9} \right) \right] + 1 \Rightarrow n > 9,14.$$

Vậy n nhỏ nhất bằng 10

Câu 21. Xét các cấp số nhân có $2n+1$ số hạng dương (n là số nguyên dương) thỏa tổng tất cả các số hạng của nó bằng 400 và tổng tất cả các nghịch đảo của các số hạng của nó bằng 4. Giá trị lớn nhất của n là?

A. 17

B. 18

C. 19

D. 20

Lời giải

Đặt các số hạng của cấp số nhân là $\frac{a}{q^n}, \frac{a}{q^{n-1}}, \frac{a}{q^{n-2}}, \dots, \frac{a}{q}, a, aq, \dots, aq^{n-1}, aq^n$ với a, q là các số dương.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} \frac{a}{q^n} + \frac{a}{q^{n-1}} + \dots + a + \dots + aq^{n-1} + aq^n = 400 \\ \frac{q^n}{a} + \frac{q^{n-1}}{a} + \dots + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{aq^{n-1}} + \frac{1}{aq^n} = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \left(\frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n-1}} + \dots + 1 + \dots + q^{n-1} + q^n \right) = 400 \\ \frac{1}{a} \left(q^n + q^{n-1} + \dots + 1 + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^n} \right) = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \left(\frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n-1}} + \dots + 1 + \dots + q^{n-1} + q^n \right) = 400 \\ a^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{q^n} + q^n + \frac{1}{q^{n-1}} + q^{n-1} + \dots + \frac{1}{q} + q + 1 = 40 \quad (*) \\ a = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Muốn tồn tại cấp số nhân thì điều kiện cần và đủ là phương trình (*) phải có nghiệm dương. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^n} + x^n + \frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} + \dots + \frac{1}{x} + x + 1$ liên tục trên $D = (0; +\infty)$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^n} + x^n}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}}_{\geq 2} + \dots + \frac{1}{x} + x + 1 \geq 2 + 2 + \dots + 2 + 1 = 2n + 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$. Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Suy ra tập giá trị của hàm số f trên D là $[2n+1; +\infty)$.

Phương trình (*) có nghiệm dương khi và chỉ khi $40 \geq 2n+1 \Leftrightarrow n \leq 19,5$.

Vậy giá trị lớn nhất của n là 19.

Câu 22. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 2018 \\ u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}; \forall n \geq 1 \end{cases}$. Hãy tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 3^{2018}

D. 3^{2019}

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3(u_n - u_{n-1})$.

Đặt $v_n = u_n - u_{n-1}$ ta có $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = 3v_{n-1}; \forall n \geq 2 \end{cases}$. Suy ra $v_n = 3^{n-1}; \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta được } u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 2019 = \frac{3^n - 1}{3 - 1} + 2018 = \frac{3^n - 1}{2} + 2018 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} - \frac{2018}{3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Câu 23. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = 2u_n - \frac{n+3}{n^2+3n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi u_{2018} thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2^{2015}; 2^{2016})$ B. $(2^{2016}; 2^{2017})$ C. $(2^{2017}; 2^{2018})$ D. $(2^{2018}; 2^{2019})$

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = 2u_n - \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = 2\left(u_n - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ suy ra } \begin{cases} v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 2v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Do đó dãy số (v_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$ và $v_1 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } v_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2^{n-1} = -2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n = \frac{1}{n+1} + 2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Vậy } u_{2018} = \frac{1}{2019} + 2^{2016} \in (2^{2016}; 2^{2017}).$$

Câu 24. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2nu_n}{n+3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} \right)$

- A. $L = \frac{1}{2}$ B. $L = \frac{3}{4}$ C. $L = 1$ D. $L = \frac{3}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{2nu_n}{n+3} \Leftrightarrow (n+1)(n+2)(n+3)u_{n+1} = 2n(n+1)(n+2)u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $v_n = n(n+1)(n+2)u_n$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn $v_1 = 4; v_{n+1} = 2v_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy

(v_n) là một cấp số nhân có công thức $v_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$. Vậy $u_n = \frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2^n} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

Câu 25. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(3x_n + 1)^{2019}}{2019} + x_n$ với n là số nguyên dương. Đặt $u_n = \frac{(3x_1 + 1)^{2018}}{3x_2 + 1} + \frac{(3x_2 + 1)^{2018}}{3x_3 + 1} + \frac{(3x_3 + 1)^{2018}}{3x_4 + 1} + \dots + \frac{(3x_n + 1)^{2018}}{3x_{n+1} + 1}$. Tính $\lim u_n$

A. $\frac{2019}{4}$

B. $\frac{2019}{3}$

C. $\frac{673}{3}$

D. $\frac{673}{4}$

Lời giải

Ta có $x_{n+1} - x_n = \frac{(3x_n + 1)^{2019}}{2019}, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x_n + 1} - \frac{1}{3x_{n+1} + 1} = \frac{3(x_{n+1} - x_n)}{(3x_n + 1)(3x_{n+1} + 1)} = \frac{(3x_n + 1)^{2018}}{673(3x_{n+1} + 1)}$$

$$\Rightarrow u_n = \sum_{i=1}^n \frac{(3x_i + 1)^{2018}}{3x_{i+1} + 1} = 673 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3x_i + 1} - \frac{1}{3x_{i+1} + 1} \right) = 673 \left(\frac{1}{3x_1 + 1} - \frac{1}{3x_{n+1} + 1} \right)$$

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n = \frac{(3x_n + 1)^{2019}}{2019} \geq 0$ nên dãy (x_n) là dãy số tăng $\forall n \geq 1$.

Nếu (x_n) bị chặn thì $\lim x_n$ tồn tại hữu hạn.

Giả sử $\lim x_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \frac{(a+1)^{2019}}{2019} + a$ - Điều này vô lý

Suy ra (x_n) không bị chặn trên hay $\lim x_n = +\infty$.

Do đó $\lim \frac{1}{3x_{n+1} + 1} = 0$. Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{673}{3x_1 + 1} = \frac{673}{4}$.

Câu 26. Cho dãy số thực (u_n) tăng xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_n^2 + 2018u_n - 2020u_{n+1} + 1 = 0, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 + 2019} + \frac{1}{u_2 + 2019} + \dots + \frac{1}{u_n + 2019}$. Tính $\lim S_n$

A. 2018

B. $\frac{1}{2018}$

C. 2019

D. $\frac{1}{2019}$

Lời giải

Do (u_n) là dãy tăng nên $u_n \geq 2018, \forall n \geq 1$.

Ta có $u_n^2 + 2018u_n - 2020u_{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2018u_n + 1}{2020}$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + 2018u_n - 2019}{2020} \Leftrightarrow 2020(u_{n+1} - 1) = (u_n - 1)(u_n + 2019)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2020}{(u_n - 1)(u_n + 2019)} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2019} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} (*)$$

Thay n bởi $1, 2, 3, \dots, n$ vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra

$$S_n = \frac{1}{u_1 + 2019} + \frac{1}{u_2 + 2019} + \dots + \frac{1}{u_n + 2019} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{2018} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Do (u_n) là dãy số tăng nên có hai trường hợp xảy ra.

- Dãy (u_n) bị chặn trên suy ra tồn tại $\lim u_n$. Giả sử $\lim u_n = x$ thì $x \geq 2018$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có

$$x^2 + 2018x - 2020x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ - Điều này vô lý}$$

- Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên

$$\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim (u_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$$

$$\text{Do vậy, } \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{2018}$$

Câu 27. Cho dãy số: $(u_n) \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + 5^n \cdot u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $k = 1616$

B. $k = 808$

C. $k = 404$

D. $k = 1212$

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi ta có $u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + 5^n \cdot u_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + 5^n$.

Đặt dãy số $v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_n = v_{n-1} + 5^n \Leftrightarrow v_n - v_{n-1} = 5^n$

$$\Rightarrow v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_2 - v_1) + v_1$$

$$\Leftrightarrow v_n = 5^n + 5^{n-1} + \dots + 5^2 + 1 = \frac{5}{4} \cdot 5^n - \frac{21}{4} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{5}{4} \cdot 5^n - \frac{21}{4}} \Rightarrow \lim u_n = 0.$$

Câu 28. Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$

A. 1

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1, n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1 = u_n - u_{n-1} + 2 = \dots = u_2 - u_1 + n \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = n + 2$$

Do đó $u_n - u_1 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) = (n) + (n-1) + \dots + (2)$

$$\Rightarrow u_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2018}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giả sử giới hạn

$\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \frac{a}{b} \left(a, b \in \mathbb{N}^* \right)$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + 3b$.

A. 1012

B. 1021

C. 1015

D. 1018

Lời giải

Từ cách xác định dãy số suy ra (u_n) là dãy số tăng, nên tồn tại giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn.

Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $l = \lim u_n$. Khi đó $l \geq 4$.

Từ $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2018}, n \in \mathbb{N}^*$ lấy giới hạn hai vế ta có $l = l + \frac{l^2}{2018} \Rightarrow l = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy $\lim u_n = +\infty$.

Từ công thức truy hồi ta có $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{2018(u_{n+1} - u_n)}{u_n u_{n+1}} = 2018 \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$
 $\Rightarrow \lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim 2018 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} \right) = \lim 2018 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1009}{2}$

Vậy $a + 3b = 1015$.

Câu 30. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau $x_1 = \frac{2}{3}; x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, (n = 1, 2, \dots)$

Hỏi tổng của 2018 số hạng đầu tiên là bao nhiêu?

