

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số

1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x .

Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

Ví dụ 1.

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S .

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1 .

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x-1}$.

Giải

a) Biểu thức $\frac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x-1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} = [1; +\infty)$.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

Ví dụ 3. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0, x = 0, x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1; f(0) = 0; f(2021) = 1$.

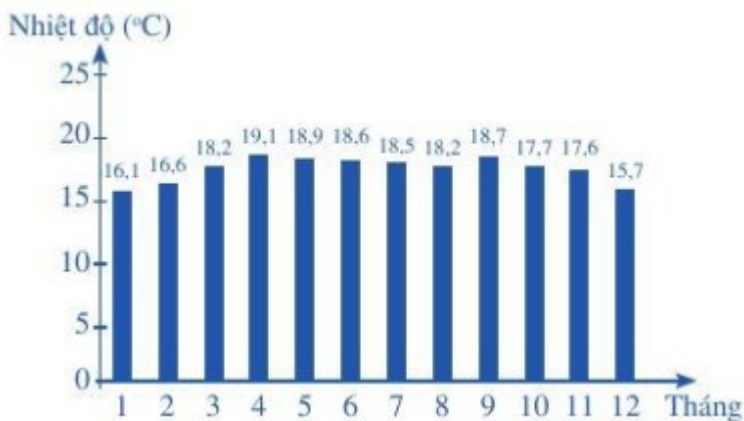
Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D . Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4. Biểu đồ ở dưới cho biết Nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm



- a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.
b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

Giải

- a) Tập hợp các tháng là $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số.
Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. Đồ thị của hàm số

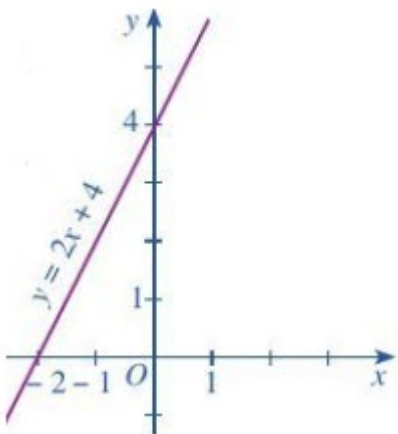
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi x thuộc D .

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = 2x + 4$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số trên.
b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm: $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $C(2020; 2021)$, $D(2030; 4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

Giải

- a) Khi $x = 0$ thì $y = 4$; khi $y = 0$ thì $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0; 4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2; 0)$



- b) Khi $x = -1$ thì $y = 2$; khi $x = 1$ thì $y = 6$; khi $x = 2020$ thì $y = 4044$; khi $x = 2030$ thì $y = 4064$.
Vậy các điểm $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $D(2030; 4064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2020; 2021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Nhận xét - Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ khi và chỉ khi

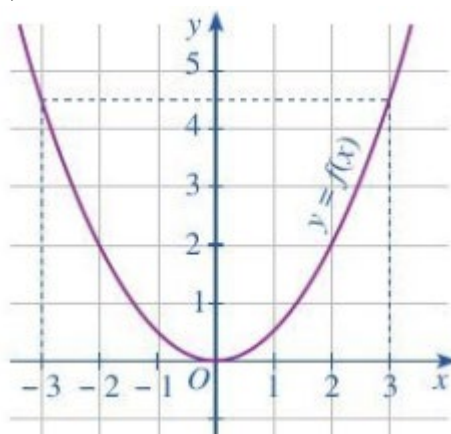
$$\begin{cases} a \in D \\ b = f(a). \end{cases}$$

- Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng tọa độ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1 : Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2 : Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Trong các điểm có tọa độ $(-2;2), (0;0), (0;1), (2;2), (1;1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

Giải

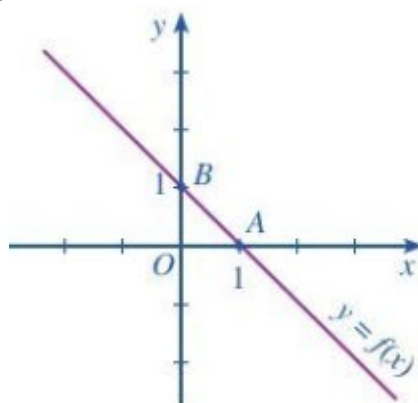
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(-2;2), (0;0), (2;2)$

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(0;1), (1;1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3) = \frac{9}{2}$.

Tọa độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3; \frac{9}{2}\right), \left(3; \frac{9}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục tọa độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1;0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b (a \neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục Oy là điểm có tọa độ $(0;b)$ nên $b = 1$. Suy ra

$y = f(x) = ax + 1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục Ox là điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{a}; 0\right)$ nên $-\frac{1}{a} = 1$, tức

là $a = -1$. Vậy $y = f(x) = -x + 1$.

III. Sự biến thiên của hàm số

1. Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8. Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên*.

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

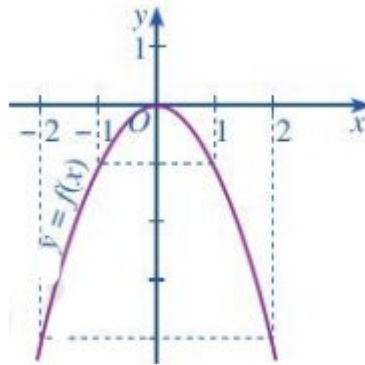
2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

Nhận xét.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên khoảng đó.

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên khoảng đó.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Giải

a) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ " là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định D của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Chú ý. Thông thường $y = f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(v)}{v(x)} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \sqrt[k]{u(x)} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x) \\ u(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(x)}{\sqrt[k]{v(x)}} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) > 0 \end{cases}$$

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{3x-1}{-2x+2}.$

b) $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}.$

c) $y = \frac{1}{x^2+4x+5}.$

d) $y = \frac{2x+1}{x^3-3x+2}.$

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{3x-2}.$

b) $y = \sqrt{x^2+1}.$

c) $y = \sqrt{-2x+1} - \sqrt{x-1}.$

d) $y = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x-3}.$

e) $y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$

f) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x^2-x+1}.$

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$

b) $y = \frac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}.$

c) $y = \frac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}.$

d) $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}.$

e) $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x\sqrt{1+x}}.$

f) $y = \frac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}.$

$$g) y = \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{1-x}.$$

$$h) y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)}.$$

Câu 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$$a) y = \sqrt{|x^2+x+4|}.$$

$$b) y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}.$$

$$c) y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}} + |x+1|\sqrt{x^2-x+6}.$$

$$d) y = \frac{2x+1}{x(|x|-1)}.$$

$$e) y = \frac{|x|}{|x-2|+|x^2+2x|}.$$

$$f) y = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}.$$

Câu 5. Tìm m để các hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

$$a) y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}.$$

$$b) y = \sqrt{2x-3m+4} + \frac{x-m}{x+m-1}.$$

Câu 6. Tìm m để các hàm số sau:

$$a) y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6} \text{ xác định trên } (-1; 0).$$

$$b) y = \sqrt{1-|2x^2+mx+m+15|} \text{ xác định trên } [1; 3].$$

Câu 7. Tìm m để các hàm số:

$$a) y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

$$b) y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m} \text{ xác định trên toàn bộ trục số.}$$

DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a; b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$

Tính $f(x_1) - f(x_2)$

Lập tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Nếu $T > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$

Nếu $T < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

$$a) y = -2x + 3 \text{ trên } \mathbb{R}.$$

b) $y = x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

d) $y = \frac{x-3}{x-5}$ trên khoảng $(-\infty; -5)$ và trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x-7}$ trên khoảng $\left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

b) $y = \sqrt{x^2 + 2}$.

c) $y = x - \sqrt{3x+5}$ trên khoảng $(5; +\infty)$.

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Câu 3. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2}$.

b) $y = x^{2015} + 1$.

c) $y = |x+2| - |x-2|$ trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 4. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến trên các khoảng xác định của nó:

a) $y = (m+1)x + m - 2$.

b) $y = \frac{m}{x-2}$.

Câu 5. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Tập hợp $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

Nhận dạng: Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

Bất đẳng thức:

+) Cho $a, b \geq 0$ ta luôn có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$

+) $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Câu 1. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$.

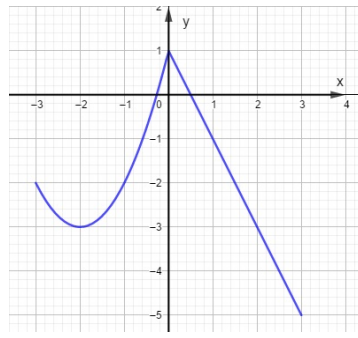
Câu 2. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x+2}$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của hàm số tại $x = -1$.



Câu 2. Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Câu 3. Tịnh tiến đồ thị hàm số.

a) $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ lên trên 2 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

b) $y = g(x) = -3|x| + 1$ xuống dưới 3 đơn vị. Sau đó sang trái 4 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

c) $y = k(x) = \frac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị. Sau đó lên trên 5 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

Câu 4. Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = g(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) $y = h(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

c) $y = k(x) = -x^2 + 3x - 2$.

d) $y = l(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

Câu 5. Đồ thị hàm số

a) $y = -x^2 - 2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ như thế nào.

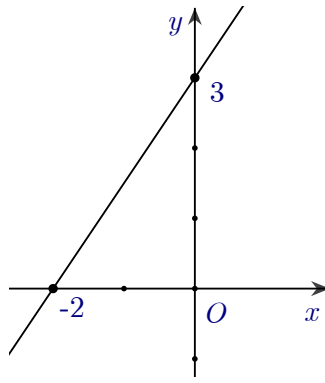
b) $y = \frac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{3x+4}$ như thế nào.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x^2 + m^2}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ với m là tham số. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung

tại điểm có tung độ bằng 3. Hãy tính $P = f(-4) + f(1)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} |mx-1| & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \\ x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \in [0; +\infty) \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để đồ thị hàm số không đi qua điểm $A(-2; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với $M(x; y)$ là một điểm bất kì nằm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp các điểm $I(2x+3; 3y)$.



DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{khi } x > 3 \\ \sqrt[3]{x+8} & \text{khi } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{5}), f(5)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(2), f(-1), f(-3)$.

Câu 3. Cho thị hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định hàm số $f(f(x))$ và $f(f(f(x)))$.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = 2x - 4$ và $g(x) = x^2 + 13$. Hãy xác định hàm số $f(g(x))$ và $g(f(x))$.

Câu 5. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f(x+3) = 2x - 1$. b) $f(x-1) = x^2 - 3x + 3$.

Câu 6. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. b) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Câu 7. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x+3, \forall x \neq 1$. b) $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}, \forall x \neq -2, x \neq 1$.

Câu 8. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4$. b) $f(x) - xf(-x) = x+1$.

c) $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định D của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Chú ý. Thông thường $y = f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(v)}{v(x)} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \sqrt[2k]{u(x)} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x) \\ u(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) > 0 \end{cases}$$

- Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y = x^4 - 2018x^2 - 2019$ là
A. $(-1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.
- Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là:
A. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 3.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-3}{2x-2}$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{(x-3)^2}$ là
A. $(-\infty; 3)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **D.** $\mathbb{R}$.
- Câu 5.** Tập xác định D của hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-2}$ là
A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = [1; +\infty)$. **C.** $D = (1; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Câu 6.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{5}{x^2-1}$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $\mathbb{R}$.
- Câu 7.** Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x-1} + \frac{x-1}{x+5}$ là
A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.
- Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{3-x}{x^2-5x-6}$ là
A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -6\}$ **C.** $D = \{-1; 6\}$ **D.** $D = \{1; -6\}$
- Câu 9.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.
A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; \pm 2\}$
- Câu 10.** Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{3x-1}$ là

A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = [0; +\infty)$. C. $D = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $D = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{8-2x} - x$ là

A. $(-\infty; 4]$. B. $[4; +\infty)$. C. $[0; 4]$. D. $[0; +\infty)$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}$ là

A. $D = (2; 4)$ B. $D = [2; 4]$
C. $D = \{2; 4\}$ D. $D = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$ là:

A. $\left[-6; -\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $[-6; +\infty)$.

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$.

A. $[-1; +\infty)$. B. $[-2; +\infty)$. C. $[-3; +\infty)$. D. $[0; +\infty)$.

Câu 15. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x+2} + 4\sqrt{3-x}$ là

A. $D = (-2; 3)$. B. $D = [-3; +\infty)$. C. $D = (-\infty; 3]$. D. $D = [-2; 3]$.

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-3} - 3\sqrt{2-x}$ là

A. $\emptyset$. B. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. C. $[2; +\infty)$. D. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} - 3\sqrt{-2x^2 + 9x - 4}$ là

A. $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$. B. $[3; +\infty)$. C. $[3; 4] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $[3; 4]$.

Câu 18. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{6x}{\sqrt{4-3x}}$

A. $D = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. B. $D = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$. C. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$. D. $D = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Câu 19. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \sqrt{9-x}$ là

A. $D = \left(\frac{5}{2}; 9\right]$. B. $D = \left(\frac{5}{2}; 9\right)$. C. $D = \left[\frac{5}{2}; 9\right)$. D. $D = \left[\frac{5}{2}; 9\right]$.

Câu 20. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

A. $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$. B. $D = \mathbb{R}$. C. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$. D. $D = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

Câu 21. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + 4}$. B. $y = x^2 - \sqrt{x^2 + 1} - 3$.
C. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$. D. $y = x^2 - 2\sqrt{x-1} - 3$.

- Câu 22.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} - \frac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.
- A. $[1;5] \setminus \{2\}$. B. $(-\infty;5]$. C. $[1;5) \setminus \{2\}$. D. $[1;+\infty) \setminus \{2;5\}$.
- Câu 23.** Tập xác định D của hàm số $y = \frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ là
- A. $D = (-4;+\infty) \setminus \{2\}$. B. $D = [-4;+\infty) \setminus \{2\}$.
C. $D = \emptyset$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Câu 24.** Tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ là
- A. $D = \left[-4; \frac{3}{2}\right]$. B. $D = \left[-4; \frac{3}{2}\right)$.
C. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $D = [-4;-1) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.
- Câu 25.** Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là
- A. $D = (1; 3]$. B. $D = (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$.
C. $D = [1;3]$. D. $D = \emptyset$.
- Câu 26.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \frac{4}{5x-10}$.
- A. $D = (-\infty;6] \setminus \{2\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $D = [6;+\infty)$. D. $D = (-\infty;6]$.
- Câu 27.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$. Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số $f(x)$?
- A. $(1;+\infty)$. B. $[1;+\infty)$. C. $[1;3) \cup (3;+\infty)$. D. $(1;+\infty) \setminus \{3\}$.
- Câu 28.** Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ là
- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right]$. D. $[-7;+\infty)$.
- Câu 29.** Tập xác định D của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{3-2x} + \frac{1}{2x-2}$ là
- A. $D = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. B. $D = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$. C. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$. D. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.
- Câu 30.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\sqrt{x+2}-1}$ là
- A. $D = [-2;+\infty) \setminus \{-1\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. $D = [-2;+\infty)$. D. $D = (1;+\infty)$.
- Câu 31.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2-2x} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.
- A. $D = (-5;0] \cup [2;5)$.

B. $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

C. $D = (-5; 5)$.

D. $D = [-5; 0] \cup [2; 5]$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2-5x+6)\sqrt{4-x}}$ là

A. $[-1; 4) \setminus \{2; 3\}$.

B. $[-1; 4)$.

C. $(-1; 4] \setminus \{2; 3\}$.

D. $(-1; 4) \setminus \{2; 3\}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ là:

A. $D = [0; +\infty)$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

D. $D = (0; +\infty)$

Câu 34. Tìm tập xác định D của hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

B. $D = [1; +\infty) \setminus \{2\}$

C. $D = (-\infty; 1]$

D. $D = [1; +\infty)$

Câu 35. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \frac{x^3}{4|x|-3}$

A. $D = [-2; +\infty)$.

B. $D = [-2; +\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

C. $D = \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

Câu 36. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$.

A. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

B. $D = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$.

C. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 37. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x}{|x|x+1} - \sqrt{3-x}$ là

A. $(-\infty; 3] \setminus \{-1\}$.

B. $(-\infty; 3) \setminus \{-1\}$.

C. $(-\infty; 3]$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 38. Giả sử $D = (a; b)$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

A. $S = 7$.

B. $S = 5$.

C. $S = 4$.

D. $S = 3$.

Câu 39. Hàm số $y = \frac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b\}; a \neq b$. Tính giá trị biểu thức

$Q = a^3 + b^3 - 4ab$.

A. $Q = 11$.

B. $Q = 14$.

C. $Q = -14$.

D. $Q = 10$.

Câu 40. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -4$.

B. $m < -4$.

C. $m > 0$.

D. $m < 4$.

- Câu 41.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1}} - 4$ là $(a; b]$ với a, b là các số thực. Tính tổng $a + b$.
- A. $a + b = -8$. B. $a + b = -10$. C. $a + b = 8$. D. $a + b = 10$.
- Câu 42.** Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} + \sqrt{x - m}$ có tập xác định khác tập rỗng là
- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 1]$.
- Câu 43.** Biết hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1; 0]$. Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(-x^2)$.
- A. $D = [-1; 0]$
 B. $D = [0; 1]$
 C. $D = [-1; 1]$
 D. $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
- Câu 44.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 3mx + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- A. $|m| < \frac{4}{3}$. B. $|m| \leq \frac{4}{3}$. C. $|m| > \frac{4}{3}$. D. $|m| \geq \frac{4}{3}$.
- Câu 45.** Tìm m để hàm số $y = (x - 2)\sqrt{3x - m - 1}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$?
- A. $m < 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m \geq 2$.
- Câu 46.** Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x - 2m + 3}}{x - m} + \frac{3x - 1}{\sqrt{-x + m + 5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$ là
- A. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. B. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
 C. $m \in [-3; 0]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
- Câu 47.** Gọi tập xác định của các hàm số $f(x) = \sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x}$; $g(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 4}}$ lần lượt là $D_1; D_2$. Hãy tìm $D_1 \cap D_2$, $D_1 \cup D_2$.
- A. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$. B. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5)$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$.
 C. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = (-5; +\infty)$. D. $D_1 \cap D_2 = [-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$.
- Câu 48.** Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2} + 1}{x^2 + 2x - m + 1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- A. $m \geq 1$. B. $m < 0$. C. $m > 2$. D. $m \leq 3$
- Câu 49.** Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m}$. Tập các giá trị của m để hàm số xác định trên $[0; 1)$ là $T = (-\infty; a) \cup [b; c) \cup [d; +\infty)$. Tính $P = a + b + c + d$.
- A. $P = -2$. B. $P = -1$. C. $P = 2$. D. $P = 1$.

- Câu 50.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.
- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $-1 < m < 2$.
- Câu 51.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \sqrt{2x-m}$ xác định với $\forall x > 0$.
- A. $m \geq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.
- Câu 52.** Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-2m+1}$ xác định với mọi $x \in [1;3]$ là:
- A. $\{2\}$. B. $\{1\}$. C. $(-\infty;2]$. D. $(-\infty;1]$.
- Câu 53.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{5-x^2-2\sqrt{4-x^2}}$ có dạng $[a;b]$. Tính $a+b$.
- A. 3. B. -1. C. 0. D. -3.
- Câu 54.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-m+2} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ có tập xác định $D = [0;5)$.
- A. $m \geq 0$. B. $m \geq 2$. C. $m \leq -2$. D. $m = 2$.
- Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- A. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $m \geq -1$. C. $m > \frac{1}{3}$. D. $m \geq \frac{1}{3}$.
- Câu 56.** Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$
- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m > \frac{1}{4}$. C. $m > -\frac{1}{4}$. D. $m \leq \frac{1}{4}$.
- Câu 57.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+9}{x-2m-1}$ xác định trên đoạn $[3;5]$.
- A. $m \leq 1$ hoặc $m \geq 2$. B. $m > 3$ hoặc $m < 0$.
C. $m > 4$ hoặc $m < 1$. D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.
- Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thuộc tập xác định của hàm số $y = \frac{2+x}{x\sqrt{3-x}} + \sqrt{2x+1}$?
- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4
- Câu 59.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{|x-2|}-1}$ có tập xác định là D_1 và hàm số $g(x) = \frac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$ có tập xác định là D_2 . Tìm điều kiện của tham số m để $D_2 \subset D_1$.
- A. $m < 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m \geq 2$.
- Câu 60.** Tìm m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.
- A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $m \in [-3;0]$.
C. $m \in [-3;0] \cup [0;1]$. D. $m \in [-4;0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

- Câu 61.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0;2]$ khi $m \in [a;b]$. Giá trị của tổng $a+b$ bằng
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 62.** Tìm m để hàm số $y = \sqrt{-2x+3m+2} + \frac{x+1}{2x+4m-8}$ xác định trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- A. $m \in [-2;4]$. B. $m \in [-2;3]$. C. $m \in (-2;3]$. D. $m \in [-2;3]$.
- Câu 63.** Tập xác định của hàm số nào dưới đây chứa nhiều số nguyên dương nhất?
- A. $y = \sqrt{3-x}$ B. $y = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$
- C. $y = \sqrt{4-9x^2}$ D. $y = \sqrt{\frac{1}{27-x^3}}$
- Câu 64.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{x-2m} + \sqrt{7m+1-2x}$ chứa đoạn $[-1;1]$?
- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số
- Câu 65.** Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{m-2x}$ với $m \geq -2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để tập xác định của hàm số có độ dài bằng 1?
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$

Tính $f(x_1) - f(x_2)$

Lập tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Nếu $T > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

- Câu 1.** Chọn khẳng định đúng?
- A. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Câu 2.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. $y = 1 - 2x$ B. $y = 3x + 2$ C. $y = x^2 + 2x - 1$ D. $y = -2(2x - 3)$.
- Câu 3.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
- A. $y = x$. B. $y = -2x$. C. $y = 2x$. D. $y = \frac{1}{2}x$
- Câu 4.** Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 2)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 6. Hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ B. $(-1; 1)$ C. $(0; 1)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 7. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

- A. $y = \sqrt{1-x^2}$ B. $y = x^2$
 C. $y = \frac{x+1}{x}$ D. $y = -x^3 + 3x$

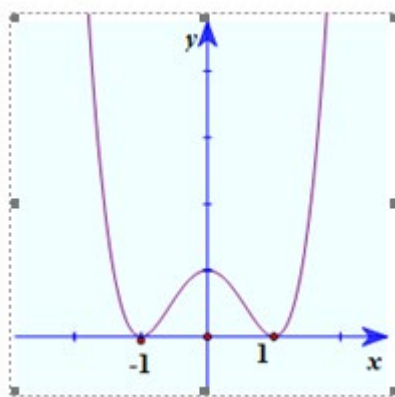
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(-2; 2)$ D. $(0; 1)$

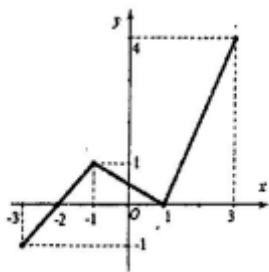
Câu 9. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

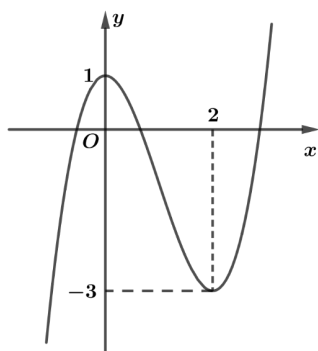
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
 B. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.
 C. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.
 D. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

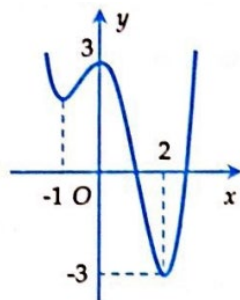
Câu 11. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$

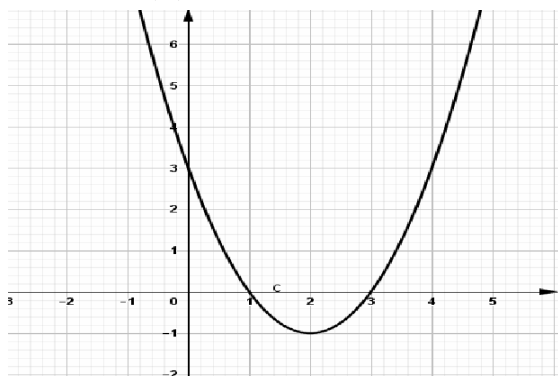
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-32	$+\infty$

Đặt $h(x) = 5x - f(x)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $h(3) < h(1) < h(2)$ B. $h(1) < h(2) < h(3)$
C. $h(2) < h(1) < h(3)$ D. $h(3) < h(2) < h(1)$

Câu 14. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 5)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
D. $f(\sqrt{2019}) < f(\sqrt{2017})$.

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Tập hợp $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

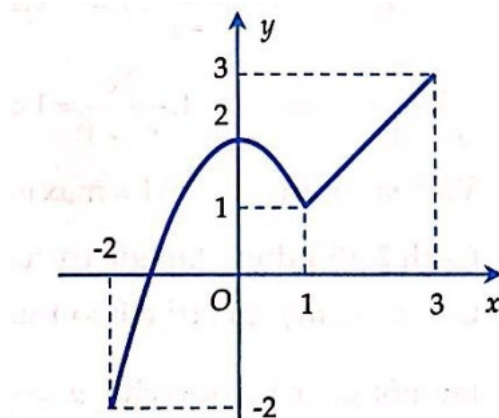
Nhận dạng: Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

Bất đẳng thức:

+) Cho $a, b \geq 0$ ta luôn có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$

+) $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-2; 3]$ có đồ thị được cho như trong hình dưới đây:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 0$ B. $M + m = 1$ C. $M + m = 2$ D. $M + m = 3$

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x - 2| - 3|x - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. 1. B. -1. C. 2. D. -3.

- Câu 3.** Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 1-2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ là:
- A. 2. B. 4. C. 5. D. 7.
- Câu 4.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. Tìm $M + m$.
- A. $M + m = 2 + \sqrt{2}$
 B. $M + m = 2$
 C. $M + m = 4$
 D. $M + m = 4 + \sqrt{2}$
- Câu 5.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$. Tìm $M - m$.
- A. $M - m = 8$ B. $M - m = 9$
 C. $M - m = 10$ D. $M - m = 11$
- Câu 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (x-3)^2$.
- A. 0 B. $\frac{9}{2}$ C. $-\frac{9}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
- Câu 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x - \sqrt{x-2}$.
- A. $m = 0$ B. $m = 2$
 C. $m = \frac{7}{4}$ D. $m = \frac{3}{4}$
- Câu 8.** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Tính $m^2 + M^2$.
- A. $m^2 + M^2 = \frac{1}{2}$ B. $m^2 + M^2 = 2$
 C. $m^2 + M^2 = 1$ D. $m^2 + M^2 = 4$
- Câu 9.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$. Tìm $M + 2m$.
- A. $M + 2m = 8$ B. $M + 2m = 16$
 C. $M + 2m = 24$ D. $M + 2m = 32$
- Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.
- a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.
- A. $m \geq \sqrt{2}$ B. $m < 0$
 C. $m = \sqrt{2}$ D. $m < \sqrt{2}$
- b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) > m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.
- A. $m \leq -\sqrt{2}$ B. $m < -\sqrt{2}$
 C. $m \leq -1$ D. $m < -1$
- Câu 11.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập giá trị là đoạn $[0; 2]$?
- A. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$
 B. $g(x) = x + \sqrt{2-x^2}$

C. $h(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

D. $k(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Câu 12. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. Biết $M = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và b nhỏ nhất. Tìm

$a+b$.

A. $a+b=87$

B. $a+b=88$

C. $a+b=89$

D. $a+b=90$

Câu 13. Người ta cần xây một chiếc bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500.000 đồng/m² lòng bể. Khi đó, kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

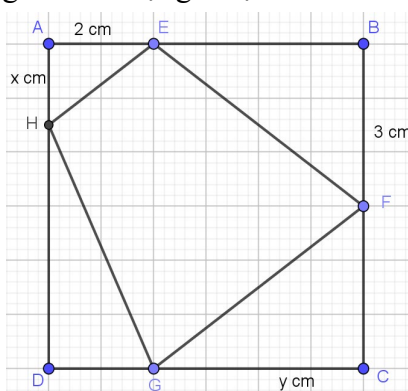
A. Chiều dài 20m, chiều rộng 10m, chiều cao $\frac{5}{6}$ m.

B. Chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\frac{10}{3}$ m.

C. Chiều dài 30m, chiều rộng 15m, chiều cao $\frac{10}{27}$ m.

D. Một đáp án khác.

Câu 14. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x+y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

B. $x+y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $x+y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $x+y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Câu 15. Giả sử bạn được chỉ cho một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 100 m. Hỏi bạn phải chọn kích thước của hình chữ nhật bằng bao nhiêu để diện tích mảnh đất của bạn là lớn nhất.

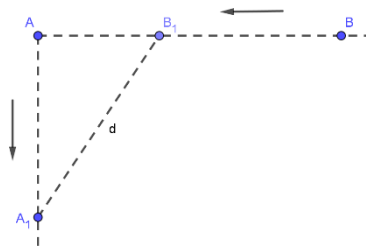
A. chiều dài mảnh đất là 30 m, chiều rộng là 20 m.

B. chiều dài mảnh đất là 40 m, chiều rộng là 10 m.

C. chiều dài mảnh đất là 35 m, chiều rộng là 15 m.

D. chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

Câu 16. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?



- A. sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát
- B. sau $\frac{5}{17}$ giờ xuất phát
- C. sau $\frac{9}{17}$ giờ xuất phát
- D. sau $\frac{8}{17}$ giờ xuất phát

Câu 17. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD.
- B. 70 USD.
- C. 30 USD.
- D. 90 USD.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Trong các điểm sau đây điểm nào thuộc đồ thị của hàm số?

- A. $M_1(2; 3)$.
- B. $M_2(0; -1)$.
- C. $M_3\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$.
- D. $M_4(1; 0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho?

- A. $(-2; 0)$.
- B. $(1; 1)$.
- C. $(-2; -12)$.
- D. $(1; -1)$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2-3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây ?

- A. $(0; -3)$
- B. $(3; 6)$
- C. $(2; 5)$
- D. $(2; 1)$

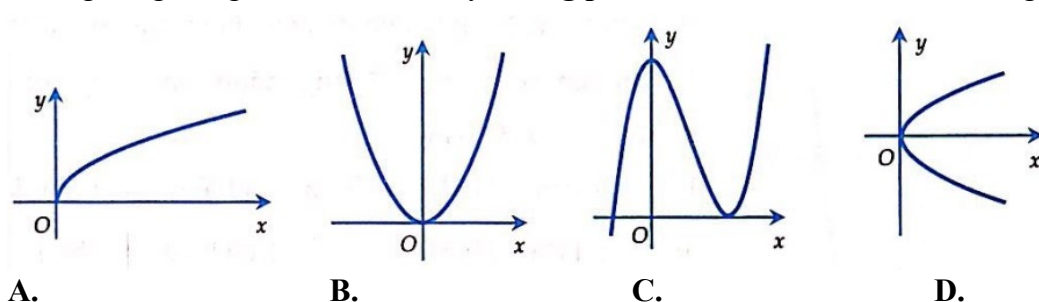
Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(0; -3)$
- B. $(3; 7)$
- C. $(2; -3)$
- D. $(0; 1)$

Câu 5. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x(x-1)}$?

- A. $M(0; -1)$
- B. $M(2; 1)$
- C. $M(2; 0)$
- D. $M(1; 1)$

Câu 6. Đường cong trong hình nào dưới đây **không phải** là đồ thị của một hàm số dạng $y = f(x)$?



Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$?

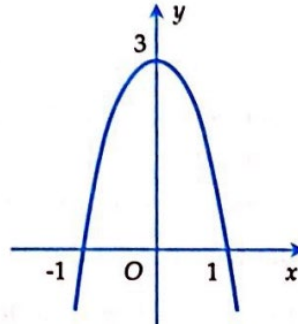
A. $y = (\sqrt{x+2})^2$

B. $y = \frac{(x+2)^2}{x+2}$

C. $y = x(x+1) + 2 - x^2$

D. $y = \frac{x^2(x+2)}{x^2}$

Câu 8. Đường cong trong hình sau đây là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y = x^3 + 3x^2 - 3$

B. $y = -x^2 + 2x + 3$

C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1?

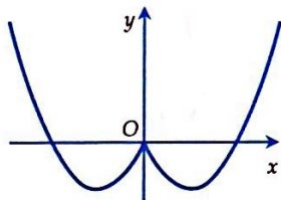
A. 0

B. 1

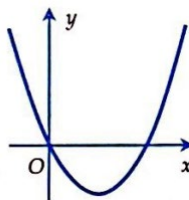
C. 2

D. 3

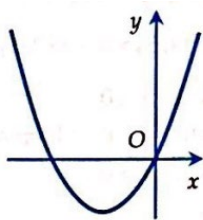
Câu 10. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2|x|$?



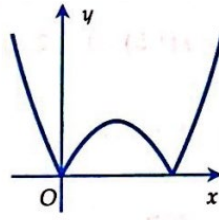
A.



B.



C.



D.

Câu 11. Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = |-5x|$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f(-1) = 5$.

B. $f(-2) = 10$.

C. $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

D. $f(2) = 10$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{7}{3}$. D. $P = 6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Kết quả sai là

- A. $f(1) = 0$. B. $f(2) = 0$. C. $f(3) = 0$. D. $f(-4) = -24$.

Câu 4. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1}, x < 0 \end{cases}$. Giá trị $f(0), f(2), f(-2)$ là

- A. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}, f(-2) = 2$. B. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}, f(-2) = -\frac{1}{3}$.
C. $f(0) = 0; f(2) = 1, f(-2) = -\frac{1}{3}$. D. $f(0) = 0; f(2) = 1, f(-2) = 2$.

Câu 5. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } -2 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 5-x^2 & \text{khi } 2 < x \leq 5 \end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $f(3) = 2$. B. $f(3) = -2$. C. $f(3) = -4$. D. $f(3) = -1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3(x-2) & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tính giá trị $f(3)$.

- A. Không xác định. B. $f(3) = \sqrt{5}$ hoặc $f(3) = 3$.
C. $f(3) = \sqrt{5}$. D. $f(3) = 3$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây **đúng**?

- A. $f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}$. B. $f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}$.
C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3) = -\frac{11}{24}$. D. $f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 là

- A. -2 . B. 3 . C. 0 . D. 1 .

Câu 9. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $f(-1)$.

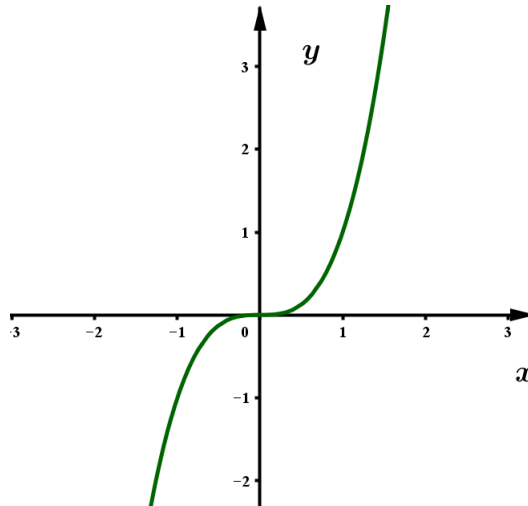
- A. -6 . B. 6 . C. 5 . D. -5 .

- Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$; giá trị của $f(-1); f(\sqrt{10})$ lần lượt là
- A. 8 và 0. B. 0 và 8. C. -8 và 3. D. 3 và -8.

- Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \in [0; 2] \\ x^2-1 & \text{khi } x \in (2; 5] \end{cases}$. Tính $f(4)$.
- A. Không tính được. B. $f(4) = \frac{2}{3}$. C. $f(4) = 15$. D. $f(4) = \sqrt{5}$.

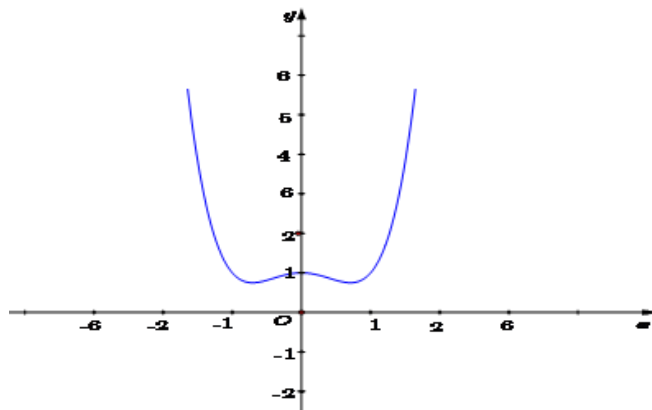
- Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2+1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Khi đó, $f(-2) + f(2)$ bằng
- A. 6. B. 4. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

- Câu 13.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



- Tính giá trị biểu thức $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018})$
- A. -2018. B. 0. C. 2018. D. 4036.

- Câu 14.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $f(-1) = f(1) = 1$. B. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6; -1)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{2016+9x} - \sqrt{2016-9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = f(220) + f(-221) + f(222) + f(-223) + f(-220) + f(221) + f(-222) + f(223) + f(224)$$

- A. $24\sqrt{7}$. B. $\frac{24\sqrt{7}}{223}$. C. $\frac{6\sqrt{7}}{55}$. D. $\frac{3\sqrt{7}}{28}$.

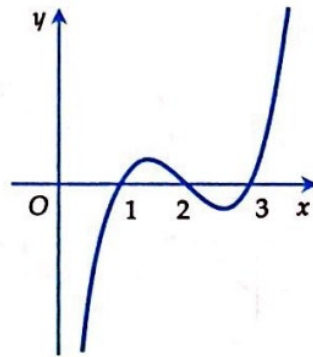
Câu 16. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 5$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Tính tổng các hệ số của hàm số $f(g(x))$.

- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R} : f(x-1) = x^2 + 3x - 2$. Tìm biểu thức $f(x)$.

- A. $f(x) = x^2 + 5x + 2$ B. $f(x) = x^2 + 5x - 2$
C. $f(x) = x^2 + x - 2$ D. $f(x) = x^2 + x + 2$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $f(1,5) < 0 < f(2,5)$
B. $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$
C. $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$
D. $f(1,5) > 0 > f(2,5)$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{36\}$. Biết

$$f(2x-5) = x^2 + 3x - 2 \text{ và } g(5x+1) = \frac{x}{x-7}. \text{ Tính } g(f(1)).$$

- A. $g(f(1)) = \frac{-3}{4}$ B. $g(f(1)) = \frac{3}{4}$
C. $g(f(1)) = \frac{47}{4}$ D. $g(f(1)) = \frac{-47}{4}$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} \forall x \neq 0$. Tính $f(3)$.

- A. $f(3) = 36$ B. $f(3) = 18$
C. $f(3) = 29$ D. $f(3) = 25$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{3x-2}{x-1}\right) = x + 2 \forall x \neq 1$. Tính $f(2) + f(4)$.

- A. $f(2) + f(4) = 6$ B. $f(2) + f(4) = 2$

C. $f(2)+f(4)=-6$ **D.** $f(2)+f(4)=-2$

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số

1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x .

Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

Ví dụ 1.

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S .

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1 .

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x-1}$.

Giải

a) Biểu thức $\frac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x-1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:
 $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} = [1; +\infty)$.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

Ví dụ 3. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0, x = 0, x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1; f(0) = 0; f(2021) = 1$.

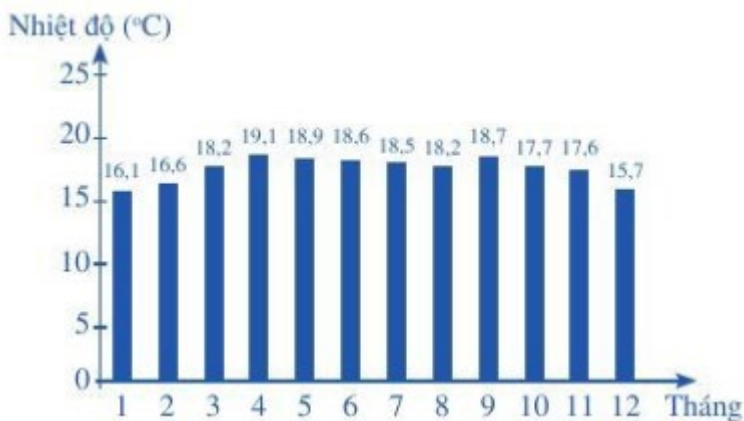
Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D . Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4. Biểu đồ ở dưới cho biết Nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm



- a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.
b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

Giải

- a) Tập hợp các tháng là $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số.
Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. Đồ thị của hàm số

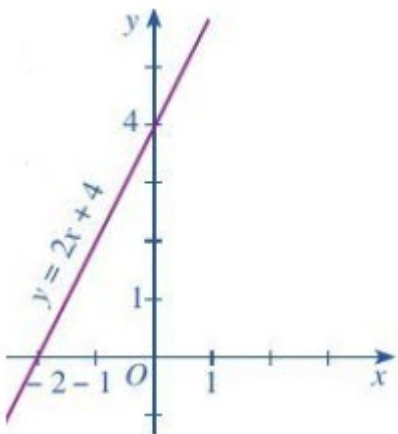
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi x thuộc D .

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = 2x + 4$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số trên.
b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm: $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $C(2020; 2021)$, $D(2030; 4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

Giải

- a) Khi $x = 0$ thì $y = 4$; khi $y = 0$ thì $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0; 4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2; 0)$



- b) Khi $x = -1$ thì $y = 2$; khi $x = 1$ thì $y = 6$; khi $x = 2020$ thì $y = 4044$; khi $x = 2030$ thì $y = 4064$.
Vậy các điểm $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $D(2030; 4064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2020; 2021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Nhận xét - Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ khi và chỉ khi

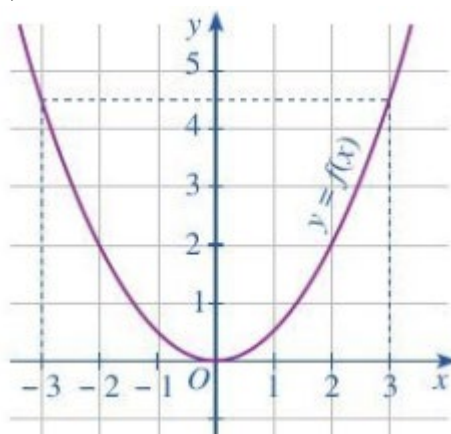
$$\begin{cases} a \in D \\ b = f(a). \end{cases}$$

- Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng tọa độ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1 : Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2 : Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Trong các điểm có tọa độ $(-2;2), (0;0), (0;1), (2;2), (1;1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

Giải

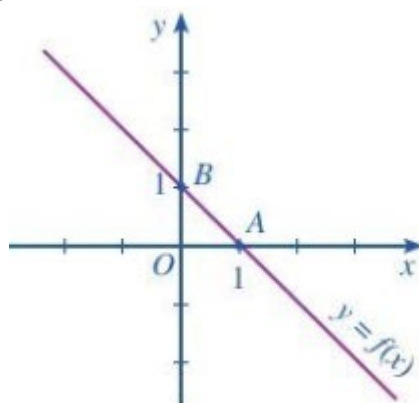
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(-2;2), (0;0), (2;2)$

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(0;1), (1;1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3) = \frac{9}{2}$.

Tọa độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3; \frac{9}{2}\right), \left(3; \frac{9}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục tọa độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1;0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b (a \neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục Oy là điểm có tọa độ $(0;b)$ nên $b = 1$. Suy ra

$y = f(x) = ax + 1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục Ox là điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{a}; 0\right)$ nên $-\frac{1}{a} = 1$, tức

là $a = -1$. Vậy $y = f(x) = -x + 1$.

III. Sự biến thiên của hàm số

1. Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8. Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên*.

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

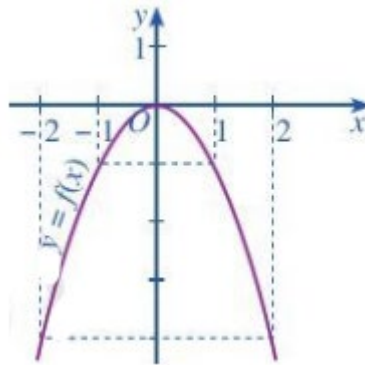
2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

Nhận xét.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên khoảng đó.

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên khoảng đó.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Giải

a) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ " là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định D của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Chú ý. Thông thường $y = f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y = f(x) = \frac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) \neq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x) = \sqrt[k]{u(x)} (k \in \mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases} u(x) \\ u(x) \geq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x) = \frac{u(x)}{\sqrt[k]{v(x)}} (k \in \mathbb{Z})$ có nghĩa khi $\begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) > 0 \end{cases}$

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{3x-1}{-2x+2}.$

b) $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}.$

c) $y = \frac{1}{x^2+4x+5}.$

d) $y = \frac{2x+1}{x^3-3x+2}.$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $-2x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}.$

c) Ta có $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}.$

d) Hàm số xác định khi $x^3-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \neq 0 \\ (x^2+x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}.$

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{3x-2}.$

b) $y = \sqrt{x^2+1}.$

c) $y = \sqrt{-2x+1} - \sqrt{x-1}.$

d) $y = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x-3}.$

e) $y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$

f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

b) Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} -2x + 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [3; +\infty)$.

e) Ta có $y = \sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x + 2}} + \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{(\sqrt{x + 2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$
 $= |\sqrt{x + 2} + 1| + |\sqrt{1 - x^2} + 1| = \sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (1 - x)(1 + x) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \leq 0 \\ 1 + x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; 1]$.

f) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x < 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x < 0 \\ -x \geq 0 \\ -x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{2}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}$.

b) $y = \frac{x}{1 - x^2} - \sqrt{-x}$.

$$c) y = \frac{x - 3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}.$$

$$d) y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}.$$

$$e) y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x\sqrt{1+x}}.$$

$$f) y = \frac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}.$$

$$g) y = \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{1-x}.$$

$$h) y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)}.$$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x \leq 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 0] \setminus \{-1\}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$.

e) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-1; 1] \setminus \{0\}$.

f) Hàm số xác định khi $\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-3x+2} \neq \sqrt[3]{x^2-7} \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2-7 \Leftrightarrow 9 \neq 3x \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

g) Ta có $y = \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{1-x} = \sqrt{(\sqrt{x+7}+1)^2} + \frac{1}{1-x} = \sqrt{x+7} + 1 + \frac{1}{1-x}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-7; +\infty) \setminus \{1\}$.

h) Ta có $y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)} = \sqrt{\sqrt{(x+1)^2+1} - (x+1)}$

Hàm số xác định khi $\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}\geq x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 0 \\ (x+1)^2+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{|x^2+x+4|}$.

b) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$.

c) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}} + |x+1|\sqrt{x^2-x+6}$.

d) $y = \frac{2x+1}{x(|x|-1)}$.

e) $y = \frac{|x|}{|x-2|+|x^2+2x|}$.

f) $y = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$.

Lời giải

a) Ta có $|x^2+x+4| = \left| \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \right| > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $x|x-4| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x-4| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (0; +\infty) \setminus \{4\}$.

c) Ta có $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}} + |x+1|\sqrt{x^2-x+6} = \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} + |x+1|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}$

Vì $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định khi $x(|x|-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x|-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

e) Hàm số xác định khi $|x-2|+|x^2+2x| \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Thật vậy:

Nếu $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ thì $|x^2+2x|=8$

$$\text{Nếu } |x^2 + 2x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} |x - 2| = 2 \\ |x - 2| = 4 \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{f) Ta có } y = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - |x|}{x^2 - 2|x| + 1} = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - |x|}{(|x| - 1)^2}$$

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ |x| - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Câu 5. Tìm m để các hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{a) } y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2x - m - 1}.$$

$$\text{b) } y = \sqrt{2x - 3m + 4} + \frac{x - m}{x + m - 1}.$$

Lời giải

$$\text{a) Hàm số xác định khi } \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x - m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m + 1}{2} \end{cases} (*)$$

$$+) \text{ Nếu } m \geq \frac{m + 1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x \geq m.$$

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0$: không thỏa mãn $m \geq 1$.

$$+) \text{ Nếu } m \leq \frac{m + 1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m + 1}{2}.$$

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [\frac{m + 1}{2}; +\infty) \Leftrightarrow \frac{m + 1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{b) Hàm số xác định khi } \begin{cases} 2x - 3m + 4 \geq 0 \\ x + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3m - 4}{2} \\ x \neq 1 - m \end{cases}$$

Do đó để hàm số xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$, ta phải có

$$\begin{cases} \frac{3m - 4}{2} \leq 0 \\ 1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{3} \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{4}{3}$$

Vậy $1 \leq m \leq \frac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Tìm m để các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{1}{\sqrt{x - m}} + \sqrt{-x + 2m + 6} \text{ xác định trên } (-1; 0).$$

$$\text{b) } y = \sqrt{1 - |2x^2 + mx + m + 15|} \text{ xác định trên } [1; 3].$$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m > 0 \\ -x+2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x \leq 2m+6 \end{cases} \Leftrightarrow m < x \leq 2m+6$

Do để hàm số xác định trên $(-1;0)$, ta phải có $\begin{cases} m \leq -1 \\ 2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$

Vậy $-3 \leq m \leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $1 - |2x^2 + mx + m + 15| \geq 0 \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1. (*)$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để $(*)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$ nên nghiệm đúng với $x=1, x=2$ tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8$$

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có :

$$(*) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 : \text{thỏa mãn.}$$

Vậy $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Tìm m để các hàm số:

a) $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ xác định trên toàn bộ trục số.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $x^2 - 6x + m - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m - 11 > 0 \Leftrightarrow m > 11$$

Vậy $m > 11$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 3x^2-2x+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + m - \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Để hàm số xác định với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + m - \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases} \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m - \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$$

Vậy $m > \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a; b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$

Tính $f(x_1) - f(x_2)$

Lập tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Nếu $T > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$

Nếu $T < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = -2x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

b) $y = x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

d) $y = \frac{x-3}{x-5}$ trên khoảng $(-\infty; -5)$ và trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Lời giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$.