A. $\frac{4035}{4036}$

B. $\frac{2017}{2018}$

C. $\frac{2018}{2019}$

D. $\frac{4036}{4037}$

Lời giải

Để thấy $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$. Nên theo giả thiết ta có

$$x_{n+1} = \frac{1}{2(2n+1) + \frac{1}{x_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u_n = \frac{2}{x_n} \Rightarrow u_1 = 3; u_{n+1} = 4(2n+1) + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + 8n + 4, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + 8(n-1) + 4 = u_{n-2} + 8[(n-1) + (n-2)] + 2.4$$

$$= \dots = u_1 + 8[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] + n.4$$

$$= (2n-1)(2n+1)$$

Do đó $x_n = \frac{2}{u_n} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{2018} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4035} - \frac{1}{4037} \right) = \frac{4036}{4037}$$

Câu 31. Cho dãy số (u_n) $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1; \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = 1 + 2 + \dots + 2017 - u_{2018} + u_{2019}$

có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 2039190

B. 2035153

C. 2037171

D. 2033136

Lời giải

Cách 1. Từ công thức truy hồi suy ra $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 2u_2 - u_1 + 1 \\ u_4 = 2u_3 - u_2 + 1 \\ \dots \\ u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 1 \end{cases}$

Cộng n đẳng thức trên theo vế ta được $u_1 + u_n = u_{n-1} + 2 + n - 1 \Rightarrow u_n = u_{n-1} + n (*)$

Từ đề bài và $(*)$ ta lại suy ra $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 2 \\ u_4 = u_3 + 3 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + n - 1 \end{cases}$

Cộng n đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là $u_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2), \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{2018} = \frac{1}{2}(2018^2 - 2018 + 2) = 2035154 \\ u_{2019} = \frac{1}{2}(2019^2 - 2019 + 2) = 2037172 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + \dots + 2017 - u_{2018} + u_{2019} = 1 + 2 + \dots + 2017 - 2035154 + 2037172$$

$$= 1 + 2 + \dots + 2017 + 2018 = \frac{2018 \cdot 2019}{2} = 2037171$$

Cách 2.

Ta có $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1; \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1; \forall n \geq 2 (*)$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 2$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 1$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow v_n = v_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$ là cấp số cộng có $v_1 = 1$ công sai $d = 1$

$$\Rightarrow v_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + \dots + 2017 - u_{2018} + u_{2019} = 1 + 2 + \dots + 2017 + (u_{2019} - u_{2018}) = 1 + 2 + \dots + 2017 + v_{2018}$$

$$= 1 + 2 + \dots + 2017 + 2018 = \frac{2018 \cdot 2019}{2} = 2037171$$

Câu 32. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{4}{3} \\ (n+2)^2 u_n + (n+1) u_n u_{n+1} = n^2 u_{n+1} \end{cases}, n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 2$ B. $\lim u_n = -4$ C. $\lim u_n = \frac{3}{4}$ D. $\lim u_n = -3$

Lời giải

Để thấy $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ giả thiết ta có $\frac{(n+2)^2}{u_{n+1}} = \frac{n^2}{u_n} - (n+1)$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{4}$ ta có $v_1 = 1$ và

$$\begin{aligned} (n+2)^2 \left(v_{n+1} - \frac{1}{4} \right) &= n^2 \left(v_n - \frac{1}{4} \right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 v_{n+1} = n^2 v_n \Rightarrow v_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} v_n \\ \Rightarrow v_n &= \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^2 \left(\frac{n-3}{n-1} \right)^2 \dots \left(\frac{3}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 v_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} v_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \\ &\Rightarrow \lim v_n = 0. \end{aligned}$$

Ta có $\lim v_n = \lim \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{4} \right) = \lim \frac{1}{u_n} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim u_n = -4$.

Câu 33. Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$. Giả sử ta có tổng sau

$$S = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^{100} - c}{b - a}$$

Trong đó a, b, c là các số nguyên dương và a, b là hai số dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó $S = a + c = ?$

A. 151 B. 153 C. 152 D. 154

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_n - 1 &= \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n} - 1 = \frac{-2 \cdot 5^n}{2^n + 5^n} \Rightarrow \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2^n + 5^n}{-2 \cdot 5^n} = \frac{-1}{2} \left[1 + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right] \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} - 1} = \frac{-1}{2} \left[100 + \left(\frac{2}{5} \right)^1 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5} \right)^{100} \right] \\ &= \frac{-1}{2} \left[100 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{100}}{1 - \frac{2}{5}} \right] = \frac{-1}{2} \left[100 + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{100} \right) \right] = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^{100} - 151}{3} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a = 2, b = 5, c = 151$ nên: $a + c = 153$.

Câu 34. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_n = \sqrt[n]{u_{n-1}^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}}, \forall n = 2; 3; \dots \end{cases}$.

Tính giá trị của u_{2018} ?

A. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot 3^{2018}}$

B. $u_{2018} = \sqrt[2018]{9 + 3 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot 3^{2018}}$

C. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2017} + 2 \cdot 3^{2017}}$

D. $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2018} + 3^{2018}}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_n^n = u_{n-1}^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} \\ u_{n-1}^{n-1} = u_{n-2}^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2} \\ u_{n-2}^{n-2} = u_{n-3}^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot 3^{n-3} \\ \dots \\ u_3^3 = u_2^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 \\ u_2^2 = u_1^1 + 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot 3^1 \end{cases} \Rightarrow u_n^n = u_1^1 + 3 \cdot (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + 2 \cdot (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}).$

$$= 9 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = 3 \cdot 2^n + 3^n$$

Vậy $u_{2018} = \sqrt[2018]{3 \cdot 2^{2018} + 3^{2018}}$.

Câu 35. Cho dãy số thực $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 2008 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n, \forall n > 1 \end{cases}$. Tính giá trị của a_{2008} .

A. $\frac{1}{2009}$

B. $\frac{2}{2007}$

C. $\frac{1}{2007}$

D. $\frac{2}{2009}$

Lời giải

Ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$.

Do đó $a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n$.

Ta có phương trình $(n-1)^2 a_{n-1} + a_n = n^2 a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$.

Suy ra $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)}$.

Cho $n = 2008$ ta được $a_{2008} = \frac{2 \cdot 2008}{2008 \cdot 2009} = \frac{2}{2009}$.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho $u_n < \frac{1999}{1000}$.

A. 11

B. 10

C. 15

D. Vô số

Lời giải

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + \frac{1}{2} \\ u_3 = u_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Theo giả thiết ta có

$$u_n < \frac{1999}{1000} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1999}{1000} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{1}{1000} \Rightarrow n-1 < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1000}\right) < 10 \Rightarrow n < 11$$

Suy ra có 10 số nguyên dương n thỏa mãn đề bài.

Câu 37. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{4}$. Biết rằng

$$x_n = \frac{x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + (n-1)^2 x_{n-1}}{n^2(n-1)}, \forall n = 2, 3, \dots$$

Tính $\lim(30n^2 - 12n + 2018)x_n$

- A. 15 B. 30 C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{15}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } x_{n+1} = \frac{[x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + (n-1)^2 x_{n-1}] + n^2 x_n}{(n+1)^2 n} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n^2(n-1)x_n + n^2 x_n}{(n+1)^2 n}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n^3 x_n}{(n+1)^2 n} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} x_n \Leftrightarrow (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n.$$

$$\Rightarrow n^2 x_n = (n-1)^2 x_{n-1} = \dots = 4x_2 = 1x_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_n = \frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow \lim(30n^2 - 12n + 2018)x_n = \lim \frac{30n^2 - 12n + 2018}{4n^2} = \lim \left(\frac{15}{2} - \frac{3}{n} + \frac{1009}{2n^2} \right) = \frac{15}{2}$$

Câu 38. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2019u_{n+1} = u_n^2 + 2018u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm

giới hạn của dãy số (S_n) xác định bởi công thức $S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$.

- A. $\lim S_n = 2018$ B. $\lim S_n = 2019$ C. $\lim S_n = \frac{2018}{2019}$ D. $\lim S_n = 1$

Lời giải

Trước tiên ta có hai nhận xét sau

- $u_1 > 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n^2 + 2018u_n > 2019, \forall n \geq 1$
- $u_n > 2, \forall n \geq 1$ nên $u_n^2 > u_n + 1, \forall n \geq 1$.

Theo giả thiết ta có $2019u_{n+1} = u_n^2 + 2018u_n \Leftrightarrow 2019(u_{n+1} - u_n) = u_n(u_n - 1) \Rightarrow \frac{u_n}{2019} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - 1}$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2019(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2019 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2019 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right).$$

Để tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1}$, ta chứng minh mệnh đề (*): $2019u_{n+1} \geq 4036 + n, \forall n \geq 1$ bằng quy nạp.

Từ $2019u_2 = 4 + 4036 = 4040 \geq 4037$ suy ra mệnh đề (*) đúng khi $n = 1$.

Giả sử $2019u_{k+1} \geq 4036 + k, \forall k \geq 1$. Khi đó

$$2019u_{k+2} = u_{k+1}^2 + 2018u_{k+1} > u_{k+1} + 1 + 2018u_{k+1} = 1 + 2019u_{k+1} > 1 + 4036 + k.$$

Suy ra (*) đúng khi $n = k + 1$. Hay $2019u_{n+1} \geq 4036 + n, \forall n \geq 1$.

$$\text{Do đó } 2019(u_{n+1} - 1) \geq 2019 + n \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} \leq \frac{2019}{n + 2019}.$$

$$\text{Ta lại có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2019}{n + 2019} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2019 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2019.$$

Câu 39. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Tính } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1)}{2019n}.$$

- A. $\lim S_n = 2018$ B. $\lim S_n = 2019$ C. $\lim S_n = \frac{2018}{2019}$ D. $\lim S_n = 1$

Lời giải

$$\text{Do } u_1 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Ta có } u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$$

$$(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1) = \left(\frac{1}{1} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n} = n+1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1)}{2019n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018(n+1)}{2019n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2018(u_1 + 1)(u_2 + 1) \dots (u_n + 1)}{2019n} = \frac{2018}{2019}.$$

Câu 40. Cho các số $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ lập thành cấp số cộng với công sai d và $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 > 0$ lập thành cấp số nhân với công bội q . Biết rằng $a_1 = b_1$ và $a_5 = b_5$. Hỏi có bao nhiêu khẳng định luôn đúng trong các khẳng định sau?

- i) $a_2 \geq b_2$ ii) $a_3 \geq b_3$ iii) $a_4 \geq b_4$ iv) $d \geq q$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Đặt $a_1 = b_1 = x, a_5 = b_5 = y$, mà $a_5 = a_1 + 4d$ và $a_2 = a_1 + d$ nên $a_2 = \frac{a_4 + 3a_1}{4} = \frac{3x + y}{4}$.

Tương tự ta tính được $a_3 = \frac{x + y}{2}$ và $a_4 = \frac{x + 3y}{4}$.

Lập luận tương tự với CSN, ta cũng có $b_2 = \sqrt[4]{x^3y}, b_3 = \sqrt{xy}, b_4 = \sqrt[4]{xy^3}$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a_3 = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = b_3, a_2 = \frac{3x + y}{4} \geq \sqrt[4]{x^3y} = b_2, a_4 = \frac{x + 3y}{4} \geq \sqrt[4]{xy^3} = b_4$$

Do đó, cả i), ii) và iii) đều đúng. Tuy nhiên, điều kiện iv) không luôn đúng, chẳng hạn khi $x = y$ thì $d = 0$ nhưng $q = 1$.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) biết : $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{n}u_n + 2n^3 - 3n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n + n^3 > n.3^{2018}$ là bao nhiêu?

A. $n = 2019$

B. $n = 2018$

C. $n = 2017$

D. $n = 2020$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{n}u_n + 2n^3 - 3n - 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = 3\frac{u_n}{n} + 2n^2 - 2n - 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} + (n+1)^2 = 3\left(\frac{u_n}{n} + n^2\right)$$

Đặt $S_n = \frac{u_n}{n} + n^2$. Ta có $S_{n+1} = 3S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ Dãy số (S_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$ và $S_1 = 2 \Rightarrow S_n = 2.3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Theo bài ra, $u_n + n^3 > n.3^{2018} \Leftrightarrow \frac{u_n}{n} + n^2 > 3^{2018} \Leftrightarrow 2.3^{n-1} > 3^{2018} \Leftrightarrow 3^{n-2019} > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow n - 2019 > \log_3 \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > \log_3 \frac{1}{2} + 2019 \approx 2018,369...$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là $n = 2019$.

Câu 42. Cho dãy số không âm $(u_n), (n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi công thức sau

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{m+n+1}^2 + u_{m-n+1}^2 = \frac{1}{2}(u_{2m+1}^2 + u_{2n+1}^2) \quad (\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n) \end{cases}$$

Khi đó tổng của 2019 số hạng đầu tiên của dãy khi viết dưới dạng thập phân có chữ số ở hàng đơn vị bằng bao nhiêu?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

Cho $n = m$ ta có $u_{2m+1}^2 + u_1^2 = \frac{1}{2}(u_{2m+1}^2 + u_{2m+1}^2) \Rightarrow u_1 = 0$ (1)

Cho $n = 0$ ta có $u_{m+1}^2 + u_{m+1}^2 = \frac{1}{2}(u_{2m+1}^2 + u_1^2) \Rightarrow u_{2m+1}^2 = 4u_{m+1}^2 \Rightarrow u_{2m+1} = 2u_{m+1}$ (2)

Vì $u_2 = 1$ nên $\begin{cases} u_3 = u_{2 \cdot 1 + 1} = 2 \cdot u_{1+1} = 2u_2 = 2. \\ u_5 = u_{2 \cdot 2 + 1} = 2u_{2+1} = 2u_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow u_{2+1+1}^2 + u_{2-1+1}^2 = \frac{1}{2}(u_{4+1}^2 + u_{2+1}^2) \Rightarrow u_4^2 = 9 \Rightarrow u_4 = 3.$

Ta chứng minh $u_{n+1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$ (3)

Thật vậy, với $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ thì (3) đúng.

Giả sử (5) đúng đến $n = k, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, tức là $u_{k+1} = k$ và $u_k = k - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{k+1+1}^2 + u_{k-1+1}^2 &= \frac{1}{2}(u_{2k+1}^2 + u_3^2) = \frac{1}{2}(4u_{k+1}^2 + 4) \\ \Rightarrow u_{k+2}^2 &= 2k^2 + 2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \\ \Rightarrow u_{k+2} &= k+1 \end{aligned}$$

Vậy tổng của 2019 số hạng đầu tiên của dãy là $S_{2019} = 0 + 1 + 2 + \dots + 2018 = 2037171$.

Do đó chữ số ở hàng đơn vị là 1.

Câu 43. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 2019, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$. Với

mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = 2019 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$. Khi đó $\lim y_n$ bằng?

- A. $\frac{2018}{2019}$ B. $\frac{2019}{2018}$ C. 2018 D. 2019

Lời giải

Ta có $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n + 1 = (x_n - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n, \forall n \geq 1$. Do đó (x_n) tăng.

Giả sử dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn bằng $A \Rightarrow \lim x_n = \lim x_{n+1} = A > 2019$. Chuyển qua giới hạn hai vế phương trình $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ ta được $A = A^2 - A + 1 \Leftrightarrow A = 1 < 2019$ vô lý.

Vậy $\lim x_n = +\infty$.

Ta có $x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$.

Do đó $y_n = 2019 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = 2019 \left(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \right) = 2019 \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \right)$

Từ $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = 0$. Vậy $\lim y_n = \frac{2019}{2018}$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ (4n^2 + 16n)u_{n+1} = (n^2 + 6n + 5)u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Gọi $k = \lim \left(\frac{4^n}{n^2} \cdot u_n \right)$ thì k có giá trị là?

- A. $k = 1616$ B. $k = 808$ C. $k = 404$ D. $k = 1212$

Lời giải

Ta có $(4n^2 + 16n)u_{n+1} = (n^2 + 6n + 5)u_n \Leftrightarrow 4(n^2 + 4n)u_{n+1} = [(n+1)^2 + 4(n+1)]u_n$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n+1)^2 + 4(n+1)}{n^2 + 4n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 4(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u_n}{n^2 + 4n}$$

Đặt dãy số $v_n = \frac{u_n}{n^2 + 4n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{4}$ và số hạng đầu

$$v_1 = \frac{u_1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 2020 = 404 \Rightarrow v_n = 404 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = 404 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (n^2 + 4n)$$

$$\Rightarrow k = \lim \left(\frac{4^n}{n^2} \cdot 404 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (n^2 + 4n) \right) = \lim \left(\frac{n^2 + 4n}{n^2} \cdot 4 \cdot 404 \right) = \lim \left(1 + \frac{4}{n} \right) \cdot 1616 = 1616$$

Câu 45. Cho dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{\sqrt{1+u_{n-1}^2} - 1}{u_{n-1}}; \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ đặt

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. (u_n) là dãy bị chặn. B. $S_n \leq 1 + \frac{\pi}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$
C. (u_n) là dãy giảm D. $S_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $u_1 = 1 = \tan \frac{\pi}{4}; u_2 = \frac{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\pi}{4}} - 1}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{2 \cdot 4}$.

Từ đây ta dự đoán $u_n = \tan \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$.

Thật vậy, giả sử $u_k = \tan \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 4}, \forall k \geq 1$, khi đó

$$u_{k+1} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 4}} - 1}{\tan \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 4}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 4}}{\sin \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 4}} = \tan \frac{\pi}{2^k \cdot 4}.$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra công thức (1) đúng.

- Vì $0 < \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 4} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < u_n \leq 1$ nên (u_n) là dãy bị chặn.
 - Vì $\tan x$ là hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ suy ra (u_n) là dãy giảm.
 - Ta có $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq nu_1 = n$.
 - Xét hàm $f(x) = \tan x - x; x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- $\Rightarrow \tan x \geq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó

$$S_n \geq 1 + \frac{\pi}{2 \cdot 4} + \frac{\pi}{2^2 \cdot 4} + \dots + \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 4} = 1 + \frac{\pi}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Cách 2.

Từ giả thiết suy ra $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $u_n = \frac{\sqrt{1 + u_{n-1}^2} - 1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_{n-1}^2} + 1} < u_{n-1}$.

Suy ra (u_n) giảm (C đúng) và $u_n \in (0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay A đúng. Và khi đó $S_n \leq n$ tức D đúng. Vậy chọn B.

Câu 46. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số (s_n) với $s_n = n^3 u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $\lim(s_n) = +\infty$

B. $\lim(s_n) = 0$

C. $\lim(s_n) = 1$

D. $\lim(s_n) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)((n + 1)^2 + 1)$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1} \Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} \\ \Leftrightarrow nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2} \left(nu_n - \frac{1}{n^2+1} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $v_n = nu_n - \frac{1}{n^2 + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (1) trở thành $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$, $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 $\Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3 + n} + \frac{1}{2^n n} \Rightarrow s_n = n^3 u_n = \frac{n^3}{n^3 + n} + \frac{n^2}{2^n}$.

Ta có

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$;

- Với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta có

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n \geq C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \Rightarrow 2^n \geq \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \quad (2)$$

Mặt khác (2) vẫn đúng với $n \in \{1; 2\}$. Do vậy nên $2^n \geq \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \left| \frac{n^2}{2^n} \right| = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{6n^2}{n^3 + 5n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{n^3 + 5n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n}}{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Vậy $\lim s_n = \lim \left(\frac{n^3}{n^3 + n} + \frac{n^2}{2^n} \right) = 1$.

Câu 47. Cho các dãy (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_{n+1} + 4u_n^2 - 4u_n = 0 \\ u_{2018} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó u_1 có thể nhận tất cả

bao nhiêu giá trị?

A. 2^{2017}

B. 2^{2018}

C. 2^{2019}

D. $2^{2018} - 1$.

Lời giải

Xét hàm số: $f(x) = 4x - 4x^2$ với $x \in (0; 1)$ ta có $f(x) \in (0; 1)$

Mặt khác $u_{2018} = f(u_{2017}) = \frac{1}{2} \in (0; 1) \Rightarrow u_{2017} \in (0; 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 \in (0; 1)$

Ta chứng minh bằng quy nạp $0 < u_n < 1$.

Theo trên có $u_1 \in (0; 1); u_2 \in (0; 1)$. Giả sử $u_k \in (0; 1)$ khi đó do $u_{k+1} = f(u_k) \in (0; 1)$ nên có điều chứng minh.

Vì $0 < u_1 < 1$ nên tồn tại số $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $u_1 = \sin^2 \varphi$

Khi đó $u_2 = 4u_1(1 - u_1) = 4\sin^2 \varphi(1 - \sin^2 \varphi) = \sin^2(2\varphi)$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $u_n = \sin^2(2^{n-1}\varphi)$

Theo giả thiết ta có $u_{2018} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2(2^{2017}\varphi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^{2018}\varphi) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos(2^{2018}\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2^{2019}} + k \frac{\pi}{2^{2018}} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $0 < \frac{\pi}{2^{2019}} + k \frac{\pi}{2^{2018}} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 2^{2017} - \frac{1}{2}$

Vậy $k \in \{0; 1; 2; \dots; 2^{2017} - 1\}$

Do đó có 2^{2017} giá trị $u_1 = \frac{\pi}{2^{2019}} + k \frac{\pi}{2^{2018}}$ với $k \in \{0; 1; 2; \dots; 2^{2017} - 1\}$ thỏa yêu cầu.

Câu 48. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1; u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là?

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \frac{2}{3}(u_n^2 - 3a)$

Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \frac{2}{3}$.