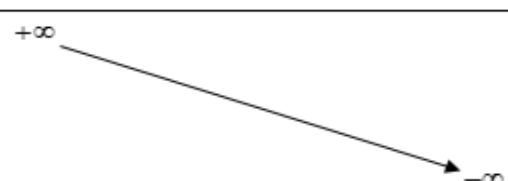
Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3) = -2(x_1 - x_2)$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -2 < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$



b) Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 4x_1 + 5) - (x_2^2 - 4x_2 + 5)$

$= (x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4$.

Do đó $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4 < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4$.

$$\text{Do đó } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4 > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } f(x_1) - f(x_2) &= (-2x_1^2 + 4x_1 + 1) - (2x_2^2 + 4x_2 + 1) \\ &= -2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2). \end{aligned}$$

Với mọi $x_1, x_2 \in (3; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 6$.

$$\text{Do đó } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = -2(x_1 + x_2 - 2) < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(3; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } f(x_1) - f(x_2) &= \left(\frac{x_1 - 3}{x_1 + 5} \right) - \left(\frac{x_2 - 3}{x_2 + 5} \right) \\ &= \frac{(x_1 - 3)(x_2 + 5) - (x_2 - 3)(x_1 + 5)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} = \frac{8(x_1 - x_2)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)}. \end{aligned}$$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; -5)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < -5 \\ x_2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5 < 0 \\ x_2 + 5 < 0 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{8}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-5; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5 > 0 \\ x_2 + 5 > 0 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{8}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-5; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
y	1	$+\infty$	1

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x-7}$ trên khoảng $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

b) $y = \sqrt{x^2+2}$.

c) $y = x - \sqrt{3x+5}$ trên khoảng $(5; +\infty)$.

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ và $x_1 < x_2$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{2x_1-7} - \sqrt{2x_2-7} = \frac{2(x_1-x_2)}{\sqrt{2x_1-7} + \sqrt{2x_2-7}}$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2}{\sqrt{2x_1-7} + \sqrt{2x_2-7}} > 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+2} - \sqrt{x_2^2+2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2} + \sqrt{x_2^2+2}}$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+2} + \sqrt{x_2^2+2}}$.

Nếu $x_1 < x_2 < 0$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+2} + \sqrt{x_2^2+2}} < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+2} + \sqrt{x_2^2+2}} > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

c) Với mọi $x_1, x_2 \in (5; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có

$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - \sqrt{3x_1+5}) - (x_2 - \sqrt{3x_2+5}) = (x_1 - x_2) - (\sqrt{3x_1+5} - \sqrt{3x_2+5})$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5} - 3}{\sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5}}$.

$$\text{Vì } x_1, x_2 \in (5; +\infty) \text{ nên } \begin{cases} x_1 > 5 \\ x_2 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x_1+5} > 2\sqrt{5} \\ \sqrt{3x_2+5} > 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5} - 3 > 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5} - 3}{\sqrt{3x_1+5} + \sqrt{3x_2+5}} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

d) Tập xác định $D = (1; +\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{x_1-1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2-1}} = \frac{\sqrt{x_2-1} - \sqrt{x_1-1}}{\sqrt{x_1-1} \cdot \sqrt{x_2-1}} \\ &= -\frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1-1} \cdot \sqrt{x_2-1} (\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1})} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{\sqrt{x_1-1} \cdot \sqrt{x_2-1} (\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1})} < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 3. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2}.$

b) $y = x^{2015} + 1.$

c) $y = |x+2| - |x-2|$ trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1 x_2)^2}.$$

$$\text{Với mọi } x_1, x_2 \in (-\infty; 0) \text{ và } x_1 < x_2 \text{ ta có } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -(x_2 + x_1) > 0.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_2 + x_1}{(x_1 x_2)^2} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Với mọi } x_1, x_2 \in (0; +\infty) \text{ và } x_1 < x_2 \text{ ta có } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -(x_2 + x_1) < 0.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_2 + x_1}{(x_1 x_2)^2} < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}.$

$$\text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) = (x_1^{2015} + 1) - (x_2^{2015} + 1) = x_1^{2015} - x_2^{2015}.$$

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$ ta có

$$x_1^{2015} < x_2^{2015} \text{ suy ra } x_1^{2015} - x_2^{2015} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \text{ hay } f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Với mọi $x \in (-2; 2)$ ta có
$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}.$$

Do đó $y = |x+2| - |x-2| = (x+2) + (x-2) = 2x$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2)$. Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-2; 2)$.

Câu 4. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến trên các khoảng xác định của nó:

a) $y = (m+1)x + m - 2$.

b) $y = \frac{m}{x-2}$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = [(m+1)x_1 + m - 2] - [(m+1)x_2 + m - 2] = (m+1)(x_1 - x_2)$$

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m + 1$.

Để hàm số đồng biến trên $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Tập xác định $D = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \left(\frac{m}{x_1-2}\right) - \left(\frac{m}{x_2-2}\right) = \frac{-m(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$$\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \text{ và } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có :

$$\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 > 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \text{ và } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 5. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y = -x^2 + (m-1)x + 2 = -\left(x - \frac{m-1}{2}\right)^2 + 2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$

Ta phân chia tập xác định $\mathbb{R}$ thành hai khoảng $\left(-\infty; \frac{m-1}{2}\right)$ và $\left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$.

Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{m-1}{2}\right)$ thì hàm số đồng biến, trên khoảng $\left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$ nghịch biến.

Do đó điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ là $(1;2) \subset \left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$ hay

$$\frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Cách 2.

Với mọi $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[-x_1^2 + (m-1)x_1 + 2] - [-x_2^2 + (m-1)x_2 + 2]}{x_1 - x_2} = -(x_1 + x_2) + m - 1$$

Để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ khi và chỉ khi $-(x_1 + x_2) + m - 1 < 0$,

$$\forall x_1, x_2 \in (1;2) \Leftrightarrow m \leq 3.$$

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Tập hợp $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

Nhận dạng: Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

Bất đẳng thức:

+) Cho $a, b \geq 0$ ta luôn có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$

+) $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Câu 1. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

$$\forall x \in D \text{ ta có } x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \leq 2.$$

Mặt khác: $\sqrt{4-x^2} \geq 0$. Nên $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2, \forall x \in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T = [0; 2]$.

Câu 2. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2-4x+5 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+1} \geq 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} \leq 1.$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} > 0. \text{ Nên } 0 < \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} \leq 1, \forall x \in D.$$

Vậy tập giá trị của hàm số $T = (0;1]$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x+2}$

Lời giải

TXĐ: $[-2; +\infty)$

Ta có $y = x - 2\sqrt{x+2} = x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1 - 1 = (\sqrt{x+2} - 1)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow y_{\min} = -1$ khi $x = -1$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

Lời giải

Ta có $y = x + \frac{2}{x-1} = x - 1 + \frac{2}{x-1} + 1$.

Với $x > 1$ thì $x - 1 > 0$.

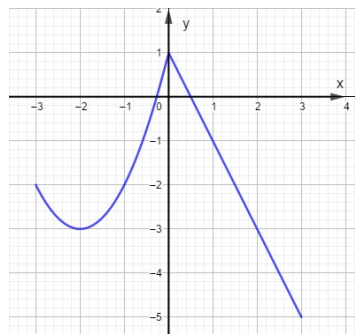
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $x - 1 + \frac{2}{x-1} \geq 2\sqrt{2}$. Suy ra $y \geq 2\sqrt{2} + 1$.

$y = 2\sqrt{2} + 1$ khi $x - 1 = \frac{2}{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của hàm số tại $x = -1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(-1) = -2$.

Câu 2. Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.

Tung độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số là số nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$. (1)

Vì hoành độ của điểm đó là số nguyên nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=0 \end{cases}$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có tọa độ nguyên là

$A(4; 2), B(-2; 0), C(2; 4), D(0; -2)$.

Câu 3. Tịnh tiến đồ thị hàm số.

a) $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ lên trên 2 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

b) $y = g(x) = -3|x| + 1$ xuống dưới 3 đơn vị. Sau đó sang trái 4 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

c) $y = k(x) = \frac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị. Sau đó lên trên 5 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

Lời giải

a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ lên trên 2 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y = f(x) + 2 = 2x^2 - 3x + 3$.

b) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = g(x) = -3|x| + 1$ xuống dưới 3 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y = g(x) - 3 = -3|x| - 2 = h(x)$.

Sau đó tịnh tiến đồ thị $y = h(x)$ sang trái 4 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y = h(x+4) = -3|x+4| - 2$.

c) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = k(x) = \frac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm

số $y = k(x-1) = \frac{x-5}{2x+1} = l(x)$.

Sau đó lên trên 5 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y = l(x) + 5 = \frac{x-5}{2x+1} + 5 = \frac{11x}{2x+1}$.

Câu 4. Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = g(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) $y = h(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

c) $y = k(x) = -x^2 + 3x - 2$.

d) $y = l(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

Lời giải

a) Ta có $y = g(x) = x^2 + 3x + 2 = f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ ta lấy đối xứng qua trục tung thì được đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) Ta có $y = h(x) = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ suy ra đồ thị hàm số $y = h(x) = x^2 - 3|x| + 2$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ bên phải trục tung.

Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = h(x)$.

c) Ta có $y = k(x) = -x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2) = -f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành thì được đồ thị hàm số $y = k(x) = -x^2 + 3x - 2$.

$$\text{d) Ta có } y = l(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ -f(x) = -(x^2 - 3x + 2) & \text{khi } x^2 - 3x + 2 < 0. \end{cases}$$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ suy ra đồ thị hàm số $y = l(x) = |-x^2 + 3x - 2|$ như sau:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

Câu 5. Đồ thị hàm số

a) $y = -x^2 - 2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ như thế nào.

b) $y = \frac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{3x+4}$ như thế nào.

Lời giải

a) Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Ta có $-x^2 - 2 = -(x+1)^2 + 2(x+1) - 3 = -f(x+1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ bằng cách tịnh tiến sang trái 1 đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục hoành.

b) Đặt $f(x) = \frac{x-2}{3x+4}$. Ta có $\frac{-7x+6}{-3x+4} = \frac{7(-x)+6}{3(-x)+4} = \frac{(-x)-2}{3(-x)+4} + 2 = f(-x) + 2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{3x+4}$ bằng cách tịnh tiến lên trên 2 đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x^2 + m^2}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ với m là tham số. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung

tại điểm có tung độ bằng 3. Hãy tính $P = f(-4) + f(1)$.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3

$$\text{Suy ra } f(0) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ nên ta có}$$

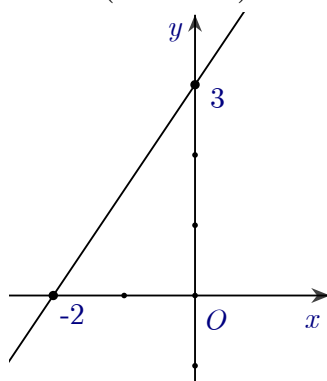
$$P = f(-4) + f(1) = \frac{-4 - \sqrt{16+9}}{-4-1} + 2 = \frac{9}{5} + 2 = \frac{19}{5}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} |mx-1| & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \\ x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \in [0; +\infty) \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để đồ thị hàm số không đi qua điểm $A(-2; 3)$.

Lời giải

$$\text{Đề } A \text{ không thuộc vào đồ thị hàm số thì } |-2m-1| \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-1 \neq 3 \\ -2m-1 \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với $M(x; y)$ là một điểm bất kì nằm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp các điểm $I(2x+3; 3y)$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $y = f(x) = \frac{3}{2}x + 3$ (1)

Đặt $I(x_I; y_I)$ thì $\begin{cases} x_I = 2x + 3 \\ y_I = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_I - 3}{2} \\ y = \frac{y_I}{3} \end{cases}$

Thay vào (1) ta có $\frac{y_I}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x_I - 3}{2} + 3 \Leftrightarrow 4y_I = 9x_I + 9 \Leftrightarrow y_I = \frac{9}{4}x_I + \frac{9}{4}$

Vậy tập hợp điểm I là đường thẳng $y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$.

DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{khi } x > 3 \\ \sqrt[3]{x+8} & \text{khi } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{5}), f(5)$.

Lời giải

a) Khi $x > 3$ thì hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ xác định vì $x^2 > 9$.

Khi $0 \leq x \leq 3$ thì hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$ xác định.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty)$.

b) Ta có $0 \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{0+8} = 2$;

$\sqrt{2} \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{\sqrt{2}+8}$;

$-1 \notin D$ nên $f(-1)$ không xác định;

$\sqrt{5} \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{\sqrt{5}+8}$;

$5 \in (3; +\infty)$ nên $f(0) = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(2), f(-1), f(-3)$.

Lời giải

a) Khi $x \geq 0$ thì hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ xác định vì $x+2 \geq 2 > 0$.

Khi $x < 0$ thì hàm số $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1}$ xác định vì $x-1 \neq 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Ta có $0 \in [0; +\infty)$ nên $f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$;

$2 \in [0; +\infty)$ nên $f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$;

$-1 \in (-\infty; 0)$ nên $f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot (-1) + 1}}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$;

$-3 \in (-\infty; 0)$ nên $f(-3) = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot (-3) + 1}}{-3 - 1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{4}$;

$5 \in (3; +\infty)$ nên $f(5) = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định hàm số $f(f(x))$ và $f(f(f(x)))$.

Lời giải

$$\bullet f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$\bullet f(f(f(x))) = \frac{f(f(x))}{\sqrt{1+f^2(f(x))}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = 2x - 4$ và $g(x) = x^2 + 13$. Hãy xác định hàm số $f(g(x))$ và $g(f(x))$

Lời giải

$$f(g(x)) = 2(x^2 + 13) - 4 = 2x^2 + 22.$$

$$g(f(x)) = (2x - 4)^2 + 13 = 4x^2 - 16x + 29.$$

Câu 5. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f(x+3) = 2x - 1$. b) $f(x-1) = x^2 - 3x + 3$.

Lời giải

a) Đặt $t = x + 3 \Rightarrow x = t - 3$. Ta có: $f(x + 3) = 2x - 1 \Rightarrow f(t) = 2(t - 3) - 1 = 2t - 7 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = 2x - 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = 2x - 7 = f((x + 3) - 3) = 2(x - 3) - 1 = 2x - 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Ta có:

$$f(x - 1) = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f(t) = (t + 1)^2 - 3(t + 1) + 3 = t^2 - t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = x^2 - x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = f((x - 1) + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 3 = x^2 - x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6. Xác định hàm số $f(x)$ biết

$$a) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}. \quad b) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta biến đổi biểu thức về dạng } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $f(x) = x^2 - 2$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^2 - 2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^2 - 2$.

$$b) \text{ Ta biến đổi biểu thức về dạng } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right). \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $f(x) = x^3 - 3x$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^3 - 3x$.

Câu 7. Xác định hàm số $f(x)$ biết

$$a) f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3, \quad \forall x \neq 1. \quad b) f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}, \quad \forall x \neq -2, x \neq 1.$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}, \quad \forall x \neq 1. \text{ Thay vào } f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3 \text{ ta được}$$

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1} + 3 = \frac{4t-2}{t-1}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{4x-2}{x-1}.$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$.

$$b) \text{ Đặt } t = \frac{3x+1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{2t-1}{3-t}, \quad \forall x \neq -2. \text{ Thay vào } f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1} \text{ ta được}$$

$$f(t) = \frac{\frac{2t-1}{3-t} + 1}{\frac{2t-1}{3-t} - 1} = \frac{t+2}{3t-4}. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{x+2}{3x-4}.$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$.

Câu 8. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4$. b) $f(x) - xf(-x) = x + 1$.

c) $x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$.

Lời giải

a) Thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) - f(x) = (-x)^4 - 12(-x)^3 + 4 = x^4 + 12x^3 + 4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4 \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f(-x) = 2x^4 - 24x^3 + 8 & (1) \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được

$$3f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 12 \text{ hay } f(x) = x^4 - 4x^3 + 4.$$

Thử lại thấy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$.

b) Thay x bằng $-x$ ta được $f(-x) + xf(x) = -x + 1$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 \\ f(-x) + xf(x) = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 & (1) \\ x^2f(x) + xf(-x) = -x^2 + x & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được

$$(x^2 + 1)f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ hay } f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Thử lại thấy $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

c) Thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 & (1) \\ (1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(1-x) = 2x - x^4 - x^2f(x)$. Thay vào (2) ta được

$$(1-x)^2 [2x - x^4 - x^2f(x)] + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x^2.$$

Thử lại thấy $f(x) = 1 - x^2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = 1 - x^2$.

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định D của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Chú ý. Thông thường $y = f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(v)}{v(x)} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \sqrt[k]{u(x)} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x) \\ u(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = f(x) = \frac{u(x)}{\sqrt[k]{v(x)}} (k \in \mathbb{Z}) \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} u(x), v(x) \\ v(x) > 0 \end{cases}$$

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = x^4 - 2018x^2 - 2019$ là

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số là hàm đa thức nên xác định với mọi số thực x .

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-3}{2x-2}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Nên tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{(x-3)^2}$ là

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(3; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn C**

Điều kiện: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 5. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-2}$ là

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = [1; +\infty)$. C. $D = (1; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải**Chọn D**

Hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-2}$ xác định khi $x \neq 1$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \frac{5}{x^2-1}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn B**

Hàm số đã cho xác định khi $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x-1} + \frac{x-1}{x+5}$ là

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.

Lời giải**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -5\}$.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3-x}{x^2-5x-6}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -6\}$ C. $D = \{-1; 6\}$ D. $D = \{1; -6\}$

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện $x^2 - 5x - 6 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 6 \end{cases}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; \pm 2\}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; \pm 2\}$.

Đáp án D.

Lưu ý: Nếu rút gọn $y = \frac{1}{x^2-4}$ rồi khẳng định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ là sai. Vì với $x = -1$ thì biểu thức ban đầu $\frac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$ không xác định.

Câu 10. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{3x-1}$ là

- A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = [0; +\infty)$. C. $D = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $D = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sqrt{3x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Vậy: $D = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{8-2x} - x$ là

- A. $(-\infty; 4]$. B. $[4; +\infty)$. C. $[0; 4]$. D. $[0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số là $8-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$, nên tập xác định là $(-\infty; 4]$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}$ là

- A. $D = (2; 4)$ B. $D = [2; 4]$
C. $D = \{2; 4\}$ D. $D = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ suy ra TXĐ: $D = [2; 4]$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$ là:

- A. $\left[-6; -\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $[-6; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 6+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$.

- A. $[-1; +\infty)$. B. $[-2; +\infty)$. C. $[-3; +\infty)$. D. $[0; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$$

Câu 15. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x+2} + 4\sqrt{3-x}$ là

- A. $D = (-2; 3)$. B. $D = [-3; +\infty)$. C. $D = (-\infty; 3]$. D. $D = [-2; 3]$.

Lời giải**Chọn D**

Để hàm số $y = \sqrt{x+2} + 4\sqrt{3-x}$ xác định thì $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 3]$.

Câu 16. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-3} - 3\sqrt{2-x}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. C. $[2; +\infty)$. D. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Lời giải**Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} - 3\sqrt{-2x^2 + 9x - 4}$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$. B. $[3; +\infty)$. C. $[3; 4] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $[3; 4]$.

Lời giải**Chọn C**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geq 0 \\ -2x^2 + 9x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 3 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = [3; 4] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 18. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{6x}{\sqrt{4-3x}}$

- A. $D = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. B. $D = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$. C. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$. D. $D = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện xác định: $4-3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$.

Câu 19. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \sqrt{9-x}$ là

A. $D = \left(\frac{5}{2}; 9\right]$.

B. $D = \left(\frac{5}{2}; 9\right)$.

C. $D = \left[\frac{5}{2}; 9\right)$.

D. $D = \left[\frac{5}{2}; 9\right]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 9-x \geq 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \leq 9.$

Tập xác định: $D = \left(\frac{5}{2}; 9\right]$.

Câu 20. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

A. $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

D. $D = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

Câu 21. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+4}$.

B. $y = x^2 - \sqrt{x^2+1} - 3$.

C. $y = \frac{3x}{x^2-4}$.

D. $y = x^2 - 2\sqrt{x-1} - 3$.

Lời giải

Chọn B

$y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+4}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

$y = \frac{3x}{x^2-4}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

$y = x^2 - 2\sqrt{x-1} - 3$ có tập xác định là $[1; +\infty)$.

Câu 22. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} - \frac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.

A. $[1; 5] \setminus \{2\}$.

B. $(-\infty; 5]$.

C. $[1; 5) \setminus \{2\}$.

D. $[1; +\infty) \setminus \{2; 5\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x^2-4)\sqrt{5-x} \neq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 5) \setminus \{2\}.$

Câu 23. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ là

A. $D = (-4; +\infty) \setminus \{2\}$. B. $D = [-4; +\infty) \setminus \{2\}$.

C. $D = \emptyset$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > -4 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; +\infty) \setminus \{2\}$.

Câu 24. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ là

A. $D = \left[-4; \frac{3}{2}\right]$. B. $D = \left[-4; \frac{3}{2}\right)$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $D = [-4; -1) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{(x+1)\sqrt{3-2x}}$ xác định thì: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq -1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; -1) \cup \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 25. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $D = (1; 3]$. B. $D = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = [1; 3]$. D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; 3]$.

Câu 26. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \frac{4}{5x-10}$.

A. $D = (-\infty; 6] \setminus \{2\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $D = [6; +\infty)$. D. $D = (-\infty; 6]$.

Lời giải

Chọn A

ĐKXĐ: $\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 5x-10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 6] \setminus \{2\}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$. Tập nào sau đây là tập xác định của hàm số $f(x)$?

A. $(1; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $[1; 3) \cup (3; +\infty)$. D. $(1; +\infty) \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \neq 3.$

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right]$. D. $[-7; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

Câu 29. Tập xác định D của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{3-2x} + \frac{1}{2x-2}$ là

- A. $D = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. B. $D = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$. C. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$. D. $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải**Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số trên là $\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 2x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Vậy tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\sqrt{x+2}-1}$ là

- A. $D = [-2; +\infty) \setminus \{-1\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. $D = [-2; +\infty)$. D. $D = (1; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}.$

Câu 31. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2-2x} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

- A. $D = (-5; 0] \cup [2; 5)$.
B. $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.
C. $D = (-5; 5)$.
D. $D = [-5; 0] \cup [2; 5]$.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ 25-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x \leq 0 \\ 2 \leq x < 5 \end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-5; 0] \cup [2; 5)$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2-5x+6)\sqrt{4-x}}$ là

- A. $[-1;4) \setminus \{2;3\}$. B. $[-1;4)$. C. $(-1;4] \setminus \{2;3\}$. D. $(-1;4) \setminus \{2;3\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-5x+6 \neq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;4) \setminus \{2;3\}.$$

Vậy TXĐ: $D = [-1;4) \setminus \{2;3\}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ là:

- A. $D = [0; +\infty)$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ D. $D = (0; +\infty)$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{1;2\}$.

Đáp án C.

Câu 34. Tìm tập xác định D của hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ B. $D = [1; +\infty) \setminus \{2\}$
C. $D = (-\infty; 1]$ D. $D = [1; +\infty)$

Lời giải

Đáp án C.

Với $x \leq 0$ thì $x-2 \neq 0$ nên hàm số xác định với mọi $x \leq 0$.

Với $x > 0$: Hàm số xác định khi $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Vậy $D = (-\infty; 0] \cup (0; 1] = (-\infty; 1]$.

Câu 35. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \frac{x^3}{4|x|-3}$

- A. $D = [-2; +\infty)$. B. $D = [-2; +\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.
C. $D = \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4|x|-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -\frac{3}{4} \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow D = [-2; +\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}.$

Câu 36. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-2} + 6x}{\sqrt{4-3x}}.$

A. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$ B. $D = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right).$ C. $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right).$ D. $D = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right).$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$

Câu 37. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x}{|x|x+1} - \sqrt{3-x}$ là

A. $(-\infty; 3] \setminus \{-1\}.$ B. $(-\infty; 3) \setminus \{-1\}.$ C. $(-\infty; 3].$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x|x|+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}.$

Câu 38. Giả sử $D = (a; b)$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$ Tính $S = a^2 + b^2.$

A. $S = 7.$ B. $S = 5.$ C. $S = 4.$ D. $S = 3.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $-x^2 + 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

TXĐ: $D = (1; 2)$ nên $a = 1; b = 2 \Rightarrow S = a^2 + b^2 = 5$

Câu 39. Hàm số $y = \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2 - 3x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b\}; a \neq b.$ Tính giá trị biểu thức

$Q = a^3 + b^3 - 4ab.$

A. $Q = 11.$ B. $Q = 14.$ C. $Q = -14.$ D. $Q = 10.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2 - 3x + 1}$ xác định khi: $x^2 - 3x + 1 \neq 0.$

Gọi a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0.$

Theo Vi-et có $\begin{cases} a+b=3 \\ a.b=1 \end{cases}$.

$$\text{Có } Q = a^3 + b^3 - 4ab = (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 4ab = 27 - 3.3 - 4 = 14$$

Vậy $Q = 14$.

Câu 40. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -4$.

B. $m < -4$.

C. $m > 0$.

D. $m < 4$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi phương trình $x^2-2x-3-m=0$ vô nghiệm

Hay $\Delta' = m+4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$.

Câu 41. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1}-4}$ là $(a;b]$ với a, b là các số thực. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b = -8$.

B. $a+b = -10$.

C. $a+b = 8$.

D. $a+b = 10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1}-4} = \sqrt{\frac{3x+5-4(x-1)}{x-1}} = \sqrt{\frac{-x+9}{x-1}}$.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{-x+9}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-x+9}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+9 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x > 1 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow 1 < x \leq 9.$$

TXĐ: $D = (1;9]$.

Vậy $a=1, b=9 \Rightarrow a+b=10$.

Câu 42. Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} + \sqrt{x-m}$ có tập xác định khác tập rỗng là

A. $(-\infty;3)$.

B. $(-3;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)$.

D. $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^2-2x+3 > 0 \\ x-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x \geq m \end{cases}$

Để hàm số có tập xác định khác tập rỗng thì $m < 1$

Câu 43. Biết hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;0]$. Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(-x^2)$.

A. $D = [-1;0]$

B. $D = [0;1]$

C. $D = [-1;1]$

D. $D = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

Lời giải**Đáp án C.**Điều kiện xác định của hàm số $y = f(-x^2)$ là: $-1 \leq -x^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Vậy $D = [-1; 1]$.**Câu 44.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 3mx + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

A. $|m| < \frac{4}{3}$.

B. $|m| \leq \frac{4}{3}$.

C. $|m| > \frac{4}{3}$.

D. $|m| \geq \frac{4}{3}$.

Lời giải**Chọn B**Điều kiện: $x^2 - 3mx + 4 \geq 0$.

YCBT $\Leftrightarrow x^2 - 3mx + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-\Delta}{4a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9m^2 + 16}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Câu 45. Tìm m để hàm số $y = (x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$?

A. $m < 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải**Chọn B**

ĐK: $x \geq \frac{m+1}{3} \Rightarrow D = \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right)$.

$$\text{Để hàm số xác định trên } (1; +\infty) \text{ thì } (1; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow m+1 \leq 3 \Rightarrow m \leq 2.$$

Câu 46. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$ là

A. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. **B.** $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

C. $m \in [-3; 0]$. **D.** $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Điều kiện xác định của hàm số là: } \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

TH1. $2m-3 \geq m+5 \Leftrightarrow m \geq 8 \Rightarrow$ tập xác định của hàm số là: $D = \emptyset \Rightarrow m \geq 8$ loại.TH2. $2m-3 < m+5 \Leftrightarrow m < 8 \Rightarrow$ TXĐ của hàm số là: $D = [2m-3; m+5) \setminus \{m\}$.Để hàm số xác định trên khoảng $(0; 1)$ thì $(0; 1) \subset D$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 47. Gọi tập xác định của các hàm số $f(x) = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}$; $g(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ lần lượt là $D_1; D_2$. Hãy tìm $D_1 \cap D_2$, $D_1 \cup D_2$.

- A. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$. B. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5)$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$.
C. $D_1 \cap D_2 = (-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = (-5; +\infty)$. D. $D_1 \cap D_2 = [-4; 5]$, $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

+/- Điều kiện xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}$ là $\begin{cases} 5+x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

Suy ra tập xác định của $f(x) = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}$ là $D_1 = [-5; 5]$

+/- Điều kiện xác định của hàm số $g(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$

Suy ra tập xác định của $g(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $D_2 = (-4; +\infty)$

Vậy $D_1 \cap D_2 = (-4; 5]$; $D_1 \cup D_2 = [-5; +\infty)$

Câu 48. Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 1$. B. $m < 0$. C. $m > 2$. D. $m \leq 3$

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2 + 2x - m + 1 \neq 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = 1 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2(m+1)x+m^2+2m}$. Tập các giá trị của m để hàm số xác định trên $[0; 1)$ là

$T = (-\infty; a) \cup [b; c) \cup [d; +\infty)$. Tính $P = a + b + c + d$.

- A. $P = -2$. B. $P = -1$. C. $P = 2$. D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m+2 \end{cases}$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m+2; m\}$.

Vậy để hàm số xác định trên $[0; 1)$ điều kiện là:

$$m; m+2 \notin [0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ m \geq 1 \\ m < 0 < 1 \leq m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 1 \\ -1 \leq m < 0 \end{cases}.$$

Câu 50. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x-m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$.

Do đó hàm số xác định trên $(-1;2) \Leftrightarrow m \notin (-1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \sqrt{2x-m}$ xác định với $\forall x > 0$.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-m+1 \geq 0 \\ 2x-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m-1 \\ x \geq \frac{m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số xác định với } \forall x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ \frac{m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Câu 52. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-2m+1}$ xác định với mọi $x \in [1;3]$ là:

- A. $\{2\}$. B. $\{1\}$. C. $(-\infty;2]$. D. $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $x-2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2m-1$.

Hàm số xác định với mọi $x \in [1;3]$ thì $2m-1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{5-x^2-2\sqrt{4-x^2}}$ có dạng $[a;b]$. Tính $a+b$.

- A. 3. B. -1. C. 0. D. -3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4-x^2}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{4-x^2}-1|.$$

$$\text{Do đó hàm số đã cho xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$$

Do đó $a+b=3$. Chọn A

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-m+2} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ có tập xác định $D = [0; 5)$.

- A. $m \geq 0$. B. $m \geq 2$. C. $m \leq -2$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\begin{cases} x-m+2 \geq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m-2 \\ x < 5 \end{cases}$

Hàm số có tập xác định $D = [0; 5) \Leftrightarrow m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- A. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $m \geq -1$. C. $m > \frac{1}{3}$. D. $m \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 3x^2-2x+m \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1-3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$$

Câu 56. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m > \frac{1}{4}$. C. $m > -\frac{1}{4}$. D. $m \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sqrt{x^2-x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2-x+m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 (\text{Đ do } a=1) \\ \Delta \leq 0, \Delta = 1-4m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

Vậy $m \geq \frac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài.

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+9}{x-2m-1}$ xác định trên đoạn $[3; 5]$.

- A. $m \leq 1$ hoặc $m \geq 2$. B. $m > 3$ hoặc $m < 0$.
C. $m > 4$ hoặc $m < 1$. D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số là $x-2m-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m+1$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 2m+1 \notin [3; 5] \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 < 3 \\ 2m+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thuộc tập xác định của hàm số $y = \frac{2+x}{x\sqrt{3-x}} + \sqrt{2x+1}$?

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Tập xác định: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Do x nguyên nên $x \in \{1; 2\}$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{|x-2|}-1}$ có tập xác định là D_1 và hàm số $g(x) = \frac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$ có tập xác định là D_2 . Tìm điều kiện của tham số m để $D_2 \subset D_1$.

A. $m < 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{|x-2|}-1}$$

$$\text{ĐKXĐ: } |x-2|-1 > 0 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow D_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Xét } g(x) = \frac{2x-\sqrt{m-2x}}{|x|+5}$$

Ta thấy $|x|+5 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ĐKXĐ: } m-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{m}{2} \Rightarrow D_2 = \left(-\infty; \frac{m}{2}\right]$$

$$\text{Để } D_2 \subset D_1 \text{ thì } \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy với $m < 2$ thì $D_2 \subset D_1$.

Câu 60. Tìm m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

B. $m \in [-3; 0]$.

C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$.

D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$*x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

*Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4;0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0;2]$ khi $m \in [a;b]$. Giá trị của tổng $a+b$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định khi: $\begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq 8-4m \end{cases}$

Hàm số xác định trên $[0;2]$ nên $1-2m \leq 0 \leq 2 \leq 8-4m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow a+b=2$

Câu 62. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{-2x+3m+2} + \frac{x+1}{2x+4m-8}$ xác định trên khoảng $(-\infty; -2)$.

A. $m \in [-2;4]$.

B. $m \in [-2;3]$.

C. $m \in (-2;3]$.

D. $m \in [-2;3]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} -2x+3m+2 \geq 0 \\ 2x+4m-8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3m+2}{2} \\ x \neq 4-2m \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; -2)$ cần có: $\begin{cases} \frac{3m+2}{2} \geq -2 \\ 4-2m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow m \in [-2;3].$

Câu 63. Tập xác định của hàm số nào dưới đây chứa nhiều số nguyên dương nhất?

A. $y = \sqrt{3-x}$

B. $y = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$

C. $y = \sqrt{4-9x^2}$

D. $y = \sqrt{\frac{1}{27-x^3}}$

Lời giải

Đáp án A.

Với A: Điều kiện xác định:

$$3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Vậy $D = (-\infty; 3]$, chứa 3 số nguyên dương là 1; 2; 3.

Với B: Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \frac{2-x}{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2.$

Vậy $D = (-2; 2]$, chứa 2 số nguyên dương là 1; 2.

Với C: Điều kiện xác định:

$$4 - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

Vậy $D = \left[\frac{-2}{3}; \frac{2}{3} \right]$ không chứa số nguyên dương nào.

Với D: Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} 27 - x^3 \neq 0 \\ \frac{1}{27 - x^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 27 - x^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 < 27 \Leftrightarrow x < 3$$

Vậy $D = (-\infty; 3)$, chứa 2 số nguyên dương là 1; 2.

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để tập xác định của hàm số

$$y = \frac{2}{x - 2m} + \sqrt{7m + 1 - 2x} \text{ chứa đoạn } [-1; 1]?$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

Lời giải

Đáp án A.

Hàm số xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - 2m \neq 0 \\ 7m + 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2m \\ x \leq \frac{7m + 1}{2} \end{cases}.$$

Để tập xác định của hàm số chứa đoạn $[-1; 1]$ thì ta phải có

$$\begin{cases} \frac{7m + 1}{2} \geq 1 \\ 2m > 1 \\ 2m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1/7 \\ m > 1/2 \\ m < -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

Vậy không có giá trị nguyên âm nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65. Cho hàm số $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{m - 2x}$ với $m \geq -2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để tập xác định của hàm số có độ dài bằng 1?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Đáp án A.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ m - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{m}{2}$$

(do $m \geq -2$ nên $\frac{m}{2} \geq -1$).

Vậy $D = \left[-1; \frac{m}{2} \right]$. Độ dài của D bằng 1 khi và chỉ khi $\frac{m}{2} - (-1) = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a; b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$

Tính $f(x_1) - f(x_2)$

Lập tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Nếu $T > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$

Nếu $T < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$

Câu 1. Chọn khẳng định đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải

Chọn D

Lí thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 1 - 2x$

B. $y = 3x + 2$

C. $y = x^2 + 2x - 1$

D. $y = -2(2x - 3)$.

Lời giải

Chọn B.

$y = 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có hệ số góc $a = 3 > 0$.

Câu 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x$.

B. $y = -2x$.

C. $y = 2x$.

D. $y = \frac{1}{2}x$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

Câu 4. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty) : x_1 \neq x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2} - \frac{3}{x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{x_2 x_1} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 2)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

□ Lấy $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ sao cho $x_1 < x_2$.

$$\text{Xét } y_1 - y_2 = \frac{2x_1+1}{x_1-1} - \frac{2x_2+1}{x_2-1} = \frac{2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 - 2x_2x_1 + 2x_2 - x_1 + 1}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Với $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ và $x_1 < x_2$, ta có $x_2 - x_1 > 0$; $x_1 - 1 < 0$; $x_2 - 1 < 0 \Rightarrow y_1 - y_2 > 0 \Leftrightarrow y_1 > y_2$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$

□ Lấy $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

$$\text{Xét } y_1 - y_2 = \frac{2x_1+1}{x_1-1} - \frac{2x_2+1}{x_2-1} = \frac{2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 - 2x_2x_1 + 2x_2 - x_1 + 1}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Với $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ và $x_1 < x_2$, ta có $x_2 - x_1 > 0$; $x_1 - 1 > 0$; $x_2 - 1 > 0 \Rightarrow y_1 - y_2 > 0 \Leftrightarrow y_1 > y_2$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 6. Hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ B. $(-1; 1)$ C. $(0; 1)$ D. $(1; +\infty)$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Cách 1: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{(x_2^4 - x_1^4) - 2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) - 2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} \\ &= (x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 - 2). \end{aligned}$$

Ta thấy với $x_1, x_2 \in (0; 1)$ thì $x_1 + x_2 > 0$ và $0 < x_1^2, x_2^2 < 1$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 < 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2 < 0, \text{ do đó } (x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 - 2) < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

- A. $y = \sqrt{1-x^2}$ B. $y = x^2$
C. $y = \frac{x+1}{x}$ D. $y = -x^3 + 3x$

Lời giải

Đáp án D.

* Xét hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$:

Tập xác định $D = [-1; 1]$;

$\forall x_1, x_2 \in (-1; 1), x_1 \neq x_2$:

$$\begin{aligned}\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2}}{x_2 - x_1} \\&= \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_2 - x_1)(\sqrt{1-x_2^2} + \sqrt{1-x_1^2})} \\&= \frac{-(x_1 + x_2)}{\sqrt{1-x_2^2} + \sqrt{1-x_1^2}}\end{aligned}$$

Do đó với $x_1, x_2 < 0$ ta có

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} > 0;$$

với $x_1, x_2 > 0$ ta có $\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

* Xét hàm số $y = x^2$:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$:

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1.$$

Do đó với $x_1, x_2 < 0$ ta có

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} < 0;$$

với $x_1, x_2 > 0$ ta có $\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

* Xét hàm số $y = \frac{x+1}{x}$:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_1 \neq x_2$:

$$\begin{aligned}y(x_2) - y(x_1) &= \frac{x_2 + 1}{x_2} - \frac{x_1 + 1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \\ \Rightarrow \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{-1}{x_1 x_2}.\end{aligned}$$

Do đó với $x_1, x_2 < 0$ và với $x_1, x_2 > 0$

ta đều có $\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ $(0; +\infty)$, tức là hàm số không đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

* Do đó đáp án đúng là **D**. Thật vậy xét hàm số $y = -x^3 + 3x$ ta có

Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$:

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^3 - x_2^3 + 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= 3 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

Với $|x_1| < 1, |x_2| < 1$ ta có

$$x_1^2 < 1, x_2^2 < 1, |x_1x_2| < 1 \Rightarrow x_1x_2 < 1,$$

$$\text{do đó } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < 3$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Cách 2: Sử dụng chức năng TABLE của máy tính cầm tay như đã giới thiệu trong Bài tập 17 ở phần B - Các dạng bài tập điển hình. Độc giả hãy tự thực hiện để kiểm chứng kết quả như trong cách 1 đã nêu ở trên.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$

B. $(1; +\infty)$

C. $(-2; 2)$

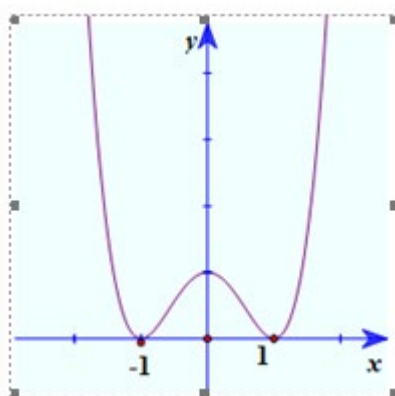
D. $(0; 1)$

Lời giải

Ta thấy trong khoảng $(0;1)$, mũi tên có chiều đi xuống. Do đó hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$.

Đáp án D.

Câu 9. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải

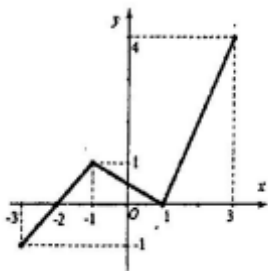
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
- B. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.
- C. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(C): y = f(x)$, $(C'): y = f(x) + 2018$. Khi tịnh tiến đồ thị (C) theo phương song song trục tung lên phía trên 2018 đơn vị thì được đồ thị (C') . Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(x) + 2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

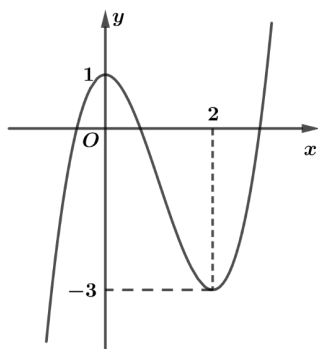
Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$ (đúng).

Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$ (sai).

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$ (sai).

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$ (sai).

Câu 11. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

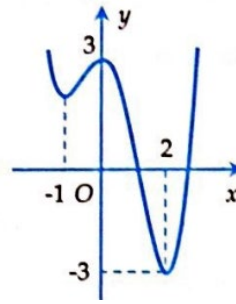
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$

Lời giải

Đáp án C.

Quan sát trên đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi lên trên khoảng $(-1; 0)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-32	$+\infty$

Đặt $h(x) = 5x - f(x)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $h(3) < h(1) < h(2)$
- B. $h(1) < h(2) < h(3)$
- C. $h(2) < h(1) < h(3)$
- D. $h(3) < h(2) < h(1)$

Lời giải

Quan sát trên bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$, suy ra hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

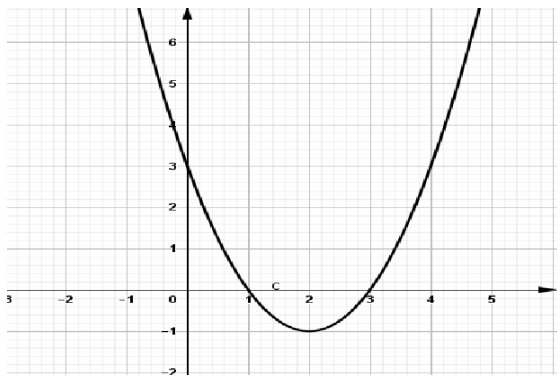
Mặt khác hàm số $y = 5x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Do đó hàm số $h(x) = 5x - f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Suy ra $h(1) < h(2) < h(3)$.

Đáp án B.

Câu 14. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 5)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- D. $f(\sqrt{2019}) < f(\sqrt{2017})$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có:

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1; 0), N(3; 0) \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 5) \Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3) \Rightarrow C$ sai.

Ta có: $\sqrt{2019}, \sqrt{2017} \in (2; +\infty)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases} \sqrt{2019} > \sqrt{2017} \\ f(\sqrt{2019}) > f(\sqrt{2017}) \end{cases} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Tập hợp $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

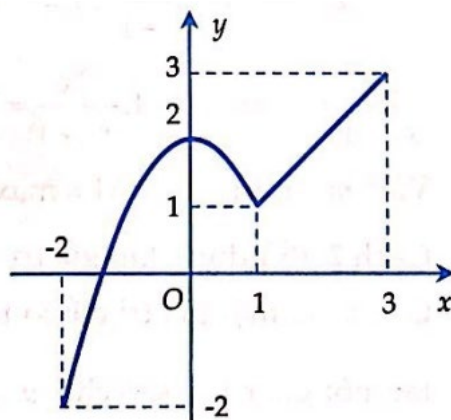
Nhận dạng: Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

Bất đẳng thức:

+) Cho $a, b \geq 0$ ta luôn có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$

+) $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-2; 3]$ có đồ thị được cho như trong hình dưới đây:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 0$ B. $M + m = 1$ C. $M + m = 2$ D. $M + m = 3$

Lời giải

Quan sát trên đồ thị ta thấy $M = 3$ (ứng với $x = 3$), $m = -2$ (ứng với $x = -2$). Vậy $M + m = 1$.

Đáp án B.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x - 2| - 3|x - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. 1. B. -1. C. 2. D. -3.

Lời giải

Chọn A

Có $x \in [0; 2] \Rightarrow |x - 2| = 2 - x \Rightarrow y = 2 - x - 3|x - 1| = 1 + (1 - x) - |x - 1| - 2|x - 1|$.

Do $|x - 1| \geq 0 \Rightarrow -2|x - 1| \leq 0$ và $(1 - x) - |x - 1| \leq 0$ nên $y \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} |x - 1| = 0 \\ 1 - x = |x - 1| \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x - 2| - 3|x - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là 1.

Câu 3. Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 1 - 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ là:

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 7.

Lời giải

Chọn C

Trên $[1; 2]$ hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến nên giá trị lớn nhất bằng $y(2) = 3$.

Trên $(0; 1)$ hàm số $y = 1$ nên giá trị lớn nhất bằng $y = 1$.

Trên $[-2; 0]$ hàm số $y = 1 - 2x$ nghịch biến nên giá trị lớn nhất bằng $y(-2) = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ là $y(-2) = 5$.

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$. Tìm $M + m$.

- A. $M + m = 2 + \sqrt{2}$
B. $M + m = 2$
C. $M + m = 4$
D. $M + m = 4 + \sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án A.

Điều kiện xác định: $D = [-1; 1]$.

Để thấy $y \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Ta có $y^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ nên suy ra:

$$2 \leq y^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq y \leq 2.$$

$$y = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1;$$

$$y = 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $m = \sqrt{2}$ và $M = 2$.

Do đó $M + m = 2 + \sqrt{2}$.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$. Tìm $M - m$.

A. $M - m = 8$

B. $M - m = 9$

C. $M - m = 10$

D. $M - m = 11$

Lời giải

Đáp án C.

Gọi y_0 là một giá trị bất kì thuộc tập giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phải tồn tại một giá trị x sao cho

$$y_0 = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 + 8x + y_0 - 7 = 0 \quad (*).$$

+ Nếu $y_0 = 1$ thì $x_0 = \frac{3}{4}$.

+ Nếu $y_0 \neq 1$ thì (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = -y_0^2 + 8y_0 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y_0 \leq 9.$$

Kết hợp hai trường hợp ta có:

$$-1 \leq y_0 \leq 9.$$

Ta thấy $y_0 = -1 \Rightarrow x = 2$;

$$y_0 = 9 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

Vậy $m = \min_{\mathbb{R}} y = -1; M = \max_{\mathbb{R}} y = 9$

$$\Rightarrow M - m = 10.$$

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (x-3)^2$.

A. 0

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{-9}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$+ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2x^2 - 6x + 9 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}.$$

$$+ f(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{2}.$$

Đáp án B.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x - \sqrt{x-2}$.

A. $m = 0$

B. $m = 2$

C. $m = \frac{7}{4}$

D. $m = \frac{3}{4}$

Lời giải**Đáp án C.**Tập xác định: $D = [2; +\infty)$ Ta có $\forall x \in [2; +\infty)$:

$$y = f(x) = x - \sqrt{x-2}$$

$$= (x-2) - \sqrt{x-2} + 2$$

$$= \left(\sqrt{x-2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x-2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là bằng $\frac{7}{4}$.**Câu 8.** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x}{x^2+1}$. Tính $m^2 + M^2$.

A. $m^2 + M^2 = \frac{1}{2}$

B. $m^2 + M^2 = 2$

C. $m^2 + M^2 = 1$

D. $m^2 + M^2 = 4$

Lời giảiTập xác định $D = \mathbb{R}$.**Cách 1:** (Sử dụng bất đẳng thức)Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{2|x|}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1;$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -1 \Leftrightarrow x = -1; \frac{2x}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\mathbb{R}} y = -1; M = \max_{\mathbb{R}} y = 1 \Rightarrow m^2 + M^2 = 2.$$

Cách 2: (Sử dụng tập giá trị của hàm số)Gọi y_0 là một giá trị bất kì thuộc tập giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phải tồn tại một giá trị x

$$\text{sao cho } y_0 = \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow y_0 x^2 - 2x + y_0 = 0 \quad (*). \text{ Ta coi } (*) \text{ là phương trình ẩn } x, \text{ tham số } y_0.$$

$$+ \text{ Nếu } y_0 = 0 \text{ thì } x = 0.$$

$$+ \text{ Nếu } y_0 \neq 0 \text{ thì } (*) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } \Delta' = 1 - y_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y_0 \leq 1.$$

$$\text{Kết hợp hai trường hợp ta có } -1 \leq y_0 \leq 1; y_0 = -1 \Rightarrow x = -1; y_0 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\mathbb{R}} y = -1; M = \max_{\mathbb{R}} y = 1 \Rightarrow m^2 + M^2 = 2.$$

Đáp án B.**Câu 9.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.Tìm $M + 2m$.

A. $M + 2m = 8$

B. $M + 2m = 16$

C. $M + 2m = 24$

D. $M + 2m = 32$

Lời giải

Đáp án B.

Với $-3 \leq x \leq 5$ thì $x+3 \geq 0; 5-x \geq 0$, suy ra $y = (x+3)(5-x) \geq 0$.

Với $x = -3$ hoặc $x = 5$ thì $y = 0$.

Vậy $m = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x+3$ và $5-x$ ta có:

$$(x+3)(5-x) \leq \frac{(x+3+5-x)^2}{4} = 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$x+3 = 5-x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $M = 16$. Do đó $M + 2m = 16$.

Hoặc có thể giải như sau:

$$y = -x^2 + 2x + 15 = -x^2 + 2x - 1 + 16$$

$$= 16 - (x-1)^2 \leq 16$$

$$y = 16 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } M = 16.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

A. $m \geq \sqrt{2}$

B. $m < 0$

C. $m = \sqrt{2}$

D. $m < \sqrt{2}$

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) > m$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

A. $m \leq -\sqrt{2}$

B. $m < -\sqrt{2}$

C. $m \leq -1$

D. $m < -1$

Lời giải

Đáp án A.