Do đó $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - 3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - 3a) + 3a$.

$$\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n = (1 - 3a) \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1 - 3a) \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a - 2).$$

Mặt khác ta lại có $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$

$$\Rightarrow \lim \left(3(1 - 3a) \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a - 2) \right) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ b = 3(1 - 3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -3 \end{cases}$$

Vậy $T = ab = -2$.

Câu 49. Cho 2 dãy cấp số cộng $u_n = u_1; u_2; \dots; u_n$ có công sai d_1 và $v_n = v_1; v_2; \dots; v_n$ có công sai d_2 . Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 7n + 1$ và $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = 14n + 27$. Tính tỉ số của $\frac{u_{11}}{v_{11}}$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d_1]}{2}$ và $T_n = \frac{n[2v_1 + (n-1)d_2]}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S_n}{T_n} = \frac{2u_1 + (n-1)d_1}{2v_1 + (n-1)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27} & (1) \\ \frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{u_1 + 10d_1}{v_1 + 10d_2} = \frac{2u_1 + 20d_1}{2v_1 + 20d_2} & (2) \end{cases}$$

So sánh (1) và (2) bằng cách đồng nhất $\Rightarrow n-1=20 \Rightarrow n=21 \Rightarrow \frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$

Câu 50. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_{n+1} = q.a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0, q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng

$$a_n = \alpha.q^{n-1} + \beta \frac{1-q^{n-1}}{1-q}. \text{ Tính } \alpha + 2\beta ?$$

A. 13

B. 9

C. 11

D. 16

Lời giải

$$\text{Ta có } a_{n+1} - k = q(a_n - k) \Leftrightarrow k - kq = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{1-q}$$

$$\text{Đặt } v_n = a_n - k \Rightarrow v_{n+1} = q.v_n = q^2.v_{n-1} = \dots = q^n.v_1$$

$$\text{Khi đó } v_n = q^{n-1}.v_1 = q^{n-1}.(a_1 - k) = q^{n-1}.\left(5 - \frac{3}{1-q}\right)$$

$$\text{Vậy } a_n = v_n + k = q^{n-1}.\left(5 - \frac{3}{1-q}\right) + k = q^{n-1}.\left(5 - \frac{3}{1-q}\right) + \frac{3}{1-q} = 5.q^{n-1} + 3.\frac{1-q^{n-1}}{1-q}.$$

$$\text{Do đó } \alpha = 5; \beta = 3 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 5 + 2.3 = 11.$$

Câu 51. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$; trong đó $u_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Biết rằng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 2018, T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = 2019$ và $P = u_1.u_2.u_3.\dots.u_n > \frac{1}{100}$.

Hỏi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn P là?

A. 9295

B. 9296

C. 18592

D. 18591

Lời giải

$$\text{Ta có } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = 2018 \quad (1)$$

$$\text{Và } T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{(1 - q^n)}{u_1 q^{n-1} (1 - q)} = 2019 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{T_n}{S_n} = u_1^2 q^{n-1} = \frac{2018}{2019}$$

$$\text{Ta có } Q_n = u_1.u_2.u_3.\dots.u_n = u_1.(u_1.q).(u_1.q^2).\dots.(u_1.q^{n-1}) = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (u_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2018}{2019}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Theo đề $\left(\frac{2018}{2019}\right)^{\frac{n}{2}} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 2 \log_{\frac{2018}{2019}} \left(\frac{1}{100}\right) \approx 18591,1 \Rightarrow n_{\min} = 18592$

Câu 52. Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $q \in (3;4)$ B. $q \in (1;2)$ C. $q \in (2;3)$ D. $q \in (0;1)$

Lời giải

Gọi: u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng đầu tiên của cấp số nhân, với công bội q . Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d . Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 16\frac{4}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_4 = v_1 + 3d \\ u_3 = v_8 = v_1 + 7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 16\frac{4}{9} & (1) \\ u_1q = u_1 + 3d & (2) \\ u_1q^2 = u_1 + 7d & (3) \end{cases}$$

Khử d từ (2) và (3) ta được: $u_1(3q^2 - 7q + 4) = 0$ (4).

Do (1) nên: $u_1 \neq 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{4}{3} \end{cases}$. Theo định nghĩa thì $q \neq 1$, do vậy $q = \frac{4}{3}$

Câu 53. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1, 2, \dots$. Tính giới hạn của tổng $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$.

- A. $\frac{1}{4}$ B. 1. C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \frac{n}{(1+n^2)^2 - n^2} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2+n+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} \Rightarrow \lim (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{1}{2} \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-10 & \text{khi } x > 2018 \\ f(f(x+11)) & \text{khi } x \leq 2018 \end{cases}$. Tính giá trị $f(1) + f(2018)$.

- A. 1999 B. 2009 C. 4018 D. 4036

Lời giải

Ta có

$$f(2018) = f(f(2018 + 11)) = f(f(2029)) = 2019 - 10 = 2009$$

$$f(2017) = f(f(2017 + 11)) = f(f(2028)) = f(2018) = 2009$$

...

$$f(2009) = f(f(2009 + 11)) = f(f(2020)) = f(2010) = 2009$$

$$f(2008) = f(f(2008 + 11)) = f(f(2019)) = f(2009) = 2009$$

$$f(2007) = f(f(2007 + 11)) = f(f(2018)) = f(2009) = 2009$$

...

$$f(1) = f(f(1 + 11)) = f(f(12)) = 2009$$

$$\text{Do đó ta có } f(2018) = f(2018) = \dots = f(1) = 2009 \Rightarrow f(1) + f(2018) = 4018$$

Câu 55. Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn $25 \cdot 2^{2u_5+1} - 15 \cdot 2^{u_1+u_5+2} + 5 \cdot 2^{u_5} + 15 \cdot 2^{u_1} - 4 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 8$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2019$.

A. 512.

B. 258.

C. 511.

D. 257.

Lời giải

Từ $u_{n+1} = u_n + 8 \Rightarrow (u_n)$ là CSC công sai $d = 8 \Rightarrow u_n = u_1 + 8(n-1) \Rightarrow u_5 = u_1 + 32$

Thay vào giả thiết ta được:

$$2[(5 \cdot 2^{32} - 3)2^{u_1}]^2 + (5 \cdot 2^{32} - 3)2^{u_1} - 4 = 0$$

$$\text{Có dạng phương trình bậc 2 suy ra: } (5 \cdot 2^{32} - 3)2^{u_1} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow u_1 = \log_2 \left[\frac{-1 + \sqrt{33}}{4(5 \cdot 2^{32} - 3)} \right]$$

$$u_n = u_1 + 8(n-1) > 2019 \Leftrightarrow n > \frac{2019 - u_1}{8} + 1 \approx 257,63 \Rightarrow n_{\min} = 258$$

Câu 56. Cho một cấp số cộng : u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa $|u_1 u_4 - u_2 u_3| \leq 6$. Tìm tập xác định D của hàm $f(x) = \sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4) + 9}$

A. $D = (-\infty; 6)$

B. $D = (6; +\infty)$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = (-6; 6)$

Lời giải

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có : $u_1 + u_4 = u_2 + u_3$

$$\text{Do đó } (x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4) = [x^2 - (u_1+u_4)x + u_1u_4][x^2 - (u_2+u_3)x + u_2u_3] \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 - (u_1+u_4)x = x^2 - (u_2+u_3)x$, khi đó :

$$(*) \Leftrightarrow f(t) = (t + u_1u_4)(t + u_2u_3) + 9 = t^2 + (u_1u_4 + u_2u_3)t + u_1u_4u_2u_3 + 9$$

$$\text{Với : } \Delta_t = (u_1u_4 + u_2u_3)^2 - 4u_1u_2u_3u_4 - 36 = (u_1u_4 - u_2u_3)^2 - 36.$$

Rõ ràng $|u_1u_4 - u_2u_3| \leq 6 \Rightarrow \Delta_t < 0 \Leftrightarrow f(t) > 0, \forall t \Rightarrow f(x)$ có nghĩa với mọi x

Câu 57. Biết tổng $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

A. 41

B. 40

C. 51

D. 50

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_n &= \left(2^2 + 2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(2^4 + 2 + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(2^{2n} + 2 + \frac{1}{2^{2n}}\right) \\ &= (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) + 2n + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân: $S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$:

$$S_n = 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} + 2n + \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n}$$

Theo đề bài ta có:

$$2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n} > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n} \Leftrightarrow (4^n - 1)(4^{n+1} + 1) > 3^{100} \Rightarrow n > 39,124 \dots \Rightarrow n_{\min} = 40$$

Câu 58. Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geq 1$. Tính giá trị của

$$M = \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

A. $M = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$

B. $M = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

C. $M = \frac{3 + \sqrt{31}}{3}$

D. $M = \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Đầu tiên dễ thấy $x_n \rightarrow \infty$

Ta có $x_{n+1}^2 = (x_n^2 - 2)^2 \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) = \dots = (x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2 (x_1^2 - 4)$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} = \sqrt{\frac{4}{(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2} + 21} \Rightarrow \lim \frac{x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} = \lim \sqrt{\frac{4}{(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2} + 21} = \sqrt{21}$$

Lại có $\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{x_n}{x_1 \dots x_{n-1}} - \frac{2}{x_1 x_2 \dots x_n} = \dots = x_1 - 2 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(5 - \lim \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right) = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng :

$$f(2) + f(3) + \dots + f(2018) = \ln a - \ln b + \ln c - \ln d$$

trong đó a, c, d là các số nguyên tố và $a < b < c < d$. Tính $P = a + b + c + d$

A. 1986

B. 1698

C. 1689

D. 1989

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1) - 2\ln x$$

Khi đó:

$$f(2) = \ln 1 + \ln 3 - 2\ln 2$$

$$f(3) = \ln 2 + \ln 4 - 2\ln 3$$

$$f(4) = \ln 3 + \ln 5 - 2\ln 4$$

.....

$$f(2017) = \ln 2016 + \ln 2018 - 2\ln 2017$$

$$f(2018) = \ln 2017 + \ln 2019 - 2\ln 2018$$

$$\Rightarrow f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(2017) + f(2018)$$

$$= -\ln 2 - \ln 2018 + \ln 2019 = \ln 3 - \ln 4 + \ln 673 - \ln 1019$$

Câu 60. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247

B. 248

C. 229

D. 290

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$.