Tập xác định: $D = [-1; 1]$.

a) Đáp án A.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$$\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + 1 - x^2) = 2$$

Suy ra $f(x) \leq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi

$$x = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\max_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{2}$.

$f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \geq \max_{[-1;1]} f(x) \Rightarrow m \geq \sqrt{2}$.

b) Đáp án D.

Ta có $\forall x \in [-1; 1]: x \geq -1$ và $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ nên $x + \sqrt{1-x^2} \geq -1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$. Vậy $\min_{[-1;1]} f(x) = -1$.

$f(x) > m$ với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m < \min_{[-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m < -1$.

Câu 11. Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập giá trị là đoạn $[0; 2]$?

A. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

B. $g(x) = x + \sqrt{2 - x^2}$

C. $h(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

D. $k(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Lời giải

Đáp án D.

* Với $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 2|x|$.

Suy ra $\left| \frac{4x}{x^2 + 1} \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{4x}{x^2 + 1} \leq 2$.

$f(x) = -2 \Leftrightarrow x = -1$;

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $f(x)$ có tập giá trị là đoạn $[-2; 2]$.

* Với $g(x) = x + \sqrt{2 - x^2}$:

Tập xác định $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $x \geq -\sqrt{2}; \sqrt{2 - x^2} \geq 0$.

Suy ra $x + \sqrt{2 - x^2} \geq -\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có

$$\begin{aligned} g^2(x) &= \left(x + \sqrt{2 - x^2} \right)^2 \\ &\leq (1+1)(x^2 + 2 - x^2) = 4 \end{aligned}$$

Suy ra $g(x) \leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $-\sqrt{2} \leq g(x) \leq 2$.

Vậy $g(x)$ có tập giá trị là đoạn $[-\sqrt{2}; 2]$.

* Với $h(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $h(x)$ có tập giá trị là nửa khoảng $[2; +\infty)$.

* Với $k(x) = \sqrt{4x - x^2}$:

Tập xác định $D = [0; 4]$.

Ta có $\forall x \in [0; 4]$:

$$0 \leq 4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 \leq 4.$$

Suy ra $0 \leq k(x) \leq 2$.

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4;$$

$$k(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy $k(x)$ có tập giá trị là đoạn $[0; 2]$

Câu 12. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. Biết $M = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và b nhỏ nhất. Tìm

$a+b$.

A. $a+b=87$

B. $a+b=88$

C. $a+b=89$

D. $a+b=90$

Lời giải

Đáp án A.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có: $(3x+1)^2 = \left(3x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \leq \left(9 + \frac{1}{3}\right)(x^2 + 3)$.

$$\text{Suy ra } 3x+1 \leq \sqrt{\frac{28}{3}} \sqrt{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}} \leq \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{\sqrt{84}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow x = 9.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sqrt{84}}{3}, \text{ tức là}$$

$$a = 84, b = 3 \Rightarrow a + b = 87.$$

Lưu ý: Với kĩ thuật tương tự, các bạn dễ dàng tìm được giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của các hàm số có dạng $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{(cx)^2+d^2}}$.

Câu 13. Người ta cần xây một chiếc bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500.000 đồng/m² lòng bể. Khi đó, kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

A. Chiều dài 20m, chiều rộng 10m, chiều cao $\frac{5}{6}$ m.

B. Chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\frac{10}{3}$ m.

C. Chiều dài 30m, chiều rộng 15m, chiều cao $\frac{10}{27}$ m.

D. Một đáp án khác.

Lời giải

Đáp án B.

Gọi x là chiều rộng của bể chứa nước (đơn vị: m, điều kiện: $x > 0$).

Khi đó chiều dài của bể chứa nước là $2x$ và chiều cao của bể chứa nước là $\frac{500}{3 \cdot x \cdot 2x} = \frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây dựng là:

$$S = x \cdot 2x + \frac{250}{3x^2} \cdot 2(x + 2x) = 2x^2 + \frac{500}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

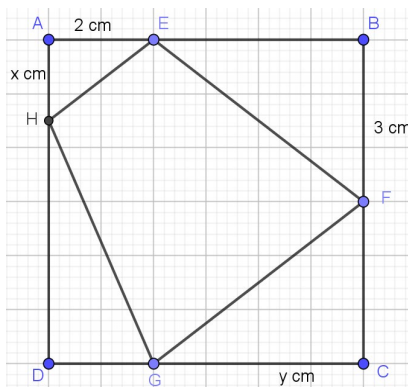
$$S = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} = 30$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$2x^2 = \frac{250}{x} \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TMĐK)}.$$

Vậy kích thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao thước của bể nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là chiều dài 10m, chiều rộng 5m, chiều cao $\frac{10}{3}$ m.

Câu 14. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

B. $x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $x + y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{FCG} + S_{GDH}$ lớn nhất

Ta có: $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1).

Mặt khác: $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$.

Ta có: $2S_{\max} \Leftrightarrow \left(4x + \frac{18}{x}\right)_{\min}$

$$\text{Biểu thức } \left(4x + \frac{18}{x}\right)_{\min} \Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 15. Giả sử bạn được chỉ cho một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 100 m. Hỏi bạn phải chọn kích thước của hình chữ nhật bằng bao nhiêu để diện tích mảnh đất của bạn là lớn nhất.

A. chiều dài mảnh đất là 30 m, chiều rộng là 20 m.

B. chiều dài mảnh đất là 40 m, chiều rộng là 10 m.

C. chiều dài mảnh đất là 35 m, chiều rộng là 15 m.

D. chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

Lời giải

Gọi độ dài của chiều dài, chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật lần lượt x, y (m), $x, y > 0$.

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $2(x + y) = 100$ nên $x + y = 50$.

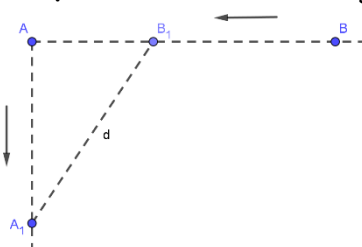
Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $S = xy$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương: $S = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{50^2}{4} = 625$.

Khi đó $S_{\max} = 625$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 25$.

Vậy độ dài của chiều dài mảnh đất là 25 m, chiều rộng là 25 m.

Câu 16. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?



A. sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát

B. sau $\frac{5}{17}$ giờ xuất phát

C. sau $\frac{9}{17}$ giờ xuất phát

D. sau $\frac{8}{17}$ giờ xuất phát

Lời giải

Gọi d là khoảng cách của hai tàu sau khi xuất phát t (giờ), $t > 0$.

Ta có: $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2 = 85t^2 - 70t + 25$.

Suy ra $d = d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25} = \sqrt{85\left(t - \frac{7}{17}\right)^2 + \frac{180}{17}} \geq \frac{6\sqrt{85}}{17}$.

Khi đó $d_{\min} = \frac{6\sqrt{85}}{17}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{7}{17}$.

Vậy sau $\frac{7}{17}$ giờ xuất phát thì khoảng cách hai tàu nhỏ nhất là nhỏ nhất.

- Câu 17.** Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?
- A. 80 USD. B. 70 USD. C. 30 USD. D. 90 USD.

Lời giải

Gọi y (USD) là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

- Câu 1.** Trong các điểm sau đây điểm nào thuộc đồ thị của hàm số?
- A. $M_1(2; 3)$. B. $M_2(0; -1)$. C. $M_3\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$. D. $M_4(1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Thay $x = 0$ vào hàm số ta thấy $y = -1$. Vậy $M_2(0; -1)$ thuộc đồ thị hàm số.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho?
- A. $(-2; 0)$. B. $(1; 1)$. C. $(-2; -12)$. D. $(1; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm vào hàm số ta thấy chỉ có điểm $(-2; 0)$ thỏa mãn.

- Câu 3.** Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây?
- A. $(0; -3)$ B. $(3; 6)$ C. $(2; 5)$ D. $(2; 1)$

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ điểm $(0; -3)$ vào hàm số ta được: $f(0) = 3 \neq -3$ nên loại đáp án A

Thay tọa độ điểm $(3; 6)$ vào hàm số ta được: $f(3) = 9 - 3 = 6$, thỏa mãn nên chọn đáp án B

- Câu 4.** Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?
- A. $(0; -3)$ B. $(3; 7)$ C. $(2; -3)$ D. $(0; 1)$

Lời giải

Với $x = 0 < 2$ thì $y = f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 1)$.

Đáp án D.

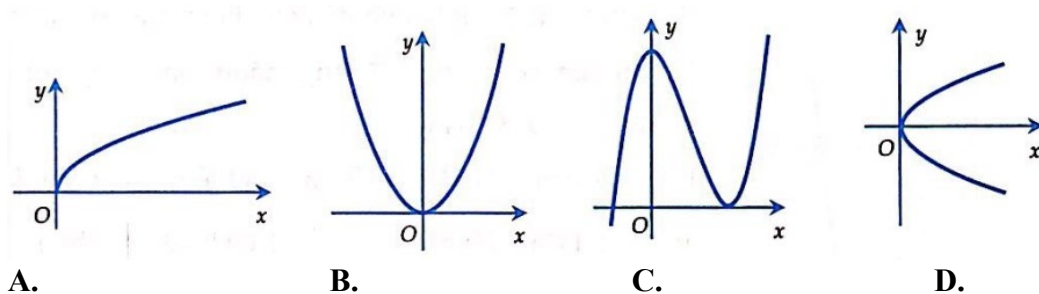
- Câu 5.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x(x-1)}$?
- A. $M(0; -1)$ B. $M(2; 1)$ C. $M(2; 0)$ D. $M(1; 1)$

Lời giải

Với $x = 2$ thì $y = 0$. Vậy điểm $M(2;0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

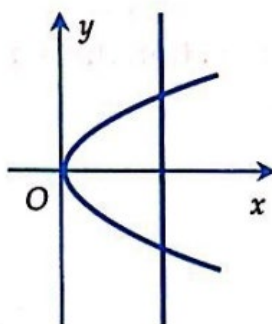
Đáp án C.

Câu 6. Đường cong trong hình nào dưới đây **không phải** là đồ thị của một hàm số dạng $y = f(x)$?



Lời giải

Đường cong trong hình D không phải là đồ thị của một hàm số dạng $y = f(x)$ vì mỗi giá trị $x > 0$ ứng với hai giá trị phân biệt của y .



Đáp án D.

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$?

A. $y = (\sqrt{x+2})^2$

B. $y = \frac{(x+2)^2}{x+2}$

C. $y = x(x+1) + 2 - x^2$

D. $y = \frac{x^2(x+2)}{x^2}$

Lời giải

Đáp án C.

Tập xác định của hàm số

$y = x + 2$ là $\mathbb{R}$

Tập xác định của hàm số

$y = x(x+1) + 2 - x^2$ là $\mathbb{R}$.

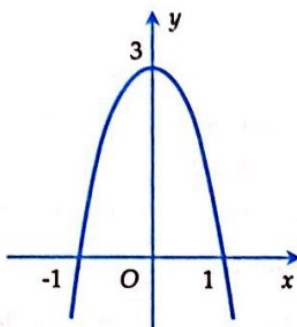
Mặt khác ta có

$y = x(x+1) + 2 - x^2 = x + 2$. Vậy đồ thị của hàm số $y = x(x+1) + 2 - x^2$ trùng với đồ thị của hàm số $y = x + 2$.

Các hàm số còn lại mặc dù sau khi rút gọn đều có dạng $y = x + 2$ nhưng có tập xác định không phải là $\mathbb{R}$ nên đồ thị không trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$.

Thật vậy, hàm số $y = (\sqrt{x+2})^2$ có tập xác định là $[-2; +\infty)$; hàm số $y = \frac{(x+2)^2}{x+2}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; hàm số $y = \frac{x^2(x+2)}{x^2}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 8. Đường cong trong hình sau đây là đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



- A. $y = x^3 + 3x^2 - 3$
- B. $y = -x^2 + 2x + 3$
- C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$
- D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

Lời giải

Đáp án D.

Đường cong trong hình vẽ đối xứng qua trục Oy nên là đồ thị của một hàm số chẵn. Mặt khác đường cong đi qua điểm $(0; 3)$. Do đó nó là đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

Lời giải

Đáp án D.

$$y = 1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3 = 1$$

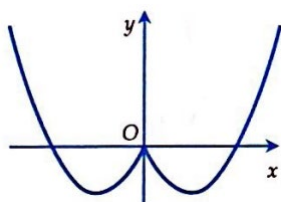
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

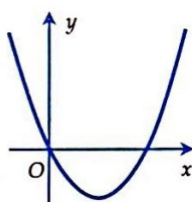
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có 3 điểm nào trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 1.

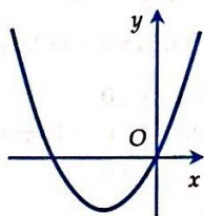
Câu 10. Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2|x|$?



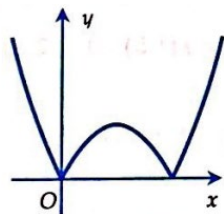
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Đáp án A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 2|-x| \\ &= x^2 - 2|x| = f(x) \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2|$ là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy . Trong bốn đường cong đã cho chỉ có đường cong trong hình A là đối xứng qua Oy . Vậy A là đáp án đúng.

Câu 11. Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Đáp án B.

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Đặt $\sqrt{x + \sqrt{x}} = n, n \in \mathbb{N}$. Suy ra:

$$x + \sqrt{x} = n^2 \Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} + 1 - 4n^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1)^2 - (2n)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1 - 2n)(2\sqrt{x} + 1 + 2n) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} + 1 - 2n = 1 \\ 2\sqrt{x} + 1 + 2n = 1 \end{cases}$$

(do $2\sqrt{x} + 1 + 2n > 0$)

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$. Vậy có duy nhất một điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số, đó là điểm có tọa độ $(0; 0)$.

DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = |-5x|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $f(-1) = 5$. B. $f(-2) = 10$. C. $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$. D. $f(2) = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = f(x) = |-5x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ là mệnh đề sai.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{7}{3}$. D. $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(2) + f(-2) = \frac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1} + (-2)^2 + 2 \Rightarrow P = 3$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Kết quả sai là

- A. $f(1) = 0$. B. $f(2) = 0$. C. $f(3) = 0$. D. $f(-4) = -24$.

Lời giải

Chọn D

$f(-4) = -210$.

Câu 4. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1}, x < 0 \end{cases}$. Giá trị $f(0), f(2), f(-2)$ là

- A. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}, f(-2) = 2$. B. $f(0) = 0; f(2) = \frac{2}{3}, f(-2) = -\frac{1}{3}$.
C. $f(0) = 0; f(2) = 1, f(-2) = -\frac{1}{3}$. D. $f(0) = 0; f(2) = 1, f(-2) = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(0) = \frac{0}{0+1} = 0, f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, f(-2) = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$.

Câu 5. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } -2 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 5-x^2 & \text{khi } 2 < x \leq 5 \end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $f(3) = 2$. B. $f(3) = -2$. C. $f(3) = -4$. D. $f(3) = -1$.

Lời giải

Chọn C

Với $x = 3$, ta có $f(x) = 5 - x^2$. Do đó: $f(3) = 5 - 3^2 = -4$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3(x-2) & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tính giá trị $f(3)$.

- A. Không xác định. B. $f(3) = \sqrt{5}$ hoặc $f(3) = 3$.
C. $f(3) = \sqrt{5}$. D. $f(3) = 3$.

Lời giải**Chọn C**

Xét $x \geq 2$ hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; nên $f(3) = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây **đúng**?

A. $f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}$.

B. $f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}$.

C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3) = -\frac{11}{24}$.

D. $f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2+3 \cdot (-1)}}{-1-2} = \frac{1}{3}$.

$f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2+1} = \frac{7}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 là

A. -2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải**Chọn B**

Với $x \leq -3$ ta có: $-2x+1 = 5 \Leftrightarrow x = -2$ (loại).

Với $x > -3$ ta có: $\frac{x+7}{2} = 5 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận).

Vậy $x_0 = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $f(-1)$.

A. -6.

B. 6.

C. 5.

D. -5.

Lời giải**Chọn A**

Vì $f(-1) = -2(-1-2) = -6$ nên chọn A.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$; giá trị của $f(-1); f(\sqrt{10})$ lần lượt là

A. 8 và 0.

B. 0 và 8.

C. -8 và 3.

D. 3 và -8.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\begin{cases} f(-1) = 2(-1-3) = -8 \\ f(\sqrt{10}) = \sqrt{\sqrt{10}^2 - 1} = 3 \end{cases}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \in [0; 2] \\ x^2 - 1 & \text{khi } x \in (2; 5] \end{cases}$. Tính $f(4)$.

- A. Không tính được. B. $f(4) = \frac{2}{3}$. C. $f(4) = 15$. D. $f(4) = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy $f(x) = x^2 - 1$ khi $x \in (2; 5] \Rightarrow f(4) = 4^2 - 1 = 15$

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Khi đó, $f(-2) + f(2)$ bằng

- A. 6. B. 4. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

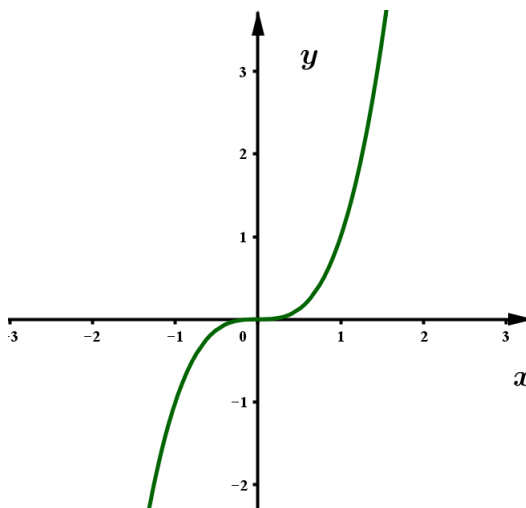
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(2) = \frac{2\sqrt{2+2}-3}{2-1} = 1$, $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

Suy ra: $f(-2) + f(2) = 6$.

Câu 13. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tính giá trị biểu thức $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018})$

- A. -2018. B. 0. C. 2018. D. 4036.

Lời giải

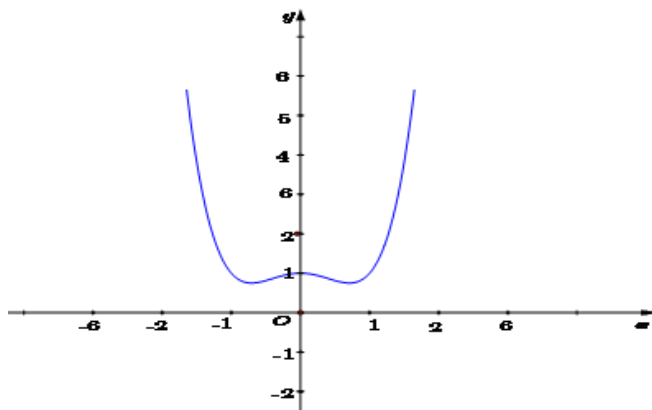
Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta thấy rằng hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ nên là hàm số lẻ.

Suy ra $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$

Vì vậy $f(\sqrt{2018}) + f(-\sqrt{2018}) = 0$.

Câu 14. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $f(-1) = f(1) = 1$. B. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn đồ thị ta có:

$$f(-1) = f(1) = 1 \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

Đồ thị không có tâm đối xứng nên B sai.

Trên khoảng $(1; 5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5) \Rightarrow C$ đúng.

Trên khoảng $(-6; -1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6; -1) \Rightarrow D$ đúng.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{2016+9x} - \sqrt{2016-9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = f(220) + f(-221) + f(222) + f(-223) + f(-220) + f(221) + f(-222) + f(223) + f(224)$$

- A. $24\sqrt{7}$. B. $\frac{24\sqrt{7}}{223}$. C. $\frac{6\sqrt{7}}{55}$. D. $\frac{3\sqrt{7}}{28}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tập xác định } D = \left[\frac{-2016}{9}; \frac{2016}{9} \right] \setminus \{0\}.$$

$\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\sqrt{2016-9x} - \sqrt{2016+9x}}{|-x|} = -\frac{\sqrt{2016+9x} - \sqrt{2016-9x}}{|x|} = -f(x).$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ, và $f(x) + f(-x) = 0$.

$$\begin{aligned} S &= f(220) + f(-221) + f(222) + f(-223) + f(-220) + f(221) + f(-222) + f(223) + f(224) \\ &= f(220) + f(-220) + f(-221) + f(221) + f(222) + f(-222) + f(-223) + f(223) + f(224) \\ &= f(224) = \frac{3\sqrt{7}}{28}. \end{aligned}$$

Câu 16. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 5$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Tính tổng các hệ số của hàm số $f(g(x))$.

- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

Lời giải

Cách 1: $f(g(x)) = (x^3 + 2x^2 + 1)^2 + 5 = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6$.

Vậy tổng các hệ số của $f(g(x))$ là $1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 6 = 21$.

Cách 2: Áp dụng kết quả: “Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Khi đó tổng các hệ số của $P(x)$ là $P(1)$ ”, ta có tổng các hệ số của $f(g(x))$ là $f(g(1))$ mà $g(1) = 4$ nên $f(g(1)) = 4^2 + 5 = 21$.

Đáp án D.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R} : f(x-1) = x^2 + 3x - 2$. Tìm biểu thức $f(x)$.

A. $f(x) = x^2 + 5x + 2$ B. $f(x) = x^2 + 5x - 2$

C. $f(x) = x^2 + x - 2$ D. $f(x) = x^2 + x + 2$

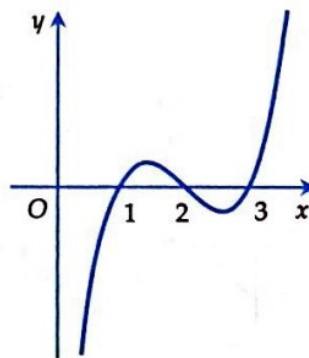
Lời giải

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} : f(x-1) = x^2 + 3x - 2 = (x-1)^2 + 5(x-1) + 2$.

Do đó $f(x) = x^2 + 5x + 2$.

Đáp án A.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $f(1,5) < 0 < f(2,5)$

B. $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$

C. $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$

D. $f(1,5) > 0 > f(2,5)$

Lời giải

Đáp án D.

Quan sát trên đồ thị ta thấy $f(x) > 0 \forall x \in (1; 2)$ và $f(x) < 0 \forall x \in (2; 3)$.

Do đó $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{36\}$. Biết

$f(2x-5) = x^2 + 3x - 2$ và $g(5x+1) = \frac{x}{x-7}$. Tính $g(f(1))$.

A. $g(f(1)) = \frac{-3}{4}$

B. $g(f(1)) = \frac{3}{4}$

C. $g(f(1)) = \frac{47}{4}$

D. $g(f(1)) = \frac{-47}{4}$

Lời giải**Đáp án A.**Ta có $2x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.Vậy $f(1) = 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 16$.Lại có $5x + 1 = 16 \Leftrightarrow x = 3$.Vậy $g(f(1)) = \frac{3}{3-7} = \frac{-3}{4}$.**Câu 20.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} \forall x \neq 0$. Tính $f(3)$.**A.** $f(3) = 36$ **B.** $f(3) = 18$ **C.** $f(3) = 29$ **D.** $f(3) = 25$ **Lời giải****Đáp án B.**Ta có $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.Vậy $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$.**Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{3x-2}{x-1}\right) = x + 2 \forall x \neq 1$. Tính $f(2) + f(4)$.**A.** $f(2) + f(4) = 6$ **B.** $f(2) + f(4) = 2$ **C.** $f(2) + f(4) = -6$ **D.** $f(2) + f(4) = -2$ **Lời giải****Đáp án A.****Cách 1:** Đặt $\frac{3x-2}{x-1} = t$

$$\Rightarrow x = \frac{t-2}{t-3} \Rightarrow x+2 = \frac{3t-8}{t-3}.$$

Do đó ta có

$$f(t) = \frac{3t-8}{t-3} \Rightarrow f(x) = \frac{3x-8}{x-3}.$$

Vậy $f(2) + f(4) = 6$.**Cách 2:**

$$\frac{3x-2}{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(2) = 2;$$

$$\frac{3x-2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow f(4) = 4.$$

Vậy $f(2) + f(4) = 6$.

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = 8x^2 - 6x + 1$

b) $y = 2x + 2021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2021$ không phải là hàm số bậc hai.

II. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định tọa độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0; c)$ qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu bậc hai sau: $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

Giải

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$.

- Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$.

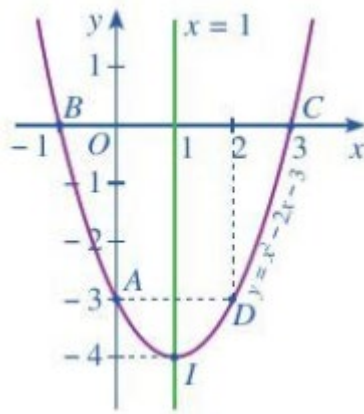
- Trục đối xứng $x = 1$.

- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0; -3)$.

- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1; 0)$ và $C(3; 0)$.

- Điểm đối xứng với điểm $A(0; -3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2; -3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như hình



Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Ví dụ 3. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

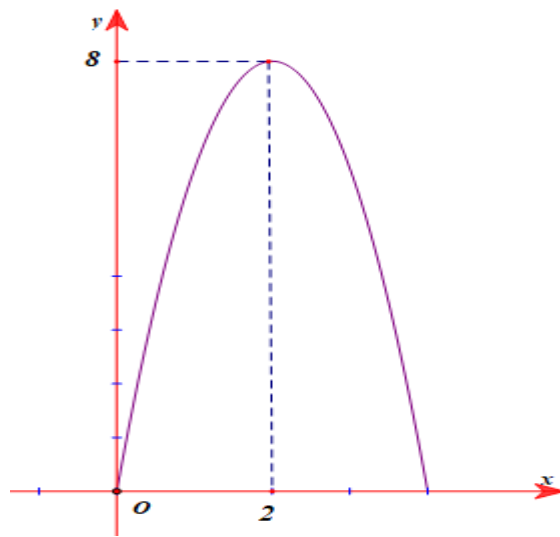
b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

III. Ứng dụng

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m.



- a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.
b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.
c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$). Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(m)$

c) Cách 1. Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, có đồ thị là (P) .

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
- Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;3)$.
- Tìm tập hợp giá trị x sao cho $y \leq 0$.
- Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

- $y = 7x^2 - 3x + 10$.
- $y = -2x^2 - x + 1$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x^2 - 3x$ với $0 \leq x \leq 2$.

b) $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leq x \leq 4$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x(x+1)(x-2)(x-3)$.

b) $y = (2x-1)^2 - 4|2x-1| + 3$.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^2 + 5x - 4$, có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Dựa vào đồ thị trên, tùy theo giá trị của m , hãy cho biết số nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$.

c) Tìm m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 5]$.

Câu 7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$.

b) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

Câu 8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ b) $y = x^2 + 2|x| - 3$

Câu 9. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

Câu 10. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Câu 11. Không vẽ đồ thị. Hãy tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y = 2(x+3)^2 - 5$

b) $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

Câu 12. Cho Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi

a) (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.

b) (P) hoàn toàn nằm phía dưới trục hoành.

c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{cases}$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Câu 1. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x = -3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.

b) Có đỉnh $I(2; -2)$.

c) Đi qua điểm $A(3; -4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1; 6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Câu 3. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0; 4)$.

b) Có đỉnh $I(-1; -2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0; -1)$ và $B(4; 0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1; -2)$.

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2;0)$.

Câu 5. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Đạt cực đại bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Câu 10. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6 .

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\min_{[-2; 0]} f(x) = 3$.

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

- i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).
- ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.
- iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

- Câu 1.** Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau
- a) $y = 2x - 3$ và $y = x^2 - 5x + 9$.
- b) $y = 2x^2 + x - 3$ và $y = -x^2 + 3x + 2$.
- Câu 2.** Cho parabol $y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m$. Tìm các giá trị m để
- a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . tìm tọa độ trung điểm của AB .
- b) d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.
- c) d không cắt (P) .
- d) d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.
- Câu 3.** Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để
- a) d và (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.
- b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.
- Câu 4.** Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh I của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- a) $y = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1$.
- b) $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$.
- Câu 5.** Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.
- Câu 6.** Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.
- a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.
- b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1$ ($m \neq 0$).
- Câu 7.** Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.
- a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ ($m \neq 0$).
- b) $y = (4m-2)x - 4m^2 - 2$ $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

Dạng 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

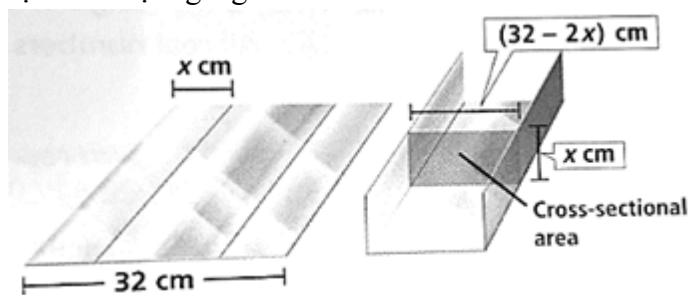
a. Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

b. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

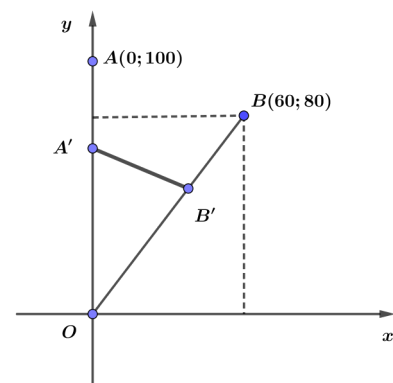
Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0; 100)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60; 80)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



- Câu 5.** Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

- Câu 1.** Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) đồng biến trong khoảng nào sau đây?
A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?
A. Trên khoảng $(-\infty; 1)$ hàm số đồng biến.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
C. Trên khoảng $(3; +\infty)$ hàm số nghịch biến.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
- Câu 3.** Hàm số $y = 4x - x^2$ có sự biến thiên trong khoảng $(2; +\infty)$ là
A. tăng. B. giảm.
C. vừa tăng vừa giảm. D. không tăng không giảm.
- Câu 4.** Hàm số $y = x^2 - 4x + 11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?
A. $(-2; +\infty)$ B. $(-\infty; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 2)$
- Câu 5.** Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là
A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 2)$.
C. $(-2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 6.** Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là
A. $(-\infty; -4)$. B. $(-\infty; -4)$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $(-2; +\infty)$.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.
A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
- Câu 8.** Hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(1; +\infty)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(3; +\infty)$.
- Câu 9.** Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?
A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.
- Câu 10.** Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
A. $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$. C. $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 3)$

B. $(3; +\infty)$

C. $(-\infty; 6)$

D. $(6; +\infty)$

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

A. $b \geq 0$.

B. $b = -12$.

C. $b \geq -12$.

D. $b \geq -9$.

Câu 15. Hàm số $y = -x^2 + 2(m-1)x + 3$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

A. $m \leq 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $0 < m \leq 2$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

A. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $-3 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập nào?

A. $(-10; 5)$.

B. $[5; 10)$.

C. $(5; 10)$.

D. $(-10; 5]$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1; 2)$.

A. $m \leq 1$.

B. $-2 \leq m \leq 1$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Câu 19. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

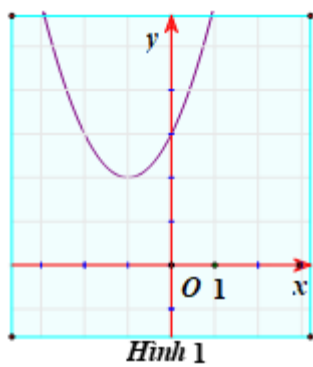
C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

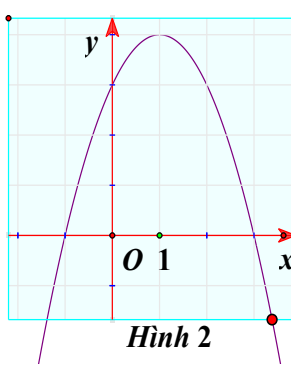
D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

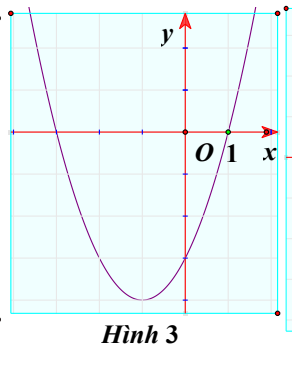
Câu 20. Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$



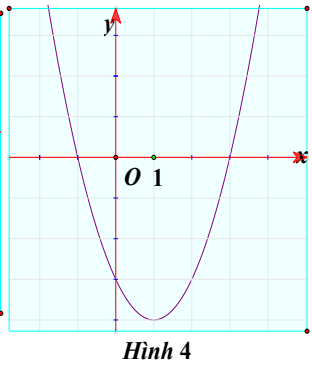
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Câu 21. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

Câu 22. Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là:

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Câu 23. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 2$?

A.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

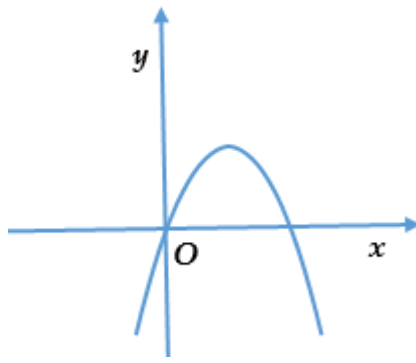
C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

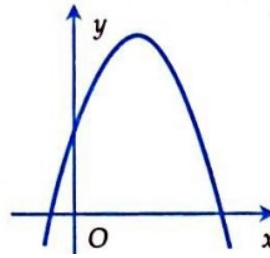
Câu 24. Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có hệ số a là



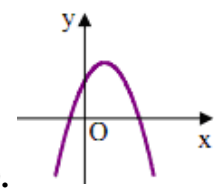
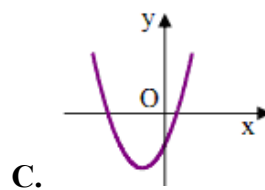
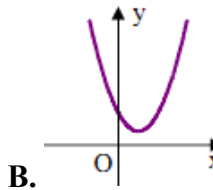
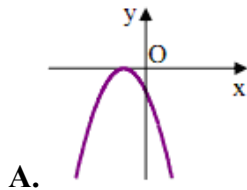
- A. $a > 0$. B. $a < 0$. C. $a = 1$. D. $a = 2$.

Câu 25. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?

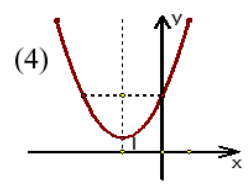
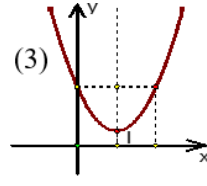
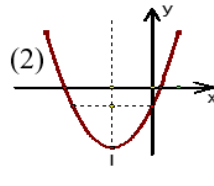
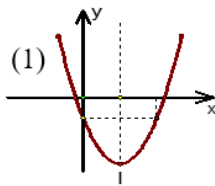
- A. $a < 0, b > 0, c < 0$
 B. $a < 0, b < 0, c < 0$
 C. $a < 0, b > 0, c > 0$
 D. $a < 0, b < 0, c > 0$



Câu 26. Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, b > 0$ và $c < 0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng

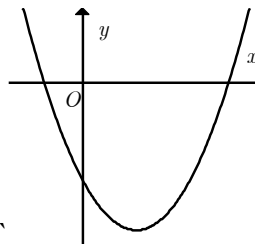


Câu 27. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a > 0, b < 0, c > 0)$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình sau:



- A. Hình (4). B. Hình (2). C. Hình (3). D. Hình (1)

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

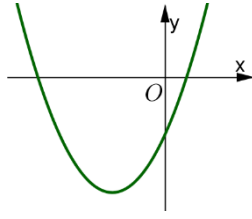
Câu 29. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Xác định dấu của a, b, c .

A. $a < 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

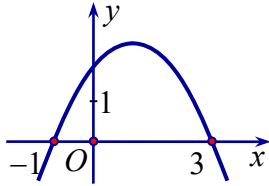
Câu 30. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.

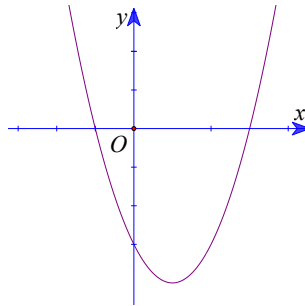


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

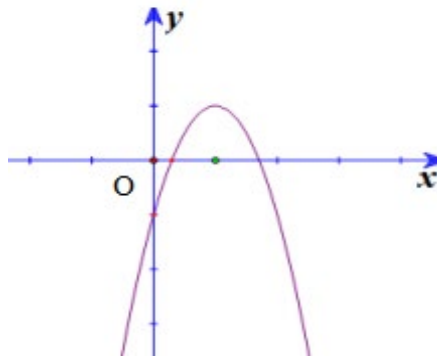
Câu 32. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

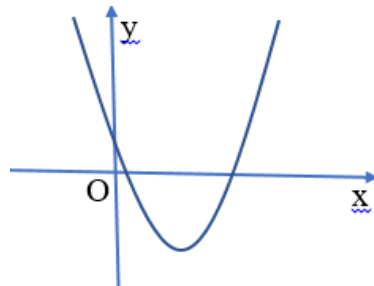
Câu 33. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

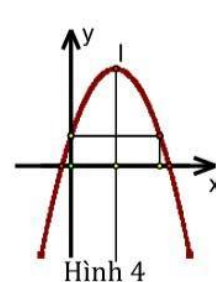
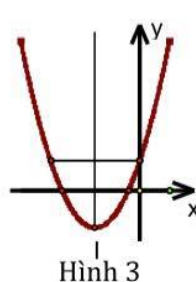
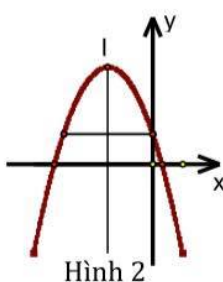
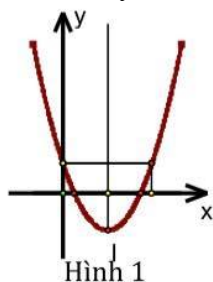
C. $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



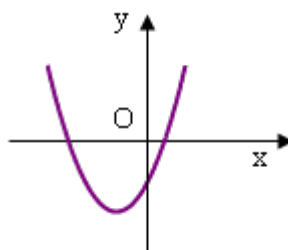
- A. $a > 0, b = 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 35. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a < 0; b < 0; c > 0$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



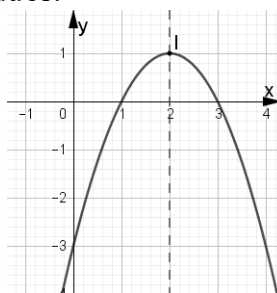
- A. hình (4). B. hình (3). C. hình (2). D. hình (1).

Câu 36. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



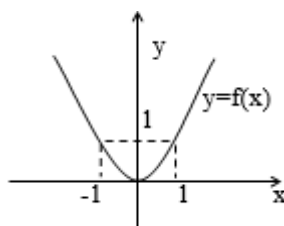
- A. $a > 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 37. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



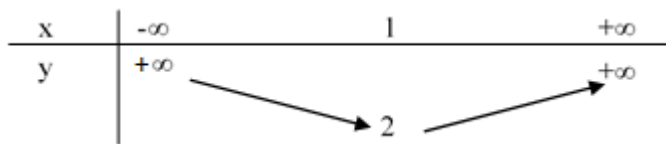
- A. $y = -x^2 + 4x - 3$. B. $y = -x^2 - 4x - 3$. C. $y = -2x^2 - x - 3$. D. $y = x^2 - 4x - 3$.

Câu 38. Đồ thị hàm số sau biểu diễn đồ thị hàm số nào?



- A. $y = 2x^2$. B. $y = x^2$. C. $y = -x^2$. D. $y = \frac{1}{2}x^2$.

Câu 39. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?



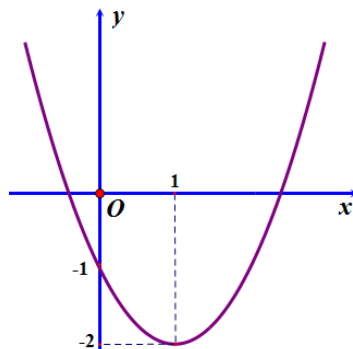
- A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = -3x^2 + 6x - 1$. C. $y = x^2 + 2x - 1$. D. $y = x^2 - 2x + 2$.

Câu 40. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

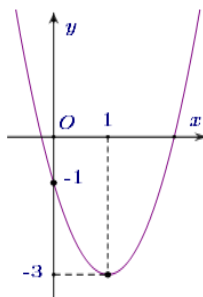
- A. $y = x^2 - 4x$. B. $y = x^2 + 4x$. C. $y = -x^2 + 4x$. D. $y = -x^2 - 4x$.

Câu 41. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?



- A. $y = x^2 + 2x - 1$. B. $y = x^2 + 2x - 2$. C. $y = 2x^2 - 4x - 2$. D. $y = x^2 - 2x - 1$.

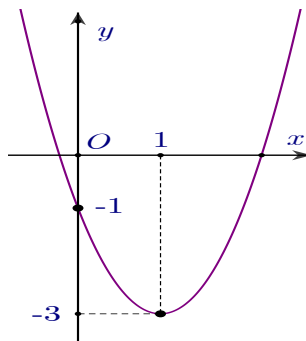
Câu 42. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

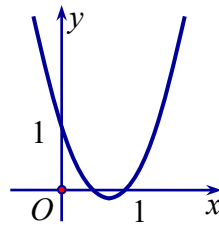
Câu 43. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau:



Phương trình của parabol này là

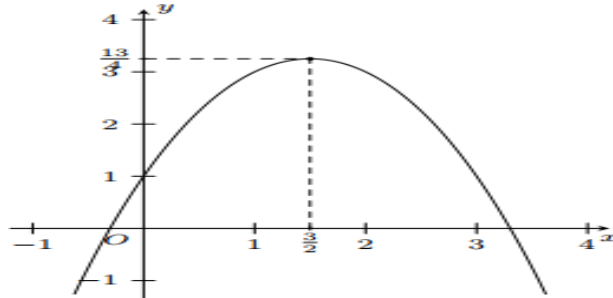
- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 44. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?



- A. $y = x^2 - 3x + 1$. B. $y = 2x^2 - 3x + 1$. C. $y = -x^2 + 3x - 1$. D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

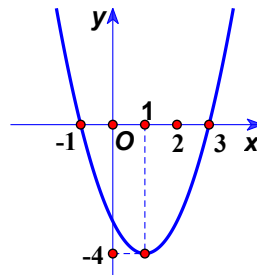
Câu 45. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

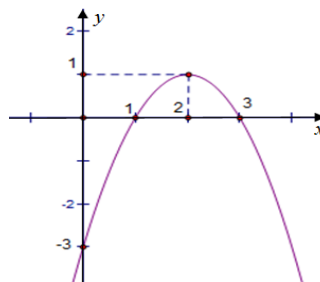
- A. $y = x^2 + 3x - 1$. B. $y = x^2 - 3x - 1$. C. $y = -x^2 - 3x - 1$. D. $y = -x^2 + 3x + 1$.

Câu 46. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



- A. -9. B. 9. C. -6. D. 6.

Câu 47. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



- A. $y = -x^2 + 2x - 3$. B. $y = -x^2 + 4x - 3$. C. $y = x^2 - 4x + 3$. D. $y = x^2 - 2x - 3$.

Câu 48. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

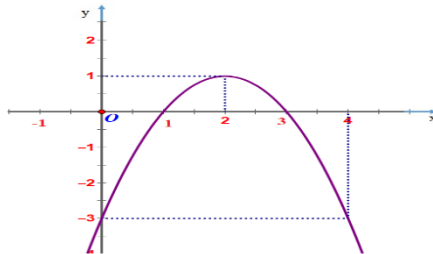
- A. $y = -x^2 + 4x$. B. $y = -x^2 + 4x - 9$. C. $y = x^2 - 4x - 1$. D. $y = x^2 - 4x - 5$.

Câu 49. Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

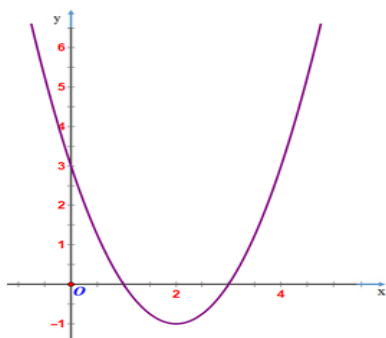
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$

- A. $y = x^2 + 4x$. B. $y = -x^2 - 4x - 8$. C. $y = -x^2 - 4x + 8$. D. $y = -x^2 - 4x$.

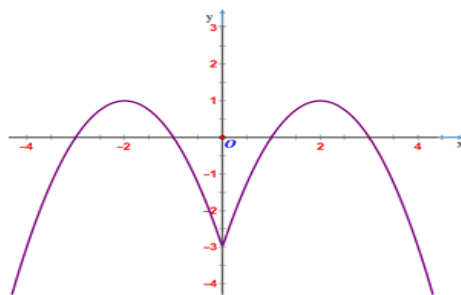
Câu 50. Cho đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ có đồ thị như hình vẽ sau



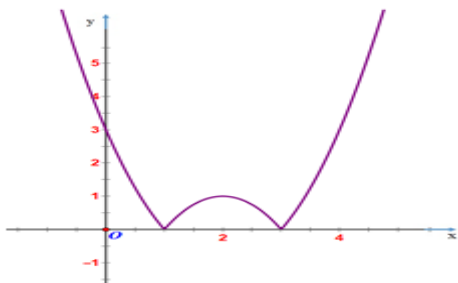
Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$



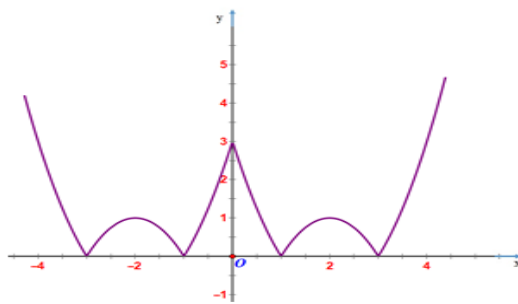
Hình 1



Hình 2



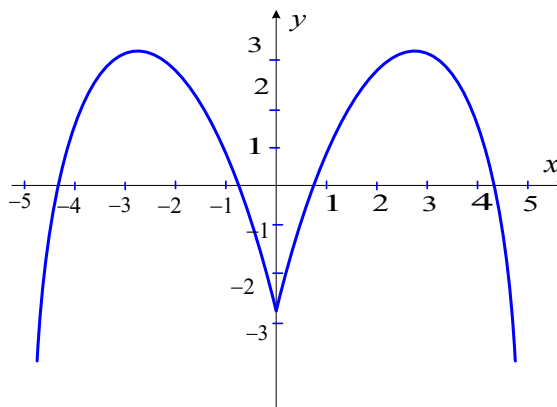
Hình 3



Hình 4

- A. Hình 2 B. Hình 4 C. Hình 1 D. Hình 3

Câu 51. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- A. $y = x^2 - 3x - 3$. B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$. C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$. D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Câu 52. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (P) . Tìm mệnh đề sai.

A. (P) có đỉnh $I(1;3)$. B. $\min y = 4, \forall x \in [0;3]$.

C. (P) có trục đối xứng $x = 1$.

D. $\max y = 7, \forall x \in [0;3]$.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3 .

B. 1 .

C. 3 .

D. 13 .

Câu 54. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Câu 55. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

A. -3 .

B. -2 .

C. $-\frac{21}{8}$.

D. $-\frac{25}{8}$.

Câu 56. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

B. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

C. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

D. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Câu 57. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[-2;2]$ là:

A. 17

B. 25

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{16}{5}$

Câu 58. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\frac{4}{5}$

B. 0

C. $\frac{1}{3}$

D. -20

Câu 59. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

A. $\frac{11}{8}$

B. $\frac{11}{4}$

C. $\frac{4}{11}$

D. $\frac{8}{11}$

Câu 60. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1;4]$ là

A. -1 .

B. 2 .

C. 7 .

D. 8 .

Câu 61. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

A. 1

B. 0

C. -1

D. -2

Câu 62. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4|x| + 3$ là:

A. -1

B. 1

C. 4

D. 3

Câu 63. Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1;4]$. Tính $M + m$.

A. -14 .

B. -13 .

C. -4 .

D. -9 .

Câu 64. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = -1$.

Câu 65. Hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi m thuộc

A. $(-\infty; 5)$. B. $[7; 8)$. C. $(5; 7)$. D. $(9; 11)$.

Câu 66. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là

A. $m = \pm 4$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 2$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 67. Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $m \in [-1; 0)$. B. $m \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$. C. $m \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. D. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 68. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

A. $m = 0$. B. $m = -9$. C. $m = 1$. D. $m = -3$.

Câu 69. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

A. $m = -3$. B. $m = -9$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Câu 70. Tìm số các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0; 1]$ là bằng 1.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 71. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$. Đặt $m = \min_{x \in [-1; 1]} f(x)$ và $M = \max_{x \in [-1; 1]} f(x)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $M - m = 8$. Tính tổng bình phương các phần tử thuộc S .

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 72. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m + 1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in (1; 4)$. B. $m \in (3; 9)$. C. $m \in (-5; 1)$. D. $m \in (-2; 2)$.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 3x + 2)$ trên đoạn $[0; 2]$ là bằng 3.

A. $\{-1; 4 + \sqrt{7}\}$. B. $\{4 + \sqrt{7}\}$. C. $\{-1\}$. D. $\{1; 4 - \sqrt{7}\}$.

Câu 74. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m + 1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

A. $m = -2$ B. $m = 1$ C. $m = 3$ D. $m = 5$

Câu 75. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = 3$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = \frac{9}{2}$. D. $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 76. Cho hàm số $y = x^2 - \left(m + \sqrt{m^2 - 4}\right)x + 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}$ ($m \neq 0$). Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Số giá trị của m để $y_1 - y_2 = 8$ là

A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 77. Giả sử hàm số $y = -x^2 + 2x + 4\sqrt{(3-x)(x+1)} + 3$ có tập giá trị $W = [a; b]$. Hãy tính giá trị của biểu thức $K = a^2 + b^2$.

A. $K = 145$.

B. $K = 144$.

C. $K = 143$.

D. 169.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 1. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

C. $I\left(\frac{b}{a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

D. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

A. $I(0; 1)$.

B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 3. Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x = -\frac{b}{2a}$.

B. $x = -\frac{c}{2a}$.

C. $x = -\frac{\Delta}{4a}$.

D. Không có.

Câu 4. Điểm $I(-2; 1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

A. $y = x^2 + 4x + 5$.

B. $y = 2x^2 + 4x + 1$.

C. $y = x^2 + 4x - 5$.

D. $y = -x^2 - 4x + 3$.

Câu 5. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Câu 6. Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1; 0)$ và có đỉnh $I(1; 2)$. Tính $a + b + c$.

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; 1)$ và có đỉnh $I(1; -1)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^2 - 2c$.

A. $T = 22$.

B. $T = 9$.

C. $T = 6$.

D. $T = 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) . Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1; 1)$ và đi qua điểm $A(2; 3)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$

A. 3.

B. 4.

C. 29.

D. 1.

Câu 9. Cho Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ (m, n tham số). Xác định m, n để (P) nhận đỉnh $I(2; -1)$.

A. $m = 4, n = -3$.

B. $m = 4, n = 3$.

C. $m = -4, n = -3$.

D. $m = -4, n = 3$.

Câu 10. Cho Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(2; 0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0; -1)$. Khi đó Parabol (P) có hàm số là

A. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$.

B. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$.

C. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

D. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$.

Câu 11. Gọi S là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol $(P): y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$. Tính tổng các giá trị của tập S

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Câu 12. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (1) biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = -x^2 + 3x + 2$. B. $y = -x^2 - 3x - 2$. C. $y = x^2 - 3x + 2$. D. $y = -x^2 + 3x - 2$.

Câu 13. Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$?

A. $y = -x^2 + 5x - 8$. B. $y = -2x^2 + 10x - 12$.

C. $y = x^2 - 5x$. D. $y = -2x^2 + 5x + \frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a + b + c$, biết (P) đi qua điểm $A(0; 3)$ và có đỉnh $I(-1; 2)$.

A. $a + b + c = 6$ B. $a + b + c = 5$ C. $a + b + c = 4$ D. $a + b + c = 3$

Câu 15. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua $A(0; 6)$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. B. $y = x^2 + 2x + 6$. C. $y = x^2 + 6x + 6$. D. $y = x^2 + x + 4$.

Câu 16. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ có phương trình là

A. $y = x^2 - x + 1$.B. $y = x^2 - x - 1$.C. $y = x^2 + x - 1$.D. $y = x^2 + x + 1$.

Câu 17. Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$ có phương trình là

A. $y = x^2 + x + 2$.B. $y = 2x^2 + x + 2$.C. $y = 2x^2 + 2x + 2$ D. $y = x^2 + 2x$

Câu 18. Cho $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1; 3)$. Khi đó

A. $b = -1$.B. $b = 1$.C. $b = 3$.D. $b = -2$.

Câu 19. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1; 4)$, $B(-1; -4)$ và $C(-2; -11)$. Tọa độ đỉnh của (P) là:

A. $(-2; -11)$ B. $(2; 5)$ C. $(1; 4)$ D. $(3; 6)$

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

Câu 1. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:

A. $(1; 0); (3; 2)$.B. $(0; -1); (-2; -3)$.C. $(-1; 2); (2; 1)$.D. $(2; 1); (0; -1)$.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

A. $M(0; -2)$, $N(2; -4)$.B. $M(-1; -1)$, $N(-2; 0)$.C. $M(-3; 1)$, $N(3; -5)$.D. $M(1; -3)$, $N(2; -4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

A. Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

B. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại gốc tọa độ.

C. Đồ thị hàm số không có trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Câu 4. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

A. $(-2;6)$ và $(-4;8)$. B. $(2;2)$ và $(4;8)$. C. $(2;-2)$ và $(4;0)$. D. $(2;2)$ và $(4;0)$.

Câu 5. Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=1-x$ với $(P): y=x^2-2x+1$ là
A. $x=0; x=1$. B. $x=1$. C. $x=0; x=2$. D. $x=0$.

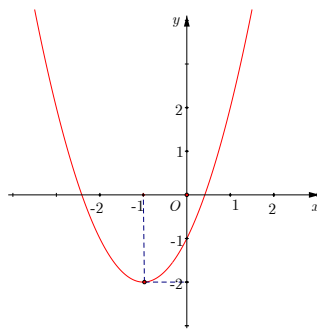
Câu 6. Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y=2x-x^2$ và $\Delta: y=3x-6$. Giá trị của $b+d$ bằng.
A. 7. B. -7. C. 15. D. -15.

Câu 7. Cho parabol (P) có phương trình $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x-1)=x^2-5x+5 \forall x \in \mathbb{R}$. Số giao điểm của (P) và trục hoành là:
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 8. Cho hai parabol có phương trình $y=x^2+x+1$ và $y=2x^2-x-2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm A và B ($x_A < x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng AB .
A. $AB=4\sqrt{2}$ B. $AB=2\sqrt{26}$ C. $AB=4\sqrt{10}$ D. $AB=2\sqrt{10}$

Câu 9. Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?
A. $m < -\frac{9}{4}$. B. $m > -\frac{9}{4}$. C. $m > \frac{9}{4}$. D. $m < \frac{9}{4}$.

Câu 10. Hàm số $y=x^2+2x-1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.



A. $m < -2$. B. $m < -1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Câu 11. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y=-(m+1)x+m+2$ cắt parabol $(P): y=x^2+x-2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?
A. 6 B. 5 C. 7 D. 8

Câu 12. Cho parabol $(P): y=x^2-mx$ và đường thẳng $(d): y=(m+2)x+1$, trong đó m là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N , tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN là:
A. một parabol B. một đường thẳng
C. một đoạn thẳng D. một điểm

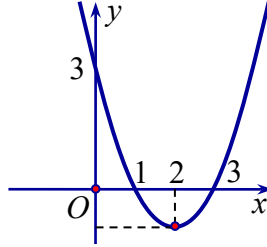
Câu 13. Cho hàm số $y=x^2+3x$ có đồ thị (P) . Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y=2x+3$. Tổng bình phương các phần tử của S là
A. 6. B. 4. C. 2. D. 1.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + m^2$. Tính giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$.
- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = -\frac{3}{4}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{4}{3}$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$ (1). Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là
- A. -10 . B. 10 . C. -6 . D. 9 .
- Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?
- A. 6 . B. 9 . C. 7 . D. 8 .
- Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.
- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.
- Câu 18.** Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.
- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.
- Câu 19.** Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 5$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 2 - 3m$. Tìm tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.
- A. $1 < m < \frac{7}{3}$. B. $m > 1$. C. $m > \frac{7}{3}$. D. $m < 1$
- Câu 20.** Gọi T là tổng tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính T .
- A. $T = -9$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = -15$. D. $T = 3$.
- Câu 21.** Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.
- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.
- Câu 22.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a - b + c$, biết rằng đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 .
- A. $a - b - c = -2$ B. $a - b - c = 2$
C. $a - b - c = 1$ D. $a - b - c = -1$
- Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?
- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số
- Câu 24.** Biết $S = (a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a + b$.
- A. $a + b = 1$ B. $a + b = -1$ C. $a + b = 2$ D. $a + b = -2$

Câu 25. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $a + b$.

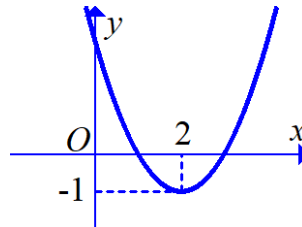
- A. $a + b = 6$ B. $a + b = 4$
C. $a + b = 1$ D. $a + b = 2$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m - 2)f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



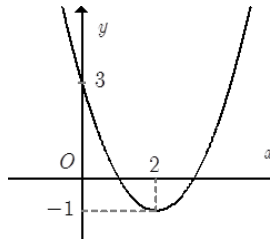
- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



- A. $0 < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $m = -1$; $m = 3$. D. $m > 3$.

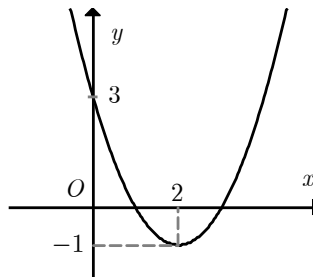
Câu 28. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 1$. B. $m = 0$.
C. $m = 1$. D. không có giá trị của m .

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt



- A. $m = 4$. B. $m > 0$. C. $m > -1$. D. $m = 2$.

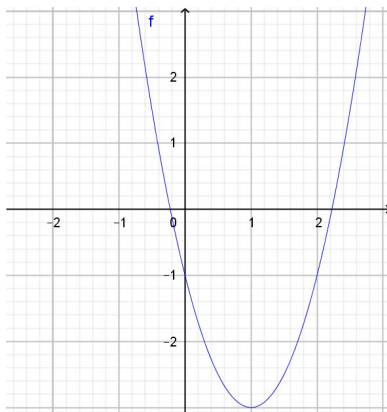
Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $-2 < m < -1$. B. $1 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq -1$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 31. Với giá trị nào của m thì phương trình $m = |x^2 - 5x + 4|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \leq \frac{9}{4}$. B. $m \geq \frac{9}{4}$. C. $m = \frac{9}{4}$. D. $m = 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường $y = m + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?



- A. $-3 < m < 0$. B. $0 < m < 3$. C. $1 < m < 4$. D. $-1 < m < 2$.

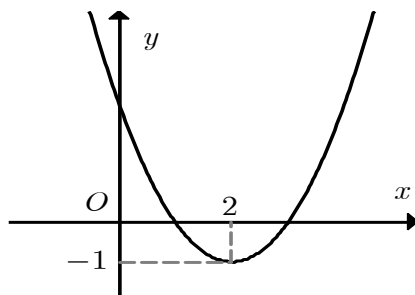
Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $m < -3$. B. $m > -\frac{81}{4}$. C. $-\frac{81}{4} < m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 34. Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm thực?

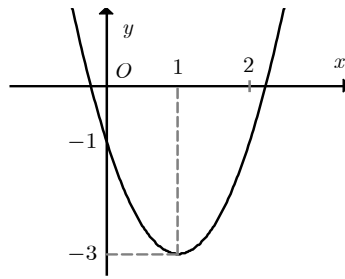
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



- A. $-1 < m < 0$. B. $m > 3$. C. $m = -1, m = 3$. D. $0 < m < 1$.

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[0; 2018]$ để phương trình $|ax^2 + b|x + c| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?



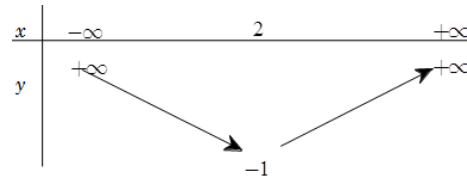
A. 2016.

B. 2015.

C. 2018.

D. 2017.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm.

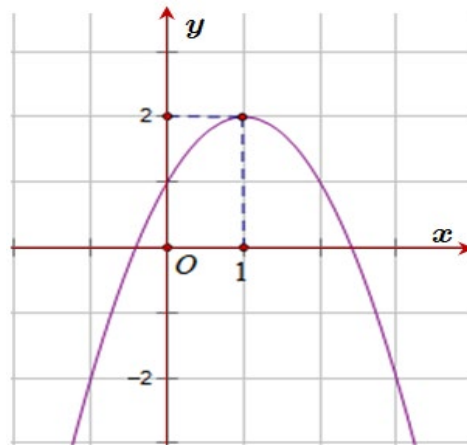
A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. không tồn tại m .

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m = 2015$.

B. $m = 2016$.

C. $m = 2017$.

D. $m = 2019$.

Câu 39. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 2$ như hình vẽ dưới đây. Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?



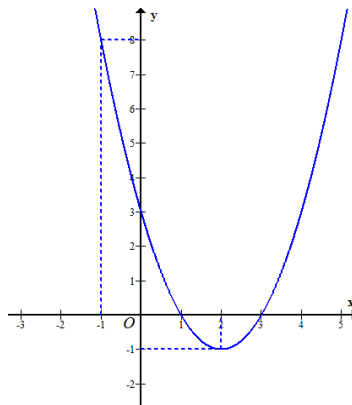
A. $-4 < m < 0$

B. $-2 < m < 2$

C. $0 < m < 4$

D. $-2 \leq m \leq 2$

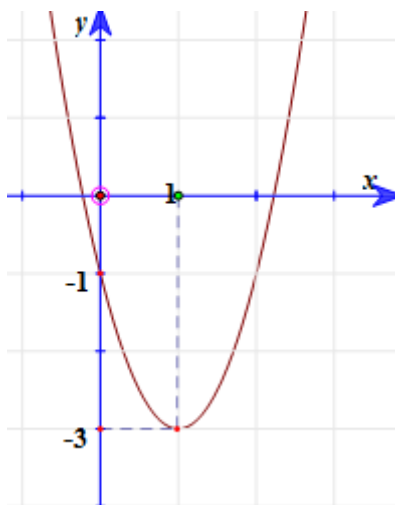
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ):



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



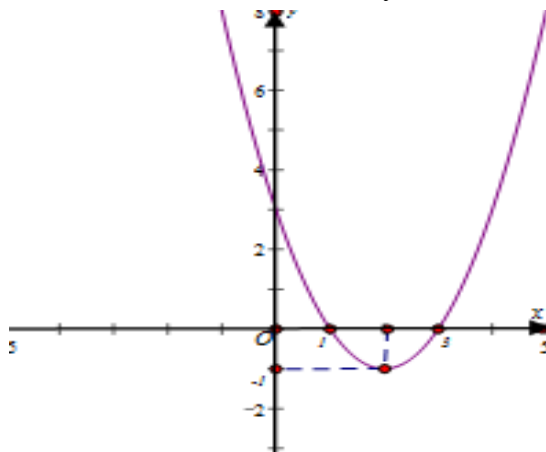
Phương trình $f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 6. C. 8. D. 7.

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 2016. B. 2008. C. 2009. D. 2017.

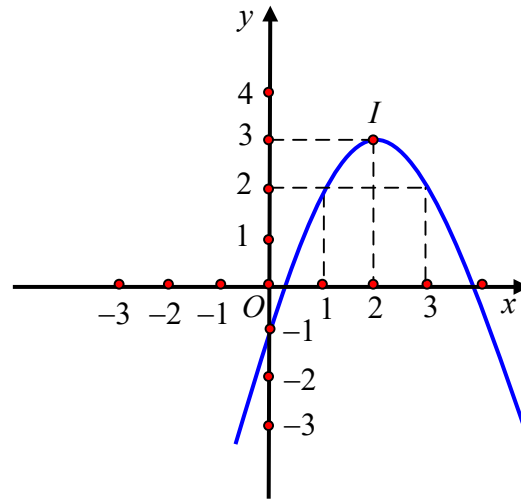
Câu 43. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

- Câu 44.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



- A. $-1 < m < 3$. B. $0 < m < 3$. C. $0 \leq m \leq 3$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

- Câu 1.** Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.
- A. $m - n = 7$ B. $m - n = -7$ C. $m - n = 31$ D. $m - n = -31$
- Câu 2.** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?
- A. 2,56 giây B. 2,57 giây C. 2,58 giây D. 2,59 giây
- Câu 3.** Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth có phương trình $h = at^2 + bt + c$ ($a < 0$), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m và sau 1 giây thì nó đạt độ cao 8,5m, sau 2 giây nó đạt độ cao 6m. Tính tổng $a + b + c$.
- A. $a + b + c = 18,3$. B. $a + b + c = 6,1$.
C. $a + b + c = 8,5$. D. $a + b + c = -15,9$.
- Câu 4.** Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?
- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.
- Câu 5.** Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?
- A. 11 m. B. 12 m. C. 13 m. D. 14 m.

- Câu 6.** (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao 8 m như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao h của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?

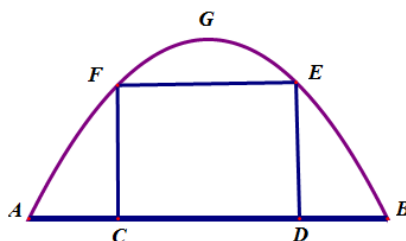


- A. $0 < h < 6$. B. $0 < h \leq 6$. C. $0 < h < 7$. D. $0 < h \leq 7$.

- Câu 7.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 , hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

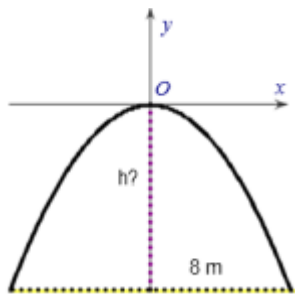
- A. 64 . B. 4 . C. 16 . D. 8 .

- Câu 8.** Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4 m còn kích thước cửa ở giữa là $3\text{ m} \times 4\text{ m}$. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . (xem hình vẽ bên dưới)



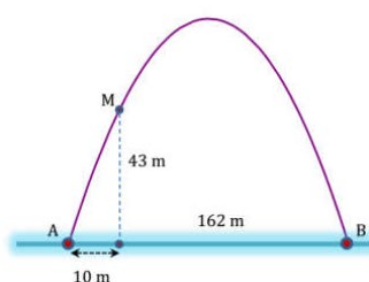
- A. 5 m . B. $8,5\text{ m}$. C. $7,5\text{ m}$. D. 8 m .

- Câu 9.** Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8\text{ m}$. Hãy tính chiều cao h của cổng (xem hình minh họa bên cạnh).



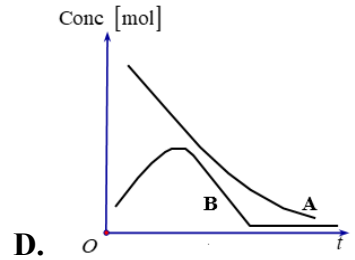
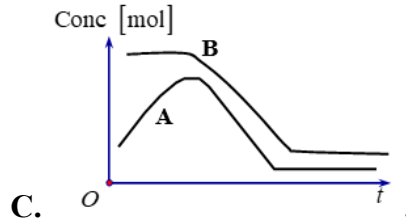
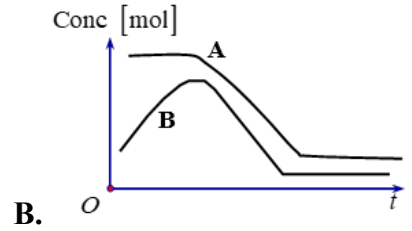
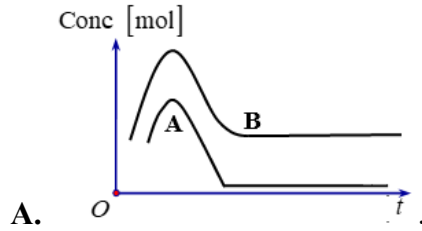
- A. $h = 9\text{ m}$. B. $h = 7\text{ m}$. C. $h = 8\text{ m}$. D. $h = 5\text{ m}$.

- Câu 10.** Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m . Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m . Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



- A. $175,6\text{ m}$. B. $197,5\text{ m}$. C. 210 m . D. $185,6\text{ m}$.

Câu 11. Rót chất A vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất B vào. Khi nồng độ chất B đạt đến một giá trị nhất định thì chất A mới tác dụng với chất B . Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?



Câu 12. Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

A. $400m^2$.

B. $450m^2$.

C. $350m^2$.

D. $425m^2$.

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = 8x^2 - 6x + 1$

b) $y = 2x + 2021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2021$ không phải là hàm số bậc hai.

II. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định tọa độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0; c)$ qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu bậc hai sau: $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

Giải

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$.

- Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$.

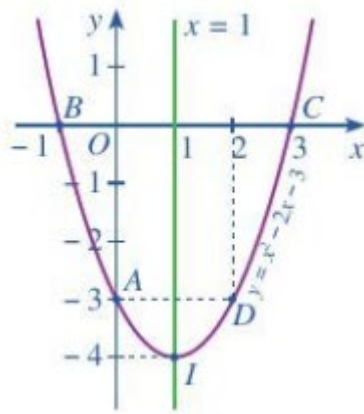
- Trục đối xứng $x = 1$.

- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0; -3)$.

- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1; 0)$ và $C(3; 0)$.

- Điểm đối xứng với điểm $A(0; -3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2; -3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như hình



Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
y	$+\infty$	$+\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
	$-\frac{b}{2a}$	
y	$-\infty$	$-\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Ví dụ 3. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

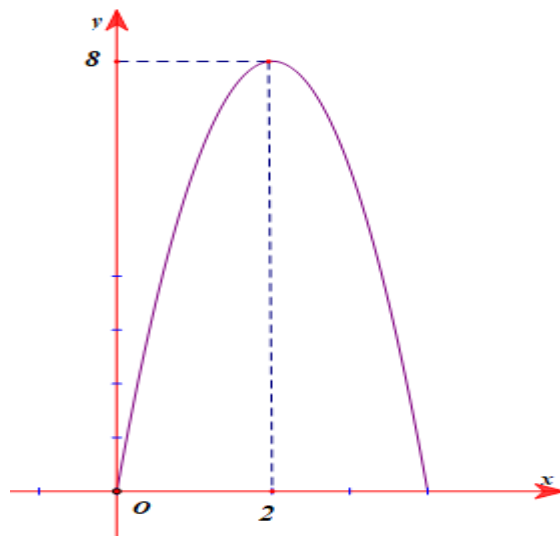
b) Ta có: $a = -4 < 0, b = 6, -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

III. Ứng dụng

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m.



- a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.
b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.
c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$). Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(m)$

c) Cách 1. Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, có đồ thị là (P) .

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
- Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;3)$.
- Tìm tập hợp giá trị x sao cho $y \leq 0$.
- Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

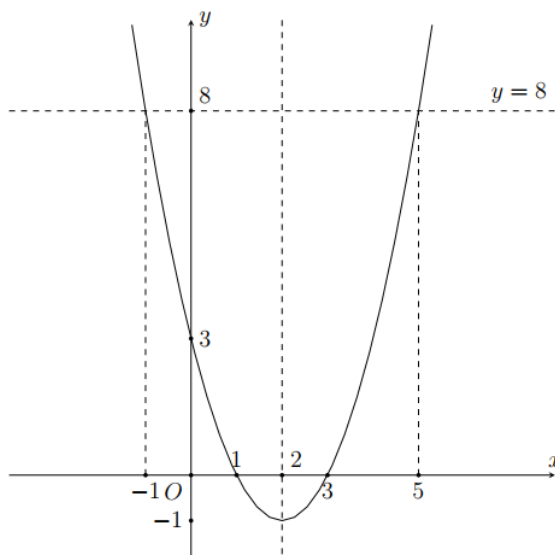
Lời giải

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
 - Tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.
 - Trục đối xứng $x = 2$.
 - Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(3;0)$.



b) Ta có $(0;3) = (0;2) \cup \{2\} \cup (2;3)$.

Trên khoảng $(0;2)$ hàm số nghịch biến, tại $x = 2$ thì hàm số đạt giá trị bằng -1 , trên khoảng $(2;3)$ hàm số đồng biến.

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy tập hợp các giá trị của x để $y \leq 0$ (đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành) là $1 \leq x \leq 3$.

d) Ta thấy đồ thị (P) cắt đường thẳng $y = 8$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5 .

Do đó để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$ thì $x \in (-\infty; -1)$ hoặc $x \in (5; +\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ nên nghịch biến trên đoạn $[-2;1]$. Do đó

• Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x = -2$, khi đó $y_{\max} = y(-2) = 15$.

• Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x = 1$, khi đó $y_{\min} = y(1) = 0$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 7x^2 - 3x + 10$.

b) $y = -2x^2 - x + 1$.

Lời giải

a) Hàm số $y = 7x^2 - 3x + 10$ có $a = 7 > 0$ nên y đạt giá trị bé nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{271}{8}$ và không tồn tại giá trị lớn nhất.

b) Hàm số $y = -2x^2 - x + 1$ có $a = -2 < 0$ nên y đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x^2 - 3x$ với $0 \leq x \leq 2$.

b) $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leq x \leq 4$.

Lời giải

a) Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \in [0; 2]$.

Vậy $\min y = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$; $\max y = \max\{f(0); f(2)\} = \max\{0; -2\} = 0$.

b) Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$.

Ta có $f(4) = -29$; $f(0) = 3$.

Vậy $\min y = f(4) = -29$; $\max y = f(0) = 3$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

Lời giải

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{a}{2}$

• Nếu $\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$ thì $x_I < 0 < 2$. Suy ra f đồng biến trên $[0; 2]$.

Do đó $\min f(x) = f(0) = a^2 - 2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2 - 2a + 2 = 3 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0, a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Vì $a < 0$ nên ta chọn $a = 1 - \sqrt{2}$.

• Nếu $0 \leq \frac{a}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra f đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = -2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán

$$-2a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} < 0 \text{ (không thỏa mãn)}.$$

• Nếu $\frac{a}{2} > 2 \Leftrightarrow a > 4$ thì $x_I > 2 > 0$. Suy ra f nghịch biến trên $[0; 2]$.

Do đó $\min f(x) = f(2) = a^2 - 10a + 18$. Theo yêu cầu bài toán

$$a^2 - 10a + 18 = 3 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{10}$$

Vì $a > 4$ nên ta chọn $a = 5 + \sqrt{10}$.

Vậy $a = 1 - \sqrt{2}$ hoặc $a = 5 + \sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = x(x+1)(x-2)(x-3)$.

b) $y = (2x-1)^2 - 4|2x-1| + 3$.

Lời giải

a) Ta có $y = x(x+1)(x-2)(x-3) = [x(x-2)] \cdot [(x+1)(x-3)] = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)$.

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, ta được $y = f(t) = (t-1)(t-4) = t^2 - 5t + 4, t \geq 0$.

Hàm số $y = t^2 - 5t + 4$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \in [0; +\infty)$.

Do đó $\min y = \min f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ đạt được khi $(x-1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) Đặt $t = |2x-1| \geq 0$ thì $y = t^2 - 4t + 3, t \geq 0$.

Hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} = 2 \in [0; +\infty)$.

Do đó $\min y = \min f(t) = f(2) = -1$ đạt được khi $|2x-1| = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^2 + 5x - 4$, có đồ thị là (P).

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

b) Dựa vào đồ thị trên, tùy theo giá trị của m , hãy cho biết số nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$.

c) Tìm m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 5]$.

Lời giải

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

• Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

• Trục đối xứng $x = \frac{5}{2}$.

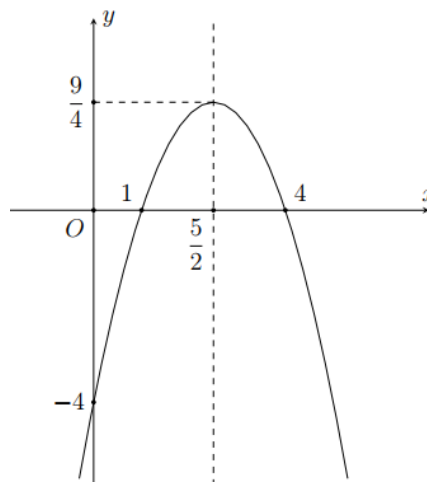
• Hệ số $a = -1 < 0$: bề lõm quay xuống dưới.

• Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$-\infty$

• Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; -4)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(4; 0)$.



b) Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 2m + 3$ (*).

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng $y = 2m + 3$ (song song với Ox). Do đó số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị ta có

- $2m + 3 > \frac{9}{4} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{8}$: phương trình vô nghiệm.
- $2m + 3 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{8}$: phương trình có nghiệm kép.
- $2m + 3 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow m < -\frac{3}{8}$: phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[1; 5]$ như sau

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	5	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$\frac{9}{4}$	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến ta thấy $x \in [1; 5]$ thì $y \in \left[-4; \frac{9}{4}\right]$.

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in [1; 5]$ khi và chỉ khi

$$-4 \leq 2m + 3 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{8}.$$

Câu 7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$.

b) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

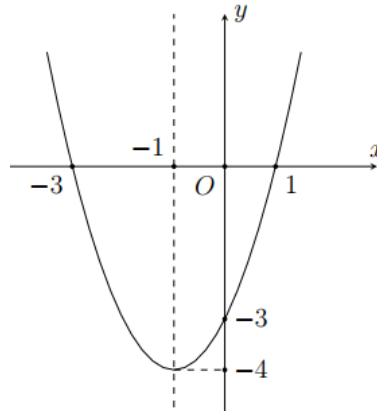
Lời giải

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

- Tọa độ đỉnh $I(-1; -4)$.
- Trục đối xứng $x = -1$.
- Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.



a) Ta có $y = |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 + 2x - 3) & \text{khi } x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$ như sau:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành

Câu 8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ b) $y = x^2 + 2|x| - 3$

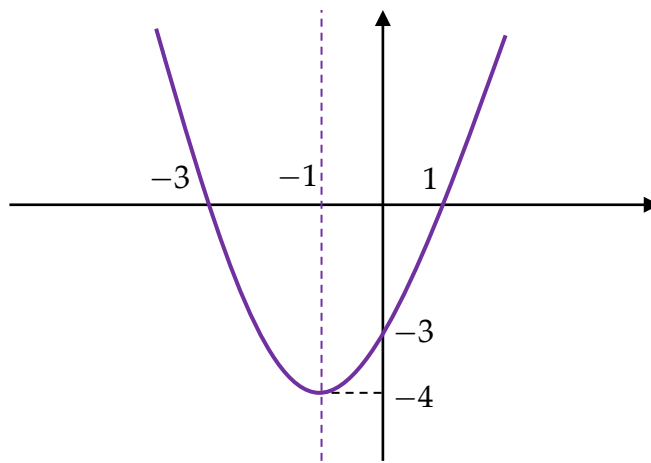
Lời giải

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

- ☐ Tọa độ đỉnh $I(-1;-4)$.
- ☐ Trục đối xứng $x = -1$.
- ☐ Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- ☐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- ☐ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

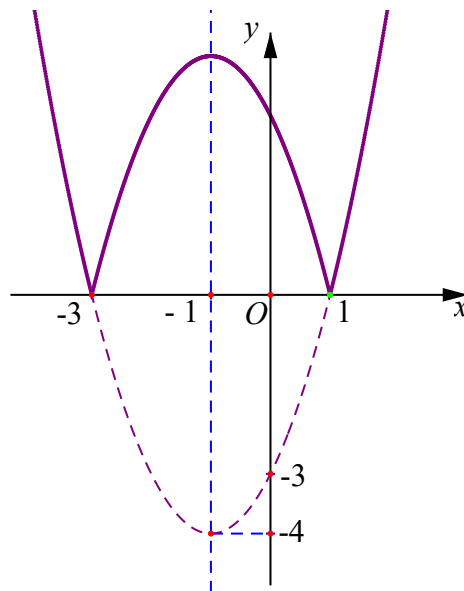
- ☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.



a) Ta có $y = |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -f(x) = -(x^2 + 2x - 3) & \text{khi } x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$ như sau :

- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

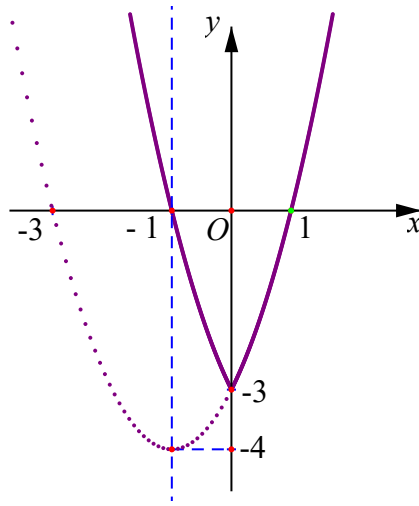


b) Ta có $y = h(x) = x^2 + 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ suy ra đồ thị hàm số $y = h(x) = x^2 + 2|x| - 3$ như sau :

- ☐ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải trục tung.
- ☐ Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = h(x)$.



Câu 9. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

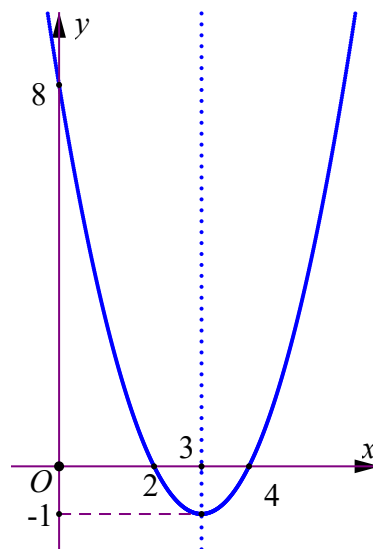
Lời giải

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P) : y = x^2 - 6x + 8$.

- ☐ Tọa độ đỉnh $I(3; -1)$
- ☐ Trục đối xứng $x = 3$
- ☐ Hệ số $a = 1 > 0$: bề lõm quay lên trên.
- ☐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- ☐ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

- ☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 8)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(4; 0)$ và $C(2; 0)$.

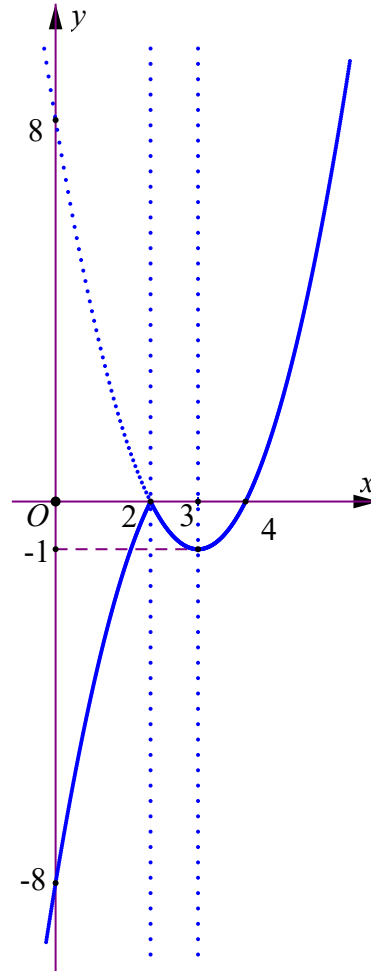


b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

Ta có $y = (x-4)|x-2| = \begin{cases} (x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 \geq 0 \\ -(x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 < 0 \end{cases}$ hay $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x^2 - 6x + 8) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ suy ra đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ như sau

- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải đường $x = 2$ ta giữ nguyên.
- ☐ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên trái đường $x = 2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành.



Phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0 \Leftrightarrow (x-4)|x-2| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ và đường thẳng $y = -m$ (song song với Ox). Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị, ta có

☐ $\begin{cases} -m > 0 \\ -m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$: phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

☐ $\begin{cases} -m = 0 \\ -m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$: phương trình có 2 nghiệm.

☐ $-1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: phương trình có 3 nghiệm.

Câu 10. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

Khi $x < 1$ thì $y = -x + 4$.

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 3$, ta được điểm $A(1;3)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$ ta được điểm $B(0;4)$.

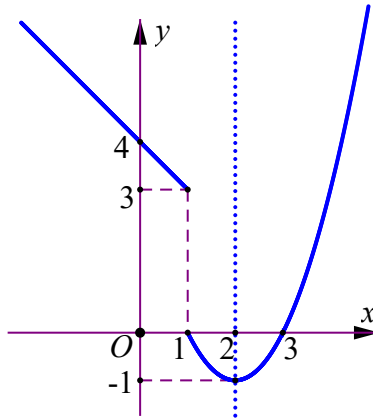
Khi $x \geq 1$ thì $y = x^2 - 4x + 3$.

Tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.

Hệ số $a = -1 < 0$: bề lõm quay lên trên.

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 0$ ta được điểm $M(1;0)$.

Cho $x = 3 \Rightarrow y = 0$ ta được điểm $N(3;0)$.



Câu 11. Không vẽ đồ thị. Hãy tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y = 2(x+3)^2 - 5$

b) $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

Lời giải

a) Hàm số $y = 2(x+3)^2 - 5 = 2x^2 + 12x + 13$

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 2} = -3 \Rightarrow y = -5$

Tọa độ đỉnh $I(-3;-5)$

Trục đối xứng là đường thẳng $x = -3$

Hệ số $a = 2 > 0$: bề lõm quay lên nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại tung độ đỉnh và bằng -5

b) Hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot (-\sqrt{2})} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ suy ra $y = 2\sqrt{2}$.

Tọa độ đỉnh $I(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

Trục đối xứng đường thẳng $x = -\sqrt{2}$.

Hệ số $a = -\sqrt{2} < 0$: bề lõm quay xuống dưới nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại tung độ đỉnh và bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi

- a) (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.
- b) (P) hoàn toàn nằm phía dưới trục hoành.
- c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

Lời giải

- a) Theo giả thiết thì bề lõm hướng lên trên và đỉnh có tung độ dương nên

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

- b) Theo giả thiết thì bề lõm hướng xuống dưới và đỉnh có tung độ âm nên

$$\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

- c) Theo giả thiết thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a < 0 \end{cases}.$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \left(\begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{cases} \right).$

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Câu 1. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x = -3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

a) Vì parabol (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên điểm $A(2; 0)$ thuộc (P) .

Thay $x = 2, y = 0$ vào (P) , ta được $0 = 4a + 6 - 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 3x - 2$.

b) Vì (P) có trục đối xứng $x = -3$ nên $-\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

c) Vì (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \Delta = 11a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 9 + 8a = 11a \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Vậy $(P): y = 3x^2 + 3x - 2$.

d) Vì (P) đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên suy ra

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{3}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không có (P) nào thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = 2x^2 + x + 2$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 2$.

c) Vì (P) đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} 9a + 3b + 2 = -4 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -2 \\ b = \frac{3}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$.

d) Vì (P) đi qua điểm $B(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} a - b + 2 = 6 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ b^2 - 4ac = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 8(4 + b) = 4 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 9b - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}.$$

□ Với $\begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases}$ ta có $(P): y = 16x^2 + 12x + 2$.

□ Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ ta có $(P): y = x^2 - 3x + 2$.

Câu 3. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1;-2)$.

Lời giải

a) Vì (P) có trục đối xứng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a \Leftrightarrow b = -4$.

Hơn nữa (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;4)$ nên $2.0 + b.0 + c = 4 \Leftrightarrow c = 4$.

Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(-1;-2)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ 16 - 8c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = 2x^2 + 4x$.

c) Vì (P) đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$ nên suy ra $\begin{cases} 2.0 + b.0 + c = -1 \\ 32 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -\frac{31}{4} \end{cases}.$

Vậy $(P): y = 2x^2 - \frac{31}{4}x - 1$.

d) Vì (P) có hoành độ đỉnh -2 nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a \Leftrightarrow b = 8$.

Hơn nữa (P) đi qua điểm $N(1; -2)$ nên $2 + b + c = -2 \Leftrightarrow 2 + 8 + c = -2 \Leftrightarrow c = -12$.

Vậy $(P): y = 2x^2 + 8x - 12$.

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1; 1)$, $B(2; -2)$.

b) Có đỉnh $I(0; 3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2; 0)$.

Lời giải

a) Vì (P) đi qua hai điểm $M(1; 1)$, $B(2; -2)$ nên suy ra $\begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 2$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(0; 3)$ và giao với Ox tại $A(-2; 0)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 3 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

Câu 5. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2; 1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3; 0)$.

Lời giải

a) Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua $M(-2; 1)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Vậy $(P): y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$.

b) Vì (P) có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3; 0)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 9a - 12 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 9a + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$, $O(0; 0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Lời giải

a) Vì (P) đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$ nên suy ra
$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=-3 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -x^2 + 2x$.

b) Gọi A và B là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là -1 và 2 . Suy ra $A(-1;0)$, $B(2;0)$.

Gọi C là giao điểm của (P) với trục Oy có tung độ bằng -2 . Suy ra $C(0;-2)$.

Theo giả thiết (P) đi qua ba điểm A, B, C nên ta có
$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 2$.

c) Gọi E và F là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là 1 và 3 . Suy ra $E(1;0)$, $F(3;0)$.

Theo giả thiết (P) đi qua ba điểm M, E, F nên ta có

$$\begin{cases} 16a+4b+c=-6 \\ a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 15a+3b=-6 \\ 8a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \\ c=-6 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -2x^2 + 8x - 6$.

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Lời giải

a) Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên ta có
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=2 \\ -\frac{\Delta}{4a}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b^2-4ac=4a \end{cases} \quad (1)$$

Gọi A là giao điểm của (P) với trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 . Suy ra $A(0;-3)$. Theo giả thiết $A(0;-3)$ thuộc (P) nên $a.0 + b.0 + c = -3 \Leftrightarrow c = -3$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} b = 4a \\ 16a^2 + 8a = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -\frac{1}{2}; b = -2; c = -3$.

Vậy $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

b) Vì (P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0), B(3;0)$ nên

$$\begin{cases} 0 = a.1 + b.1 + c \\ 0 = a.9 + b.3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hơn nữa (P) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = -1$ nên

$$-\frac{\Delta}{4a} = -1 \Leftrightarrow \Delta = 4a \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 4a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1, b = -4, c = 3$.

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4a = 0 \quad (1)$

Hơn nữa (P) đi qua hai điểm $M(0;1), N(2;1)$ nên ta có $\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1; b = -2; c = 1$.

Vậy $(P): y = x^2 - 2x + 1$.

d) Vì (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$ nên $-\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow b = -6a \quad (1)$

Hơn nữa (P) qua $M(-5;6)$ nên ta có $6 = 25a - 5b + c \quad (2)$

Lại có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-2 = a.0 + b.0 + c \Leftrightarrow c = -2 \quad (3)$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có hệ } \begin{cases} b = -6a \\ 25a + 30a - 2 = 6 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{55} \\ b = -\frac{48}{55} \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = \frac{8}{55}x^2 - \frac{48}{55}x - 2.$$

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$.

b) Đạt cực đại bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0; -1)$.

Lời giải

a) Vì hàm số đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 8a = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 6$.

$$\text{Vậy } (P): y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6.$$

b) Vì hàm số đạt cực đại bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0; -1)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -12a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 + 16a = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -1$, $b = 4$, $c = -1$.

$$\text{Vậy } (P): y = -x^2 + 4x - 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Lời giải

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$ nên ta có $4m + 4m - 3m - 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$. Do đó tọa độ đỉnh $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết đỉnh I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên ta có

$$-4m - 2 = 3.1 - 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Theo câu b) ta có tung độ đỉnh $y = -\frac{\Delta}{4a} = -4m - 2$.

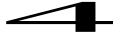
$$\text{Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng } -10 \text{ thì } \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số  có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2; 4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \text{ (nhận)} \\ c = 6 \end{cases}$$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\min_{[-2; 0]} f(x) = 3$.

Lời giải

Ta có $a = 4 > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I = \frac{m}{2}$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 \text{ (Vì } m > 0 \text{)}.$

Từ các trường hợp trên, ta được $m \in \left\{ \frac{-3}{2}; 3 \right\}.$

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii)

Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Câu 1. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau

a) $y = 2x - 3$ và $y = x^2 - 5x + 9$.

b) $y = 2x^2 + x - 3$ và $y = -x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

a) Tọa độ giao điểm của $y = 2x - 3$ và $y = x^2 - 5x + 9$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 5x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(4; 5)$ và $(3; 3)$.

b) Tọa độ giao điểm của $y = 2x^2 + x - 3$ và $y = -x^2 + 3x + 2$ là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 2 \\ 3x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{34}{9} \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm có tọa độ là $(-1; -2)$ và $(\frac{5}{3}; \frac{34}{9})$.

Câu 2. Cho parabol $y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m$. Tìm các giá trị m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . tìm tọa độ trung điểm của AB .

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) d không cắt (P) .

d) d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$-x^2 + 4x - 2 = -2x + m \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3m + 2 = 0 \quad (*)$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m + 2) > 0 \Leftrightarrow 7 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{3}.$$

Tọa độ trung điểm AB có dạng $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ với x_A, x_B là nghiệm của (*).

Theo định lý Viet, ta có $x_A+x_B=6$, suy ra $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=3$.

Ta có $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{(-2x_A+3m)+(-2x_B+3m)}{2}=-(x_A+x_B)+3m=-6+3m$.

Vậy $I(3;-6+3m)$.

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m+2) = 0 \Leftrightarrow 7 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Với $m = \frac{7}{3}$ phương trình (*) có nghiệm kép (nghiệm duy nhất) $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

Thay $x = 3$ vào hàm số $y = -x^2 + 4x - 2$, ta được $y = 1$.

Vậy tọa độ điểm chung là $(3;1)$.

c) d không cắt (P) khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m+2) < 0 \Leftrightarrow 7 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

d) Gọi $M(x_M; y_M)$ là giao điểm của d và (P) . Giao điểm này nằm trên đường thẳng $y = -2$ suy ra $y_M = -2$.

Mặt khác M thuộc (P) nên thay $x = x_M$ và $y = y_M = -2$ vào (P) ta được

$$-2 = -x_M^2 + 4x_M - 2 \Leftrightarrow x_M^2 - 4x_M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \Rightarrow M(0; -2) \\ x_M = 4 \Rightarrow M(4; -2) \end{cases}.$$

□ Với $M(0; -2)$, vì M cũng thuộc d nên ta có $-2 \cdot 0 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.

□ Với $M(4; -2)$, vì M cũng thuộc d nên ta có $-2 \cdot 4 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

a) d và (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 - 4x + 3 = mx + 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4+m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4+m \end{cases}$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi $4+m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Với $x = 0$ thì $y = 3$ suy ra $A(0;3) \in Oy$. Với $x = 4+m$ thì $y = m^2 + 4m + 3$ suy ra

$B(4+m; m^2 + 4m + 3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA. Suy ra $BH = |x_B| = |4 + m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m + 4| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |m + 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}.$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Giả sử $x_1 = 0$ và $x_2 = 4 + m$. Theo giả thiết, ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow 0 + (4 + m)^3 = 8 \Leftrightarrow 4 + m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2. Áp dụng cho trường hợp không tìm cụ thể x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 \quad (*)$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (4 + m)x = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 + m \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}. \text{ Thay vào } (*), \text{ ta được } (4 + m)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (4 + m) = 8 \Leftrightarrow m = -2. \quad \square$$

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh I của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

a) $y = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1$.

b) $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1 = 0$. (1)

$$\text{Ta có } \Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{m^2}{4} - 1\right) = 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

$$\text{Ta có } x = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \text{ suy ra } y = -1. \text{ Do đó tọa độ đỉnh } I\left(\frac{m}{2}; -1\right).$$

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$. (2)

$$\text{Ta có } \Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ hay (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

$$\text{Ta có } x = -\frac{b}{2a} = m \text{ suy ra } y = -1. \text{ Do đó tọa độ đỉnh } I(m; -1).$$

Vì $y_I = -1$ nên đỉnh I luôn chạy trên đường thẳng cố định $y = -1$.

Câu 5. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m - 2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi

$$m \Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13 \end{cases}$$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1; -3)$ hoặc $A_2(-3; 13)$ với mọi giá trị m .

Câu 6. Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.

b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ ($m \neq 0$).

Lời giải.

a) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (8m-4+a)x + 8m^2 - 3 - b = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (8m-4+a)^2 - 8(8m^2 - 3 - b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(-4+a)m + (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4+a=0 \\ (-4+a)^2 + 8(3+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$.

b) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^2 - (4m-1)x + 4m-1 = ax + b$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (4m-1+a)x + 4m-1-b = 0. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m-1+a)^2 - 4m(4m-1-b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 8m(-1+a)m + (-1+a)^2 - 16m^2 + 4m(1+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(2a+b-1)m + (-1+a)^2 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-1=0 \\ -1+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 7. Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ ($m \neq 0$).

b) $y = (4m-2)x - 4m^2 - 2$ $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 2mx = m^2 + 4m + 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2m)x + c + m^2 - 4m - 2 = 0. (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b - 2m)^2 - 4a(c + m^2 - 4m - 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - a)m^2 - 4(b - 4a)m + b^2 - 4ac + 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b - 4a = 0 \\ b^2 - 4ac + 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4m + 2)x + c + 4m^2 + 2 = 0. (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b - 4m + 2)^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow [4m - (b + 2)^2] - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(1 - a)m^2 - 8(b + 2)m + (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b + 2 = 0 \\ (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x - 2$.

DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

Dạng 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

a. Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

b. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Lời giải

a. Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t - 1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t = 1$ giây.

b. Ta có: $-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

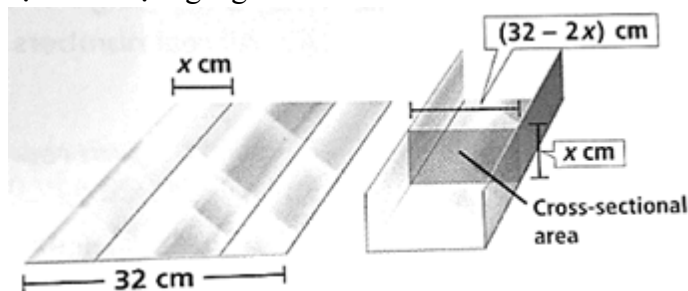
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$ (tính bằng mét), t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t \Rightarrow h(3) = 48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

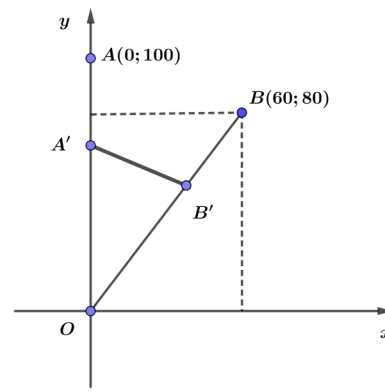
Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là

$$k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60-6t; 80-8t).$

Ta có: $\overline{A'B'} = (60-6t; -20-3t).$

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0;10]$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0;10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540.$

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000.$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Câu 1. Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$a > 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Trên khoảng $(-\infty; 1)$ hàm số đồng biến.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
C. Trên khoảng $(3; +\infty)$ hàm số nghịch biến.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Đỉnh của parabol: $x_l = -\frac{b}{2a} = 2$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	5	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra khẳng định **D** sai.