Ta có $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2^9 \cdot u_1$. Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 2\log(2^9 \cdot u_1) + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log(2^9 \cdot u_1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 18\log 2 - 2\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18\log 2 - 2\log u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\log u_1 - 18\log 2 + \sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = 0$$

Đặt $\sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = t (t \geq 0)$. Phương trình trên trở thành

$$t^2 - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2(L) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - \log u_1 - 18\log 2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \log u_1 - 18\log 2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}}$$

Trong trường hợp này ta có: $u_n = \frac{5}{2^{17}} \cdot 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 99\log_2 5 + 18$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 248$.

Chọn ý B.

Câu 61. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n \cdot e \forall n \geq 1$. Tìm u_1

- A. e B. e^2 C. e^{-3} D. e^{-4}

Lời giải

Từ giả thiết suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội e và $u_n > 0 \forall n \geq 1$.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot e^5; u_8 = u_1 \cdot e^7; u_4 = u_1 \cdot e^3$. Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \ln^2 u_6 - \ln u_8 &= \ln u_4 - 1 \Leftrightarrow \ln^2 (u_1 \cdot e^5) - \ln (u_1 \cdot e^7) = \ln (u_1 \cdot e^3) - 1 \\ &\Leftrightarrow (\ln u_1 + 5)^2 - (\ln u_1 + 7) = (\ln u_1 + 3) - 1 \Leftrightarrow (\ln u_1)^2 + 8(\ln u_1) + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln u_1 = -4 \Leftrightarrow u_1 = e^{-4} \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Câu 62. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$.

Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?

- A. 1419 B. 1418 C. 1420 D. 1417

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 3$

$$e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} - e^{u_{18}} \quad (1)$$

Đặt $t = e^{u_{18}} - e^{4u_1}$ ($t \geq 0$) Phương trình (1) trở thành

$$5\sqrt{t} = -t \Leftrightarrow t + 5\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t}(\sqrt{t} + 5) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Với $t = 0$ ta có $e^{u_{18}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow u_{18} = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 + 51 = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 = 17$

Vậy $u_n = u_1 + (n-1)d = 17 + (n-1)3 = 3n + 14$

Khi đó ta được $\log_3 u_n < \ln 2018 \Leftrightarrow u_n < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow 3n + 14 < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow n < \frac{3^{\ln 2018} - 14}{3} \approx 1419,98$

Vậy giá trị lớn nhất của n là 1419.

Chọn ý A.

Câu 63. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

- A. $n = 123$ B. $n = 41$ C. $n = 39$ D. $n = 49$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } 5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2} \Leftrightarrow 5^{a_{n+1}-a_n} = \frac{3n+5}{3n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \log_5 \frac{3n+5}{3n+2}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} = a_{n-2} + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &\quad \dots \\ &= a_1 + \log_5 \frac{8}{5} + \log_5 \frac{11}{8} + \dots + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &= 1 + \log_5 \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{11}{8} \cdot \dots \cdot \frac{3n-1}{3n-4} \cdot \frac{3n+2}{3n-1} \right) = 1 + \log_5 \frac{3n+2}{5} = \log_5 (3n+2) \end{aligned}$$

Do đó $a_n = \log_5 (3n+2)$. Vì $n > 1$ nên $a_n = \log_5 (3n+2) > \log_5 5 = 1$, đồng thời dễ thấy (a_n) là dãy tăng. Lại có $a_n = \log_5 (3n+2) \Leftrightarrow n = \frac{5^{a_n} - 2}{3}$.

Lần lượt thử các giá trị $a_n = 2; 3; 4; \dots$ ta có $a_n = 3$ là giá trị nguyên, lớn hơn 1, nhỏ nhất, cho giá trị tương ứng $n = 41$.

Vậy $n = 41$.

Chọn ý B.

Câu 64. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

A. 725

B. 682

C. 681

D. 754

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra (u_n) là CSC có công sai $d = 3 \Rightarrow u_9 = u_1 + 24$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} &= e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ \Leftrightarrow 4e^{2u_1+48} + 2e^{u_1+24} - 4e^{2u_1+24} &= e^{u_1} - e^{2u_1} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow ((2e^{24} - 1)e^{2u_1})^2 + ((2e^{24} - 1)e^{2u_1}) - 3 &= 0 \\ \Rightarrow (2e^{24} - 1)e^{2u_1} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} &\Rightarrow u_1 = \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2(2e^{24} - 1)} \right] \end{aligned}$$

Ta có $u_n = u_1 + 3(n-1) > 2018 \Rightarrow n > 681 \Rightarrow n \geq 682$

Chọn ý B.

Câu 65. Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau: $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng?

A. 11

B. 8

C. 9

D. 10

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 7u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 7$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned}\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) &= \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ \Leftrightarrow (\log_2 5 + \log_2 u_1)^2 + (\log_2 7 + \log_2 u_1)^2 &= \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ \Leftrightarrow 2\log_2 5 \cdot \log_2 u_1 + 2\log_2^2 u_1 + 2\log_2 7 \cdot \log_2 u_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ 2\log_2 5 + 2\log_2 u_1 + 2\log_2 7 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \quad (L) \\ \log_2 35u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{35}\end{aligned}$$

Ta có $u_n = u_1 \cdot 7^{n-1} \cdot u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-1} > 35 \cdot 1111111$

$\Leftrightarrow n > \log_7(35 \cdot 1111111) + 1$. Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 10$.

Chọn ý D.

Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008

B. 2006

C. 2018

D. 2007

Lời giải

Ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a = (5^{x+1} + 5^{1-x}) + (25^x + 25^{-x}) \geq 2\sqrt{5^{x+1} \cdot 5^{1-x}} + 2\sqrt{25^x \cdot 25^{-x}} = 12.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 5^{x+1} = 5^{1-x} \\ 25^x = 25^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Như vậy nếu xét $a \in [0; 2018]$ thì ta nhận $a \in [12; 2018]$. Có 2007 số a thỏa đề.

Chọn ý D.

Câu 67. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với

mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230

B. 231

C. 233

D. 234

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Ta lại có:

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \Leftrightarrow 2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} \quad (1)$$

Mà $2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} \geq 8$ và $\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = \frac{8}{\log_3\left[\left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$

Nên phương trình (1) tương đương
$$\begin{cases} 2.4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = 8 \\ \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = 8 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{2^n-1}{2}$

Do đó, $S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \frac{2^n-1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow \log_5 \frac{2^n-1}{2} > 100 \Leftrightarrow n > 233$

Chọn ý D.

Câu 68. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5-63) = 2\log_4(u_n-8n+8), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18

B. 17

C. 16

D. 19

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, \log_3(2u_5-63) = 2\log_4(u_n-8n+8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5-63) = \log_2(u_n-8n+8)$.

Đặt $t = \log_3(2u_5-63) \Rightarrow \begin{cases} 2u_5-63 = 3^t \\ u_n-8n+8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5-63 = 3^t \\ u_5-32 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 1 = 3^t - 2.2^t \Rightarrow t = 2$
 $\Rightarrow u_n = 8n-4 \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4n^2$

Do đó $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n-4) \cdot 16n^2}{(16n-4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

Chọn ý A.

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

A. -2018

B. 2018

C. 1

D. -1

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{2}{x(x+1)} + 1}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + 1}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1\right)^2}} = e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1} = e \cdot e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

Do đó ta được:

$$f(1) = e \cdot e^{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}; f(2) = e \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; f(3) = e \cdot e^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}; \dots; f(2016) = e \cdot e^{\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}}; f(2017) = e \cdot e^{\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}}.$$

$$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{2017} \cdot e^{\frac{1}{2018} - \frac{1}{2017}} = e^{\frac{2017}{2018} + 2017} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$$

$$\Rightarrow m = 2018^2 - 1, n = 2018. \text{ Vậy } P = -1.$$

Chọn ý D.

Câu 70. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn điều kiện $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}.$$

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có } S_{2018} = \frac{2018}{2}(2u_1 + 2017d), S_{1009} = \frac{1009}{2}(2u_1 + 1008d).$$

Theo giả thiết, ta có $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$

$$\Leftrightarrow \frac{2018}{2}(2u_1 + 2017d) = 4 \cdot \frac{1009}{2}(2u_1 + 1008d) \Leftrightarrow 2u_1 + 2017d = 2(2u_1 + 1008d) \Leftrightarrow u_1 = \frac{d}{2}$$

Dãy số (u_n) : $\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{5d}{2}, \dots$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} = \log_3^2 \frac{3d}{2} + \log_3^2 \frac{9d}{2} + \log_3^2 \frac{27d}{2} \\ &= \left(1 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2 + \left(2 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2 + \left(3 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \log_3 \frac{d}{2} = x \text{ thì } P = (1+x)^2 + (2+x)^2 + (3+x)^2 = 3x^2 + 12x + 14 \geq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -2 \Leftrightarrow d = \frac{2}{9}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Câu 71. Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(a_2) + 2 = f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) < f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1 \\ 0 \leq a_1 \leq 1 < a_2 \end{cases}$, hơn nữa $f(x) + 2 \geq 0 \forall x \geq 0$. Ta xét các trường hợp

- Nếu $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 \geq 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) = -2 \\ f(a_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$.
- Nếu $0 \leq a_1 \leq 1 < a_2$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 > 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases}$ điều này là không thể.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1 = 0; a_2 = 1$.

Từ đó suy ra $a_n = n - 1 (n \geq 1)$. Tương tự vì $b_2 > b_1 \geq 1$ nên $\log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0$, suy ra

$$\begin{cases} \log_2 b_2 = 1 \\ \log_2 a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} (n \geq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 2018x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{2018}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$	1	$g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Ta có $\begin{cases} g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right) < 0 \\ \log_2 \frac{2018}{\ln 2} > 11 \\ g(12) = -20120 \\ g(13) = -18042 \\ g(14) = -11868 \\ g(15) = 2498 > 0 \end{cases}$ nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1) > 0$

là $n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 16$.

Chọn ý A.

Câu 72. Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

- A. 234 B. 229 C. 333 D. 292

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Có $f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Mặt khác, ta có $b_1 > b_2 \geq 1$. Đặt $a = \log_2 b_2 > \log_2 b_1 = b \geq 0$. Ta có: $a^3 - 3a + 2 = b^3 - 3b$ (1).

- Nếu $b > 1 \Rightarrow a > b > 1 \Rightarrow a^3 - 3a > b^3 - 3b \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow -2 < b^3 - 3b \leq 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) \leq 0$.

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = 0$. Khi đó $\begin{cases} b_1 = 2^0 = 1 \\ b_2 = 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n-1 > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Chọn ý A.