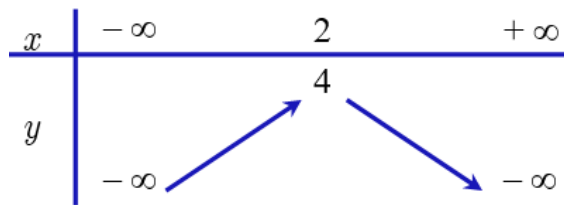
Câu 3. Hàm số $y = 4x - x^2$ có sự biến thiên trong khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. tăng. B. giảm.
C. vừa tăng vừa giảm. D. không tăng không giảm.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên



- Câu 4.** Hàm số $y = x^2 - 4x + 11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?
A. $(-2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; +\infty)$ **C.** $(2; +\infty)$ **D.** $(-\infty; 2)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	7	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

- Câu 5.** Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là
A. $(-\infty; -2)$. **B.** $(-\infty; 2)$.
C. $(-2; +\infty)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

- Câu 6.** Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là
A. $(-\infty; -4)$. **B.** $(-\infty; -4)$.
C. $(-\infty; 2)$. **D.** $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

- Câu 7.** Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.
A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Do $a = -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

- Câu 8.** Hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(1; +\infty)$. **B.** $(-2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có hàm số $(P): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$; nên (P) có bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh của parabol $x_I = \frac{-b}{2a} = 1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 9. Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải**Chọn D**

Hàm số bậc hai có $a = 2 > 0$; $-\frac{b}{2a} = 1$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 10. Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$. C. $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$.

Lời giải**Chọn A**

$(P): y = f(x) = -3x^2 + x - 2$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $a = -3$, đỉnh S có hoành độ $x = \frac{1}{6}$.

Nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 3)$ B. $(3; +\infty)$ C. $(-\infty; 6)$ D. $(6; +\infty)$

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0$, $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Đáp án A.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải**Chọn D**

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = x^2 - 3x + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Hàm số có $a = 1 > 0$, $\frac{-b}{2a} = m+1$ nên đồng biến trên khoảng $(m+1; +\infty)$.

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$ thì ta phải có

$$(4; 2018) \subset (m+1; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3.

Đáp án D.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

A. $b \geq 0$.

B. $b = -12$.

C. $b \geq -12$.

D. $b \geq -9$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x) = x^2 + 2(b+6)x + 4$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, $-\frac{b}{2a} = -b-6$

nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-(b+6)$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-(b+6))$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên $(6; +\infty)$ thì $\Leftrightarrow (6; +\infty) \subset (-b-6; +\infty) \Leftrightarrow -b-6 \leq 6 \Leftrightarrow b \geq -12$.

Câu 15. Hàm số $y = -x^2 + 2(m-1)x + 3$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

A. $m \leq 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường $x = m-1$. Đồ thị hàm số đã cho có hệ số x^2 âm nên sẽ đồng biến trên $(-\infty; m-1)$ và nghịch biến trên $(m-1; +\infty)$. Theo đề, cần: $m-1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

A. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $-3 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ có $a = -1 < 0$; $-\frac{b}{2a} = |m+1|$ nên hàm số nghịch biến trên $(|m+1|; +\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $(2; +\infty) \subset (|m+1|; +\infty)$

$$\Leftrightarrow |m+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m-1$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập nào?

A. $(-10; 5)$.

B. $[5; 10)$.

C. $(5; 10)$.

D. $(-10; 5]$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là đồ thị của $y = f(x) = x^2 + (m-1)x + 2m-1$.

$y = f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$.

Gọi I là đỉnh của (P) , có $x_I = \frac{1-m}{2}$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1-m}{2}; +\infty\right)$.

Do đó để hàm số trên khoảng $(-2; +\infty)$ khi $\frac{1-m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Suy ra tập $S = [5; +\infty)$. Khi đó $(-10; 10) \cap S = [5; 10)$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1; 2)$.

A. $m \leq 1$.

B. $-2 \leq m \leq 1$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

- Với $m > 0$, ta có hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2}{m}\right)$, suy ra hàm nghịch

biến trên $(-1; 2)$ khi $(-1; 2) \subset \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{2}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

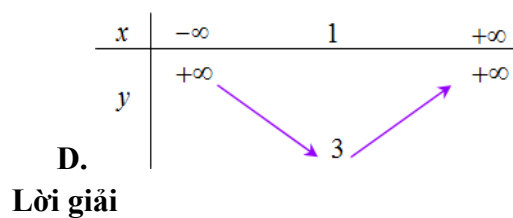
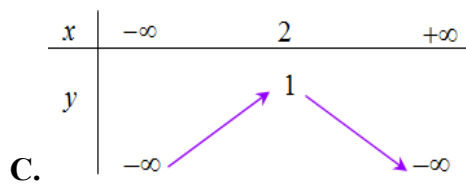
Câu 19. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

B.

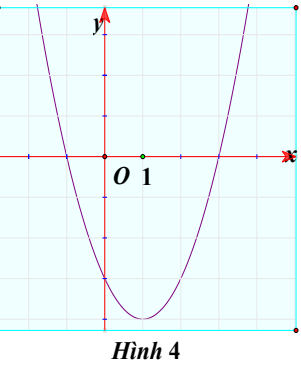
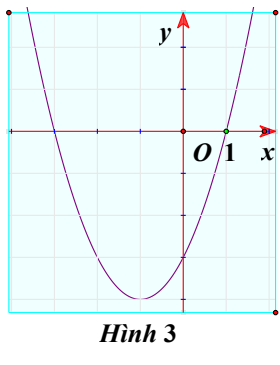
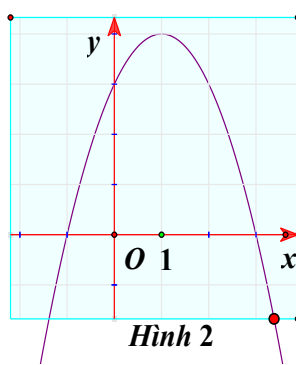
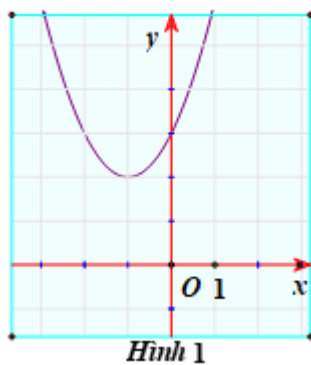
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$



Chọn B

Hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ có đỉnh $I(1;3)$, hệ số $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 20. Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$



A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị có:

$(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$; có $a = 1 > 0$; nên (P) có bề lõm hướng lên (loại hình 2).

(P) có đỉnh I có $x_I = 1$ (loại hình 1 và 3).

Vậy $(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là hình 4.

Câu 21. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ có hệ số $a = -2 < 0$ nên bề lõm quay lên trên vì vậy ta loại đáp án B,

D. Hàm số có tọa độ đỉnh $I(1;3)$ nên ta loại đáp án A.

Vậy bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng C.

Câu 22. Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là:

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Lời giải

Chọn A

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

Có $a = -1 < 0$, nên loại C và D.

Tọa độ đỉnh $I(1;0)$, nên nhận A.

Câu 23. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 2$?

A.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Lời giải

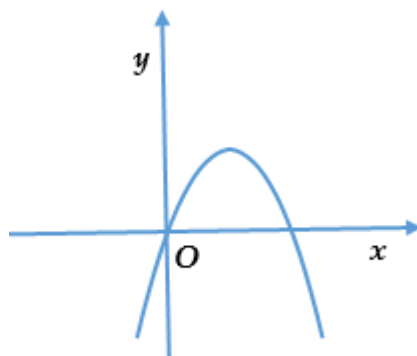
Chọn C

$$y' = -2x + 2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$; nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có hệ số a là



A. $a > 0$.

B. $a < 0$.

C. $a = 1$.

D. $a = 2$.

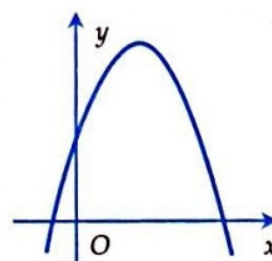
Lời giải

Chọn B

Bề lõm hướng xuống $a < 0$.

Câu 25. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$



vẽ dưới

B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0$

Lời giải

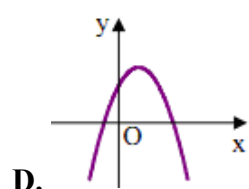
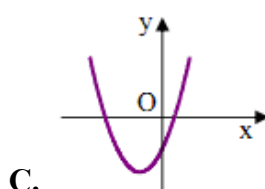
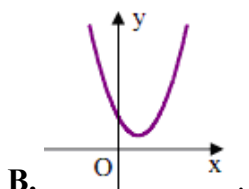
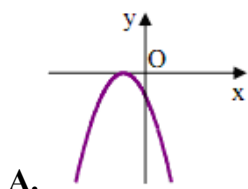
Đáp án C.

Parabol quay bề lõm xuống dưới $\Rightarrow a < 0$.

Parabol cắt Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Đỉnh của parabol có hoành độ dương $\Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$ mà $a < 0$ nên suy ra $b > 0$.

Câu 26. Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, b > 0$ và $c < 0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng



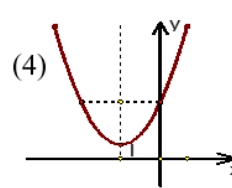
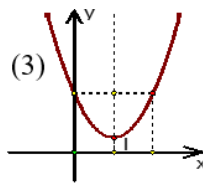
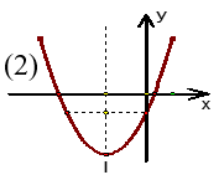
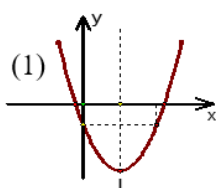
Lời giải

Chọn C

Do $a > 0$ nên Parabol quay bề lõm lên trên, suy ra loại phương án A, D. Mặt khác do $a > 0, b > 0$ nên đỉnh Parabol có hoành độ $x = -\frac{b}{2a} < 0$ nên loại phương án B. Vậy chọn C.

(Nhận xét: Với các đáp án này thừa dữ kiện $c < 0$)

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a > 0, b < 0, c > 0)$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình sau:



A. Hình (4).

B. Hình (2).

C. Hình (3).

D. Hình (1)

Lời giải

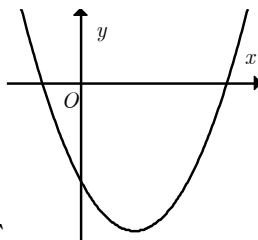
Chọn C

Vì $c > 0$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục hoành.

Mặt khác $a > 0, b < 0$ nên hai hệ số này trái dấu, trục đối xứng sẽ phía phải trục tung.

Do đó, hình (3) là đáp án cần tìm.

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B,

C. Chọn

A.

Câu 29. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Xác định dấu của a, b, c .

A. $a < 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

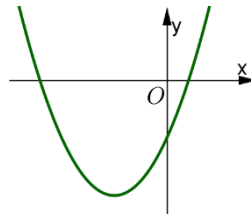
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol (P) có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

$$\text{cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng } -1 \text{ nên } \begin{cases} a < 0 \\ \frac{-b}{2a} > 0 \\ c = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

Lời giải

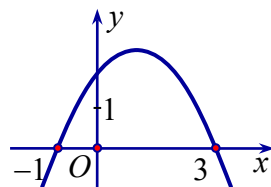
Chọn D

Vì Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c)$ ở dưới $Ox \Rightarrow c < 0$.

Hoành độ đỉnh Parabol là $-\frac{b}{2a} < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, nhận thấy:

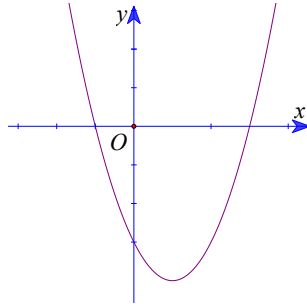
* Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

* Đồ thị cắt trục tung tại tung độ bằng c nên $c > 0$.

* Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$ nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ mà theo Vi-et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = -2a \Rightarrow b > 0$.

* Vậy $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

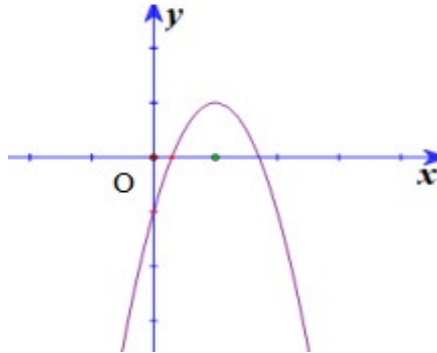
Chọn A

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ ($= c$) âm nên $c < 0$. Suy ra loại B, D.

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$, hoành độ đỉnh $\left(= -\frac{b}{2a} \right)$ dương nên

$$\frac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0.$$

Câu 33. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét:

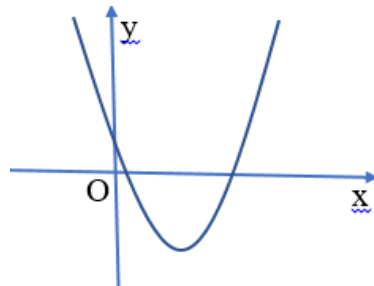
+) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

+) Parabol cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng 0 và tung độ âm nên thay $x = 0$ vào $y = ax^2 + bx + c$ suy ra $c < 0$.

+) Parabol có trục đối xứng nằm bên phải trục tung nên $x = -\frac{b}{2a} > 0$ mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b = 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

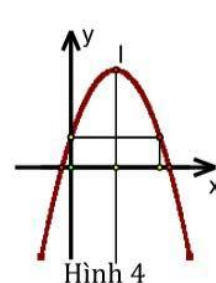
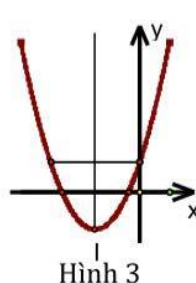
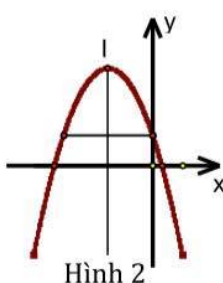
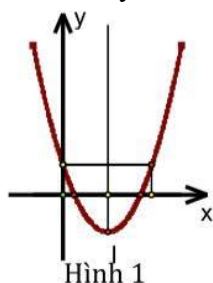
Chọn C

Từ dáng đồ thị ta có $a > 0$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ suy ra $b < 0$.

Câu 35. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a < 0; b < 0; c > 0$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



- A. hình (4). B. hình (3). C. hình (2). D. hình (1).

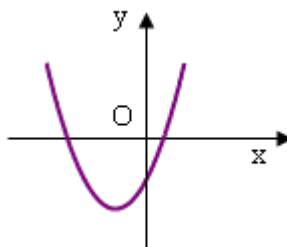
Lời giải

Chọn C

Vì $a < 0$ nên đồ thị có bề lõm hướng xuống dưới $\Rightarrow$ loại hình (1), hình (3).

$a < 0; b < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0$ nên trục đối xứng của (P) nằm bên trái trục tung. Vậy hình (2) thỏa mãn nên chọn đáp án **C**.

Câu 36. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

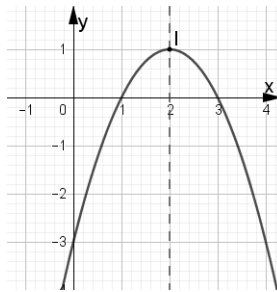
Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm nằm phía dưới trục Ox nên $C < 0$

Đồ thị có bề lõm hướng lên do đó $a > 0$

Tọa độ đỉnh nằm ở góc phần tư thứ III nên $\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 37. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



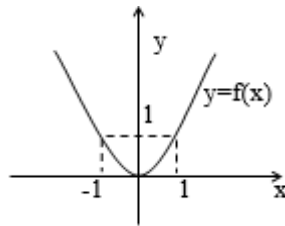
- A. $y = -x^2 + 4x - 3$. B. $y = -x^2 - 4x - 3$. C. $y = -2x^2 - x - 3$. D. $y = x^2 - 4x - 3$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$. Loại phương án D.
Trục đối xứng: $x = 2$ do đó chọn A.

Câu 38. Đồ thị hàm số sau biểu diễn đồ thị hàm số nào?



- A. $y = 2x^2$. B. $y = x^2$. C. $y = -x^2$. D. $y = \frac{1}{2}x^2$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị có hệ số $a > 0$ nên loại C.

Đồ thị đi qua điểm $(1; 1)$ nên loại A và loại D.

Câu 39. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

- A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = -3x^2 + 6x - 1$. C. $y = x^2 + 2x - 1$. D. $y = x^2 - 2x + 2$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$. Loại B.

Tọa độ đỉnh $I(1; 2) \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 > 0$. Suy ra $b < 0$. Loại C.

Thay $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Loại D.

Câu 40. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

- A. $y = x^2 - 4x$. B. $y = x^2 + 4x$. C. $y = -x^2 + 4x$. D. $y = -x^2 - 4x$.

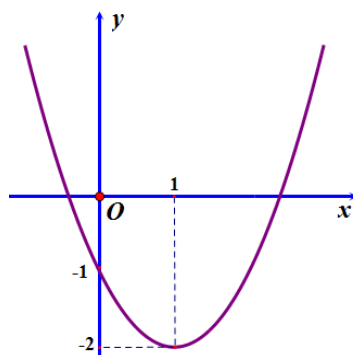
Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số $a > 0$. Loại C, D

Toạ độ đỉnh $I = (2; -4)$ loại **B**

Câu 41. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?



- A. $y = x^2 + 2x - 1$. B. $y = x^2 + 2x - 2$. C. $y = 2x^2 - 4x - 2$. D. $y = x^2 - 2x - 1$.

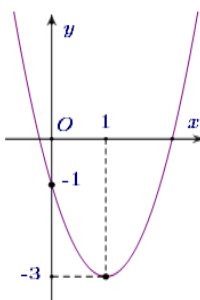
Lời giải

Chọn D

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên loại **B** và **C**

Hoành độ của đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta loại A và chọn **D**.

Câu 42. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Lời giải

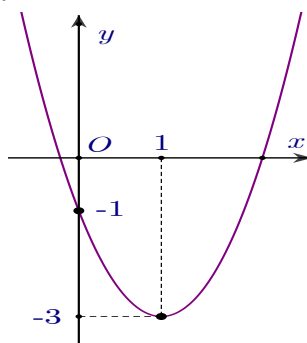
Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ nên $c = -1$.

Tọa độ đỉnh $I(1; -3)$, ta có phương trình:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy parabol cần tìm là: $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 43. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau:



Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên suy ra $c = -1$ (1)

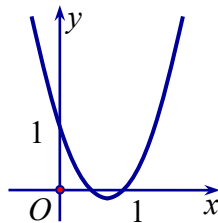
Đồ thị có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \equiv I(1; -3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \\ \frac{-\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \Delta = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 4a^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} c = -1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -1 \end{cases}$.

Ta được parabol có phương trình là $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 44. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?



- A. $y = x^2 - 3x + 1$. B. $y = 2x^2 - 3x + 1$. C. $y = -x^2 + 3x - 1$. D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

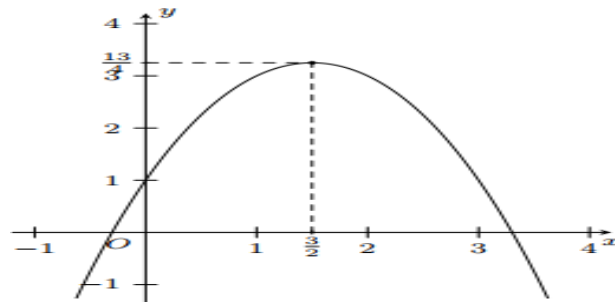
Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số bậc hai có hệ số $a > 0$ nên ta loại đáp án C, D.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(1; 0)$, mà điểm $(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ và không thuộc đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ nên ta chọn B.

Câu 45. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

- A. $y = x^2 + 3x - 1$. B. $y = x^2 - 3x - 1$. C. $y = -x^2 - 3x - 1$. D. $y = -x^2 + 3x + 1$.

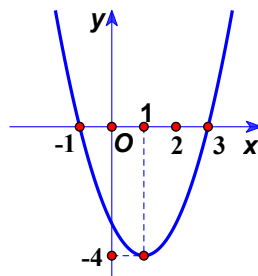
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số là parabol có bề lõm quay xuống nên hệ số $a < 0$. Loại đáp án A, B.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại đáp án C.

Câu 46. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



A. -9.

B. 9.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

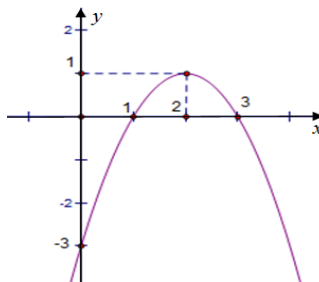
Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$ nên có hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 47. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



A. $y = -x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^2 + 4x - 3$.

C. $y = x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x - 3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị trên là của hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và có tọa độ đỉnh là $I(2; 1)$. Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

Câu 48. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

A. $y = -x^2 + 4x$.

B. $y = -x^2 + 4x - 9$.

C. $y = x^2 - 4x - 1$.

D. $y = x^2 - 4x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Parabol cần tìm phải có hệ số $a > 0$ và đồ thị hàm số phải đi qua điểm $(2; -5)$. Đáp án C thỏa mãn.

Câu 49. Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$

- A. $y = x^2 + 4x$. B. $y = -x^2 - 4x - 8$. C. $y = -x^2 - 4x + 8$. D. $y = -x^2 - 4x$.

Lời giải

Chọn B

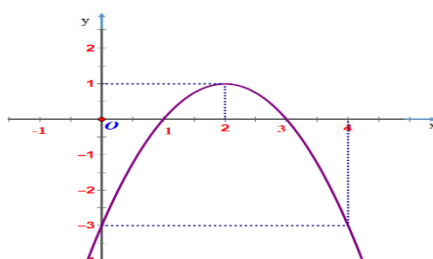
Dựa vào BBT ta thấy:

Parabol có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Loại A.

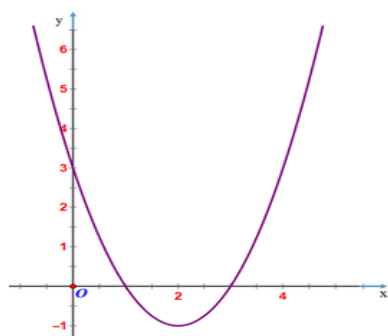
Parabol có đỉnh $I(-2; -4)$ nên thay $x = -2; y = -4$ vào các đáp án B, C, D.

Nhận thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

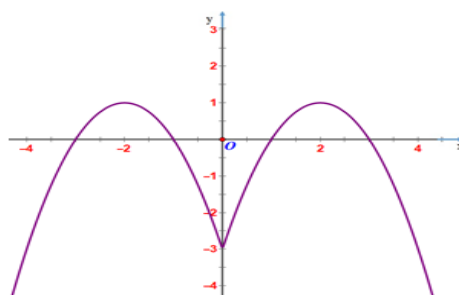
Câu 50. Cho đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ có đồ thị như hình vẽ sau



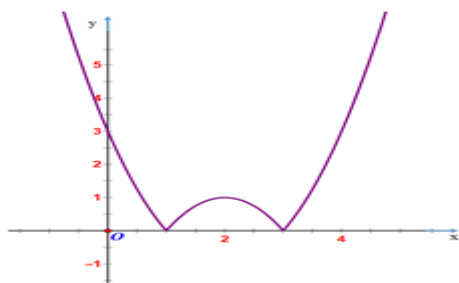
Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$



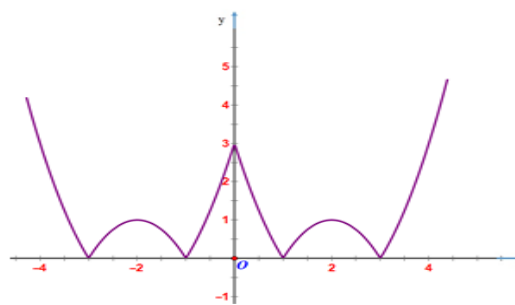
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 2 B. Hình 4 C. Hình 1 D. Hình 3

Lời giải

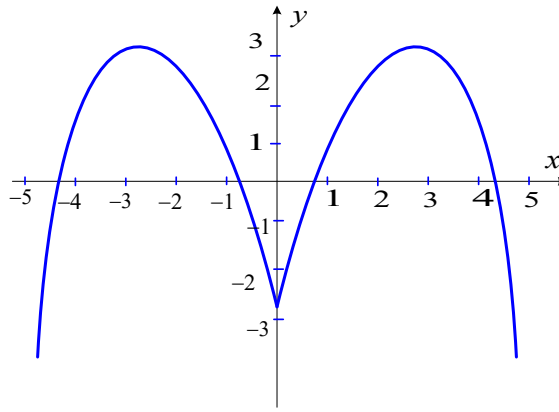
Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần

Phần 1: ứng với $y \geq 0$ của đồ thị $y = f(x)$.

Phần 2: lấy đối xứng phần $y < 0$ của đồ thị $y = f(x)$ qua trục Ox .

Câu 51. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- A. $y = x^2 - 3x - 3$. B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$. C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$. D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta loại A. và

D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị

(P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là

$x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy. Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

Câu 52. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (P). Tìm mệnh đề sai.

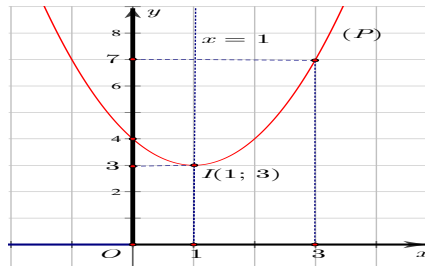
A. (P) có đỉnh $I(1; 3)$. B. $\min y = 4, \forall x \in [0; 3]$.

C. (P) có trục đối xứng $x = 1$.

D. $\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 4$: (P), ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1; 3)$ nên A đúng.

$\min y = 3, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x = 1$ nên C đúng.

$\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 3$ nên D đúng.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3.

B. 1.

C. 3.

D. 13.

Lời giải

Chọn A.

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x = 2$.

Câu 54. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ nên chọn đáp án **B.**

Câu 55. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

A. -3 .

B. -2 .

C. $-\frac{21}{8}$.

D. $-\frac{25}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$y = 2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{25}{8} \geq \frac{-25}{8}$$

$$y = \frac{-25}{8} \text{ khi } x = \frac{-1}{4} \text{ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số } y = 2x^2 + x - 3 \text{ là } \frac{-25}{8}.$$

Câu 56. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

B. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

C. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

D. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$$

$$\text{Vì } a = -3 < 0 \text{ nên hàm số có giá trị lớn nhất là: } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{12}.$$

Đáp án A.

Câu 57. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$ là:

A. 17

B. 25

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{16}{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{5} \in [-2; 2], a = 5 > 0. \text{ Do đó } \min_{[-2; 2]} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4}{5}.$$

Để dễ hiểu hơn, ta quan sát bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$

Lưu ý: $\max_{[-2;2]} f(x) = \max \{f(-2), f(2)\} = \max \{17, 25\} = 25$.

Câu 58. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $\frac{4}{5}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. -20

Lời giải

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$ và $a = -3 < 0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Mà

$[1; 3] \subset \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó trên đoạn $[1; 3]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$, tức là

$$\max_{[1;3]} f(x) = f(1) = 0.$$

Đáp án B.

Câu 59. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

- A. $\frac{11}{8}$ B. $\frac{11}{4}$ C. $\frac{4}{11}$ D. $\frac{8}{11}$

Lời giải

Đáp án D.

Hàm số $y = x^2 - 5x + 9$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{4} > 0$.

Suy ra hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$.

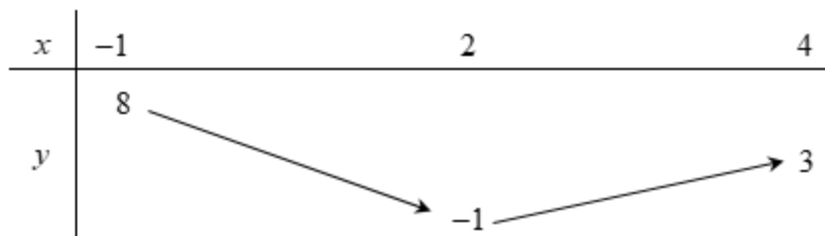
Câu 60. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1; 4]$ là

- A. -1. B. 2. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Xét trên miền $[-1; 4]$ thì hàm số có bảng biến thiên là



Từ bảng biến thiên suy ra: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 nên tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $8 + (-1) = 7$.

Câu 61. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

- A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

Lời giải

Đáp án C.

Cách 1: Đặt $t = |x|, t \geq 0$.

Hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $t = 1 > 0$.

Vậy hàm số $y = x^2 - 2|x|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Cách 2: Ta có

$$y = x^2 - 2|x| = (|x| - 1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x; \quad y = -1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Câu 62. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4|x| + 3$ là:

A. -1

B. 1

C. 4

D. 3

Lời giải

Đáp án D.

Ta có $x^2 \geq 0 \quad \forall x, |x| \geq 0 \quad \forall x$.

Suy ra $x^2 + 4|x| + 3 \geq 3 \quad \forall x$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 3 .

Câu 63. Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1; 4]$. Tính $M + m$.

A. -14 .

B. -13 .

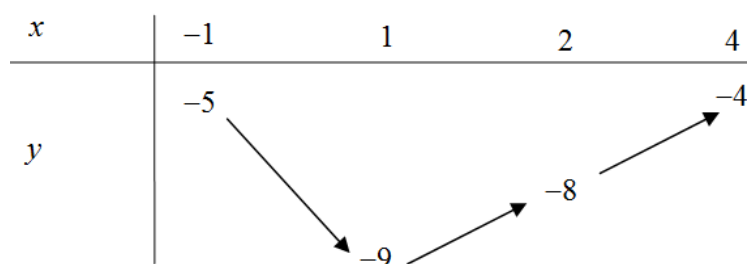
C. -4 .

D. -9 .

Lời giải

Chọn B

BBT



Dựa vào BBT ta có $M = -4, m = -9$.

Vậy $M + m = -4 + (-9) = -13$.

Câu 64. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 65. Hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi m thuộc

A. $(-\infty; 5)$.

B. $[7; 8)$.

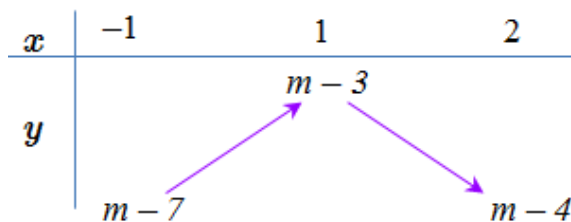
C. $(5; 7)$.

D. $(9; 11)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-1; 2]$.



Hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi và chỉ khi $m - 3 = 3 \Leftrightarrow m = 6$.

- Câu 66.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là
A. $m = \pm 4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Theo đề bài ta có $y\left(-\frac{b}{2a}\right) = 1 \Leftrightarrow y(-m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Câu 67.** Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $m \in [-1; 0)$. **B.** $m \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. **D.** $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2 = (x - m)^2 - 3m - 2 \geq -3m - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = m$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -3m - 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3m - 2 = -10 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$.

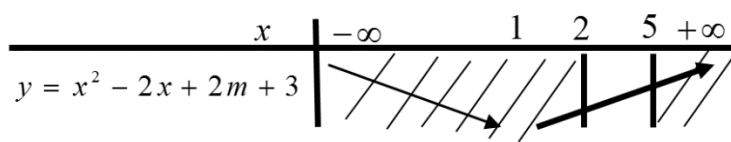
- Câu 68.** Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .
A. $m = 0$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có hệ số $a = 1 > 0, b = -2$, trục đối xứng là đường thẳng

$x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên đoạn $[2; 5]$ suy ra giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng $f(2)$. Theo giả thiết $f(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

- Câu 69.** Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .
A. $m = -3$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$. Như vậy trên đoạn $[2; 5]$ hàm số đồng biến. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$ là $y(2) = 2m + 3$.
 $y(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 70. Tìm số các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0; 1]$ là bằng 1.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Đáp án C.

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{-(2m+1)}{2}; \Delta = 4m + 5$.

Vì $a > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có điểm thấp nhất là đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

$$\frac{-b}{2a} \in (0; 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{-(2m+1)}{2} < 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} < m < \frac{-1}{2} \quad (1).$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4m+5)}{4}.$$

$$\text{Vậy ta phải có } \frac{-(4m+5)}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-9}{4} \text{ (không thỏa mãn (1)).}$$

* Trường hợp 2:

$$\frac{-b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{2} \quad (2).$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m^2 - 1.$$

$$\text{Ta phải có } m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Chỉ có } m = -\sqrt{2} \text{ thỏa mãn (2).}$$

* Trường hợp 3:

$$\frac{-b}{2a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{2} \quad (3).$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = f(1) = m^2 + 2m + 1.$$

$$\text{Ta phải có } m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -2.$$

$$\text{Chỉ có } m = -2 \text{ thỏa mãn (3).}$$

$$\text{Vậy } m \in \{-2; -\sqrt{2}\}.$$

- Câu 71.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$. Đặt $m = \min_{x \in [-1;1]} f(x)$ và $M = \max_{x \in [-1;1]} f(x)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $M - m = 8$. Tính tổng bình phương các phần tử thuộc S .
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Lời giải

Đáp án C.

Đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh có hoành độ $x_0 = m + \frac{1}{m}$.

$$\text{Ta có } |x_0| = \left| m + \frac{1}{m} \right| = |m| + \left| \frac{1}{m} \right|$$

$$\geq 2\sqrt{|m| \cdot \left| \frac{1}{m} \right|} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \pm 1$

Vậy $x_0 \notin [-1;1]$.

Ta thấy nếu $x_0 < -1$ thì

$$m = \min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(-1),$$

$$M = \max_{x \in [-1;1]} f(x) = f(1).$$

Ngược lại nếu $x_0 > 1$ thì

$$m = \min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(1),$$

$$M = \max_{x \in [-1;1]} f(x) = f(-1).$$

$$\text{Vậy } M - m = 8 \Leftrightarrow |f(1) - f(-1)| = 8$$

$$\Leftrightarrow \left| 4\left(m + \frac{1}{m}\right) \right| = 8 \Leftrightarrow \left| m + \frac{1}{m} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy $S = \{-1;1\}$. Do đó tổng bình phương các phần tử thuộc S bằng 2.

- Câu 72.** Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m \in (1;4)$. B. $m \in (3;9)$. C. $m \in (-5;1)$. D. $m \in (-2;2)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai (biến x) và có hệ số $a = 2 > 0$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-m^2 + 6m - 25}{8}. \text{ Đặt } f(m) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{25}{8}.$$

$f(m)$ là hàm số bậc hai (biến m) có hệ số $a = -\frac{1}{8} < 0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3 \in (1;4).$$

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 3x + 2)$ trên đoạn $[0; 2]$ là bằng 3.

- A. $\{-1; 4 + \sqrt{7}\}$. B. $\{4 + \sqrt{7}\}$. C. $\{-1\}$. D. $\{1; 4 - \sqrt{7}\}$.

Lời giải

Ta có: tọa độ đỉnh $I\left(\frac{4a+3}{8}; \frac{23-24a}{16}\right)$

BBT:

x	$-\infty$	$\frac{4a+3}{8}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{23-24a}{16}$	$+\infty$

+ Nếu $\frac{4a+3}{8} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq \frac{13}{4}$

$\min_{x \in [0; 2]} y = f(2) = a^2 - 8a + 12 = 3 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + \sqrt{7} \text{ (TM)} \\ a = 4 - \sqrt{7} \text{ (Loại)} \end{cases}$

+ Nếu $\frac{4a+3}{8} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{3}{4}$

$\min_{x \in [0; 2]} y = f(0) = a^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (Loại)} \\ a = -1 \text{ (TM)} \end{cases}$

+ Nếu $0 < \frac{4a+3}{8} < 2 \Rightarrow 0 < a < \frac{13}{4} : \min_{x \in [0; 2]} y = \frac{23-24a}{16} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{-25}{24}$, loại.

Vậy các giá trị cần tìm của a là: $a \in \{4 + \sqrt{7}; -1\}$.

Câu 74. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

- A. $m = -2$ B. $m = 1$ C. $m = 3$ D. $m = 5$

Lời giải

Chọn C

Hàm số bậc hai với hệ số $a = 2 > 0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3(m+1)}{4}$ và

$y_{\min} = y\left(\frac{3(m+1)}{4}\right) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{25}{8} = -\frac{1}{8}(m-3)^2 - 2 \leq -2$.

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$.

Câu 75. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = 3$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = \frac{9}{2}$.

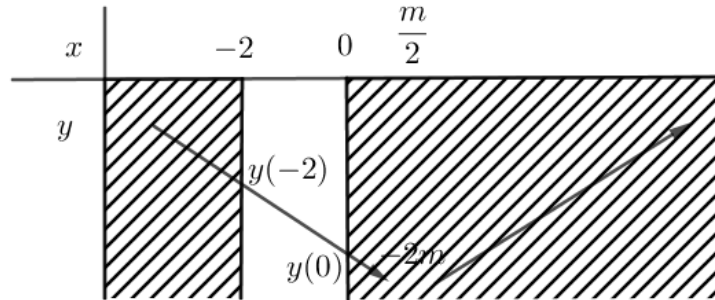
D. $T = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có đỉnh $I\left(\frac{m}{2}; -2m\right)$.

Do $m > 0$ nên $\frac{m}{2} > 0$. Khi đó đỉnh $I \notin [-2; 0]$.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ là $y(0) = 3$ tại $x = 0$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{3\}.$$

Câu 76. Cho hàm số $y = x^2 - (m + \sqrt{m^2 - 4})x + 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}$ ($m \neq 0$). Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Số giá trị của m để $y_1 - y_2 = 8$ là

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điều kiện của m là $m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

- Xét $m \leq -2$ ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} < 0$. Khi đó các số $0; 1$ đều nằm bên phải $-\frac{b}{2a}$ nên

$$y_2 = y(0) = 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}; y_1 = y(1) = \sqrt{m^2 - 4} + 3m + 1.$$

$$y_1 - y_2 = 8 \Leftrightarrow -m - 7 = \sqrt{m^2 - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -7 \\ m = -\frac{53}{14} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

- Xét $m \geq 2$ ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \geq \frac{m}{2} = 1$; khi đó $0; 1$ đều nằm bên trái $-\frac{b}{2a}$ suy ra

$$y_1 = y(0) = 4m + 2\sqrt{m^2 - 4}; y_2 = y(1) = \sqrt{m^2 - 4} + 3m + 1$$

$$y_1 - y_2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 4} = 9 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 9 \\ m = \frac{85}{18} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{85}{18}.$$

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 77. Giả sử hàm số $y = -x^2 + 2x + 4\sqrt{(3-x)(x+1)} + 3$ có tập giá trị $W = [a; b]$. Hãy tính giá trị của biểu thức $K = a^2 + b^2$.

A. $K = 145$.B. $K = 144$.C. $K = 143$.

D. 169.

Lời giải**Chọn B**

- Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow (3-x)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy TXĐ: $D = [-1; 3]$.

- Đặt $t = \sqrt{(3-x)(x+1)}$, với $t \in [0; 2]$.

$$\Rightarrow t^2 = (3-x)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = -x^2 + 2x + 3.$$

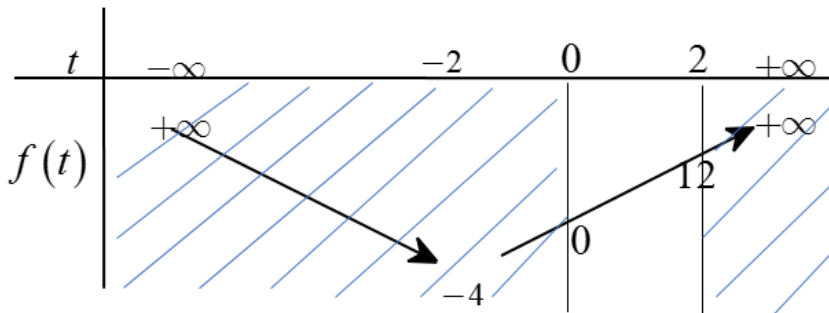
Khi đó hàm số đã cho trở thành: $f(t) = t^2 + 4t$, với $t \in [0; 2]$.

Ta có đỉnh I của Parabol (P) của hàm số $f(t) = t^2 + 4t$ có hoành độ: $t_I = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$.

Khi đó $f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4$.

Hay $I(-2; -4)$.

- Ta lập BBT hàm số $f(t) = t^2 + 4t$, với $t \in [0; 2]$.



- Từ BBT ta suy ra tập giá trị của hàm số đã cho là $W = [0; 12]$. Khi đó $K = 0^2 + 12^2 = 144$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{cases}$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Câu 1. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. C. $I\left(\frac{b}{a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$. D. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đỉnh của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

A. $I(0;1)$. B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ đỉnh của $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$ là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 3. Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x = -\frac{b}{2a}$. B. $x = -\frac{c}{2a}$. C. $x = -\frac{\Delta}{4a}$. D. Không có.

Lời giải

Chọn A

Câu 4. Điểm $I(-2;1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

A. $y = x^2 + 4x + 5$. B. $y = 2x^2 + 4x + 1$. C. $y = x^2 + 4x - 5$. D. $y = -x^2 - 4x + 3$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = -2$. Từ đó loại câu B.

Thay hoành độ $x_I = -2$ vào phương trình Parabol ở các câu A, C, D, ta thấy chỉ có câu A thỏa điều kiện $y_I = 1$.

Câu 5. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x_I = -1 \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -1 \Rightarrow a = 2$.

Hơn nữa $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3$.

Câu 6. Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.**Lời giải****Chọn C**

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ: } \begin{cases} a-b+c=0 \\ -\frac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=2 \end{cases} \text{ với } a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ b=-2a \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Câu 7. Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$.

Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^2 - 2c$.

A. $T = 22$.B. $T = 9$.C. $T = 6$.D. $T = 1$.**Lời giải****Chọn A**

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ -\frac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ b=-2a \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-2a \\ -a+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-4 \\ a=2 \end{cases}$$

Vậy $T = a^3 + b^2 - 2c = 22$.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P). Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$

A. 3.

B. 4.

C. 29.

D. 1.

Lời giải**Chọn C**

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ -\frac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Nên $S = a^2 + b^2 + c^2 = 29$

Câu 9. Cho Parabol (P): $y = x^2 + mx + n$ (m, n tham số). Xác định m, n để (P) nhận đỉnh $I(2;-1)$.

A. $m = 4, n = -3$.B. $m = 4, n = 3$.C. $m = -4, n = -3$.D. $m = -4, n = 3$.**Lời giải****Chọn D**

Parabol (P): $y = x^2 + mx + n$ nhận $I(2;-1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases} 4+2m+n=-1 \\ -\frac{m}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+n=-5 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=-4 \end{cases}$$

Vậy $m = -4, n = 3$.

Câu 10. Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(2;0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó Parabol (P) có hàm số là

A. (P): $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$.

B. (P): $y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$.

C. (P): $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

D. (P): $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

Lời giải

Chọn C

Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Theo bài ra, ta có (P) có đỉnh $I(2;0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ c - \frac{b^2}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \quad (1)$

Lại có (P) cắt Oy tại điểm $M(0;-1)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1 \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} b = -4a \\ b^2 = -a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = b \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1; c = -1 \end{cases} \quad (\text{vì } b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ loại})$

Câu 11. Gọi S là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol (P): $y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$. Tính tổng các giá trị của tập S

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Khi $m \neq 0$ thì (P): $y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(-1; m^2 + m)$

Vì đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$ nên

$m^2 + m = -1 + 7 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases} (TM)$

Vậy tổng các giá trị của tập S : $2 + (-3) = -1$.

Câu 12. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (1) biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = -x^2 + 3x + 2$.

B. $y = -x^2 - 3x - 2$.

C. $y = x^2 - 3x + 2$.

D. $y = -x^2 + 3x - 2$.

Lời giải

Chọn D

. Do đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên ta có

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a + 6b + 4c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $y = -x^2 + 3x - 2$

Câu 13. Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$?

A. $y = -x^2 + 5x - 8$. B. $y = -2x^2 + 10x - 12$.

C. $y = x^2 - 5x$. D. $y = -2x^2 + 5x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số bậc hai cần tìm có phương trình: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{1}{2} \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5a \\ \frac{-25a^2 + 4a(4a - 4)}{4a} = \frac{1}{2} \\ c = 4a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \\ c = -12 \end{cases}$$

Câu 14. Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a + b + c$, biết (P) đi qua điểm $A(0; 3)$ và có đỉnh $I(-1; 2)$.

A. $a + b + c = 6$

B. $a + b + c = 5$

C. $a + b + c = 4$

D. $a + b + c = 3$

Lời giải

(P) đi qua điểm $A(0; 3) \Rightarrow c = 3$.

$$(P) \text{ có đỉnh } I(-1; 2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -1 \\ a - b + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

Đáp án A.

Câu 15. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua $A(0; 6)$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

B. $y = x^2 + 2x + 6$.

C. $y = x^2 + 6x + 6$.

D. $y = x^2 + x + 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$. (1)

$$\text{Mặt khác: Vì } A, I \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 6 = a.(0)^2 + b.(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Kết hợp (1),(2) ta có : } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases} . \text{ Vậy } (P): y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$

- Câu 16.** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là
A. $y = x^2 - x + 1$. **B.** $y = x^2 - x - 1$. **C.** $y = x^2 + x - 1$. **D.** $y = x^2 + x + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: Vì } A, B, C \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a.0^2 + b.0 + c \\ -1 = a.(1)^2 + b.(1) + c \\ 1 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (P): y = x^2 - x - 1.$$

- Câu 17.** Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là
A. $y = x^2 + x + 2$. **B.** $y = 2x^2 + x + 2$. **C.** $y = 2x^2 + 2x + 2$ **D.** $y = x^2 + 2x$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5 = a.1^2 + b.1 + 2 \\ 8 = a.(-2)^2 + b.(-2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} . \text{ Vậy hàm số cần tìm là } y = 2x^2 + x + 2.$$

- Câu 18.** Cho $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó
A. $b = -1$. **B.** $b = 1$. **C.** $b = 3$. **D.** $b = -2$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $A(-1;3)$ vào $(P): y = x^2 + bx + 1$.

$$\text{Ta được: } 3 = (-1)^2 - b + 1 \Leftrightarrow b = -1.$$

- Câu 19.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4)$, $B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tọa độ đỉnh của (P) là:

- A.** $(-2;-11)$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(3;6)$

Lời giải

$(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4)$, $B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$ suy ra

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -4 \\ 4a - 2b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4x + 1.$$

Hoành độ của đỉnh của (P) là $x = \frac{-b}{2a} = 2$. Suy ra tung độ của đỉnh của (P) là

$$y = -2^2 + 4.2 + 1 = 5.$$

Đáp án B.

DẠNG 3. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC

Dạng 1. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

Dạng 2. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó toạ độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dạng 3. Điểm cố định của đồ thị hàm số

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Câu 1. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:

- A. $(1; 0); (3; 2)$. B. $(0; -1); (-2; -3)$.
C. $(-1; 2); (2; 1)$. D. $(2; 1); (0; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$x = 1 \Rightarrow y = x - 1 = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow y = x - 1 = 2$$

Hai giao điểm là: $(1; 0); (3; 2)$.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

- A. $M(0; -2), N(2; -4)$. B. $M(-1; -1), N(-2; 0)$.
C. $M(-3; 1), N(3; -5)$. D. $M(1; -3), N(2; -4)$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là $M(1; -3), N(2; -4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số không cắt trục tung. B. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại gốc tọa độ.
C. Đồ thị hàm số không có trục đối xứng. D. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Lời giải

Chọn D

Parabol đã cho có hệ số $c = 1$ nên sẽ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Câu 4. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

- A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$. B. $(2; 2)$ và $(4; 8)$. C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$. D. $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Lời giải**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$.

- Câu 5.** Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 1 - x$ với $(P): y = x^2 - 2x + 1$ là
A. $x = 0; x = 1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0; x = 2$. **D.** $x = 0$.

Lời giải**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$1 - x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

- Câu 6.** Gọi $A(a; b)$ và $B(c; d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6$. Giá trị của $b + d$ bằng.
A. 7. **B.** -7. **C.** 15. **D.** -15.

Lời giải**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x - x^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -15 \end{cases}$

$$b + d = -15$$

- Câu 7.** Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x-1) = x^2 - 5x + 5 \forall x \in \mathbb{R}$. Số giao điểm của (P) và trục hoành là:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Ta có $f(x-1) = x^2 - 5x + 5 = (x-1)^2 - 3(x-1) + 1$. Suy ra $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có $\Delta = 3^2 - 4.1.1 = 5 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Đáp án C.

- Câu 8.** Cho hai parabol có phương trình $y = x^2 + x + 1$ và $y = 2x^2 - x - 2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm A và B ($x_A < x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng AB .
A. $AB = 4\sqrt{2}$ **B.** $AB = 2\sqrt{26}$ **C.** $AB = 4\sqrt{10}$ **D.** $AB = 2\sqrt{10}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol:

$$2x^2 - x - 2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$x = -1 \Rightarrow y = 1; x = 3 \Rightarrow y = 13$, do đó hai giao điểm là $A(-1; 1)$ và $B(3; 13)$.

Từ đó $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (13-1)^2} = 4\sqrt{10}$.

Đáp án C.

- Câu 9.** Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?
A. $m < -\frac{9}{4}$. **B.** $m > -\frac{9}{4}$. **C.** $m > \frac{9}{4}$. **D.** $m < \frac{9}{4}$.

Lời giải

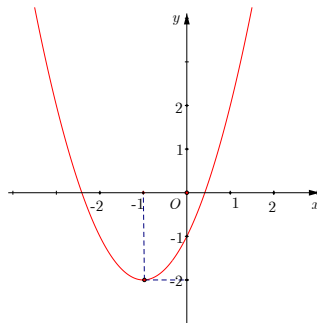
Chọn D

Cho $x^2 + 3x + m = 0$ (1)

Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}.$$

Câu 10. Hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.



A. $m < -2$.

B. $m < -1$.

C. $m < 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải**Chọn D**

$$x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -m - 1 \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của parabol $y = x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = -m - 1$.

$$\text{Ycbt} \Rightarrow m > 1.$$

Câu 11. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

A. 6

B. 5

C. 7

D. 8

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 + x - 2 = -(m+1)x + m + 2 \Leftrightarrow x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0 \quad (*).$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Vậy có 6 giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ thỏa mãn ycbt.

Đáp án A.

Câu 12. Cho parabol $(P): y = x^2 - mx$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 1$, trong đó m là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N , tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

A. một parabol

B. một đường thẳng

C. một đoạn thẳng

D. một điểm

Lời giải

Đáp án A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 - mx = (m+2)x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0 \quad (*)$$

(*) có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Do đó (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m . Khi đó x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của (*).

Theo Viet ta có $x_M + x_N = 2(m+1)$.

$$\text{Ta có } x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m+1.$$

$$\text{Suy ra } y_I = (m+2)(m+1) + 1$$

$$= (m+1)^2 + (m+1) + 1 = x_I^2 + x_I + 1.$$

Vậy I luôn thuộc parabol $y = x^2 + x + 1$ với mọi m .

Chú ý: Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

- Câu 13.** Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (P) . Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$. Tổng bình phương các phần tử của S là
- A. 6. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 3x = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 = 0 \quad (1)$.

Đề d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1), khi đó $A(x_1; x_1 + m^2), B(x_2; x_2 + m^2)$

$$\Rightarrow I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2 + 2m^2}{2}\right)$$

Theo Vi ét ta có $x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = -m^2$ nên $I(-1; m^2 - 1)$.

Vì I thuộc d' nên $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

- Câu 14.** Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1 \quad (1)$, m là tham số và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + m^2$. Tính giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$.

A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = -\frac{3}{4}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3mx + m^2 + 1 = mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 1 = 0 \quad (*)$$

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} (**).$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$, suy ra (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 > 0 \\ 4m \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Lại có, $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 1 \Leftrightarrow 4m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = \frac{3}{4}$.

- Câu 15.** Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$ (1). Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1 x_2 + 7$ là
- A. -10. B. 10. C. -6. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 3x - 5 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 5 - m = 0$ (*)

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m - 5) > 0$

$$\Leftrightarrow 8m + 89 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{89}{8}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (*) nên theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-5-m}{2} \end{cases}$.

$$2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1 x_2 + 7 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 7x_1 x_2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{-5-m}{2}\right) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 70 + 7m = 0 \Leftrightarrow m = -10 \text{ (thỏa mãn đk } m > -\frac{89}{8} \text{)}.$$

Vậy $m = -10$ là giá trị cần tìm.

- Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?
- A. 6. B. 9. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$ (*)

Đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$ (*).

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 18. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 19. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 5$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 2 - 3m$. Tìm tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

- A. $1 < m < \frac{7}{3}$. B. $m > 1$. C. $m > \frac{7}{3}$. D. $m < 1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 + 2x - 5 = 2mx + 2 - 3m \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x - 7 + 3m = 0 \quad (*)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung khi và chỉ khi phương trình

(*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 + 7 - 3m > 0 \\ -2(1-m) > 0 \\ -7 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ 1-m < 0 \\ 3m - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } m > \frac{7}{3}.$$

Câu 20. Gọi T là tổng tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính T .

- A. $T = -9$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = -15$. D. $T = 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 - 4x + m = 0$ (1).

(P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| = 3|x_2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases}.$$

Mặt khác, theo định lý Viet cho phương trình (1) thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}.$

Với $x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Với $x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2 \Rightarrow m = -12$ thỏa mãn.

Có hai giá trị của m là $m = 3$ và $m = -12$.

Vậy $T = -9$. Chọn đáp án A.

Câu 21. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

A. $m = 2$.

B. Không tồn tại m .

C. $m = -2$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 22. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a - b + c$, biết rằng đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 .

A. $a - b - c = -2$

B. $a - b - c = 2$

C. $a - b - c = 1$

D. $a - b - c = -1$

Lời giải

Đáp án D.

Vì đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 nên suy ra tọa độ đỉnh của (P) là:

$$\left(\frac{-1+5}{2}; 2,5 \right) = (2; 2,5).$$

Vậy (P) đi qua ba điểm $(2; 2,5)$, $(-1; 2)$ và $(5; 2)$.

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ 25a+5b+c=2 \\ 4a+2b+c=2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{10} \\ b=\frac{-4}{10} \\ c=\frac{15}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a-b-c=-1$.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

Lời giải

Cách 1: $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = m$ (*). Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

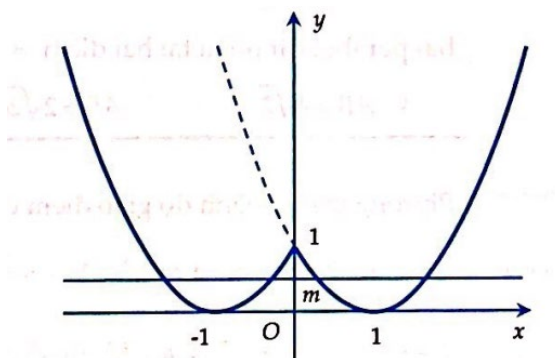
Dễ thấy hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ là một hàm số chẵn, do đó có đồ thị đối xứng qua trục Oy . Mặt khác ta có $y = x^2 - 2|x| + 1 = x^2 - 2x + 1$ với $x \geq 0$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ như sau:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;

- Bước 2: Xóa phần nằm bên trái trục tung (ứng với $x < 0$) của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;

- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm bên phải trục tung (ứng với $x \geq 0$) của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ qua trục tung.



Quan sát trên đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Suy ra không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Cách 2: Đặt $t = |x|, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 1 - m = 0$ (**).

Ta thấy với $t = 0$ thì $x = 0$, với $t > 0$ thì $x = \pm t$.

Do đó để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì (**) phải có hai nghiệm dương phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (1 - m) > 0 \\ 2 > 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Do đó không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Đáp án A.

Câu 24. Biết $S = (a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a + b$.

A. $a + b = 1$

B. $a + b = -1$

C. $a + b = 2$

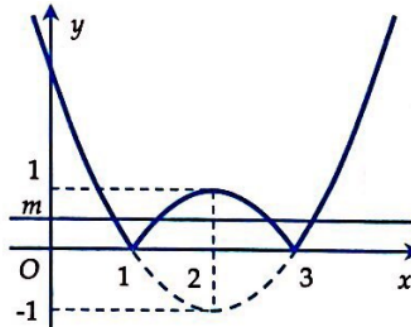
D. $a + b = -2$

Lời giải

Ta có $y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;
- Bước 2: Giữ nguyên phần nằm trên trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;
- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.



Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy $S = (0; 1)$. Suy ra $a + b = 1$.

Đáp án A.

Câu 25. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $a + b$.

- A.** $a + b = 6$ **B.** $a + b = 4$
C. $a + b = 1$ **D.** $a + b = 2$

Lời giải

Đáp án C.

Ta có $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$

$$\Leftrightarrow |x|\sqrt{(|x| - 2)^2} = m$$

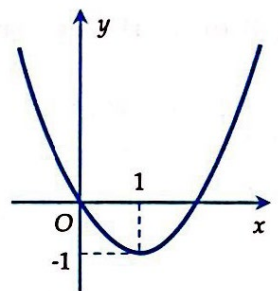
$$\Leftrightarrow |x|(|x| - 2) = m$$

Phương trình $|x|(|x| - 2) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

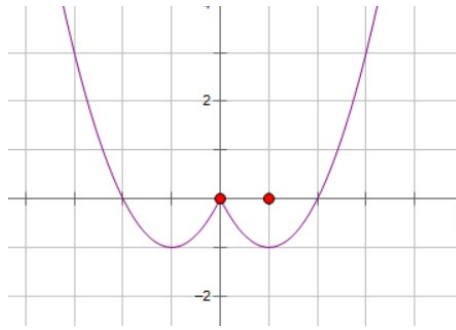
$y = |x|(|x| - 2)$ và đường thẳng $y = m$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$:

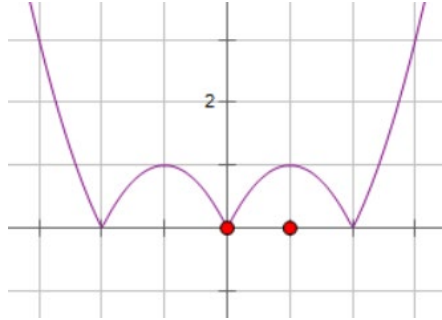
- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$.



- Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = x(x - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$.



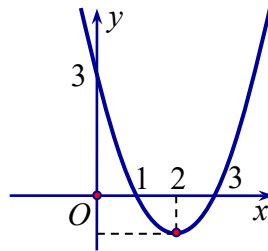
- Bước 3: Từ đồ thị hàm số $y = |x|(|x| - 2)$ suy ra đồ thị hàm số $y = ||x|(|x| - 2)|$.



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x|} + 4 = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 1)$.

Vậy $a + b = 1$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m - 2)f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 1.

B. 3.

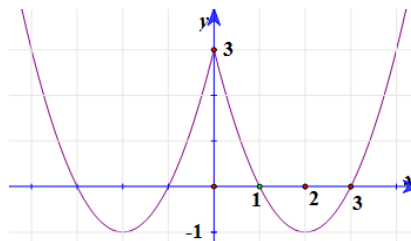
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần: Phần 1 giữ nguyên phần (C) bên phải trục Oy ; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .



$$\text{Ta có: } f^2(|x|) + (m - 2)f(|x|) + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 & (1) \\ f(|x|) = 3 - m & (2) \end{cases}$$

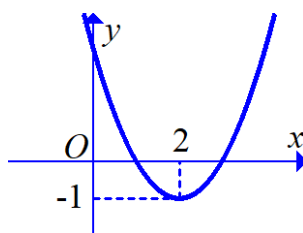
Từ đồ thị $(C') \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt, khác hai nghiệm của phương trình (1) (*).

Từ đồ thị (C') , ta có $(*) \Leftrightarrow -1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. $0 < m < 1$.

B. $-1 < m < 0$.

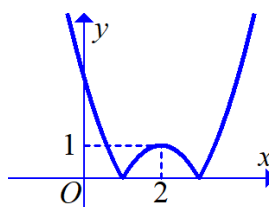
C. $m = -1$; $m = 3$.

D. $m > 3$.

Lời giải

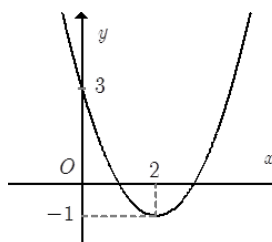
Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$. Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới đây.



Do đó phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 1$.

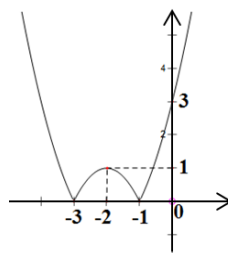
B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. không có giá trị của m .

Lời giải

Chọn D

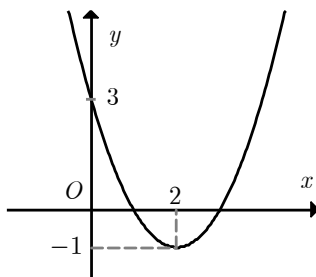


Đồ thị (C_1) của hàm số $y = ax^2 - bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$ đối xứng với đồ thị (C) của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ qua trục tung.

Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = |ax^2 - bx + c|$ gồm phần đồ thị (C_1) ở phía trên Ox (kể cả các điểm thuộc Ox) và phần đối xứng qua Ox của phần (C_1) nằm phía dưới trục hoành (như hình vẽ).

Dựa vào đồ thị suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C_2) tại 4 điểm phân biệt khi $0 < m < 1$, hay phương trình $|ax^2 - bx + c| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(0;1)$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt



A. $m = 4$.

B. $m > 0$.

C. $m > -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

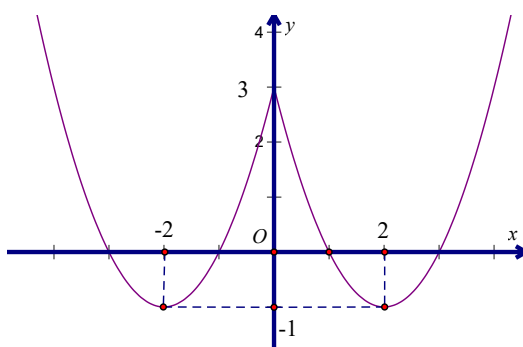
Đồ thị hàm số cắt Oy tại $(0;3) \Rightarrow c = 3$

Đồ thị hàm số nhận $(2;-1)$ làm đỉnh nên ta có
$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ta có $f(|x|) + 1 = m \Leftrightarrow y = f(|x|) = m - 1$

Ta có đồ thị hàm $y = f(|x|)$ (C) như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(|x|) + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $y = m - 1 \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

A. $-2 < m < -1$.

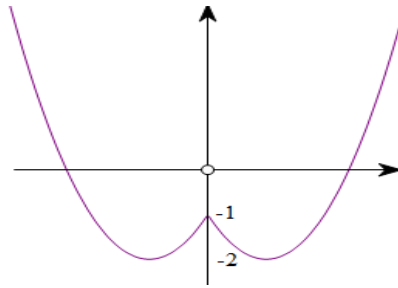
B. $1 < m < 2$.

C. $-2 \leq m \leq -1$.

D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ bằng cách bỏ phần đồ thị phía trái trục tung và lấy thêm phần đối xứng của phần phía phải trục tung qua trục tung (như hình vẽ)

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m - 3 < -1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 31. Với giá trị nào của m thì phương trình $m = |x^2 - 5x + 4|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \leq \frac{9}{4}$.

B. $m \geq \frac{9}{4}$.

C. $m = \frac{9}{4}$.

D. $m = 0$.

Lời giải

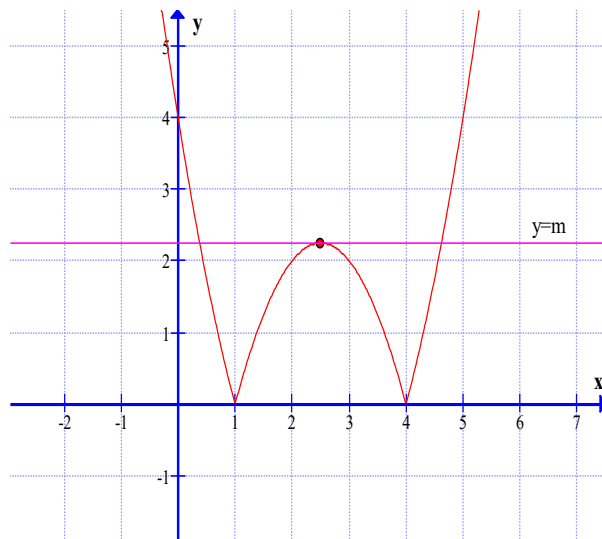
Chọn C

Ta có: $y = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{khi } x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{khi } x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \quad (C)$

Giữ nguyên đồ thị (P) ứng với $y \geq 0$ ta được đồ thị (C_1)

Lấy đối xứng phần đồ thị (P) ứng với $y < 0$ ta được đồ thị (C_2)

Vậy $(C) = (C_1) \cup (C_2)$



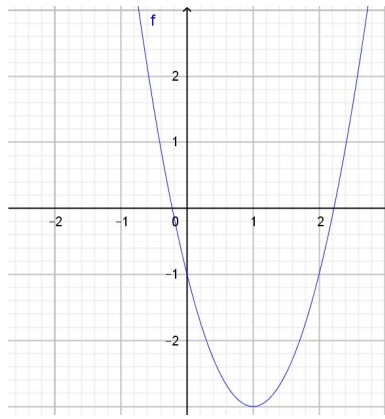
Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm nếu có của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 5x + 4|$ (C) và đường thẳng $y = m$ (d)

Yêu cầu bài ra $\Leftrightarrow$ (d) cắt (P) tại 3 điểm phân biệt

-d là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành

Từ đồ thị hàm số ta suy ra (d) cắt (P) tại 3 điểm phân biệt khi $m = \frac{9}{4}$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường $y = m + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?



A. $-3 < m < 0$.

B. $0 < m < 3$.

C. $1 < m < 4$.

D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

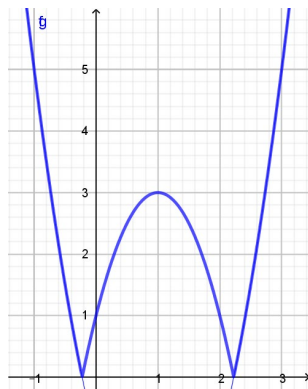
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành.

-Lấy đối xứng phần đồ thị dưới trục hoành qua trục hoành.

-Xóa phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta có đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < m < 2$.



Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

A. $m < -3$.

B. $m > -\frac{81}{4}$.

C. $-\frac{81}{4} < m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 9|x| = m \Leftrightarrow x^2 - 9|x| - m = 0$ (1)

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$.

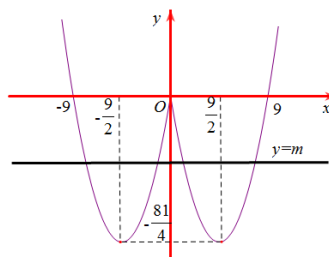
(1) $\Rightarrow t^2 - 9t - m = 0$ (2)

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 + 4m > 0 \\ 9 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} < m < 0.$$

Cách 2:

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$



Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-\frac{81}{4} < m < 0$.

Câu 34. Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm thực?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

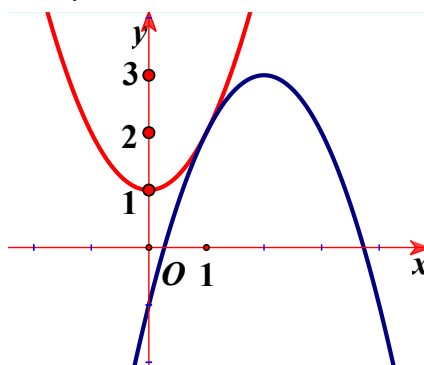
Lời giải

Chọn C

$$pt \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ (x-1)^2 = -2(x-m) \end{cases}$$

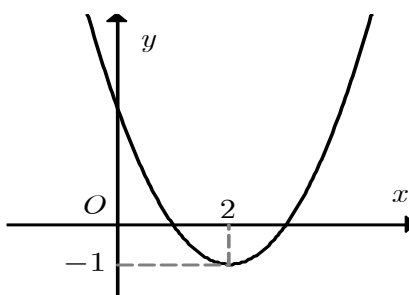
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 = 2m \\ x^2 + 1 = 2m \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 1$ và $y = x^2 + 1$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ:



Từ đồ thị suy ra để phương trình có 3 nghiệm thì $\begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. $-1 < m < 0$.

B. $m > 3$.

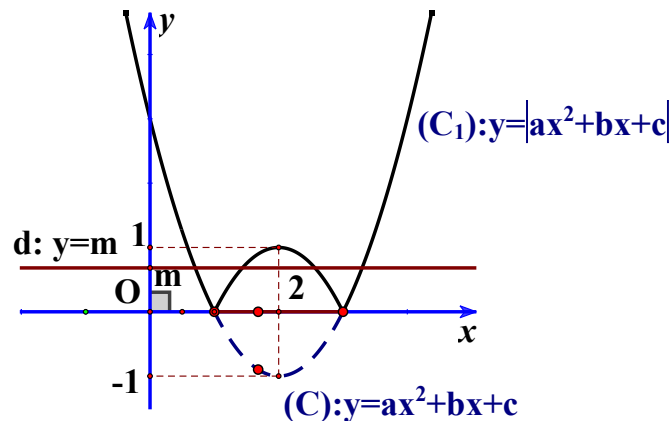
C. $m = -1, m = 3$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

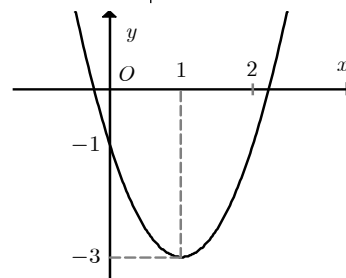
Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ta suy ra đồ thị hàm $y = |f(x)| = |ax^2 + bx + c|$.



Phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 36. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[0; 2018]$ để phương trình $|ax^2 + b|x| + c| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?



A. 2016.

B. 2015.

C. 2018.

D. 2017.

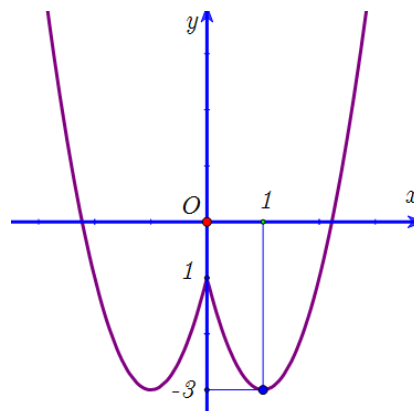
Lời giải

Chọn A

Gọi $(C): y = ax^2 + bx + c$; $(C_1): y = ax^2 + b|x| + c$; $(C_2): y = |ax^2 + b|x| + c|$

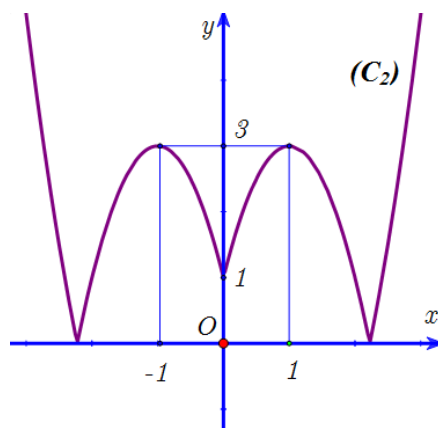
Từ (C) suy ra (C_1) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) bên phải trục tung.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) bên phải trục tung qua trục tung.



Từ (C_1) suy ra (C_2) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Ta có phương trình $|ax^2 + b|x| + c| - m = 0 \Leftrightarrow |ax^2 + b|x| + c| = m \quad (*)$

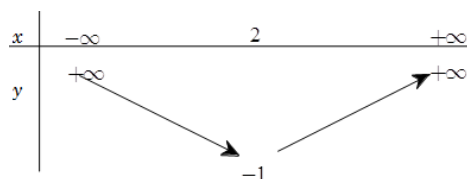
Khi đó số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm giữa (C_2) và đường thẳng $y = m$.

Vì vậy để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 3 \end{cases}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [0; 2018] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m = 0 \vee m \in (3; 2018] \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 4; 5; 6; \dots; 2018\}.$$

Vậy có 2016 giá trị của m .

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. không tồn tại m .

Lời giải

Chọn B

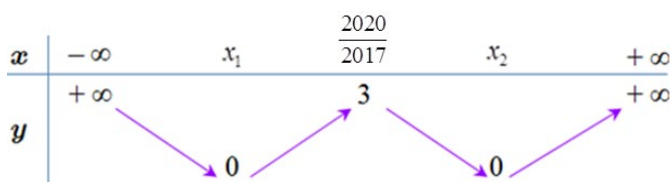
Dựa vào BBT ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTNN bằng -1 tại $x = 2$ và có hệ số $a > 0$.

Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$

Do đó $f(2017x - 2018) = a(2017x - 2020)^2 - 1 \Rightarrow f(2017x - 2018) - 2 = a(2017x - 2020)^2 - 3$.

Vậy GTNN của $y = f(2017x - 2018) - 2$ bằng -3 tại $x = \frac{2020}{2017}$.

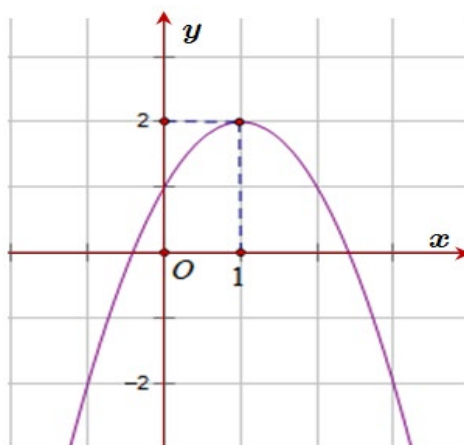
BBT của hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ có dạng:



Số nghiệm của phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm khi $m = 3$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m = 2015$.

B. $m = 2016$.

C. $m = 2017$.

D. $m = 2019$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTLN bằng 2 tại $x = 1$ và có hệ số $a < 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x-1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$

$$\Rightarrow f(-x) = a(x+1)^2 + 2.$$

Vậy GTLN của $y = f(-x)$ bằng 2 tại $x = -1$. (vì hệ số $a < 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(-x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 2019 - m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(-x)$ và đường thẳng $y = 2019 - m$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất khi $2019 - m = \max f(x) \Leftrightarrow 2019 - m = 2 \Leftrightarrow m = 2017$.

Câu 39. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 2$ như hình vẽ dưới đây. Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. $-4 < m < 0$

B. $-2 < m < 2$

C. $0 < m < 4$

D. $-2 \leq m \leq 2$

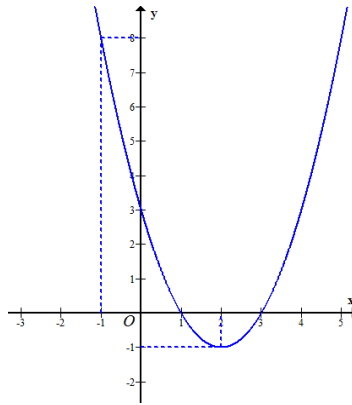
Lời giải

Chọn A.

$$x^2 - 4|x| - m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow x^2 - 4|x| = m \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 2 = m + 2 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 2$ cắt đường thẳng $y = m + 2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m + 2 < 2$
 $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ):



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 4.

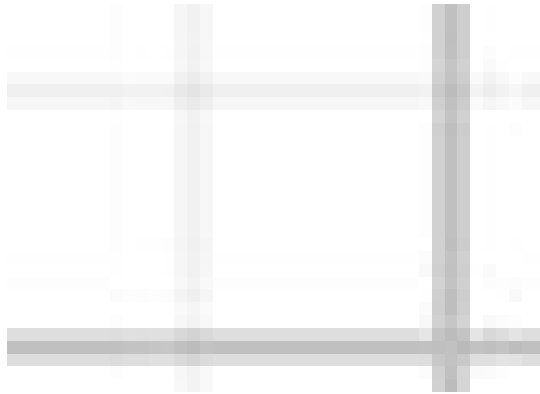
C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy , bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy .



* Ta có $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}$.

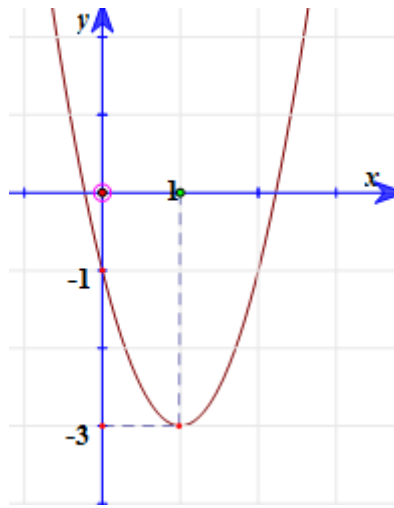
* Từ đồ thị (C') , ta có:

- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác ± 2 suy ra Đường thẳng $d: y = 3-m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Suy ra $m \in \{1, 2, 3\}$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 6.

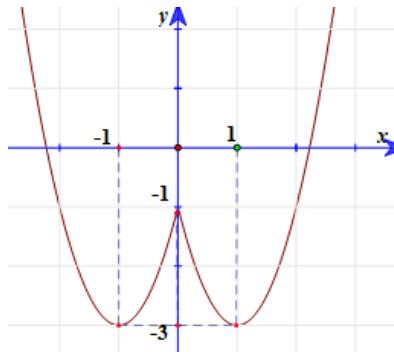
C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



$$f^2(|x|) + f(|x|) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = 1 & (1) \\ f(|x|) = -2 & (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = 1$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = -2$, từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta suy ra (2) có 4 nghiệm phân biệt (khác 2 nghiệm của (1)).

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016.

B. 2008.

C. 2009.

D. 2017.

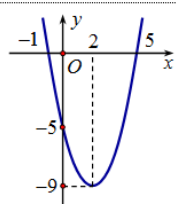
Lời giải

Chọn B

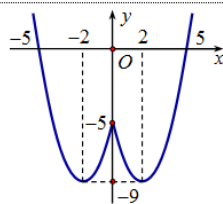
$$\text{PT: } |x^2 - 4|x - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x - 5| = m(1).$$

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x - 5|(P)$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương Ox).

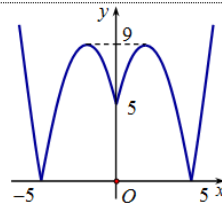
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5 (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5$ (P_2) là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ (P), ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

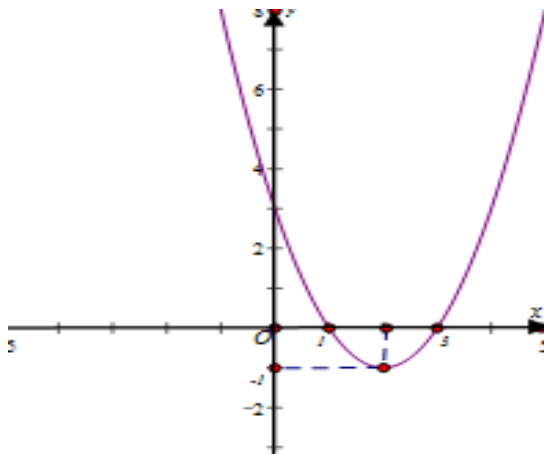
- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}$.

Câu 43. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

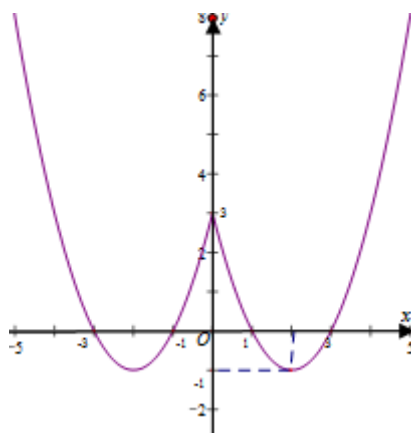
Xét $(P_2): y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; có $y = f(x)$ là hàm số chẵn; nên (P_2) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P_1) ; ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy qua trục Oy .

(Bỏ phần đồ thị (P_1) bên trái trục Oy)

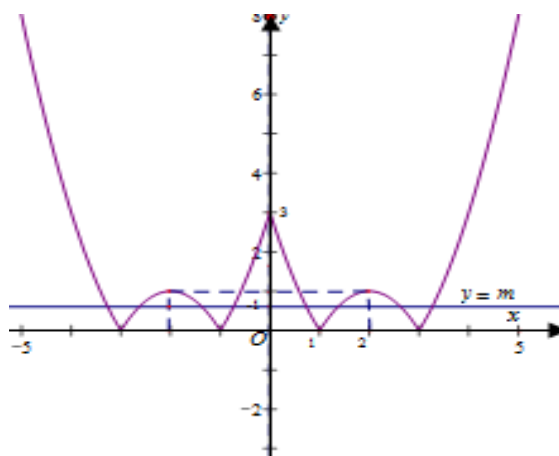


Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) ta vẽ đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) như sau

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox .

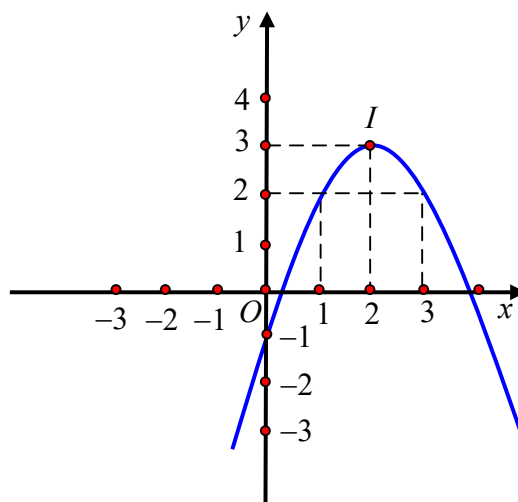
+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox qua trục Ox .

(Bỏ phần đồ thị (P_2) nằm phía dưới trục Ox)



Dựa vào đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 44. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1 < m < 3$.

B. $0 < m < 3$.

C. $0 \leq m \leq 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

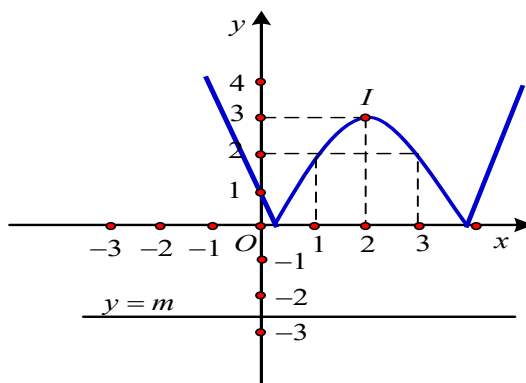
Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}.$$

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c = -1$. Suy ra
$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

$(P): y = -x^2 + 4x - 1$ suy ra hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ có đồ thị là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P) , như hình vẽ sau:



Phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ hay $|-x^2 + 4x - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0 < m < 3$.

DẠNG 4. MỘT SỐ CÂU HỎI THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

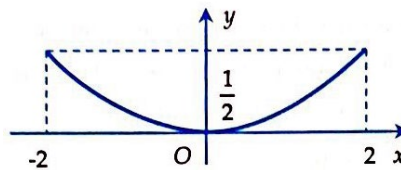
Dạng 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

- Câu 1.** Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.
- A. $m - n = 7$ B. $m - n = -7$ C. $m - n = 31$ D. $m - n = -31$

Lời giải

Đáp án B.

Từ giả thiết suy ra parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$.



Từ đó ta có $\frac{1}{2} = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$.

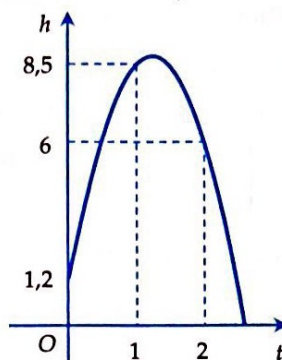
Vậy $m - n = 1 - 8 = -7$.

- Câu 2.** Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?
- A. 2,56 giây B. 2,57 giây C. 2,58 giây D. 2,59 giây

Lời giải

Đáp án C.

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0; 1,2)$, $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$.



Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Giải phương trình

$$h = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0 \text{ ta tìm được một nghiệm dương là } t \approx 2,58.$$

Câu 3. Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth có phương trình $h = at^2 + bt + c$ ($a < 0$), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\text{ m}$ và sau 1 giây thì nó đạt độ cao $8,5\text{ m}$, sau 2 giây nó đạt độ cao 6 m . Tính tổng $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 18,3$. B. $a + b + c = 6,1$.
C. $a + b + c = 8,5$. D. $a + b + c = -15,9$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết của bài toán ta có hệ phương trình } \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{49}{10} \\ b = \frac{61}{5} \\ c = 1,2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{17}{2}.$$

Câu 4. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD . B. 160 USD . C. 40 USD . D. 240 USD .

Lời giải

Chọn A.

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

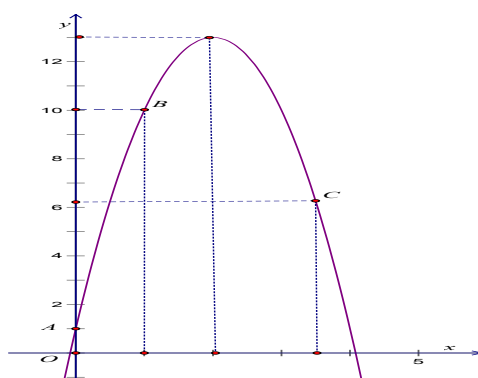
Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD .

Câu 5. Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và $3,5$ giây nó ở độ cao $6,25\text{ m}$. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

- A. 11 m . B. 12 m . C. 13 m . D. 14 m .

Lời giải

Chọn C



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Theo bài ra gán vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.

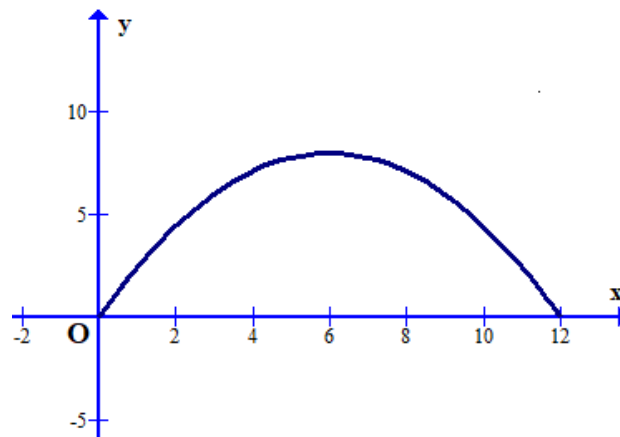
- Câu 6.** (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao 8 m như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao h của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?



- A. $0 < h < 6$. B. $0 < h \leq 6$. C. $0 < h < 7$. D. $0 < h \leq 7$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$, suy ra:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$ khi đó chiều cao của xe là 6.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

- Câu 7.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. 64. B. 4. C. 16. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật.

Khi đó chiều rộng là $8 - x$.

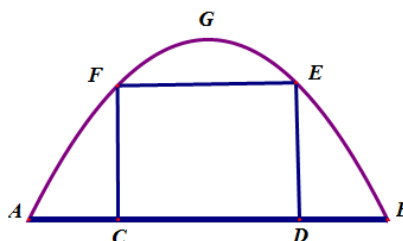
Diện tích hình chữ nhật là $x(8 - x)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 8x$ trên khoảng $(0; 8)$ ta được

$$\max_{(0;8)} f(x) = f(4) = 16.$$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi chiều dài bằng chiều rộng bằng 4.

Câu 8. Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B . (xem hình vẽ bên dưới)



A. 5m.

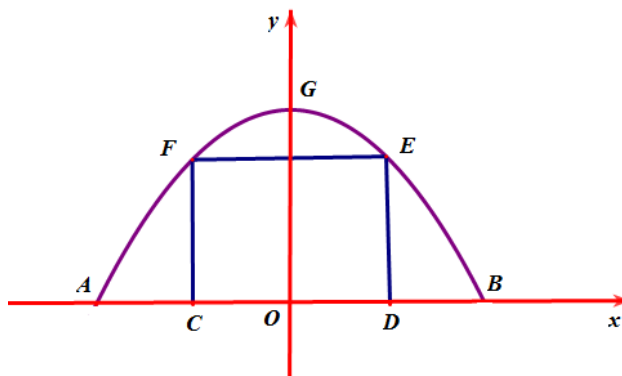
B. 8,5m.

C. 7,5m.

D. 8m.

Lời giải

Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0; 4) \Rightarrow c = 4$.

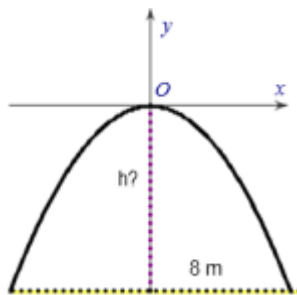
$$\Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2; 3), F(-2; 3) \Rightarrow 3 = 4a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4.$$

$$\text{Ta có } -\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \text{ nên } A(-4; 0), B(4; 0) \text{ hay } AB = 8(\text{m}).$$

- Câu 9.** Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8m$. Hãy tính chiều cao h của cổng (xem hình minh họa bên cạnh).



- A. $h = 9m$. B. $h = 7m$. C. $h = 8m$. D. $h = 5m$.

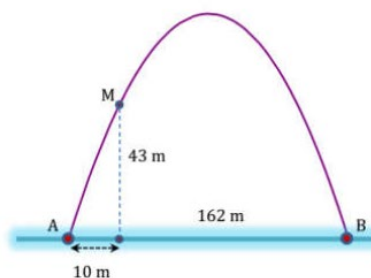
Lời giải

Chọn C

(P): $y = -\frac{1}{2}x^2$, có $d = 8$. Suy ra $\frac{d}{2} = 4$.

Thay $x = 4$ vào $y = -\frac{1}{2}x^2$. Suy ra $y = -8$. Suy ra $h = 8(cm)$.

- Câu 10.** Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



- A. 175,6m. B. 197,5m. C. 210m. D. 185,6m.

Lời giải

Chọn D

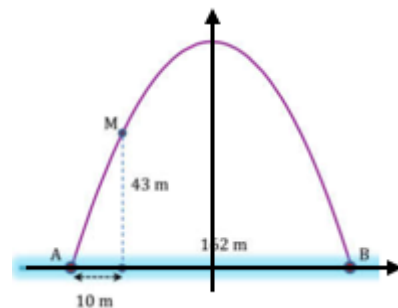
Gắn hệ toạ độ Oxy sao cho gốc toạ độ trùng với trung điểm của AB , tia AB là chiều dương của trục hoành (hình vẽ).

Parabol có phương trình $y = ax^2 + c$, đi qua các điểm: $B(81;0)$

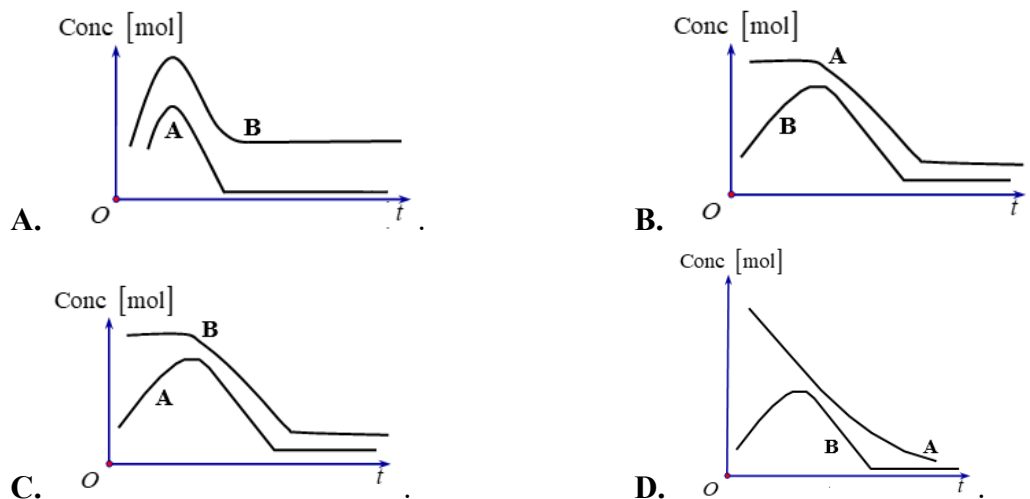
và $M(-71;43)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 81^2a + c = 0 \\ 71^2a + c = 43 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185.6$$

Suy ra chiều cao của cổng là $c \approx 185,6m$.



- Câu 11.** Rót chất A vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất B vào. Khi nồng độ chất B đạt đến một giá trị nhất định thì chất A mới tác dụng với chất B. Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?



Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có:

Từ khi bắt đầu rót chất B thì đã có chất A trong ống nghiệm, nên nồng độ chất A ban đầu lớn hơn chất B . Tức là ban đầu, đồ thị nồng độ chất A nằm “phía trên” đồ thị nồng độ chất B (1).

Khi chất B đạt đến một giá trị nhất định thì hai chất mới phản ứng với nhau. Điều này chứng tỏ có một khoảng thời gian từ khi rót chất B đến khi bắt đầu phản ứng xảy ra thì nồng độ chất A là một hằng số. Tức trong khoảng thời gian đó đồ thị nồng độ chất A là đồ thị của một hàm số hằng (2).

Khi phản ứng xảy ra, nồng độ hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Điều này chứng tỏ sau khi kết thúc phản ứng thì chất B được tiêu thụ hết và chất A có thể còn dư (hoặc cũng có thể hết), kể từ khi ngừng phản ứng thì nồng độ chất A trong ống nghiệm không thay đổi nữa, nên đồ thị nồng độ chất A sau phản ứng phải là đồ thị của một hàm số hằng (3).

Từ sự phân tích trên ta thấy chỉ có đồ thị của đáp án

B. phù hợp.

Câu 12. Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

A. $400m^2$.

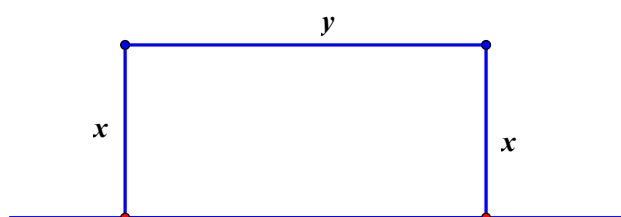
B. $450m^2$.

C. $350m^2$.

D. $425m^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y (như hình vẽ); $0 < x, y < 60$.

Ta có $2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = xy = x(60 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(60 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 60 - 2x}{x} \right) = 450$.

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450(m^2)$, đạt được khi $x = 15, y = 30$.

Bài 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

1 Xét dấu của mỗi tam thức

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$

với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Ví dụ 2. Lập bảng xét dấu của $f(x) = x^2 - 3x + 2$ tam thức bậc hai:

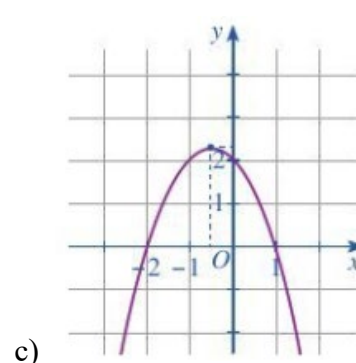
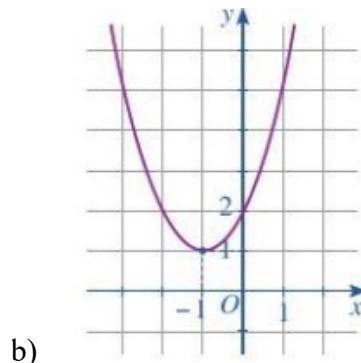
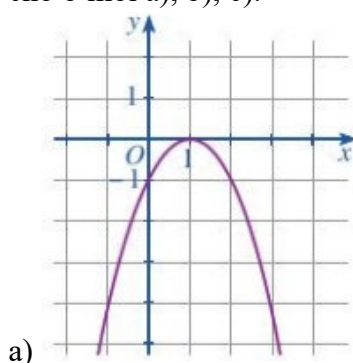
Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Ví dụ 3. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi a), b), c).



Giải

a) Từ đồ thị Hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

b) Từ đồ thị Hình b) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

c) Từ đồ thị Hình c) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ví dụ 4. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125,6; x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334,4$ và hệ số

$a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$.

b) $-x^2 + 4x + 5$.

Câu 2. Xét dấu của các biểu thức sau

a) $x^3 - 5x + 2$.

b) $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a \leq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Câu 2. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

D. $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x ?

A. $x^2 - 10x + 2$.

B. $x^2 - 2x - 10$.

C. $x^2 - 2x + 10$.

D. $-x^2 + 2x + 10$.

Câu 4. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.

D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Câu 5. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

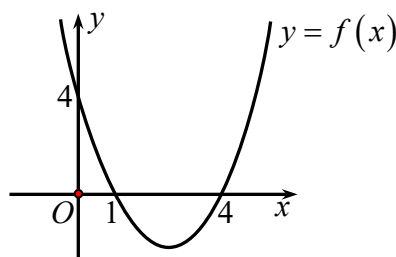
A. $\Delta < 0$.

B. $\Delta = 0$.

C. $\Delta > 0$.

D. $\Delta \geq 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .



A. $a > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, \Delta = 0$.

D. $a < 0, \Delta = 0$.

Câu 7. Cho tam thức $f(x) = x^2 - 8x + 16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

B. $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

D. $f(x) < 0$ khi $x < 4$.

Câu 8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$.

B. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

C. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$.

D. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

Câu 9. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

D. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số b , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

1 Xét dấu của mỗi tam thức

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$

với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Ví dụ 2. Lập bảng xét dấu của $f(x) = x^2 - 3x + 2$ tam thức bậc hai:

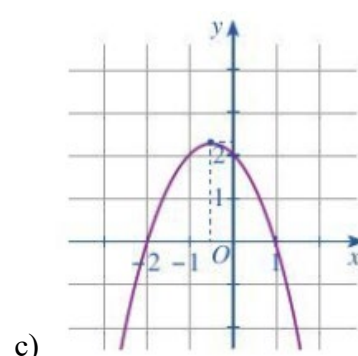
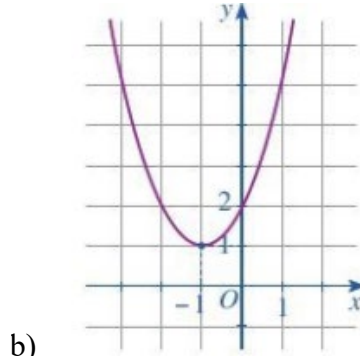
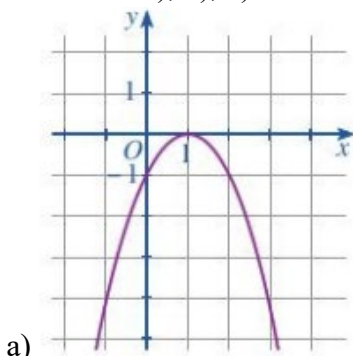
Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Ví dụ 3. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi a), b), c).



Giải

a) Từ đồ thị Hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

b) Từ đồ thị Hình b) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

c) Từ đồ thị Hình c) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1=-2, x_2=1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ví dụ 4. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125,6; x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334,4$ và hệ số

$a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$.

b) $-x^2 + 4x + 5$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0$ và $a = 3 > 0$. Suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2+4x+5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Câu 2. Xét dấu của các biểu thức sau

a) $x^3 - 5x + 2$.

b) $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$	2	$+\infty$		
$x-2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
x^2+2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
x^3-5x+2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra $x^3 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$;

$x^3 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; 2)$.

b) Ta có $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x - 1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$; $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$				
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$-x^2+x+6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$-x^2+3x+4$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

$$\text{Suy ra } x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; 4).$$

$$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty).$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng. Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

-Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau:

1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

-Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

1) Phân tích đa thức $P(x), Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất).

2) Lập bảng xét dấu của $P(x)$ và $Q(x)$. Từ đó suy ra dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Câu 1. Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a \leq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Câu 2. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. D. $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x - 2)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x ?