Câu 73. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \left(u_1^2 + u_3 + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{8} \right) = e^{4u_2-7} + e^{6u_1-6} - 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

A. 3472

B. 3245

C. 3665

D. 3453

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} \right)$

Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n \Rightarrow (v_n)$ là CSN với công bội $q = \frac{3}{2}$.

Khi đó $v_n = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2} \right)$

Ta có $u_3 = \frac{33}{8} - \frac{9}{4}u_1, u_2 = \frac{13}{4} - \frac{3}{2}u_1$, thay vào giả thiết ta được

$$\log_{\frac{1}{3}} (u_1^2 - 2u_1 + 4) = e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3 \geq 2\sqrt{e^{6-6u_1} \cdot e^{6u_1-6}} - 3 = -1$

Mặt khác ta cũng có $\log_{\frac{1}{3}} (u_1^2 - 2u_1 + 4) = \log_{\frac{1}{3}} ((u_1 - 1)^2 + 3) \leq -1$

Do đó $VT \leq VP$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$

$$\text{Để } u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Rightarrow \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Leftrightarrow n \leq 3453$$

Chọn ý D.

Câu 74. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdots f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024}$.

A. $n = 23$

B. $n = 29$

C. $n = 21$

D. $n = 33$

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } u_n &= \frac{(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)\dots[(2n-1)^2+1][4n^2+1]}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\dots[4n^2+1][(2n+1)^2+1]} \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1} \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024} \Leftrightarrow -\log_2(2n^2+2n+1) + \frac{1}{2n^2+2n+1} + \frac{10239}{1024} < 0$.

Xét hàm số $g(n) = -\log_2(2n^2+2n+1) + \frac{1}{2n^2+2n+1} + \frac{10239}{1024}$ với $n \geq 1$.

Ta có $g'(n) = -\frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)\ln 2} - \frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)^2} < 0$ với $n \geq 1 \Rightarrow g(n)$ nghịch biến.

$$\text{Mà } g\left(\frac{-1+\sqrt{2047}}{2}\right) = 0 \text{ nên } -\log_2(2n^2+2n+1) + \frac{1}{2n^2+2n+1} + \frac{10239}{1024} < 0$$

$$\Rightarrow n > \frac{-1+\sqrt{2047}}{2}. \text{ Do } n \text{ nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên } n = 23$$

Chọn ý A.

Câu 75. Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2)\dots\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$

B. $(\log 2019; \log 2020)$

C. $(\log 2018; \log 2019)$

D. $(\log 2020; \log 2021)$

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2)\dots\right)\right)\right)\right) \Rightarrow A_n = (n + A_{n-1})$$

Ta có

$$0 < \log 2 < 1 \Leftrightarrow 0 < A_2 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \log 3 < A_3 = \log(3 + A_2) < \log 4 < 1$$

...

$$\Rightarrow 0 < \log 9 < A_9 = \log(9 + A_8) < \log 10 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \log 10 < A_{10} = \log(10 + A_9) < \log 11 < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \log 12 < A_{11} = \log(11 + A_{10}) < \log 13 < 2$$

...

$$\Rightarrow 2 < \log 999 < A_{997} = \log(997 + A_{996}) < \log 1000 = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \log 1000 < A_{998} = \log(998 + A_{997}) < \log 1001 < 4$$

$$\Rightarrow 3 < \log 1002 < A_{999} = \log(999 + A_{998}) < \log 1003 < 4$$

...

$$\Rightarrow 3 < \log 2020 < A_{2017} = \log(2017 + A_{2016}) < \log 2021 < 4$$

Vậy $A_{2017} \in (\log 2020; \log 2021)$

Câu 76. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \frac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a .

A. 37

B. 36

C. 38

D. 40

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \ln \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \in [0; \ln 2) \Rightarrow [u_n] = 0$$

$$\Rightarrow u_n - [u_n] < \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} < \sqrt[3]{e^2} \Rightarrow n < 37.462$$

Chọn ý A.

Câu 77. Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời

$$\sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + \dots + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n+2} + 1}}} = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1. \text{ Số tự nhiên } n \text{ nhỏ nhất để } u_n > 5^{100} \text{ là?}$$

A. 232

B. 233

C. 234

D. 235

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow u_n = 2^{n-1}u_1$, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$ nên đúng với $n = 1$ nên

$$\sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_2^2 + u_3 + 1}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + \sqrt{4u_1^2 + 4u_1 + 1}} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + 2u_1 + 1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{2^{n-1}}{3} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 3 \cdot 5^{100} \Leftrightarrow n > \log_2 3 + 100 \log_2 5 > 233.$$

Chọn ý C.

Câu 78. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và đồng thời $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$

A. 100

B. 99

C. 101

D. 102

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2) \Leftrightarrow (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{cases}$$

Mặt khác ta có $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1 \Rightarrow (v_n)$ là CSC có công sai $d = 1$

$$\text{Khi đó } \Rightarrow v_n = n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + n + 1 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + \sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Vậy để } u_n > 5050 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} > 5050 \Rightarrow n > 100$$

Chọn ý C.

Câu 79. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

A. 235

B. 255

C. 233

D. 241

Lời giải

$$\text{Ta có } (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)$$

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2 - 2(n^2+1) + 1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} \\ &\Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2} \left(nu_n - \frac{1}{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n) \text{ là CSN có công bội } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^{n-1}n} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$$

Thay $u_2 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{4}u_1$ vào giả thiết ta được

$$\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3 + n} + \frac{1}{2^n n}$$

$$\text{Để } u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)} \Rightarrow n > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 233$$

Chọn ý C.

Câu 80. Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $q \in (3;4)$ B. $q \in (1;2)$ C. $q \in (2;3)$ D. $q \in (0;1)$

Lời giải

Gọi: u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng đầu tiên của cấp số nhân, với công bội q . Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d . Theo giả thiết ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 16\frac{4}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_4 = v_1 + 3d \\ u_3 = v_8 = v_1 + 7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 16\frac{4}{9} & (1) \\ u_1q = u_1 + 3d & (2) \\ u_1q^2 = u_1 + 7d & (3) \end{cases}$$

Khử d từ (2) và (3) ta được: $u_1(3q^2 - 7q + 4) = 0$ (4).

$$\text{Do (1) nên: } u_1 \neq 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Theo định nghĩa thì } q \neq 1, \text{ do vậy } q = \frac{4}{3}$$

Câu 81. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với n nguyên dương. Tính $\lim \frac{I_{n+2}}{I_n}$.

- A. -1 B. 1 C. 2 D. $+\infty$

Lời giải

$$\text{Xét } I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1) \sin^n x \cdot \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = -\cos x \cdot \sin^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (n+1) \sin^n x \cdot \cos x dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n x \cdot \cos^2 x dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x) dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = (n+1) \cdot I_n - (n+1) \cdot I_{n+2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (n+2).I_{n+2} &= (n+1).I_n \Rightarrow \frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+2}}{I_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.\end{aligned}$$

Chọn ý B.

Câu 82. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Lời giải

Cách 1. Tự luận

$$\begin{aligned}\text{Xét } I_n &= \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = x(1-x^2)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases} \\ \Rightarrow I_n &= \frac{-x(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx \\ \Rightarrow I_{n+1} &= \frac{1}{2(n+2)} \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n+1} dx \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \left[\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} dx \right] \\ \Rightarrow I_{n+1} &= \frac{1}{2(n+2)} [2(n+1)I_n - I_{n+1}] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.\end{aligned}$$

Cách 2. Trắc nghiệm

Ta thấy $0 \leq (1-x^2) \leq 1$ với mọi $x \in [0;1]$, nên

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} dx = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n (1-x^2) dx \leq \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx = I_n,$$

Suy ra $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Dựa vào các đáp án, ta chọn A.

Chọn ý A.

Câu 83. Đặt $I_n = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{\frac{(x+1)^{2n}(2x^2+1)}{(x^2+1)^{2n+1}}} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}} \right) dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. -1

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có bước biến đổi sau } I_n = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} - \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x+1)^2 - (x^2+1)}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{2x^2+1}{x^2+1}} \cdot \frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$$

Đến lúc này ta sẽ đổi biến. Đặt $u = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \Rightarrow du = \frac{2xdx}{(x^2+1)}$

$$\Rightarrow I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{u} du = \int_1^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{n}} du = \frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} \bigg|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)}{\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{3}{2}^{\frac{n+2}{n+1}} - 1 \right)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$$

Chọn ý A.

Câu 84. Ta đặt $F_n(x) = \int \frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}} dx$. Biết $F_n(1) = 0 \forall n$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(2)$.

A. 1

B. $-\infty$

C. -1

D. $+\infty$

Lời giải

Ta có $F_n(x) = \int \frac{\sqrt[n]{x-x^n}}{x^{n+1}} dx = \int \frac{\sqrt[n]{x^n \left(\frac{1}{x^{n-1}} - 1 \right)}}{x^{n+1}} dx = \int \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}} - 1}}{x^n} dx$

Đặt $u = \frac{1}{x^{n-1}} - 1 \Rightarrow du = \frac{1-n}{x^n} dx \Rightarrow \frac{dx}{x^n} = \frac{du}{1-n}$

$$\Rightarrow F_n(x) = G_n(u) = \int \frac{\sqrt[n]{u}}{1-n} du = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{u^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} + C$$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{n}{1-n^2} \cdot \left(\frac{1}{x^{n-1}} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}} + C. \text{ Mà } F_n(1) = 0 \forall n \Rightarrow C = 0 \forall n$$

$$\Rightarrow F_n(2) = \frac{n}{1-n^2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}}. \text{ Có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1-n^2} = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(2) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \end{cases}$$

Chọn ý D.

Câu 85. Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1 \cdot (I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + \dots + n(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $L \in (-1; 0)$ B. $L \in (-2; -1)$ C. $L \in (0; 1)$ D. $L \in (1; 2)$

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx} \cdot e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \\ \Rightarrow I_{n+1} &= \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) \end{aligned}$$

Do đó $u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + \dots + (1 - e^{-n}) - n \Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - \dots - e^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$,

nên $\lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1; 0)$.

Chọn ý A.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2$$

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2 \Leftrightarrow \left(x - n^2x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \right) \Big|_0^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2n^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = -2 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = n^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2^n - n^2 - 2 = 0.$$

Thử với các giá trị $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 5$ ta chứng minh $2^n > n^2 + 2$ (1). Dễ thấy $n = 5$ thì (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 5$. Khi đó $2^k > k^2 + 2$.