- A. $x^2 - 10x + 2$. B. $x^2 - 2x - 10$. C. $x^2 - 2x + 10$. D. $-x^2 + 2x + 10$.

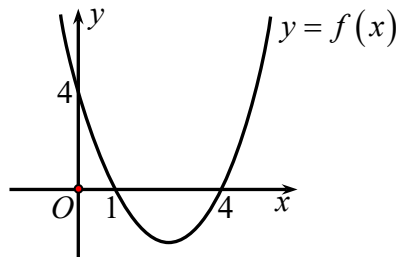
Lời giải

Chọn C.

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của x phải có $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ nên Chọn C.

Câu 4. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai. B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.
C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai. D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Lời giải**Chọn A.*** Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.**Câu 5.** Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.**A.** $\Delta < 0$.**B.** $\Delta = 0$.**C.** $\Delta > 0$.**D.** $\Delta \geq 0$.**Lời giải****Chọn A.*** Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta < 0$.**Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .**A.** $a > 0$, $\Delta > 0$.**B.** $a < 0$, $\Delta > 0$.**C.** $a > 0$, $\Delta = 0$.**D.** $a < 0$, $\Delta = 0$.**Lời giải****Chọn A.*** Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a > 0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.**Câu 7.** Cho tam thức $f(x) = x^2 - 8x + 16$. Khẳng định nào sau đây là đúng?**A.** phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.**B.** $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.**C.** $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.**D.** $f(x) < 0$ khi $x < 4$.**Lời giải****Chọn C**Ta có $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$. Suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.**Câu 8.** Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?**A.** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$.**B.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.**C.** $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$.**D.** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.**Lời giải****Chọn A**Ta có $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.**Câu 9.** Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?**A.** Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.**B.** Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn trái dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R}$.**C.** Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a , với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

D. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số b , với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Bài 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Bất phương trình bậc hai một ẩn

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1. Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x = 2$

b) $x = 0$;

c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức

$2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4; 2)$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

Nhận xét

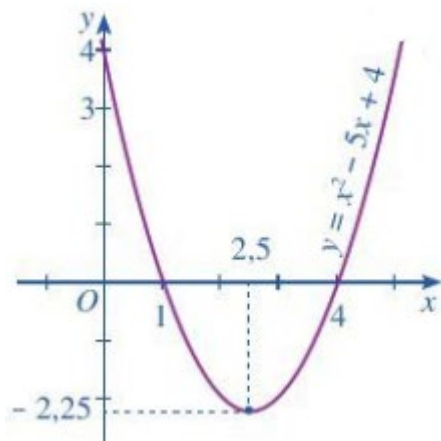
- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.

- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

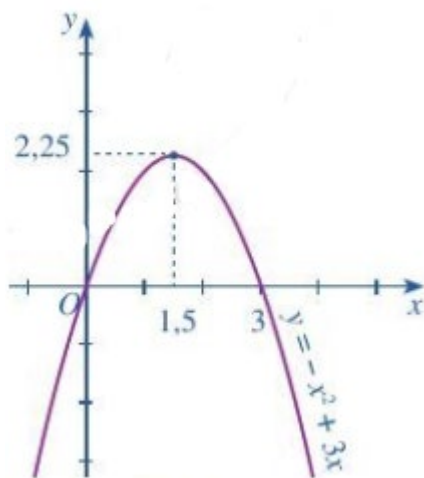
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 3. Quan sát đồ thị ở Hình và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.



b) $-x^2 + 3x > 0$.



Giải

a) Quan sát đồ thị ở a, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1; 4)$.

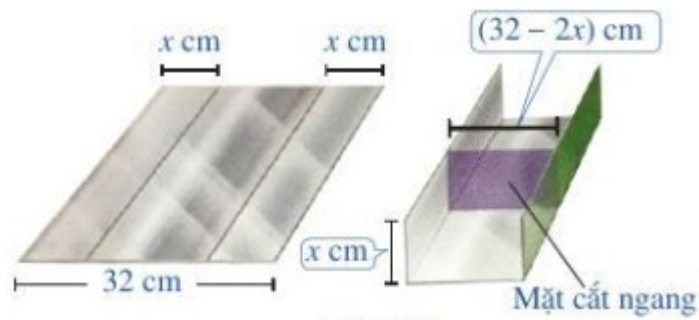
b) Quan sát đồ thị ở b, ta thấy: $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0; 3)$.

III. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật (như hình) với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 .



Hỏi rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình thì kích thước của mặt cắt ngang là $x(\text{cm})$ và $32 - 2x(\text{cm})$. Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x(\text{cm}^2)$

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu "+" là $(6; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6cm .

Ví dụ 5. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad (3) \text{ và } x^2 - 9 < 0 \quad (4)$$

Giải

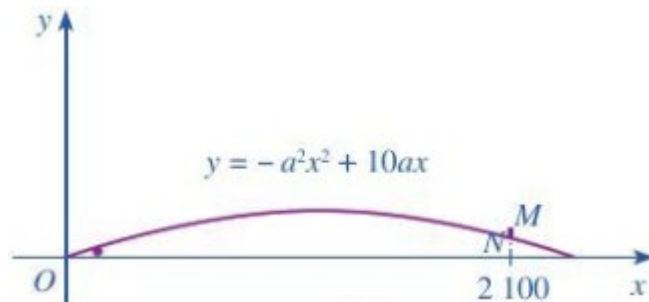
Ta có: $(3) \Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4; 2)$;

$(4) \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S = S_3 \cap S_4 = (-4; 2) \cap (-3; 3) = (-3; 2)$$

Ví dụ 6. Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$



Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.

Giải

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là:

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a} \quad (5); -4410000a^2 + 21000a \leq 25 \quad (6); -4410000a^2 + 21000a \geq 15 \quad (7).$$

$$- (5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$- (6) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0. \text{ Bất phương trình này đúng } \forall a > 0.$$

$$- (7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$$\left[0; \frac{1}{210} \right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } a \text{ là } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}.$$

Tìm hiểu thêm

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \neq 0).$$

$$\text{Đặt } f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Dấu của Δ	Dấu của a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$		$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$	$(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$(*)$ vô nghiệm
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$	$(*)$ vô nghiệm

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

Câu 1. Giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$. b) $x^2 + x - 12 < 0$.

Câu 2. Giải các bất phương trình sau

a) $(1 - 2x)(x^2 - x - 1) > 0$.

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Câu 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{x^2 - 1}{(x^2 - 3)(-3x^2 + 2x + 8)} > 0$.

b) $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$.

Câu 4. Giải các bất phương trình sau

- Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 14x + 20 < 0$ là
A. $S = (-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.
C. $S = (2; 5)$. **D.** $S = [2; 5]$.
- Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 25 < 0$ là
A. $S = (-5; 5)$. **B.** $x > \pm 5$.
C. $-5 < x < 5$. **D.** $S = (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.
- Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là
A. $(1; 2)$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(2; +\infty)$.
- Câu 6.** Tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$.
A. $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. **B.** $[-2; 3]$.
C. $[-3; 2]$. **D.** $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.
- Câu 7.** Bất phương trình $-x^2 + 2x + 3 > 0$ có tập nghiệm là
A. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $(-1; 3)$. **C.** $[-1; 3]$. **D.** $(-3; 1)$.
- Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ là:
A. $(1; 3)$. **B.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $[-1; 3]$. **D.** $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
- Câu 9.** Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + x + 12 \geq 0$ là
A. $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. **B.** $\emptyset$.
C. $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. **D.** $[-3; 4]$.
- Câu 10.** Hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là
A. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
C. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$. **D.** $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$.
- Câu 11.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.
A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. **B.** $[2; +\infty)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.
- Câu 12.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - 4 > 0$.
A. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **B.** $S = (-2; 2)$.
C. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
- Câu 13.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - 4x + 4 > 0$.
A. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **B.** $S = \mathbb{R}$. **C.** $S = (2; +\infty)$. **D.** $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Câu 14.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2 - 3x - 15 \leq 0$ là
A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.
- Câu 15.** Tập nghiệm của bất phương trình: $x^2 + 9 > 6x$ là
A. $(3; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty; 3)$.
- Câu 16.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $-2x^2 - 3x + 2 > 0$.
A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$. D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 17. Bất phương trình $(x-1)(x^2-7x+6) \geq 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$. B. $S = [6; +\infty)$.

C. $(6; +\infty)$. D. $S = [6; +\infty) \cup \{1\}$.

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ là

A. $(1; 4)$. B. $(-2; -1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Câu 19. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$. B. $1 \leq x \leq 4$. C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. D. $x \geq 4$.

Câu 20. Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$. D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 21. Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

A. $x \in (1; 2)$. B. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.

C. $x \geq 4$. D. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$ là

A. $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$. B. $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in [-1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Câu 23. Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn $f(x)$ không dương là

A. $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.

C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Câu 24. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-3x-4}{x-1} \leq 0$.

A. $T = (-\infty; -1] \cup [1; 4]$. B. $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4]$.

C. $T = (-\infty; -1) \cup (1; 4]$. D. $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4)$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4} \leq 0$ là.

A. $S = [-2; 2] \cup [3; 4]$. B. $S = (-2; 2] \cup [3; 4]$.

C. $S = (-2; 2) \cup [3; 4]$. D. $S = [-2; 2] \cup (3; 4)$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-2}$ là.

A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 27. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4} \geq 1$. Khi đó $S \cap (-2; 2)$ là tập nào sau đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $\emptyset$.

D. $(-2; -1]$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3} > 2$ là

A. $\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm

A. $-4 \leq m \leq 4$.

B. $m \leq -4$ hay $m \geq 4$.

C. $m \leq -2$ hay $m \geq 2$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 2. Tìm m để phương trình $-x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

A. $(-1; 2)$

B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

C. $[-1; 2]$

D. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Câu 3. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

D. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Câu 4. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx + 4m = 0$ vô nghiệm.

A. $0 < m < 16$.

B. $-4 < m < 4$.

C. $0 < m < 4$.

D. $0 \leq m \leq 16$.

Câu 5. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

D. $-3 \leq m \leq 1$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $m = -\frac{1}{2}$

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > 3$.

C. $m = 2$

D. $m > -\frac{3}{5}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0 \text{ vô nghiệm?}$$

A. $m < 0$.

B. $m > 2$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Câu 8. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 4$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$.

C. $0 \leq m \leq 4$.

D. $0 \leq m < 4$.

Câu 9. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Câu 10. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

- A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 11. Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. B. $-5 \leq m \leq -1$. C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Câu 12. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 13. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Câu 14. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 15. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu 2 lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.
C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m > -\frac{3}{4}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq 1$ C. $-1 < m < 6$. D. $-1 < m < 2$.

Câu 18. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Câu 19. Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. B. $m < 0$. C. $m \neq -1$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

- Câu 21.** Xác định m để phương trình $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
A. $\frac{1}{7} < m < \frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$. **C.** $m > \frac{1}{7}$. **D.** $m > 0$.
- Câu 22.** Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?
A. $1 < m < 3$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.
- Câu 23.** Cho phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?
A. $m \geq 5$. **B.** $m < \frac{8}{3}$. **C.** $\frac{8}{3} < m < 5$. **D.** $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.
- Câu 24.** Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m-2)x + m^2 - 4m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
A. $0 < m < 4$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 4$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$.
- Câu 25.** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1?
A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.
- Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.
A. Không có giá trị của m . **B.** $m \geq 2$.
C. $m \leq -1$. **D.** $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.
- Câu 27.** Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1.
A. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$. **B.** $m < -\frac{7}{2}$.
C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < 3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.
- Câu 28.** Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
A. $m > 6$. **B.** $m < 6$. **C.** $6 > m > 0$. **D.** $m > 0$.
- Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
A. $2 < m < 6$. **B.** $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.
C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. **D.** $-3 < m < 6$.
- Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.
A. $m < 6$. **B.** $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.
C. $m > 1$. **D.** $1 < m < 6$.
- Câu 31.** Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi
A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.
- Câu 32.** Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. B. $-1 < m < \frac{5}{2}$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 33. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 34. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 35. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

A. $m < 2 \vee m > 6$. B. $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$. D. $-2 < m < 6$.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$. D. $m \in (7; +\infty)$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m > 0$. D. $m < 2$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m+2)x + 8m + 1 \leq 0$ vô nghiệm.

A. $m \in [0; 28]$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0] \cup [28; +\infty)$. D. $m \in (0; 28)$.

Câu 39. Tam thức $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4$ không âm với mọi giá trị của x khi

A. $m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq 3$.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ biểu thức $f(x) = x^2 + (m+2)x + 8m + 1$ luôn nhận giá trị dương.

A. 27. B. 28. C. Vô số. D. 26.

Câu 41. Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A. $m \in [2; 6]$. B. $m \in (-3; 9)$. C. $m \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. D. $m \in (-9; 3)$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

A. $m > -1$. B. $-1 \leq m \leq 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $-1 < m < 3$.

Câu 43. Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. B. $1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

C. $m \neq 1$. D. $m \geq -1$.

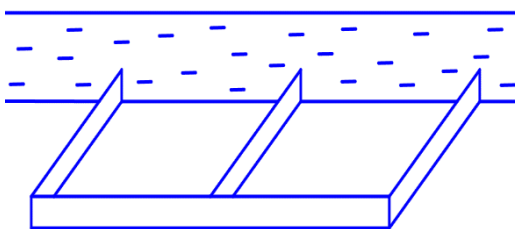
- Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $f(x)$ sau đây thỏa mãn $f(x) = -x^2 + 2x + m - 2018 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $m > 2019$. B. $m < 2019$. C. $m > 2017$. D. $m < 2017$.
- Câu 45.** Tìm m để $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 4m$ luôn luôn âm
- A. $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
- Câu 46.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x^2 - mx + 1} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in (-2; 2)$.
C. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [-2; 2]$.
- Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- A. $\begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -1 \end{cases}$. C. $-1 \leq m \leq 7$. D. $-1 < m < 7$.
- Câu 48.** Bất phương trình $x^2 + 4x + m < 0$ vô nghiệm khi
- A. $m < 4$. B. $m > 4$. C. $m \leq 4$. D. $m \geq 4$.
- Câu 49.** Bất phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 < 0$ vô nghiệm khi
- A. $m \geq \frac{1}{5}$. B. $m > \frac{1}{4}$. C. $m > \frac{1}{5}$. D. $m > \frac{1}{25}$.
- Câu 50.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm.
- A. $m \in \emptyset$. B. $m < -1$. C. $-1 < m < 0$. D. $-1 < m \leq 0$.
- Câu 51.** Gọi S là tập các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0$ có tập nghiệm là $[a; b]$ sao cho $b - a = 4$. Tổng tất cả các phần tử của S là
- A. -5 . B. 1 . C. 5 . D. 8 .
- Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số m để $x^2 - 2x - m \geq 0, \forall x > 0$.
- A. $m \leq 0$. B. $m < -1$. C. $m \leq -1$. D. $m < 0$.
- Câu 53.** Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- A. $[-1; 6]$. B. $(-1; 6)$. C. $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.
- Câu 54.** Cho bất phương trình $(m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11 \leq 0$ (1). Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình đúng với mọi $\forall x < -4$. Khi đó số phần tử của S là
- A. 2 . B. 3 . C. 1 . D. 0 .
- Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = 1 - \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?
- A. 3 . B. 2 . C. 0 . D. 1 .
- Câu 56.** Để bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?
- A. $m \leq \frac{1}{5}$. B. $m > \frac{1}{20}$. C. $m \leq \frac{1}{20}$. D. $m > \frac{1}{5}$.
- Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- A. 4 . B. 6 . C. 3 . D. 5 .

- Câu 58.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
- A. $m > \frac{4}{3}$. B. $m > -1$. C. $m < -\frac{4}{3}$. D. $m < -1$.
- Câu 59.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm:
- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 0$.
- Câu 60.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + x - m > 0$ vô nghiệm.
- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m > \frac{1}{4}$. D. $m < \frac{1}{4}$.
- Câu 61.** Bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi
- A. $m \in [1; +\infty)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 7)$.
- Câu 62.** Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$, $\forall x \in (0; 1)$.
- A. $m > 1$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.
- Câu 63.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x-3m+2 < 0 \end{cases}$ vô nghiệm khi
- A. $m \leq -1$. B. $m \geq -1$. C. $m > -1$. D. $m < -1$.
- Câu 64.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.
- A. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$. B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\frac{1}{2} < m < 1$. D. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 2 \end{cases}$.
- Câu 65.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.
- A. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$.
- Câu 66.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi
- A. $m \leq -2$. B. $m > -2$. C. $m < -1$. D. $m = 0$.
- Câu 67.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi
- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m \neq 1$. D. $m = 1$.
- Câu 68.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:
- A. $m > -\frac{8}{3}$. B. $m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq -\frac{8}{3}$.
- Câu 69.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ x - m > 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi:
- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

- Câu 70.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0(1) \\ x < m-1(2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:
- A. $m < 5$. B. $m > -2$. C. $m = 5$. D. $m > 5$.
- Câu 71.** Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $-3 < m < 6$. B. $-3 \leq m \leq 6$. C. $m < -3$. D. $m > 6$.
- Câu 72.** Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.
- A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$. B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$. C. $m \leq -\frac{5}{3}$. D. $m < 1$.
- Câu 73.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:
- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.
- Câu 74.** Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.
- A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. B. $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. D. $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 75.** Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0(1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0(2) \end{cases}$ có nghiệm.
- A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. B. $m \geq \frac{3}{2}$. C. $m \in \emptyset$. D. $m \geq -1$.
- Câu 76.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0(1) \\ mx \geq 3m + 1(2) \end{cases}$ vô nghiệm.
- A. $m > -\frac{1}{5}$. B. $m > \frac{1}{4}$. C. $m > -\frac{1}{11}$. D. $m > \frac{1}{32}$.
- Câu 77.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:
- A. $0 \leq a \leq 2$. B. $0 \leq a \leq 4$. C. $2 \leq a \leq 4$. D. $0 \leq a \leq 8$.

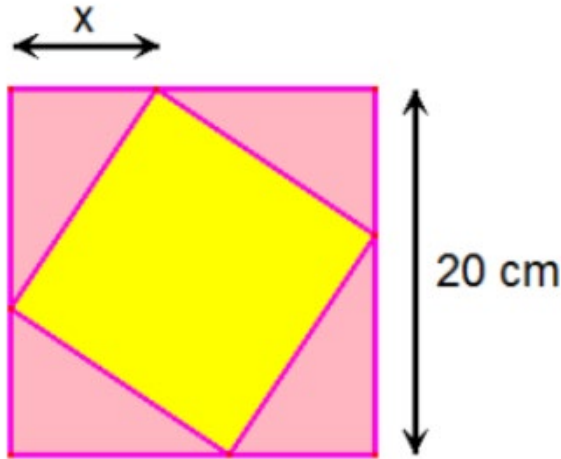
Dạng 3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

- Câu 1.** Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.



- A. 1245. B. 1250. C. 1255. D. 1260.

- Câu 2.** Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng 20 cm , tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2 .



- A. $8 \leq x \leq 12$. B. $6 \leq x \leq 14$. C. $12 \leq x \leq 14$. D. $12 \leq x \leq 18$.
- Câu 3.** Công ty du lịch Hòa Bình dự định tổ chức một tua đi Sapa từ Hà Nội. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?
- A. 1.875.000 (đồng). B. 1.375.000 (đồng).
C. 1.675.000 (đồng). D. 1.475.000 (đồng).
- Câu 4.** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.
- A. 39.000. B. 43.000. C. 40.000. D. 42.000.
- Câu 5.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có x con cá ($x \in \mathbb{Z}^+$) thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $480 - 20x$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau mỗi vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?
- A. 10. B. 12. C. 9. D. 24.

Bài 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Bất phương trình bậc hai một ẩn

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1. Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x = 2$

b) $x = 0$;

c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức

$2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4; 2)$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

Nhận xét

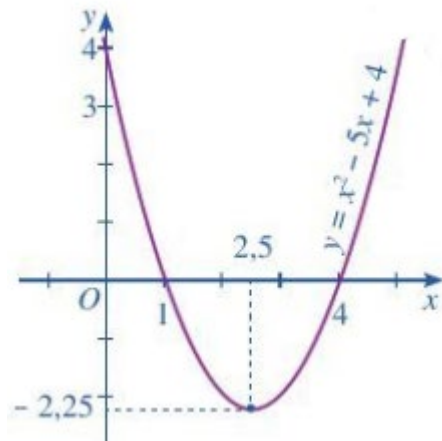
- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.

- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

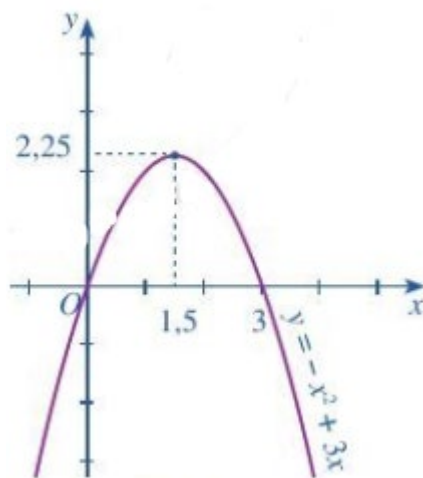
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 3. Quan sát đồ thị ở Hình và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.



b) $-x^2 + 3x > 0$.



Giải

a) Quan sát đồ thị ở a, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1; 4)$.

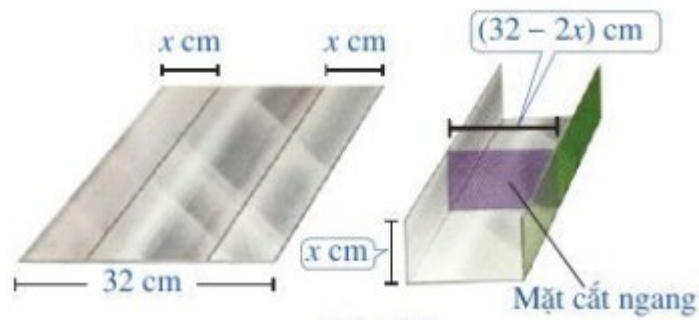
b) Quan sát đồ thị ở b, ta thấy: $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0; 3)$.

III. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật (như hình) với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 .



Hỏi rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình thì kích thước của mặt cắt ngang là $x(\text{cm})$ và $32 - 2x(\text{cm})$. Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x(\text{cm}^2)$

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu "+" là $(6; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6cm .

Ví dụ 5. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad (3) \text{ và } x^2 - 9 < 0 \quad (4)$$

Giải

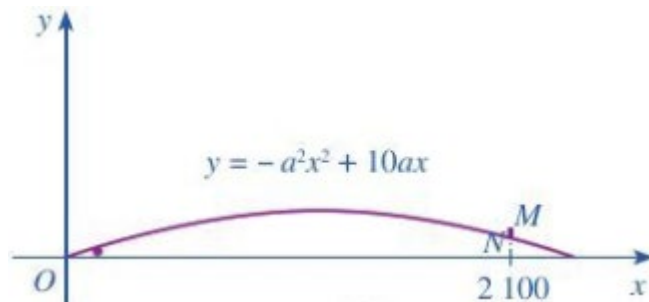
Ta có: $(3) \Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4; 2)$;

$(4) \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S = S_3 \cap S_4 = (-4; 2) \cap (-3; 3) = (-3; 2)$$

Ví dụ 6. Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$



Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.

Giải

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là:

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a} \quad (5); -4410000a^2 + 21000a \leq 25 \quad (6); -4410000a^2 + 21000a \geq 15 \quad (7).$$

$$- (5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$- (6) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0. \text{ Bất phương trình này đúng } \forall a > 0.$$

$$- (7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$$\left(0; \frac{1}{210} \right) \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } a \text{ là } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}.$$

Tìm hiểu thêm

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \neq 0).$$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dấu của Δ	Dấu của a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$		$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$	$(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$(*)$ vô nghiệm
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$	$(*)$ vô nghiệm

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

Câu 1. Giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$. b) $x^2 + x - 12 < 0$.

Lời giải.

a) Ta có $-3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$-3x^2+2x+1$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

b) Ta có $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
x^2+x-12	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; 3)$.

Câu 2. Giải các bất phương trình sau

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$.

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Lời giải.

a) Ta có $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$		
$1-2x$	+		+	0	-		-
x^2-x-1	+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

b) Bất phương trình tương đương với

$$(x^4 - 4x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 1) \leq 0.$$

Ta có $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
x^2+x-3	+	0	-		-	0	+		+
x^2-x-1	+		+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Câu 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{x^2-1}{(x^2-3)(-3x^2+2x+8)} > 0.$

b) $x^2+10 \leq \frac{2x^2+1}{x^2-8}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1; \quad x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}; \quad -3x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$					
x^2-1	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$-3x^2+2x+8$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
VT	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right).$$

b) Bất phương trình tương đương với

$$\frac{2x^2+1}{x^2-8} - x^2 + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1-(x^2-8)(x^2+10)}{x^2-8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{81-x^4}{x^2-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(9-x^2)(9+x^2)}{(x^2-8)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2-8} \geq 0.$$

$$\text{Ta có } 9-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 3; \quad x^2-8=0 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$9-x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$		
x^2-8	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
VT	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3].$$

Câu 4. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{|x^2-x|-2}{x^2-x-1} \geq 0.$

b) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6} \leq 0.$

Lời giải.

a) Vì $|x^2 - x| + 2 > 0$ nên

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)(|x^2 - x| + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \text{ (do } x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0).$$

Ta có $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}; x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$			
x^2-x-2	+	0	-		-	0	+		
x^2-x-1	+		+	0	-	0	+		
$\frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}$	+	0	-		+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty; 1] \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty).$$

b) Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + \sqrt{3}x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}.$

Vì $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1} > 0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1})}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0.$$

Ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}; x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
x^2-x	+		+	0	-	0	+		+
$x^2+\sqrt{3}x-6$	+	0	-		-		-	0	+
$\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}$	+		-	0	+	0	-		+

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3}).$$

Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai**Câu 1.** Tìm m để các phương trình sau có nghiệm.

a) $x^2 - mx + m + 3 = 0$.

b) $(1 + m)x^2 - 2mx + 2m = 0$.

Lời giải.

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 4(m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm.b) Với $m = -1$, phương trình trở thành $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Với $m \neq -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 2m(1 + m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy với $-2 \leq m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm.**Câu 2.** Giải và biện luận bất phương trình $(m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x - 4m + 2 < 0$.**Lời giải.**□ Với $m = -1$, bất phương trình trở thành $6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.□ Với $m \neq -1$, ta có $g(x) = (m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x - 4m + 2$ là tam thức bậc hai có

$$\begin{cases} a = m + 1 \\ \Delta' = 8m^2 - 2m - 1 \end{cases}$$

□ Bảng

xét

dấu

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m + 1$	-	0	+	+	+
$8m^2 - 2m - 1$	+		+	0	-
				0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có

-Nếu $m < -1$, ta có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

$$\text{Với } x_1 = \frac{2m - 1 - \sqrt{(2m - 1)(m + 1)}}{m + 1}, x_2 = \frac{2m - 1 + \sqrt{(2m - 1)(m + 1)}}{m + 1}.$$

-Nếu $-1 < m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (x_1; x_2).$$

-Nếu $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$. Suy ra $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bpt vô nghiệm.

-Kết luận:□ $m = -1$, bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$.□ $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$.□ $m > \frac{1}{2}$ hoặc $-1 < m < -\frac{1}{4}$ bpt có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$.

□ $m < -1$ bpt có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì pt

a) $mx^2 - (3m+2)x + 1 = 0$ luôn có nghiệm

b) $(m^2 + 5)x^2 - (\sqrt{3}m - 2)x + 1 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m = 0$ thì pt trở thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ suy ra pt có nghiệm

Với $m \neq 0$ ta có $\Delta = (3m+2)^2 - 4m = 9m^2 + 8m + 4 = \left(3m + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{20}{9} > 0$ với mọi m

Do đó pt đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

b) Ta có

$$\Delta = (\sqrt{3}m - 2)^2 - 4(m^2 + 5) = -m^2 - 4\sqrt{3}m - 16 = -(m + 2\sqrt{3})^2 - 4 < 0 \text{ với mọi } m$$

Do đó pt đã cho luôn vô nghiệm với mọi m .

Câu 4. Tìm m để biểu thức sau luôn dương

a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$. b) $(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3$

Lời giải

a) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \\ m^2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow 2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

Vậy $m < \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b) Với $m = -2$, tam thức bậc hai trở thành $1 > 0$: luôn đúng với mọi x .

Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. Tìm m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = mx^2 - x - 1$. b) $g(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5$

Lời giải

a) Với $m = 0$, ta có $f(x) = -x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$: không thỏa mãn.

Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mx^2 - x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 4$, ta có $g(x) = -1 < 0$: đúng với mọi x .

Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$.

Câu 6. Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

$$\text{a) } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } -4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Vậy với $m < -\frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

b) Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\sqrt{x^2 - x + m} - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + m} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

Vậy với $m < \frac{5}{4}$ thì biểu thức đã cho luôn dương.

Câu 7. Tìm các giá trị của m để các bpt sau được nghiệm đúng với mọi x.

$$\text{a) } (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0. \quad \text{b) } (m+4)x^2 < 2(mx - m + 3)$$

Lời giải

$$\text{a) Xét } 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \vee m = 2$$

$$\square \text{ Khi } m = -\frac{1}{2} \text{ thì bpt trở thành } -5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}: \text{ Không nghiệm đúng với mọi } x.$$

$$\square \text{ Khi } m = 2 \text{ thì bpt nghiệm đúng với mọi } x.$$

$$\square \text{ Khi } \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases} \text{ thì yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 7m - 2 \leq 0 \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-\frac{1}{3} \leq m \leq 2$.

b) Khi $m = -4$ thì bpt trở thành $0 < -8x + 14$: Không nghiệm đúng với mọi x.

$$\text{Khi } m \neq -4 \text{ thì yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 6 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 2m + 24 < 0 \\ m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \vee m > 4 \\ m < -4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6$$

Vậy $m < -6$ là giá trị cần tìm.

Câu 8. Chứng minh hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi m

$$\text{a) } y = \frac{mx}{(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2} \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{n^2}}$$

Lời giải

a) Điều kiện $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2$. Ta có

$$a_f = 2m^2 + 1 > 0, \Delta'_f = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0$$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

□ Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1$. Ta có

$$a_f = 2 > 0, \Delta'_f = (m+1)^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \leq 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

□ Xét tam thức bậc hai $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2$

Với $m = 0$ thì $g(x) = 2 > 0$

Với $m \neq 0$, ta có

$$a_g = m^2 > 0, \Delta'_g = m^2 - m^2(m^2 + 2) = -m^2(m^2 + 1) < 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$

Và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$ đúng với mọi x .

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $(m^2+1)x + m(x+3) + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$.

Lời giải

Bpt tương đương $(m^2 + m + 1)x + 3m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-3m-1}{m^2+m+1} \left(\text{do } m^2+m+1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right)$$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty\right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi $[-1; 2] \subset \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty\right)$

$$\text{Suy ra } \frac{-3m-1}{m^2+m+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{m^2-2m}{m^2+m+1} < 0 \Leftrightarrow m^2-2m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Vậy $0 < m < 2$ thỏa mãn.

Câu 10. Tìm các giá trị của tham số m để bpt $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải

-Với $m = 1$ thì bpt trở thành $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$: Thỏa mãn

-Với $m < 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

- Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra bpt vô nghiệm: không thỏa mãn.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì bpt tương đương $\frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} < x < \frac{1 - \sqrt{2 - m^2}}{m - 1}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1}; \frac{1 - \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \right)$: không thỏa mãn.

-Với $m > 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases}$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

-Nếu

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ thỏa mãn.

Vậy $m > \sqrt{2}$ thỏa mãn.

-Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ thì bpt tương đương $\begin{cases} x < \frac{1 - \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \\ x > \frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \end{cases}$

-Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi

$(0; +\infty) \subset \left(\frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1}; +\infty \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{m - 1} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2 - m^2} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

-Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, xét $m = \sqrt{2}$ thì bpt trở thành

$(\sqrt{2} - 1)x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

Không thỏa mãn. Vậy $m = 1, m > \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$

Lời giải

Ta có $\Delta' = m^2 \geq 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$

-Nếu $m = 0$ thì bpt trở thành $x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

-Nếu $m > 0$ thì $x_1 = 1 - m < x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 - m; 1 + m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 - m; 1 + m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1-m \\ 2 \geq 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

-Nếu $m < 0$ thì $x_1 = 1 - m > x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 + m; 1 - m]$
 Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 + m; 1 - m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1+m \\ 2 \geq 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Vậy $m \leq -1 \vee m \geq 1$ thỏa mãn.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt

$$x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \text{ mà } |x| \geq 2.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3m - 2 \end{cases}$$

-Nếu $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì bpt trở thành $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
 suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

-Nếu $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 3m - 2) \cup (1; +\infty)$
 Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy $0 < m < 1$ thỏa mãn.

□ Nếu $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (3m - 2; +\infty)$
 Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$

Vậy $1 < m < \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

-Kết hợp các Th ta có $0 < m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \leq 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta = (3 - m)^2 - 4(-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$$

-Nếu $m = 1$ thì bpt trở thành $x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ thỏa mãn.

-Nếu $m = -3$ thì bpt trở thành $x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ thỏa mãn

-Nếu $-3 < m < 1$ thì $\Delta < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0$ nên $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

-Nếu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ thì $\Delta > 0$ nên phương trình $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm

$$S = \left(-\infty; \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2} \right) \cup \left(\frac{-3 + m + \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2}; +\infty \right)$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \leq -4$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
(-\infty; -4] &\subset \left(-\infty; \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \right) \\
\Leftrightarrow -4 &< \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-3} < m+5 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \vee m > 1 \\ m > -5 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m > 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ m+5 > 0 \\ m^2+2m-3 < (11-m)^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

A. $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

B. $x \in [-1; 5]$.

C. $x \in [-5; 1]$.

D. $x \in (-5; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$.

Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Câu 2. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[6; +\infty)$.

C. $[8; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Do đó $[6; +\infty) \not\subset S$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 14x + 20 < 0$ là

A. $S = (-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

C. $S = (2; 5)$.

D. $S = [2; 5]$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $0 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

Vậy $S = (2; 5)$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 25 < 0$ là

- A. $S = (-5; 5)$. B. $x > \pm 5$.
C. $-5 < x < 5$. D. $S = (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Vậy $S = (-5; 5)$.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là $(1; 2)$. Chọn đáp án A.

Câu 6. Tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$.

- A. $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. B. $[-2; 3]$.
C. $[-3; 2]$. D. $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = [-2; 3]$.

Câu 7. Bất phương trình $-x^2 + 2x + 3 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. B. $(-1; 3)$. C. $[-1; 3]$. D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $-x^2 + 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ là:

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $[-1; 3]$. D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ xác định khi $-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; 3]$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + x + 12 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. B. $\emptyset$.
C. $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. D. $[-3; 4]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-x^2 + x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-3; 4]$.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là

- A. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.
 B. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
 C. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
 D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \sqrt{x^2-3}+x-2 \neq 0 \\ x^2-3 \geq 0 \end{cases}$

Ta có $x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$.

Xét $\sqrt{x^2-3}+x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-3=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x=\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.
 B. $[2; +\infty)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
 D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2-4 > 0$.

- A. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
 B. $S = (-2; 2)$.
 C. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
 D. $S = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2-4x+4 > 0$.

- A. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 B. $S = \mathbb{R}$.
 C. $S = (2; +\infty)$.
 D. $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải

Chọn A.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x^2-4x+4	$+$	0	$+$

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 14. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2 - 3x - 15 \leq 0$ là

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn A.

Xét $f(x) = 2x^2 - 3x - 15$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{4}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x		$\frac{3 - \sqrt{129}}{4}$		$\frac{3 + \sqrt{129}}{4}$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{3 - \sqrt{129}}{4}; \frac{3 + \sqrt{129}}{4} \right]$.

Do đó bất phương trình có 6 nghiệm nguyên là $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình: $x^2 + 9 > 6x$ là

A. $(3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn B.

$$x^2 + 9 > 6x \Leftrightarrow (x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Câu 16. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $-2x^2 - 3x + 2 > 0$.

A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

C. $S = \left(-2; \frac{1}{2} \right)$.

D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2 \right)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } -2x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{1}{2}.$$

Câu 17. Bất phương trình $(x - 1)(x^2 - 7x + 6) \geq 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$.

B. $S = [6; +\infty)$.

C. $(6; +\infty)$.

D. $S = [6; +\infty) \cup \{1\}$.

Lời giải

Chọn D

$$(x - 1)(x^2 - 7x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 1)(x - 6) \geq 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 6 \end{cases}.$$

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ là

A. $(1; 4)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+
$x^2 - 4$		+	0	-	0	+
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Câu 19. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } x(x+5) \leq 2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2 + 5x \leq 2x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$$

$$\text{Xét phương trình } x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 20. Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$$

$$\text{Phương trình } 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ và } 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$	
$3x^2-10x+3$		+	0	-	0	+
$4x-5$		-	0	+	0	+
$f(x)$		-	0	+	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$. **Chọn B.**

Câu 21. Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

- A. $x \in (1; 2)$. B. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.
C. $x \geq 4$. D. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = (4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Ta có $x^2+5x+9 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$4-x^2$		-		-	0	+	0	+	0	-	
x^2+2x-3		+	0	-		-	0	+		+	
x^2+5x+9		+		+		+		+		+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -2 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0$ là

- A. $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$. B. $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in [-1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Lời giải

Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+4) \geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-1 \end{cases}$ và $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
x^2+5x+4		+	0	-	0	+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$(x-2)(x^2+5x+4)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x-2)(x^2+5x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

Chọn A.

Câu 23. Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn $f(x)$ không dương là

- A. $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.
C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{4x-12}{x^2-4x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3 \leq x < 4 \end{cases}$ hay $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

Câu 24. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-3x-4}{x-1} \leq 0$.

- A. $T = (-\infty; -1] \cup [1; 4]$. B. $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4]$.
C. $T = (-\infty; -1) \cup (1; 4]$. D. $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x^2-3x-4}{x-1} \leq 0 \quad (1).$$

$$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}.$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
x^2-3x-4	+	0	-	-	0	+	
$x-1$	-	-	0	+	+	+	
VT (1)	-	0	+		-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4]$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4} \leq 0$ là.

- A. $S = [-2; 2] \cup [3; 4]$. B. $S = (-2; 2] \cup [3; 4]$.
C. $S = (-2; 2) \cup [3; 4]$. D. $S = [-2; 2] \cup (3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x^2-4}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

$$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}.$$

$$x^2-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-2	2	3	4	$+\infty$			
$x^2-7x+12$	+		+		0	-	0	+	
x^2-4	+	0	-	0	+		+		+
$f(x)$	+		-		+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-2; 2) \cup [3; 4]$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-2}$ là.

A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+3}{x^2-x-2} \geq 0 \quad (1).$$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
VT (1)	+		-	0	+		-

$$(1) \Leftrightarrow x < -1 \vee \frac{1}{2} \leq x < 2.$$

Câu 27. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4} \geq 1$. Khi đó $S \cap (-2; 2)$ là tập nào sau đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $\emptyset$.

D. $(-2; -1]$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Xét } \frac{x^2+x+3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x^2-4} \geq 0.$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S = [-7; -2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Vậy } S \cap (-2; 2) = \emptyset.$$

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2$ là

A. $\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3} > 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 > 2(x^2 + 3) \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$
$2x+9$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	$ $	$+$	$ $
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x=1$) thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10} \leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x^2-3x-10$		$+$	$ $	$-$	$ $	$-$
$f(x)$		$-$	$ $	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Chọn C.

Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm
A. $-4 \leq m \leq 4$. **B.** $m \leq -4$ hay $m \geq 4$.
C. $m \leq -2$ hay $m \geq 2$. **D.** $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$ hay $m \geq 4$

- Câu 2.** Tìm m để phương trình $-x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
A. $(-1; 2)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **C.** $[-1; 2]$ **D.** $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Lời giải**Chọn B**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-1) \cdot (m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

- Câu 3.** Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. **D.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải**Chọn B.**

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{5} \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}.$$

- Câu 4.** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx + 4m = 0$ vô nghiệm.
A. $0 < m < 16$. **B.** $-4 < m < 4$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $0 \leq m \leq 16$.

Lời giải**Chọn A.**

Phương trình $x^2 - mx + 4m = 0$ vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 16$.

- Câu 5.** Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A.** $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$.
C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **D.** $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1. \text{ Chọn B.}$$

- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $m = -\frac{1}{2}$
- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $m = 2$ D. $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \text{ vô nghiệm?}$$

- A. $m < 0$. B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

- Câu 8.** Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } mx^2 - 2mx + 4 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m=0$, khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4=0$ (vô lý).

Suy ra với $m=0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

- Câu 9.** Phương trình $(m^2-4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ (*).

TH1. Với $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

• Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

• Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}.$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 10. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow (-b)^2 - 4.3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - (2\sqrt{3})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 2\sqrt{3})(b + 2\sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2\sqrt{3} \\ b \leq -2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 11. Phương trình $x^2 + 2(m + 2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$.

B. $-5 \leq m \leq -1$.

C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + 2(m + 2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m + 2)^2 + 2m + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm. Chọn D.}$$

Câu 12. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Xét $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 13. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-5=0 \Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$.

Do đó, với $\begin{cases} 5 \neq m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 14. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(-m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 15. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.
C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Lời giải

Tam thức $f(x)$ đổi dấu hai lần $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 32m - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow m(m-28) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Vậy $m < 0$ hoặc $m > 28$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Xét } x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0, \text{ có } \Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases} \text{ suy ra } m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq 1$ C. $-1 < m < 6$. D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases} \text{ suy ra } 17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hệ bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \neq 1$. **Chọn B.**

Câu 18. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. **Chọn C.**

Câu 19. Giá trị nào của $m = 0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.} \end{aligned}$$

Chọn A.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. B. $m < 0$. C. $m \neq -1$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Dễ thấy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi } \frac{a}{c} = \frac{m^2 + 2m + 1}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 21. Xác định m để phương trình $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. $\frac{1}{7} < m < \frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$. C. $m > \frac{1}{7}$. D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0 \Leftrightarrow (x-2)(mx^2 + (2m-1)x + 4m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = mx^2 + (2m-1)x + 4m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 2 khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -12m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4m + 2(2m-1) + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6} \\ m \neq \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2.

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{2} \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}$$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1) + (x_2-1) > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 > 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m} - 2 > 0 \\ 4 - \frac{1-2m}{m} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m} - 2 > 0 \\ 4 - \frac{1-2m}{m} + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-4m}{m} > 0 \\ \frac{7m-1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \\ m > \frac{1}{7} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{7} < m < \frac{1}{4} \quad (2).$$

Câu 22. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

A. $1 < m < 3$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1}, x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1}.$

Theo đề ta có: $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-4}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$

Vậy $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 23. Cho phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

- A. $m \geq 5$. B. $m < \frac{8}{3}$. C. $\frac{8}{3} < m < 5$. D. $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-5 \neq 0 \\ (m-1)^2 - m(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{m-5} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m-5} \end{cases}$.

Với $x_1 < 2 < x_2 \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-5} + \frac{4(m-1)}{m-5} + 4 < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{9m-24}{m-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 5$. Kiểm tra điều kiện (*) ta được $\frac{8}{3} < m < 5$.

Câu 24. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m-2)x + m^2 - 4m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $0 < m < 4$. B. $m < 0$ hoặc $m > 4$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 25. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1?

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \in \emptyset$. D. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

Với $m-1 \neq 0$ ta xét phương trình: $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ (1).

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - m(m-1) = m$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) và $x_1 > 1, x_2 < 1$.

Ta có: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 (*)$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{m}{m-1} \\ x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \end{cases}$, thay vào (*) ta có:

$$\frac{m}{m-1} - \frac{2m}{m-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m-1} < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy với $m > 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.

- A. Không có giá trị của m . B. $m \geq 2$.
C. $m \leq -1$. D. $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \quad (1).$

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$x_1^3 + x_2^3 \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m+2) \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m^2 - 12m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (m-2)(8m^2 + 10m + 8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Câu 27. Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$. B. $m < -\frac{7}{2}$.
C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. D. $-\frac{7}{2} < m < 3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

$$(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m+12 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -1 và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ -2m - 4 > 0 \\ 2m + 7 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

Câu 28. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $m > 6$. B. $m < 6$. C. $6 > m > 0$. D. $m > 0$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6. \text{ Chọn A.}$$

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $2 < m < 6$. B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.
C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. D. $-3 < m < 6$.

Lời giải

$$\text{. Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \frac{2m}{m-2} > 0 \\ \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$. B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.
C. $m > 1$. D. $1 < m < 6$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ \frac{5}{9} < m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 31. Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) \geq 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Chọn B.

Câu 32. Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. B. $-1 < m < \frac{5}{2}$.
C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}. \text{ Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 33. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2) \cdot (-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 34. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

- A. $0 < m < 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Phương trình } x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Với } m \in (0; 2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{ theo bài ra, ta có } |x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m) > 0 \Leftrightarrow 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 35. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

- A. $m < 2 \vee m > 6$. B. $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.
 C. $2 < m < 6$. D. $-2 < m < 6$.

Lời giải

Xét phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (*), có $\Delta' = m + 2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1; 2\} \\ m > -2 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (*) suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}.$$

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$.

Kết hợp với (I), ta được $\begin{cases} m > 6 \\ m \in (-2; -1) \cup (-1; 2) \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.
C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$. D. $m \in (7; +\infty)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\frac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m > 0$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m+2)x + 8m + 1 \leq 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in [0; 28]$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0] \cup [28; +\infty)$. D. $m \in (0; 28)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi } (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \quad 0 < m < 28.$$

Câu 39. Tam thức $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4$ không âm với mọi giá trị của x khi

- A. $m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy $m \leq 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ biểu thức $f(x) = x^2 + (m+2)x + 8m+1$ luôn nhận giá trị dương.

A. 27.

B. 28.

C. Vô số.

D. 26.

Lời giải**Chọn A**

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28$$

Vậy có 27 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m+7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A. $m \in [2; 6]$.

B. $m \in (-3; 9)$.

C. $m \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

D. $m \in (-9; 3)$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có : } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 4(2m+7) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9.$$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

A. $m > -1$.

B. $-1 \leq m \leq 3$.

C. $-1 < m \leq 3$.

D. $-1 < m < 3$.

Lời giải**Chọn B**

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ Bất phương trình (1) trở thành $4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Luôn đúng) (*)

TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ Bất phương trình (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 43. Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

B. $1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

C. $m \neq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải**Chọn A**

Đặt $f(x) = (m+1)x^2 - 2mx - (m-3)$

Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: Với $m = -1$ thì $f(x) = 2x + 4$

Khi đó $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ không thỏa mãn nên loại $m = -1$

TH2: Với $m \neq -1$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$a > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\Delta' = m^2 + (m+1)(m-3) = 2m^2 - 2m - 3$$

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ suy ra } \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $f(x)$ sau đây thỏa mãn $f(x) = -x^2 + 2x + m - 2018 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m > 2019$.

B. $m < 2019$.

C. $m > 2017$.

D. $m < 2017$.

Lời giải

Chọn D.

Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - (-1)(m - 2018) < 0 \Leftrightarrow m - 2017 < 0 \Leftrightarrow m < 2017.$$

Câu 45. Tìm m để $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 4m$ luôn luôn âm

A. $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 0$: $f(x) = 2x$ đổi dấu (loại $m = 0$)

TH2: $m \neq 0$; Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 2m + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \vee m > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -1$$

Vậy $m < -1$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x^2 - mx + 1} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \in (-2; 2)$.

C. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

D. $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x^2 - mx + 1} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \in [-2; 2].$$

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

C. $-1 \leq m \leq 7$.

D. $-1 < m < 7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{BPT nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 6m - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7.$$

Câu 48. Bất phương trình $x^2 + 4x + m < 0$ vô nghiệm khi

A. $m < 4$.

B. $m > 4$.

C. $m \leq 4$.

D. $m \geq 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có BPT $x^2 + 4x + m < 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 + 4x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Câu 49. Bất phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 < 0$ vô nghiệm khi

A. $m \geq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > \frac{1}{5}$.

D. $m > \frac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1. $m = 0$. Khi đó bất phương trình trở thành: $-2x + 7 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$.

Trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán, loại.

Trường hợp 2. $m \neq 0$. Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - 5m \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow m &\geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m < -1$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $-1 < m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

$$mx^2 - 2mx - 1 \geq 0 \quad (1)$$

+) $m = 0$ thì bất phương trình (1) trở thành: $-1 > 0$ (vô lý). Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) $m \neq 0$, bất phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta' = (-m)^2 - m(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm khi $-1 < m \leq 0$.

- Câu 51.** Gọi S là tập các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0$ có tập nghiệm là $[a; b]$ sao cho $b - a = 4$. Tổng tất cả các phần tử của S là
- A. -5. B. 1. C. 5. D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 \leq m^2 - 5m + 8 \Leftrightarrow |x - m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8}$$

$$|x - m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8} \Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 5m + 8} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 5m + 8}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của BPT là } \left[m - \sqrt{m^2 - 5m + 8}; m + \sqrt{m^2 - 5m + 8} \right].$$

$$\text{Theo bài ra ta có } b - a = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - 5m + 8} = 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Tổng tất cả các phần tử của S là 5.

- Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số m để $x^2 - 2x - m \geq 0, \forall x > 0$.
- A. $m \leq 0$. B. $m < -1$. C. $m \leq -1$. D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } x^2 - 2x - m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq m.$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh của parabol

$$x_I = \frac{-b}{2a} = 1. \text{ Do đó có bảng biến thiên}$$

x	0	1	$+\infty$
y	0	-1	$+\infty$

Dựa vào bbt ta có $x^2 - 2x \geq m, \forall x > 0$ khi và chỉ khi $m \leq -1$.