Khi đó: $2^{k+1} > 2(k^2 + 2) = k^2 + k^2 + 2 + 2 > k^2 + 2k + 1 + 2 = (k+1)^2 + 2$.

Do đó (1) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n .

Chọn ý C.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(2018x+2017)=2018f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$?

- A. $\frac{4}{3}[f(-1)]^2$ B. $\frac{5}{3}[f(-1)]^2$ C. $\frac{7}{3}[f(-1)]^2$ D. $\frac{8}{3}[f(-1)]^2$

Lời giải

Xét biểu thức $f(2018x+2017)=2018f(x)$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$2018f'(2018x+2017)=2018f'(x)$$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } 2018x+2017, \text{ ta được } f'(x)=f'\left(\frac{\frac{x-2017}{2018}-2018+1}{2018}\right)=f'\left(\frac{x-2018^2+1}{2018^2}\right)$$

Thay đến n lần và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2018^n+1}{2018^n}\right)=f'\left(\frac{x}{2018^n}-1+\frac{1}{2018^n}\right)$$

Khi $n \rightarrow +\infty \Rightarrow f'(x)=f'(-1)=f(x)=f'(-1)x+C(*)$

Thay $x=-1 \Rightarrow f(-1)=2018f(-1) \Rightarrow f(-1)=0$

Thay $x=-1 \Rightarrow (*) : f(-1)=-f'(-1)+C=0 \Leftrightarrow f'(-1)=C$

Vậy $f(x)=f'(-1)(x+1) \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{7}{3}[f(-1)]^2$

Chọn ý C.

Câu 88. Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \\ &= \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C. \end{aligned}$$

Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10} = (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + \dots + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0)$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^9 \frac{\tan^r x}{r} + C.$$

Câu 89. Cho dãy số xác định bởi
$$\begin{cases} U_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^* \\ U_{n+1} = 2.U_n^2 - 1 \end{cases}$$
 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n}$ có giá trị là ?

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Đây là một bài toán lượng giác hoá quen thuộc, với ý tưởng gợi mở từ công thức biến đổi hạ bậc $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Nhận thấy
$$\begin{cases} U_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos \frac{\pi}{12} \\ U_2 = 2.U_1^2 - 1 = 2.\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 = \cos 2.\frac{\pi}{12} \\ \dots \\ U_n = 2.U_{n-1}^2 - 1 = \cos 2^{n-1} \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Lại có
$$0 \leq \left| \frac{U_n}{n} \right| = \left| \frac{\cos 2^{n-1} \frac{\pi}{12}}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n} = 0$$

Câu 90. Cho dãy số U_n xác định bởi
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 - n(U_n - 1) + n^2}{n}, n \geq 1 \end{cases}$$

Khi đó $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \dots + \frac{1}{U_n} \right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-3; -1)$ B. $(-1; 2)$ C. $(-1; -2)$ D. $(-1; 1)$

Lời giải

Đây là một bài toán khá khó. Với những dạng toán như này, hướng biến đổi nằm ở câu hỏi, tức là ta phải tìm cách đưa dãy về dạng $\frac{1}{U_k}$

Để có được điều này, hướng giải quyết cơ bản và ưu tiên là thêm vào 2 vế $f(x)$ sao cho khi chia U_k xuống mẫu, ta được một dãy có khả năng triệt tiêu

Cụ thể, ta thấy
$$U_{k+1} = \frac{U_k^2 - k(U_k - 1) + k^2}{k} = \frac{U_k^2 - kU_k + k + k^2}{k} = \frac{U_k^2 - kU_k}{k} + k + 1$$

Thêm vào 2 vế $-(k+1)$ (có thể nói là chuyển $(k+1)$ sang trái, nhưng mình dùng từ theo đúng phương pháp trên vì phương pháp này còn áp dụng vào nhiều dạng toán), ta được:

$$U_{k+1} - (k+1) = \frac{U_k^2 - kU_k}{k} \Rightarrow \frac{1}{U_{k+1} - (k+1)} = \frac{k}{U_k^2 - kU_k} = \frac{1}{U_k - k} - \frac{1}{U_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U_k} = \frac{1}{U_k - k} - \frac{1}{U_{k+1} - (k+1)}$$

Áp dụng vào dãy số

$$\begin{cases} \frac{1}{U_1} = \frac{1}{U_1 - 1} - \frac{1}{U_2 - 2} \\ \frac{1}{U_2} = \frac{1}{U_2 - 2} - \frac{1}{U_3 - 3} \\ \dots \\ \frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n - n} - \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta được

$$\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \dots + \frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_1 - 1} - \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} = -2 - \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)}$$

Lại có $U_k > 3k$ - Chứng minh qua quy nạp

$$\Rightarrow U_{n+1} > 3(n+1) \Leftrightarrow U_n - (n+1) > 2n+2 > 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} \right| < \frac{1}{2n+2}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} \right| = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} < -2 \Rightarrow S = -2$$

Câu 91. Trong dịp hội trại hè 2017, bạn Anh thả một quả bóng cao su từ độ cao 6(m) so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng ?

- A. 44(m) B. 45(m) C. 42(m) D. 43(m)

Lời giải

Ta có quãng đường bóng bay bằng tổng quãng đường bóng nảy lên và quãng đường bóng rơi xuống.

Vì mỗi lần bóng nảy lên bằng $\frac{3}{4}$ lần nảy trước nên ta có tổng quãng đường bóng nảy lên

$$\text{là } S_1 = 6 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$ và công bội $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Suy ra } S_1 = \frac{\frac{9}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = 18.$$

Tổng quãng đường bóng rơi xuống bằng khoảng cách độ cao ban đầu và tổng quãng đường bóng nảy lên nên là $S_2 = 6 + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 6$ và công bội $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Suy ra } S_2 = \frac{6}{1 - \frac{3}{4}} = 24.$$

Vậy tổng quãng đường bóng bay là $S = S_1 + S_2 = 18 + 24 = 42$.

Câu 92. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây trồng muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 (m) và 25 (m) để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

- A. luôn chọn A.
- B. luôn chọn B.
- C. giếng 20 (m) chọn A còn giếng 25 (m) chọn B.
- D. giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn A.

Lời giải

Cơ sở A giá mét khoan đầu tiên là 8000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 (đồng) so với giá của mét khoan ngay trước đó. Do đó theo tổng của một cấp số cộng ta có:

$$+ \text{ Nếu đào giếng 20 (m) hết số tiền là: } S_{20} = \frac{20}{2} [2.8000 + (20 - 1)500] = 255000 \text{ (đồng).}$$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 25 (m) hết số tiền là: } S_{25} = \frac{25}{2} [2.8000 + (25 - 1)500] = 350000 \text{ (đồng).}$$

Cơ sở B giá của mét khoan đầu tiên là 6000 (đồng) và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Do đó theo tổng của một cấp số nhân ta có:

$$+ \text{ Nếu đào giếng 20 (m) hết số tiền là: } S'_{20} = 6000 \frac{1 - (1,07)^{20}}{1 - 1,07} \approx 245973 \text{ (đồng).}$$

$$+ \text{ Nếu đào giếng 25 (m) hết số tiền là: } S'_{25} = 6000 \frac{1 - (1,07)^{25}}{1 - 1,07} \approx 379494 \text{ (đồng).}$$

Ta thấy $S'_{20} < S_{20}$, $S'_{25} > S_{25}$ nên giếng 20 (m) chọn B còn giếng 25 (m) chọn A.

Câu 93. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng sau?

$$S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}$$

- A. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$ B. $1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}$ C. 2018 D. 1

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó

$$S_{100} = 100u_1 + \frac{100 \cdot 99}{2}d \Leftrightarrow 100 + 4950d = 14950 \Leftrightarrow d = 3.$$

Do đó $u_{2018} = u_1 + 2017d = 6052$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{u_{k+1}\sqrt{u_k} + u_k\sqrt{u_{k+1}}} &= \frac{1}{\sqrt{u_k} \cdot \sqrt{u_{k+1}} \cdot (\sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}})} = \frac{1}{d} \cdot \frac{\sqrt{u_{k+1}} - \sqrt{u_k}}{\sqrt{u_k} \cdot \sqrt{u_{k+1}}} = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_k}} - \frac{1}{\sqrt{u_{k+1}}} \right). \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}} \right) + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_3}} \right) + \dots + \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_{2017}}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2018}}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2018}}} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}} \right) \end{aligned}$$

Câu 94. Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \dots + 44\dots4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng?

- A. $\frac{40}{9}(10^{2018} - 1) + 2018$. B. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$.
C. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} + 2018\right)$. D. $\frac{4}{9}(10^{2018} - 1)$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $S = 4 + 44 + 444 + \dots + 44\dots4$ (tổng đó có 2018 số hạng). Ta có

$$\begin{aligned} \frac{9}{4}S &= 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots9 = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{2018} - 1) \\ \Rightarrow \frac{9}{4}S &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}) - 2018 = A - 2018. \end{aligned}$$

Với $A = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}$ là tổng 2018 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$, công bội $q = 10$ nên ta có $A = u_1 \frac{1 - q^{2018}}{1 - q} = 10 \frac{1 - 10^{2018}}{-9} = \frac{10^{2019} - 10}{9}$.

$$\text{Do đó } \frac{9}{4}S = \frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018 \Leftrightarrow S = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right).$$

$$\text{Cách 2. Xét dãy số có } \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 10u_n + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} + \frac{4}{9} = 10\left(u_n + \frac{4}{9}\right) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{40}{9} \\ v_{n+1} = 10v_n \end{cases} \Rightarrow v(n) \text{ là cấp số nhân.}$$

$$\text{Ta có } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = v_1 - \frac{4}{9} + v_2 - \frac{4}{9} + \dots + v_{2018} - \frac{4}{9} = v_1 + v_2 + \dots + v_{2018} - \frac{2018 \cdot 4}{9}$$

$$\text{Trong đó } S_{v(2018)} = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot v_1 = \frac{1-10^{2018}}{1-10} \cdot \frac{40}{9} = \frac{40 \cdot (10^{2018} - 1)}{81}$$

$$\text{Vậy tổng là } S = \frac{40}{81} (10^{2018} - 1) - \frac{4}{9} \cdot 2018 = \frac{4}{9} \left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018 \right).$$

Câu 95. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

- A. 2587 B. 2590 C. 2593 D. 2584

Lời giải

Ta có dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 6$.

$$\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11 \Leftrightarrow \log_2 u_5 (u_9 + 8) = 11 \quad (*) \text{ với } u_5 > 0.$$

Mặt khác $u_5 = u_1 + 4d = u_1 + 24$ và $u_9 = u_1 + 8d = u_1 + 48$.

Thay vào $(*)$ ta được $\begin{cases} u_1 = 8 \Rightarrow u_5 = 32 \\ u_1 = -88 \Rightarrow u_5 = -64 \end{cases}$. Suy ra $u_1 = 8$.

$$S_n \geq 20172018 \Leftrightarrow \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \geq 20172018 \Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 20172018 \geq 0.$$

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$ là $n = 2593$.

Câu 96. Cho hai cấp số cộng $(a_n): a_1 = 4; a_2 = 7; \dots; a_{100}$ và $(b_n): b_1 = 1; b_2 = 6; \dots; b_{100}$. Hỏi có bao nhiêu số có mặt đồng thời trong cả hai dãy số trên?

- A. 32 B. 20 C. 33 D. 53

Lời giải

Cấp số cộng $(a_n): a_1 = 4; a_2 = 7; \dots; a_{100}$ có số hạng tổng quát: $a_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$.

Cấp số cộng $(b_n): b_1 = 1; b_2 = 6; \dots; b_{100}$ có số hạng tổng quát: $b_m = 1 + (m-1)5 = 5m - 4$.

Các số có mặt đồng thời trong cả hai dãy số trên thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 3n + 1 = 5m - 4 \\ 1 \leq n \leq 100 \\ 1 \leq m \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = 5(m-1) \\ 1 \leq n \leq 100 \\ 1 \leq m \leq 100 \end{cases}$$

Vì $3n = 5(m-1)$ nên $n:5$ và $m-1:3$ với $m-1 > 0$

Ta lại có $n \leq 100 \Rightarrow 3n \leq 300 \Rightarrow 5(m-1) \leq 300 \Leftrightarrow m \leq 61$.

Có $m-1:3 \Rightarrow m = 3t + 1, t \in \mathbb{N}^*$. Vì $1 \leq m \leq 61 \Leftrightarrow 1 \leq 3t + 1 \leq 61 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 20$.

Vì $t \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$.

Vậy có 20 số hạng có mặt đồng thời ở hai dãy số trên.

Câu 97. Cho tam giác ABC cân tại A . Biết rằng độ dài cạnh BC , trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q . Tìm công bội q của cấp số nhân đó?

- A. $q = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$ C. $q = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ D. $q = \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \quad (1).$$

Do ba cạnh BC , AM , AB lập thành cấp số nhân nên ta có: $BC \cdot AB = AM^2$ (2)

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được } \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = BC \cdot AB \Leftrightarrow 4AB^2 - 4AB \cdot BC - BC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 4\frac{AB}{BC} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{AB}{BC} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}.$$

Câu 98. Cho hàm số $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{\cos(2017\pi x)}$ và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức tổng quát $u_n = \log f(1) + \log f(2) + \dots + \log f(n)$. Tìm tổng tất cả các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018} = 1$

- A. 21 B. 18 C. 3 D. 2018

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \sum_{k=1}^n \log f(k) = \sum_{k=1}^n \cos(2017\pi k) [\log(k+1) + \log(k+2)] = (k \text{ chẵn}) - (k \text{ lẻ})$$

- Trường hợp 1: $n = 2p$ khi đó ta có khai triển

$$u_n = (\log 3 + \log 4 + \dots + \log(2p+1) + \log(2p+1)) - (\log 2 + \log 3 + \dots + \log(2p) + \log(2p+1))$$

$$\text{Như vậy } u_n = \log(p+1) \Rightarrow u_n^{2018} = 1 \Leftrightarrow p = 9 \Leftrightarrow n = 18$$

- Trường hợp 2: $n = 2p+1$ khi đó ta có khai triển

$$u_n = (\log 3 + \log 4 + \dots + \log(2p+1) + \log(2p+1)) - (\log 2 + \log 3 + \dots + \log(2p+2) + \log(2p+3))$$

$$\text{Như vậy } u_n = -\log(4p+6) \Rightarrow u_n^{2018} = 1 \Leftrightarrow p = 1 \Leftrightarrow n = 3$$

Tổng các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018} = 1$ là 21.

Câu 99. Biết rằng $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018} n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2 n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018} n}}} = \frac{a^{2019} + b}{c}$ Trong đó (u_n) xác định bởi $u_1 = 0; u_{n+1} = u_n + 4n + 3$ và a, b, c , là các số nguyên dương và $b < 2019$. Tính $S = a + b - c$

A. -1 B. 0 C. 2017 D. 2018

Lời giải

Ta có $u_n - u_{n-1} = 4n - 1 \Rightarrow u_n = 2n^2 + n - 3$

Ta xét $S_1 = \{n, 4n, 4^2 n, \dots, 4^{2018} n\}, S_2 = \{n, 2n, 2^2 n, \dots, 2^{2018} n\}$

Có $\sqrt{u_k} = \sqrt{2k^2 + k - 3} - \sqrt{2} \cdot k + \sqrt{2} \cdot k = \frac{k-3}{\sqrt{2k^2 + k - 3} + \sqrt{2}k} + \sqrt{2}k$

Vậy $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \in S_1} \frac{k-3}{\sqrt{2k^2 + k - 3} + \sqrt{2} \cdot k} + \sqrt{2}n \cdot \left(\frac{4^{2019} - 1}{3} \right)}{\sum_{k \in S_2} \frac{k-3}{\sqrt{2k^2 + k - 3} + \sqrt{2} \cdot k} + \sqrt{2}n \cdot (2^{2019} - 1)} = \frac{2^{2019} + 1}{3}$

Câu 100. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^2 + 8bc} + 3}{\sqrt{(2a+c)^2 + 1}}$ có dạng $x\sqrt{y} (x, y \in \mathbb{N})$ Hỏi $x + y$ bằng bao nhiêu?

A. 9 B. 11 C. 13 D. 7

Lời giải

Ta có $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c \Leftrightarrow a^2 = (2b - c)^2 \Leftrightarrow a^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 \Leftrightarrow a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

$$\Rightarrow P = \frac{2b + c + 3}{\sqrt{(2b + c)^2 + 1}} = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \sqrt{10} (t = 2b + c)$$

Dấu bằng xảy ra khi $2b + c = \frac{1}{3} \Rightarrow x + y = 11$

Câu 101. Cho các số hạng dương a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $\log_2 a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$

A. 0 B. 2 C. 1 D. 4

Lời giải

Ta có a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân nên

$$\begin{cases} a = u_1 + (m-1)d = a_1 q^{m-1} \\ b = u_1 + (n-1)d = a_1 q^{n-1} \\ c = u_1 + (p-1)d = a_1 q^{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = (m-n)d \\ b - c = (n-p)d \\ c - a = (p-m)d \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \log_2 a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = \log_2 (a_1 q^{m-1})^{(n-p)d} (a_1 q^{n-1})^{(m-n)d} (a_1 q^{p-1})^{(p-m)d} = \log_2 a_1^0 q^0 = 0$$

Câu 102. Cho $a+b+c=\frac{\pi}{2}$ và $\cot a, \cot b, \cot c$ Tạo thành cấp số cộng. Giá trị của $\cot a \cdot \cot c$ bằng?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet \quad a+b+c=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{2}-c \Rightarrow \cot(a+b)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\tan c \Rightarrow \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b} = \frac{1}{\cot c} \\ \bullet \quad a+b+c=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{2}-c \Rightarrow \cot(a+b)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\tan c \Rightarrow \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b} = \frac{1}{\cot c} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cot a \cdot \cot b \cdot \cot c = \cot a + \cot b + \cot c$$

Mặt khác $\cot a + \cot c = 2 \cot b \Rightarrow \cot a \cdot \cot b \cdot \cot c = 3 \cot b \Rightarrow \cot a \cdot \cot c = 3$

Ta có $a+c=2b \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = 4 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow 3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

LỜI KẾT

Vậy là ta đã đi đến những trang cuối cùng của tuyển tập này với hơn 100 bài toán đa dạng chắc hẳn đã mang tới cho bạn đọc một cái nhìn khác và mới lạ hơn về chủ đề dãy số này. Các bạn thấy đó với hình thức thi trắc nghiệm như thế này sẽ xuất hiện rất nhiều các dạng toán mới lạ mà nó liên kết nhiều mảng kiến thức với nhau yêu cầu chúng ta cần phải tìm hiểu kỹ, sâu và rộng thì mới có thể giải quyết được chúng. Hy vọng qua ebook này các bạn đã học thêm được nhiều điều và rút ra được kinh nghiệm cho bản thân trong việc giải quyết các dạng toán mà bọn mình đưa ra và nhiều dạng toán có liên quan khác. Sau đây bọn mình sẽ giới thiệu cho các bạn một số tài liệu và sách tham khảo, trang web có thể giúp ích được cho các bạn trong quá trình học tập.

1. Chuyên khảo dãy số - Nguyễn Tài Chung
2. Trắc nghiệm nâng cao chuyên đề dãy số - Đặng Việt Đông
3. Tìm công thức tổng quát của dãy số – Trần Duy Sơn
4. Các dạng toán phương pháp quy nạp toán học, dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân – Trần Quốc Nghĩa
5. Dãy số và giới hạn của dãy số – Nguyễn Tất Thu
6. Bài tập trắc nghiệm xác định số hạng thứ n của dãy số – Nguyễn Chiến
7. Tài liệu dãy số – cấp số dành cho học sinh khối chuyên – Lê Quang Ảnh
8. Website toanmath.com
9. Website lovetoan.wordpress.com



Blog Chinh Phục Olympic Toán

<https://lovetoan.wordpress.com/>

Email: tuangenk@gmail.com

Blog chuyên chia sẻ tài liệu ôn học sinh giỏi môn toán với rất nhiều tài liệu chất và thư viện tài liệu được xây dựng rất đồ sộ

Ngoài ấn phẩm các bạn đang đọc thì các bạn có thể tìm hiểu thêm một số ấn phẩm khác được đăng miễn phí trên blog sau



- Tham khảo thêm -

Bên cạnh blog của chúng tôi các bạn có thể theo dõi trang fanpage: Tạp chí và tư liệu toán học – Đây là một trang chúng tôi đăng free các tài liệu liên quan tới toán VDC, VD, Ôn Olympic, HSG... Cảm ơn mọi người

Tài liệu được chia sẻ miễn phí

OMATHS