- Câu 53.** Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- A. $[-1; 6]$. B. $(-1; 6)$. C. $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow (m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1 \geq 0 \quad (*).$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (*) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) $m = -10$: (*) trở thành: $24x + 1 \geq 0$ không đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m = -10$ loại.

$$+) m \neq -10: (*) \text{ đúng với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-2)^2 - (m+10) \leq 0 \\ m+10 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m - 6 \leq 0 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 6 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6.$$

Vậy với $-1 \leq m \leq 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Câu 54.** Cho bất phương trình $(m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11 \leq 0$ (1). Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình đúng với mọi $\forall x < -4$. Khi đó số phần tử của S là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đặt $f(x) = (m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11$

TH1: $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

(1) $\Leftrightarrow -4x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{4}$ không thỏa đề

TH2: $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

$\Delta' = (4-3m)^2 - (m-2)(10m-11) = -m^2 + 7m - 6$

Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$	1	6	$-\infty$	
Δ'	-	0	+	0	-

* Nếu $m > 6$ thì $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa đề

* Nếu $m \leq 1$ thì $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa đề

* Nếu $2 < m < 6$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Khi đó $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$ không thỏa đề

* Nếu $1 < m < 2$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Khi đó $f(x) \leq 0 \quad \forall x < -4 \Leftrightarrow -4 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_1 + 4 < x_2 + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 + x_2 + 4 > 0 \\ (x_1 + 4)(x_2 + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 8 > 0 \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(3m-4)}{m-2} + 8 > 0 \\ \frac{10m-11}{m-2} + \frac{8(3m-4)}{m-2} + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14m-24}{m-2} > 0 \\ \frac{50m-75}{m-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m-24 < 0 \\ 50m-75 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{12}{7} \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$$

So sánh điều kiện suy ra $1 < m \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $S = \{1\}$.

Cách 2:

Ta có $(m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m-11 \leq 0$ (1)

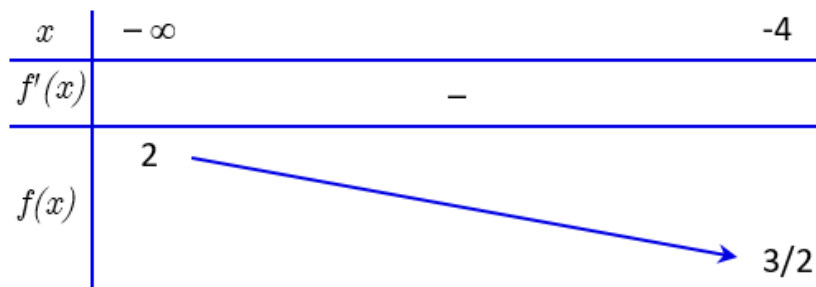
$$\Leftrightarrow m(x^2 - 6x + 10) - 2x^2 + 8x - 11 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10} \quad (\text{vì } x^2 - 6x + 10 > 0; \forall x < -4).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10}$ với $x < -4$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(4x-8)(x^2-6x+10) - (2x-6)(2x^2-8x+11)}{(x^2-6x+10)^2} = \frac{-4x^2 + 18x - 14}{(x^2-6x+10)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad (l)$$

Bảng biến thiên:



Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x < -4 \Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x < -4 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $S = \{1\}$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = 1 - \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m \geq 0$ (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = -1 \Rightarrow$ bpt (1) $\Leftrightarrow 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ không nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m \neq -1 \Rightarrow$ bpt (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(2-2m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 3m^2 - 2m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -\frac{1}{3} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1\}$.

Câu 56. Để bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $m \leq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{20}$.

C. $m \leq \frac{1}{20}$.

D. $m > \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow 5x^2 - x + m > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 20m < 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m > \frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn C.

- Với $m = -1$ ta có: $x > -1$ không thỏa mãn.

- Với $m \neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m^2 - 4(m+1)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 59. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm:

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn D.

$-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m - 1 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + x - m > 0$ vô nghiệm.

- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m > \frac{1}{4}$. D. $m < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $-x^2 + x - m > 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $-x^2 + x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } -x^2 + x - m \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

Câu 61. Bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi

- A. $m \in [1; +\infty)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 7)$.

Lời giải

Chọn A.

$$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$.

- A. $m > 1$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1 > 0, \forall x \in (0; 1)$.

$$\Leftrightarrow -2m(x-1) > x^2 - 2x + 1, \forall x \in (0; 1) \quad (*).$$

$$\text{Vì } x \in (0; 1) \Rightarrow x-1 < 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow -2m < \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = x-1 = g(x), \forall x \in (0; 1).$$

$$\Leftrightarrow -2m \leq g(0) = -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 63. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x-3m+2 < 0 \end{cases}$ vô nghiệm khi

A. $m \leq -1$.

B. $m \geq -1$.

C. $m > -1$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x-3m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 3 \\ x < 3m-2 \end{cases}$$

Để hệ vô nghiệm thì $3m-2 \leq -5 \Leftrightarrow 3m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$.

D. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Xét hệ bất phương trình } (I) \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \quad (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \Leftrightarrow S_1 = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$(2) \Leftrightarrow (x-m)[x-(m+1)] \leq 0 \Leftrightarrow m \leq x \leq m+1 \Leftrightarrow S_2 = [m; m+1].$$

$$\text{Hệ } (I) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m > 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 5 \\ x < -1 \end{cases} \quad (*) \\ (x+1)(x-m) \leq 0 \quad (**) \end{cases}$$

+) Nếu $m = -1$ thì $(**) \Leftrightarrow x = -1$. Kết hợp $(*)$ suy ra hệ bpt vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ loại.

+) Nếu $m > -1$ thì $(**) \Leftrightarrow -1 < x < m$. Kết hợp với $(*)$ suy ra hệ bpt có nghiệm $\Leftrightarrow m > 5$.

+) Nếu $m < -1$ thì $(**) \Leftrightarrow m < x < -1$. Kết hợp với $(*)$ suy ra với $m < -1$ thì hệ bpt luôn có nghiệm.

$$\text{Vậy hệ bpt có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$$

Câu 66. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi

A. $m \leq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m < -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải**Chọn A.**

$$\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 4 \\ x < m-1 \end{cases}$$

Do đó hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m-1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -2$.**Câu 67.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

- A.** $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải**Chọn B.**Ta có $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. $x - m > 0 \Leftrightarrow x > m$.Do đó hệ có nghiệm khi $m < 1$.**Câu 68.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m > -\frac{8}{3}$. **B.** $m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \geq -\frac{8}{3}$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1; \frac{4}{3}\right]$ Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right)$.Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.**Chọn C.****Câu 69.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ x - m > 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

- A.** $m > 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \neq 1$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra $S_1 = [-1; 1]$.Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > m$. Suy ra $S_2 = (m; +\infty)$.Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.**Chọn C.****Câu 70.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 & (1) \\ x < m-1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m < 5$. **B.** $m > -2$. **C.** $m = 5$. **D.** $m > 5$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Suy ra $S_1 = (-3; 4)$.Bất phương trình có $S_2 = (-\infty; m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m-1 > -3 \Leftrightarrow m > -2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 71. Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $-3 < m < 6$.

B. $-3 \leq m \leq 6$.

C. $m < -3$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$-9(x^2 - x + 1) < 3x^2 + mx - 6 < 6(x^2 - x + 1) \quad (\text{do } x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 - (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 144 < 0 \\ (m+6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Câu 72. Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 2 + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq 0 \\ \frac{13x^2 - 26x + 14 - m}{2x^2 - 3x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2 + m \geq 0 & (1) \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4 \cdot 3(2+m) \leq 0 \\ 26^2 - 4 \cdot 13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{5}{3} \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 73. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Bất phương trình $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình } x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 \leq m^2 - 1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 - 1} \leq x - m \leq \sqrt{m^2 - 1} \quad (\text{điều kiện: } m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases})$$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 1} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Suy ra } S_2 = [m - \sqrt{m^2 - 1}; m + \sqrt{m^2 - 1}].$$

$$\text{Để hệ có nghiệm } \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 - 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ m^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \geq 0 \\ m^2-1 > (1-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m > 1 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện, ta được $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 74. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$.

Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = [1-\sqrt{m}; 1+\sqrt{m}]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m+1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1+\sqrt{m} \\ 1-\sqrt{m} \leq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 75. Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Suy ra $S_1 = [-1; 4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm.

Với $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m-1}; +\infty\right)$. Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Với $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m-1}\right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Câu 76. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0 & (1) \\ mx \geq 3m + 1 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > -\frac{1}{11}$.

D. $m > \frac{1}{32}$.

Lời giải

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -8 \leq x \leq -2$. Suy ra $S_1 = [-8; -2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m = 0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm.

Với $m > 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m}; +\infty \right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m < 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{3m+1}{m} \right]$. Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$$\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$. **Chọn C.**

Câu 77. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị

thích hợp của tham số a là:

A. $0 \leq a \leq 2$.

B. $0 \leq a \leq 4$.

C. $2 \leq a \leq 4$.

D. $0 \leq a \leq 8$.

Lời giải

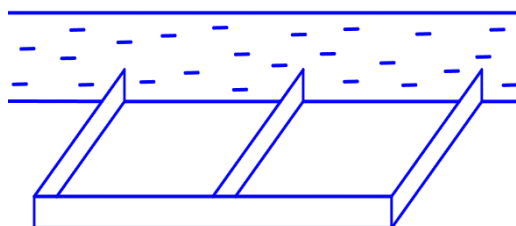
Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$. Suy ra $S_1 = [1; 5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [a+1-\sqrt{2a}; a+1+\sqrt{2a}]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \geq 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$. **Chọn A.**

Dạng 3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

Câu 1. Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.



A. 1245.

B. 1250.

C. 1255.

D. 1260.

Lời giải

Chọn B

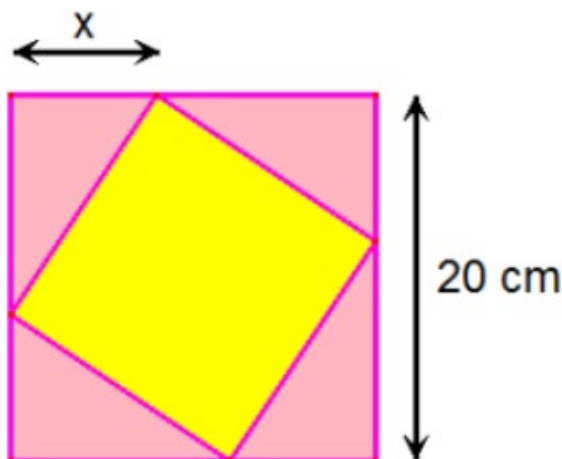
Giả sử độ dài của một hàng rào vuông góc bờ sông là x (m) và độ dài của hàng rào song song với bờ sông là y (m) ($x, y > 0$).

Khi đó, tổng số tiền để mua hàng rào là $3x.40000 + y.60000 = 6000000 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$.

Diện tích khu đất là $S = x.y = x(100 - 2x) = -2(x - 25)^2 + 1250 \leq 1250$.

Vậy diện tích khu đất lớn nhất là $1250(m^2)$ khi $x = 25(m)$ và $y = 50(m)$.

- Câu 2.** Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng 20 cm , tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2 .



A. $8 \leq x \leq 12$.

B. $6 \leq x \leq 14$.

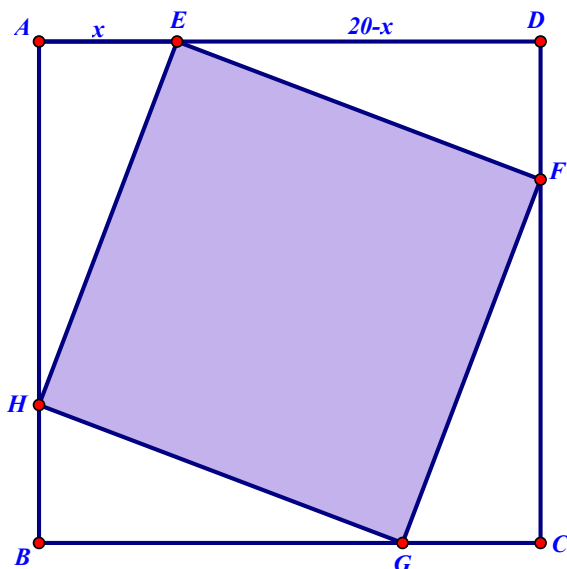
C. $12 \leq x \leq 14$.

D. $12 \leq x \leq 18$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F, G, H là bốn đỉnh của viên gạch hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$ có cạnh 20 cm như hình vẽ



Ta có cạnh viên gạch là $EF = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$.

Diện tích của viên gạch là: $EF^2 = 2x^2 - 40x + 400$.

Theo đề ta có diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 \leq 208 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 192 \leq 0 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 12$.

- Câu 3.** Công ty du lịch Hòa Bình dự định tổ chức một tua đi Sapa từ Hà Nội. Công ty dự định nêu giá tua

là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

A. 1.875.000 (đồng).

B. 1.375.000 (đồng).

C. 1.675.000 (đồng).

D. 1.475.000 (đồng).

Lời giải

Chọn B

Gọi x (triệu đồng) là giá tua ($0 < x < 2$)

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là $150 + 400 - 200x = 450 - 200x$

Tổng doanh thu là $f(x) = x(550 - 200x)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 2$. Có

$$x(550 - 200x) = \frac{200x(550 - 200x)}{200} \leq \frac{3025}{8} = 378,125$$

Khi đó $x = \frac{11}{8}$ (triệu) vậy chọn B

Câu 4. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 39.000.

B. 43.000 .

C. 40.000 .

D. 42.000 .

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \leq 44100.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 5. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có x con cá ($x \in \mathbb{Z}^+$) thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $480 - 20x$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau mỗi vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 10.

B. 12.

C. 9.

D. 24.

Lời giải

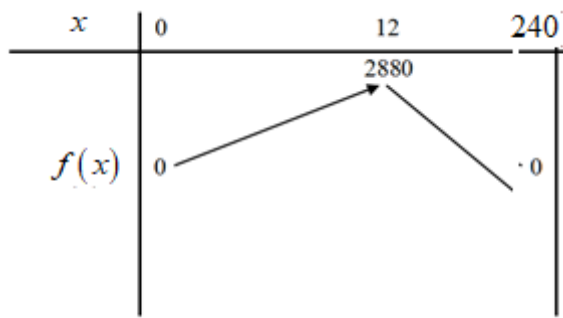
Chọn B

Cân nặng của x con cá là: $f(x) = x(480 - 20x) = 480x - 20x^2$, $(0 < x < 240)$.

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 480x$ trên $(0; 240)$.

Có hoành độ đỉnh $x = 12$ và hệ số $a = -20 < 0$

Lập bảng biến thiên:



Vậy thu hoạch sản lượng cá nhiều nhất thì phải thả trên một đơn vị diện tích mặt hồ 12 con cá.

Bài 5. HAI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = mx^2 + nx + p, a \neq m)$$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thỏa mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thỏa mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.

- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$ bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = dx + e, a \neq d^2)$$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x-1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x-1)^2$ (7).

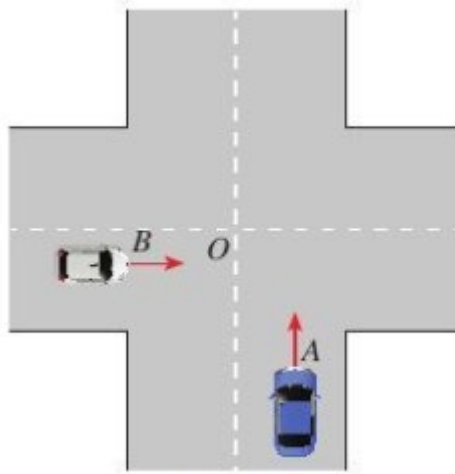
Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x=1$ là thỏa mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x=1$.

Ví dụ 4. Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km , vị trí B cách bến 7 km . Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km .



Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$. Hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải.

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ là $40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x(\text{km})$.

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0,175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2}.$$

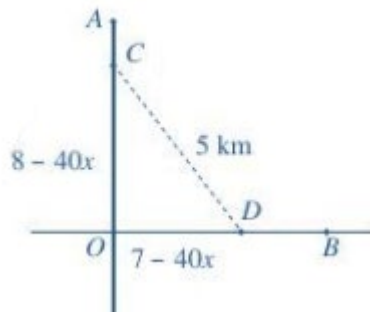
Ta có phương trình: $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$.

Bình phương hai vế ta có:

$$(8-40x)^2 + (7-40x)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow 1600x^2 - 640x + 64 + 1600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3200x^2 - 1200x + 88 = 0$$



$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0,175$, ta chọn $x = 0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là $0,1$ giờ.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Nâng lên lũy thừa, trị tuyệt đối hóa, sử dụng bất đẳng thức, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

Phương trình có dạng	Đặt ẩn phụ
$\sqrt{ax+b}, x, x^2, \dots$	$t = \sqrt{ax+b}, t \geq 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c}, ax^2+bx, \dots$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c}, t \geq 0$
$\sqrt[3]{ax+b}, ax+b, \dots$	$t = \sqrt[3]{ax+b}$
$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \\ \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \end{cases}, f(x) + g(x) = C$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$
$\sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}, f(x) + \frac{A^2}{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}$
$\sqrt[m]{f(x)}, \sqrt[n]{f(x)}$	$t = \sqrt[s]{f(x)}$ với s là bội chung nhỏ nhất của m và n

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{14-2x} = x-3$.

b) $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$.

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$.

b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Câu 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$.

b) $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$.

Câu 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$.

$$b) 2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$$

Câu 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} = x+3.$$

$$b) (x+3)\sqrt{2x^2+1} = x^2 + x + 3.$$

Câu 6. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{x} = 2.$$

$$b) 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8} = \sqrt{x^2+15} + 2.$$

Câu 7. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2.$$

$$b) 3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2.$$

Câu 8. Giải các phương trình sau

$$a) x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31.$$

$$b) (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}.$$

Câu 9. Giải các phương trình sau

$$a) 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}.$$

$$b) x + \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 6.$$

Câu 10. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{60-24x-5x^2} = x^2 + 5x - 10.$$

$$b) (x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28-x.$$

Câu 11. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3.$$

$$b) \sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3.$$

Câu 12. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1-x^2}$$

$$b) x + \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 6.$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = 2-x$ là:

A. $S = \{1; 5\}.$

B. $S = \{1\}.$

C. $S = \{5\}.$

D. $S = \{2; 3\}.$

Câu 2. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = -x^2-5$ là

A. $S = \{1; 5\}.$

B. $S = \{1\}.$

C. $S = \{5\}.$

D. $S = \emptyset.$

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-3x^2} = 2x-1$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2} = x^2-4x+3$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

- Câu 5.** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2 - 3x + 2$ là:
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 6.** Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là
A. $S = \emptyset$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{6; 2\}$. **D.** $S = \{6\}$.
- Câu 7.** Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$.
A. 2 giao điểm. **B.** 4 giao điểm. **C.** 3 giao điểm. **D.** 1 giao điểm.
- Câu 8.** Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng:
A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.
- Câu 9.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2} = x$ là
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 10.** Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x+6} = x-6$ bằng
A. 15. **B.** 6. **C.** 2 và 15. **D.** 2.
- Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+7} = 2x-1$ là
A. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$. **B.** $\left\{ \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$.
C. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2} \right\}$. **D.** Một phương án khác.
- Câu 12.** Phương trình $\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?
A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = x^2-2x+3$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 14.** Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+1} = x^2+x-1$ là
A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 0.
- Câu 15.** Phương trình $\sqrt{2x^2+3x-5} = x+1$ có nghiệm:
A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.
- Câu 16.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-9x+7} = x-2$ là
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.
- Câu 17.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3} = 3x-1$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 18.** Phương trình: $\sqrt{x^2-x-12} = 7-x$ có bao nhiêu nghiệm?
A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô Số.
- Câu 19.** Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2-3x+1} = 1$ là:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 21.** Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2-4x+5} - 2 = 0$ là:
A. 17. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.
- Câu 22.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là:
A. 5. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 25.
- Câu 23.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) = 0$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{1; 2\}$.

Câu 24. Phương trình $\sqrt{x^2-1}(\sqrt{2x+1}-x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 25. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}=0$

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2

Câu 26. Tập nghiệm của phương trình $(x^2-x-2).\sqrt{x-1}=0$ là

- A. $\{1; 2\}$. B. $\{-1; 1; 2\}$. C. $[1; 2]$. D. $\{-1; 2\}$.

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0$ là

- A. $S = \{2; 3\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{1; 3\}$. D. $S = \{1; 2; 3\}$.

Câu 28. Tập nghiệm của phương trình $(x^2-x-2).\sqrt{x-1}=0$ là

- A. $\{1; 2\}$. B. $\{-1; 1; 2\}$. C. $[1; 2]$. D. $\{-1; 2\}$.

Câu 29. Phương trình $(x^2-6x)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 31. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$. C. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3-x}$ là

- A. $x = \frac{3}{4}$. B. $x = \frac{2}{3}$. C. $x = \frac{4}{3}$. D. $x = \frac{3}{2}$.

Câu 33. Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 34. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

- A. $\{2\}$. B. $\{1; -2\}$. C. $\{-1; 2\}$. D. $\{-1\}$.

Câu 35. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 37. Số nghiệm của phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 38. Phương trình $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a, b > 0$. Khi đó: $a+b=$

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 39. Biết phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-3}=\sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 40. Phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=2x-1+\sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 41. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t = 0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 2 \Leftrightarrow 16-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}.$$

Hãy chọn phương án đúng.

A. Lời giải trên sai ở bước 2.

B. Lời giải trên đúng hoàn toàn.

C. Lời giải trên sai ở bước 1.

D. Lời giải trên sai ở bước 3.

Câu 42. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

A. $x = 1$.

B. $x = 4$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

D. $x \in \emptyset$.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 44. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{2-x}{\sqrt{x-3}} = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 45. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+4x-1} = x+1$ là?

A. $S = \{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$.

B. $S = \{-1+\sqrt{3}\}$.

C. $S = \{-1-\sqrt{3}\}$.

D. $\emptyset$.

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+4x-3} + 5 = 2x$ là?

A. $S = \left\{2; \frac{14}{5}\right\}$.

B. $S = \{2; 4\}$.

C. $S = \left\{\frac{14}{5}\right\}$.

D. $S = \{2\}$

Câu 47. Khi giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+1} = 3x$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x^2+3x = (3x-1)^2$ (2)

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được: $8x^2-9x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

Bước 3: Khi $x = 1$, ta có $x^2+3x > 0$. Khi $x = \frac{1}{8}$, ta có $x^2+3x > 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; \frac{1}{8}\right\}$

Vậy Cách giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Đúng.

B. Sai ở bước 1.

C. Sai ở bước 2.

D. Sai ở bước 3.

- Câu 48.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 28} = x + 5$ bằng:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.
- Câu 49.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x$ bằng:
A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** -1.
- Câu 50.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ là:
A. 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.
- Câu 51.** Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ bằng:
A. $3 - \sqrt{2}$. **B.** $2 + \sqrt{2}$. **C.** $2 - \sqrt{2}$. **D.** 5.
- Câu 52.** Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{1 - 2x}$ là
A. $\frac{1}{2} \leq x$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $x \leq \frac{1}{2}$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.
- Câu 53.** $[-3; 1)$ là tập xác định của phương trình nào sau đây?
A. $\sqrt{3 + x} = \sqrt{\frac{1}{1 - x^3}}$ **B.** $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$
C. $\sqrt{-x^2 - x + 6} = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$ **D.** $\sqrt{1 - x} = \sqrt{-x^2 - x + 6}$
- Câu 54.** Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x + 1}$ (1). Phép biến đổi nào sau đây là **sai**?
A. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = x + 1 \end{cases}$
B. $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 1$
C. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = x + 1 \end{cases}$
D. $(1) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = x + 1 \end{cases}$

Câu 55. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x - \frac{5}{4}}$. Một bạn làm như sau:

$$\text{Bước 1: } \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x - \frac{5}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = x - \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Phương trình $x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0$ có hai nghiệm phân biệt, nên theo định lý Vi-et, ta có tổng hai nghiệm là $S = 3$.

Bước 3: Vậy phương trình có tổng các nghiệm là 3.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

- A.** Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 56. Giải phương trình $\sqrt{x^2(x - 1)} = \sqrt{x^2(3 - x)}$ (*), một bạn làm như sau:

Bước 1: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 & (1) \\ x^2(x-1) = x^2(3-x) & (2) \end{cases}$

Bước 2: Giải (1): Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow x^2(2x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết hợp ta được $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. Đúng. B. Sai từ bước 1. C. Sai từ bước 2. D. Sai từ bước 3.

Câu 57. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 2$ là

- A. $1 \leq x$ B. $x \neq 1$ C. $\begin{cases} 2 < x \\ x < 0 \end{cases}$ D. $x > 1$

Câu 58. Điều kiện xác định của phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3$ là

- A. $x > 3$ B. $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ D. $x \leq -1$

Câu 59. Phép biến đổi nào sau đây là **sai**

- A. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Rightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
 B. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
 C. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2 \\ -x^2 - 2x + 7 \geq 0 \end{cases}$
 D. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0 \\ t = \frac{1-t^2}{5} + 7 \end{cases}$

Câu 60. Giải phương trình $(x-2)(x-1) + 2(x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 0$ (1)

Bước 1: Điều kiện: $\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Bước 2: $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 2\sqrt{(x-2)(x-1)} = 0$ (2)

Bước 3: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (tm) \\ x = 2 & (loai) \end{cases} \\ \sqrt{(x-2)(x-1)} = -2 & (loai) \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng B. Sai từ bước 1 C. Sai từ bước 2 D. Sai từ bước 3

Câu 61. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7$ là

A. -3 B. -5 C. -2 D. 2

Câu 62. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{2-x}{\sqrt{x-3}} = 0$ là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 63. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$.

A. $\{2\}$. B. $\{1; -2\}$. C. $\{-1; 2\}$. D. $\{-1\}$.

Câu 64. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$ là:

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 66. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 67. Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$. Khi đó: $a + b =$

A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 68. Biết phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)$.

A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 69. Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 70. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2} = 4$. Một học sinh giải như sau:
Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t = 0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 2 \Leftrightarrow 16-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}.$$

Hãy chọn phương án đúng.

A. Lời giải trên sai ở bước 2. B. Lời giải trên đúng hoàn toàn.
C. Lời giải trên sai ở bước 1. D. Lời giải trên sai ở bước 3.

Câu 71. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

A. $x = 1$. B. $x = 4$. C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$. D. $x \in \emptyset$.

Câu 72. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 73. Số nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3

Câu 74. Phương trình $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$ có hai nghiệm α, β . Khi đó tổng $\alpha + \beta$ thuộc đoạn nào sau đây ?

A. $[2; 5]$. B. $[-1; 1]$. C. $[-10; -6]$. D. $[-5; -1]$.

Câu 75. Phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ có nghiệm là $a \pm \sqrt{b}$ thì $2a - b$ bằng

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 76. Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}, b < 20$. Tính giá trị biểu thức $P = a^3 + 2b^2 + 5c$.

A. $P = 61$. B. $P = 109$. C. $P = 29$. D. $P = 73$.

Câu 77. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

A. $m > 4$. B. $4 < m < 5$. C. $3 < m < 4$. D. $m < 4$.

Câu 78. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm. Đáp số nào sau đây đúng?

A. $m \geq -\frac{25}{4}$. B. $m \geq 3$. C. $m \geq 0$. D. $m \geq -\frac{25}{8}$.

Câu 79. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m > 2$. D. $m \geq 2$.

Câu 80. Với mọi giá trị dương của m phương trình $\sqrt{x^2 - m^2} = x - m$ luôn có số nghiệm là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 81. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + m} = 2x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình đã cho vô nghiệm.

A. $m \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$. C. $m \in \left(-\infty; \frac{15}{4}\right)$. D. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 82. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2m} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt là $S = (a; b]$. Khi đó giá trị $P = a.b$ là

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 83. Cho phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{2m + 3x - x^2}$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì $m \in [a; b]$. Giá trị $a^2 + b^2$ bằng

A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 84. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - m - 1} = \sqrt{2x - 1}$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 85. Cho phương trình: $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x} + 2\sqrt{4 - x^2} + m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4. B. 5. C. vô số. D. 10.

Câu 86. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $3\sqrt{x - 1} - m\sqrt{x + 1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ có nghiệm là

A. $m < -\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3} < m \leq 1$. C. $-\frac{1}{3} \leq m < 1$. D. $-\frac{1}{3} < m < 1$.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2018 + x} + (m^2 - 2)\sqrt{2018 - x}}{(m^2 - 1)x}$ có đồ thị là (C_m) , (m là tham số). Số

giá trị của m để đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}}=0$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in [-1; +\infty)$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 89. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình:

$$x^2 + (2-m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$$

có nghiệm là

- A. 2020. B. 2019. C. 2018. D. 2021.

Câu 90. Tìm m để phương trình $(\sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 1)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$, ta được điều kiện $m \notin [a; b]$. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + 2b$ bằng

- A. $P = 10$. B. $P = 12$. C. $P = 20$. D. $P = 15$.

Câu 91. Cho phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + 3\sqrt{(x-1)(5-x)} = m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm?

- A. 6. B. 8. C. 7. D. Vô số.

Câu 92. Tìm m để phương trình $x + 2\sqrt{x+1} + m = 0$ vô nghiệm

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Câu 93. Phương trình $\sqrt{2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2} = 2x - 1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (a, b)$. Tính $b - a$.

- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Câu 94. Phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A. $m \in (1; 3)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (4; 6)$.

Câu 95. Phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m \in [a; b] \setminus \{0\}$, tính giá trị của $a^2 + b$

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 96. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 97. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{3 - \sqrt{x^2 - x - 1}} = 1$ là

- A. $\frac{1}{2}$ B. -5 C. 5 D. 1

Câu 98. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x - 1}} = 7$ là

- A. 11 B. -1 C. -9 D. $\frac{25}{4}$

Câu 99. Nếu phương trình $x^2 + 2x + \sqrt{-x^2 - 2x + 15} + m = 0$ có nghiệm duy nhất thì

- A. $m \in (-2; 0)$ B. $m = -4$ C. $m \in (-4; 0)$ D. $m = -\frac{65}{4}$

Câu 100. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm (ẩn x)

$$2x^2 - 4x + m + \sqrt{-x^2 + 2x} = -1$$

- A. $\frac{-9}{8} \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ C. $-1 \leq m$ D. $-\frac{9}{8} \leq m \leq -1$

Câu 101. Cho phương trình $\sqrt{x^2(1-2x)} = \sqrt{x^2(m+x)}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất?

A. $m < -\frac{1}{2}$.

B. $m = 1$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Câu 102. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3-2x-x^2}$ là:

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Câu 103. Cho phương trình $4\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{9x^2+54x+81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?

A. $\frac{13}{23}$.

B. 5.

C. $\frac{102}{23}$.

D. $\frac{125}{23}$.

Câu 104. Biết phương trình $\sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}} = \sqrt{(x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2}}$ có tập nghiệm S . Phát biểu nào là đúng trong các phát biểu sau?

A. $S \cap \left(0; \frac{1}{4}\right) = \emptyset$.

B. $S = \mathbb{R}$.

C. $S = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

D. S có hai phần tử.

Câu 105. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sqrt{m-x^2} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m > -5$.

B. $m < -3$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \in \emptyset$.

Câu 106. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} = 2$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 107. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} = 8$ là:

A. 5.

B. 2.

C. 128.

D. 256.

Câu 108. Số nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 109. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 110. Cho phương trình $\sqrt{x^2-1} - x = m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có nghiệm:

A. $m \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

B. $m \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

D. $m \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Câu 111. Cho phương trình $\sqrt{2x^2+mx-3} = x-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình vô nghiệm:

A. $m > 1$

B. $m \leq -1$.

C. $m > 3$.

D. $m \geq 2$

Câu 112. Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m} = x-1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

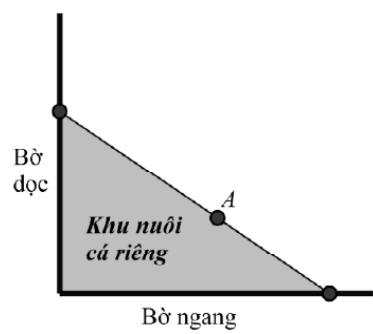
A. $m \in [2; 6]$

B. $m \in [4; 6)$.

C. $m \in [2; 5)$.

D. $m \in [4; 5)$

Câu 113. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$.



A. $120m^2$.

B. $156m^2$.

C. $238,008(3)m^2$.

D. $283,003(8)m^2$.

Bài 5. HAI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = mx^2 + nx + p, a \neq m)$$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thỏa mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thỏa mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.

- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$ bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = dx + e, a \neq d^2)$$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2$ (7).

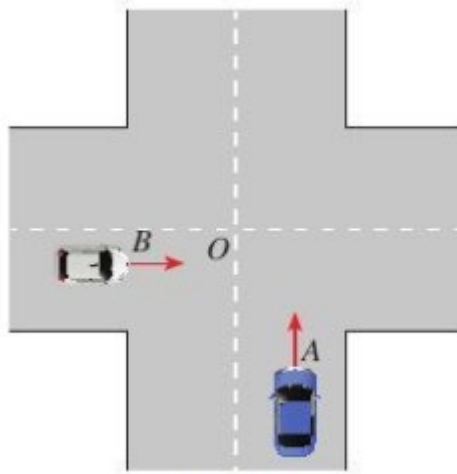
Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thỏa mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4. Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km , vị trí B cách bến 7 km . Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km .



Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải.

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ là $40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x(\text{km})$.

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0,175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2}.$$

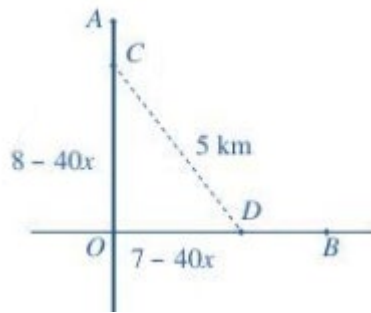
Ta có phương trình: $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

Bình phương hai vế ta có:

$$(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow 1600x^2 - 640x + 64 + 1600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3200x^2 - 1200x + 88 = 0$$



$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0,175$, ta chọn $x = 0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là $0,1$ giờ.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Nâng lên lũy thừa, trị tuyệt đối hóa, sử dụng bất đẳng thức, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

Phương trình có dạng	Đặt ẩn phụ
$\sqrt{ax+b}, x, x^2, \dots$	$t = \sqrt{ax+b}, t \geq 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c}, ax^2+bx, \dots$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c}, t \geq 0$
$\sqrt[3]{ax+b}, ax+b, \dots$	$t = \sqrt[3]{ax+b}$
$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \\ \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \end{cases}, f(x) + g(x) = C$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$
$\sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}, f(x) + \frac{A^2}{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}$
$\sqrt[m]{f(x)}, \sqrt[n]{f(x)}$	$t = \sqrt[s]{f(x)}$ với s là bội chung nhỏ nhất của m và n

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{14-2x} = x-3.$

b) $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}.$

Lời giải

a)

$$\sqrt{14-2x} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 14-2x = (x-3)^2 \\ 14-2x = (x-3)^2 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -1 \vee x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

b)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^2 + 2x + 4 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2, x = -1$.

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$.

b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x-2} - 3\sqrt{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(1-3\sqrt{x+2}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ 1-3\sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{17}{9} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 2$.

b)

Điều kiện: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x}.$$

Bình phương hai vế phương trình và rút gọn ta được

$$2x+1 = \sqrt{2x^2-3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (2x+1)^2 = 2x^2-3x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}.$$

$$b) 2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}.$

$$b) \text{ Điều kiện: } x \geq 3.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$(1 + \sqrt{x+3})^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1, x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18}.$

Câu 4. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

$$b) 2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(x^2 + 2x + 1 + \frac{4}{3}\right)} + \sqrt{5\left(x^2 + 2x + 1 + \frac{9}{5}\right)} = -(x^2 + 2x + 1) + 5.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2.$$

Phương trình (1) có: $\begin{cases} VT \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ VP \leq 5 \end{cases}$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}.$

b) Ta có:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x-5}+2=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2x-3}-3)^2}=2\sqrt{2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5}+1+|\sqrt{2x-5}-3|=4 \quad (2).$$

$$\text{Do } |3-\sqrt{2x-5}| \geq 3-\sqrt{2x-5} \text{ nên } 4=|3-\sqrt{2x-5}|+\sqrt{2x-5}+1 \geq 3-\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x-5}+1=4.$$

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow 3-\sqrt{2x-5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 9 \geq 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \geq x \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là: } S = \left[\frac{5}{2}; 7 \right].$$

Câu 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3.$$

$$b) (x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Nhận thấy $(2x-1)-(x-2)=x+3$ nên ta nhân liên hợp vế trái của phương trình, ta được

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}}=x+3.$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}-1=0 \end{cases}.$$

Phương trình vô nghiệm với mọi $x \geq 2$.

b)

Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq -3$

Phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2+x+3}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2(x+3)=\sqrt{2x^2+1}+1 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Phương trình (*)} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 2x^2+1 = 4x^2+25+20x \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x = -5 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{13}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = 5 + \sqrt{13}, x = 0$.

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2, x = -1$.

Câu 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{x} = 2.$

b) $3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8} = \sqrt{x^2+15} + 2.$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}.$

Nhằm ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-1) + (\sqrt[3]{x}-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}+1)}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \right) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Vì } \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} > 0$$

$$\text{Do đó phương trình (1)} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b)

$$\text{Phương trình được viết lại như sau: } 3\sqrt[3]{x}-2 = \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8}.$$

Vì $\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} > 0$ nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $3\sqrt[3]{x}-2 > 0$ hay.

$$x > \frac{8}{27}.$$

Phương trình tương đương với:

$$3\sqrt[3]{x}-3=\sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} \quad (2).$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}\right)=0.$$

Vì $x > \frac{8}{27}$ suy ra: $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} > 0$ nên

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} > 0.$$

Do đó phương trình (2) $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x=1$.

Câu 7. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2.$

b) $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2.$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1.$

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1 &\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x-1 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=0 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm phương trình là $x=1$.

Ta có $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2 \Leftrightarrow 3(x^2+7x+7)+2\sqrt{x^2+7x+7}=5.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+7x+7}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$3t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{5}{3}(\text{loại}) \\ t=1(\text{thỏa mãn}). \end{cases}$$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{x^2+7x+7}=1 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=-1. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-6, x=-1$.

Câu 8. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

b) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 11}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \text{ (loại)} \\ t = 6 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $t = 6$ ta có $\sqrt{x^2 + 11} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 5$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1, x = -4$.

Câu 9. Giải các phương trình sau

a) $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$.

b) $x + \sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 6$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$.

Đặt $t = \sqrt{4x + 5}, t \geq 0$ thì $x = \frac{t^2 - 5}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{t^4 - 10t^2 + 25}{16} - \frac{6}{4}(t^2 - 5) - 1 &= t \\ \Leftrightarrow t^4 - 22t^2 - 8t + 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 7)(t^2 - 2t - 11) &= 0. \end{aligned}$$

Ta tìm được bốn nghiệm là $t_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}, t_{3,4} = 1 \pm 2\sqrt{3}$.

Do $t \geq 0$ nên chỉ nhận các giá trị $t_1 = -1 + 2\sqrt{2}, t_3 = 1 + 2\sqrt{3}$.

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình $x = 1 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{3}$.

b) Điều kiện $1 \leq x \leq 6$.

Đặt $t = \sqrt{x - 1}, t \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$t^2 + \sqrt{t+5} = 5 \Leftrightarrow t^4 - 10t^2 - t + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + t - 4)(t^2 - t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ t = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (\text{do } t \geq 0)$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Câu 10. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{60-24x-5x^2} = x^2 + 5x - 10$.

b) $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28-x$.

Lời giải

a) Điều kiện $60-24x-5x^2 \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{60-24x-5x^2}, t \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$\frac{1}{6}t^2 + t - \frac{1}{6}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - x^2 - 6x = 0.$$

Ta có $\Delta_t' = (x+3)^2 \geq 0$ suy ra $t = x$ hoặc $t = -x-6$.

Với $t = x$ ta có $\sqrt{60-24x-5x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{14}.$

Với $t = -x-6$ ta có $\sqrt{60-24x-5x^2} = -x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-6 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{13}.$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2 - \sqrt{14}, x = -3 - \sqrt{13}.$

b) Điều kiện $-x^2 - 8x + 48 \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{-x^2 - 8x + 48}, t \geq 0$ thì phương trình trở thành $-\frac{1}{2}t^2 + (x+3)t - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 4 = 0$.

Ta có $\Delta_t = 1$ suy ra $t = x+2$ hoặc $t = x+4$.

Với $t = x+2$ ta có $\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{31}.$

Với $t = x+4$ ta có $\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4 + 4\sqrt{2}.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -3 + \sqrt{31}, x = -4 + 4\sqrt{2}.$

Dạng 3.5 Đưa về hệ phương trình

Câu 11. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3.$

b) $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3.$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 9x - 3 \\ a - 2b = 9x - 3 \end{cases}$

Từ đó ta có $a^2 - 4b^2 = a - 2b \Leftrightarrow (a - 2b)(a + 2b) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$ hoặc $a = 1 - 2b$.

Với $a = 2b$ ta có $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

Với $a = 1 - 2b$ ta có $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} VT(*) \geq 0 \\ VP(*) = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$ suy ra $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}.$

b) Điều kiện $x^3 + x^2 - 1 \geq 0.$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^3 + x^2 - 1} \geq 0 \\ v = \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ v^2 - u^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (v + u)(v - u) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ v - u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 1 \\ \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - 1 = 1 \\ x^3 + x^2 + 2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1.$

Câu 12. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

b) $x + \sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 6.$

Lời giải

a) Điều kiện $-1 \leq x \leq 1.$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1 + x} \geq 0 \\ v = \sqrt{1 - x} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{1 + uv}(u^3 - v^3) = 2 + uv \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1+uv = \frac{1}{2}(2+2uv) = \frac{1}{2}(u^2+v^2+2uv) = \frac{1}{2}(u+v)^2 \\ u^3-v^3 = (u-v)(u^2+v^2+uv) = (u-v)(1+uv). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u^2+v^2=2 \\ u^2-v^2=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v^2=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} 1+x=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{5} \end{cases}, \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} a^2+b=5 \\ b^2-a=5 \end{cases}.$$

Từ đó ta có $(a+b)(a-b+1)=0 \Leftrightarrow a-b+1=0 \Leftrightarrow a=b-1$.

Với $a=b-1$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} &= 5-x \Leftrightarrow x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{11-\sqrt{7}}{2}$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = 2-x$ là:

- A. $S = \{1; 5\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. D. $S = \{2; 3\}$.

Lời giải

Chọn B

Thay các giá trị vào phương trình có $x=1$ vào thỏa mãn phương trình.

Câu 2. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = -x^2-5$ là

- A. $S = \{1; 5\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Vì $-x^2-5 < 0$ vậy phương trình vô nghiệm

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-3x^2} = 2x-1$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{4-3x^2} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4-3x^2 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x=1 \\ x = \frac{-3}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2} = x^2-4x+3$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} (x-3)\sqrt{4-x^2} &= x^2-4x+3 \\ \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{4-x^2} &= (x-3)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (L) \\ \sqrt{4-x^2} = x-1 & (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{4-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1+\sqrt{7}}{2} & (TM) \\ x = \frac{1-\sqrt{7}}{2} & (L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2-3x+2$ là:

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$\begin{aligned} (x-1)\sqrt{10-x^2} &= x^2-3x+2 \\ \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{10-x^2} &= (x-2)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(TM) \\ \sqrt{10-x^2} = x-2 & (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{10-x^2} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 10-x^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=3(TM) \\ x=-1(L) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 4

Câu 6. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{6; 2\}$.

D. $S = \{6\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2x-3 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2-8x+12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \begin{bmatrix} x=6 \\ x=2 \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 7. Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$.

A. 2 giao điểm.

B. 4 giao điểm.

C. 3 giao điểm.

D. 1 giao điểm.

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-4} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{3x-4})^2 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x-4 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-9x+13 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{bmatrix} x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{9+\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ có 1 giao điểm chung.

Câu 8. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng:

A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

+) Với điều kiện $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình: $2x-1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(L) \\ x=5(t/m) \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2} = x$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x-2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{bmatrix} x=2 \\ x=1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x+6} = x-6$ bằng

A. 15.

B. 6.

C. 2 và 15.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{5x+6} = x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 \geq 0 \\ 5x+6 = x^2-12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2-17x+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x=2 \\ x=15 \end{cases} \Leftrightarrow x=15.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=15$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+7} = 2x-1$ là

A. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$.

B. $\left\{ \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$.

C. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2} \right\}$.

D. Một phương án khác.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sqrt{4x+7} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4x+7 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}. \text{ Vậy } x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 12. Phương trình $\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ -x^2+4x = (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^2-12x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2(n) \\ x = \frac{2}{5}(l) \end{cases}$$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = x^2-2x+3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2-2x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = x^2-2x+5$, ta có phương trình trở thành $\sqrt{t} = t-2$

$$\sqrt{t} = t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t = (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2-5t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t=1 \Rightarrow t=4 \\ t=4 \end{cases}$$

Khi đó $4 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thử lại ta thấy $x = 1$ thỏa mãn.

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm.

Câu 14. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1$ là

A. 3.

B. -3.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} = -1 \text{ (vn)} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \text{ (1)} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{Do đó: } x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{1} = -3.$$

Câu 15. Phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$ có nghiệm:

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2$ là

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 7 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 1$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 3 = (3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận.

Câu 18. Phương trình: $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 2.
C. 1. D. Vô Số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 13x = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x = \frac{61}{13} (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{61}{13}$.

Câu 19. Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Phương trình } x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 16 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} + 70 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}, t \geq 0. \text{ Khi đó } (*) \Rightarrow t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 14 (n) \\ t = 5 (n) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 14 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -12 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x - 1)(x - 3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ là:

- A. 17. B. 4. C. 16. D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+5+3\sqrt{x^2-4x+5}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Câu 22. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$ là:

A. 5.

B. 13.

C. 10.

D. 25.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện xác định $x^2+5x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2+5x+10+2\sqrt{x^2+5x+10}-8=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+10}=2 \\ \sqrt{x^2+5x+10}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+10}=2 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-2 \end{cases}.$$

Vậy $x_1^2+x_2^2=2^2+3^2=13.$

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2)=0$ là

A. $S=\emptyset.$

B. $S=\{1\}.$

C. $S=\{2\}.$

D. $S=\{1;2\}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2}=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=2 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}.$

Câu 24. Phương trình $\sqrt{x^2-1}(\sqrt{2x+1}-x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

+) Điều kiện $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

+) $\sqrt{x^2-1}(\sqrt{2x+1}-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1}=0 \\ \sqrt{2x+1}-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0(1) \\ \sqrt{2x+1}=x(2) \end{cases}$

Giải (1): $x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(n) \\ x=-1(l) \end{cases}$

Giải (2): $\sqrt{2x+1}=x \Rightarrow 2x+1=x^2 \text{ (do } x \geq 1) \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2}(n) \\ x=1-\sqrt{2}(l) \end{cases}$

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Câu 25. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(l) \\ x = 3(n) \\ x = 2(n) \end{cases}$$

Câu 26. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0$ là

A. $\{1; 2\}$.

B. $\{-1; 1; 2\}$.

C. $[1; 2]$.

D. $\{-1; 2\}$.

Lời giải

Chọn A

ĐKXD: $x \geq 1$.

$$\text{Biến đổi: } (x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x = 1, x = 2$

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$ là

A. $S = \{2; 3\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{1; 3\}$.

D. $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 3 \end{cases} \text{ So với điều kiện chỉ có } x = 2, x = 3 \text{ thỏa.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3\}$.

Câu 28. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0$ là

A. $\{1; 2\}$.

B. $\{-1; 1; 2\}$.

C. $[1; 2]$.

D. $\{-1; 2\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

So sánh điều kiện kết luận phương trình có nghiệm $x = 1; x = 2$.

Câu 29. Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ 17 - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0(TM) \\ x = 6(L) \end{cases} \\ |x| \leq \sqrt{17} \\ 17 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

+) Điều kiện: $2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

$$(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[\sqrt{2x+7} - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7} = x+2 \end{cases}$$

+) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

$$+) \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Câu 31. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2}$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$.

C. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Phương trình tương đương: $3-x = x+2 \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{3-x}$ là

A. $x = \frac{3}{4}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{4}{3}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải**Chọn C**

Thay các nghiệm x vào phương trình thấy $x = \frac{4}{3}$ là nghiệm.

Câu 33. Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

Phương trình $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ chỉ xác định khi $x = 2$.

Thử lại, ta thấy là nghiệm phương trình.

Vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm.

Câu 34. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$.

A. $\{2\}$.

B. $\{1; -2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\{-1\}$.

Lời giải**Chọn D**

Đk: $-2 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1 &\Leftrightarrow 3-x = x+3+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3-x-x-3 = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2x = 2\sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 35. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải**Chọn C**

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + 2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = -x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \geq 0 \\ 4(2x-1) = (-x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là 1.

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2.$$

$$\text{- PT } \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1}]^2 = [1 + \sqrt{2-x}]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 37. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+3})^2 = (3 + \sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -(3 + \sqrt{1-x}) \text{ VN} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ (do } \sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3; 1])$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 38. Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$.

Khi đó: $a + b =$

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \text{ (điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{8x+5} - (x+2)] + [\sqrt{6x+2} - (x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2 + 4x + 1)}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{-x^2 + 4x + 1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x + 1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 39. Biết phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

A. 1.

B. 0.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \\ x = 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $(x_1-1).(x_2-1) = 0$.

Câu 40. Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1(ktm)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 41. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2} = 4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t = 0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 2 \Leftrightarrow 16-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

A. Lời giải trên sai ở bước 2.

B. Lời giải trên đúng hoàn toàn.

C. Lời giải trên sai ở bước 1.

D. Lời giải trên sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

Ở bước 1, khi đặt $t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của

Lời giải trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

Câu 42. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2-x}}{x-1} = 2$.

A. $x = 1$.

B. $x = 4$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

D. $x \in \emptyset$.

Lời giải**Chọn D**Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 5x-4x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} (*)$.Từ phương trình: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{5x-4x^2}-x = 2(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-4x^2} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 5x-4x^2 = 9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 13x^2-17x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện (*) thì $x = 1$, $x = 4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải**Chọn A**Điều kiện $x \geq 3$.Khi đó pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ \sqrt{x-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duynhất $x = 3$.**Câu 44.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{2-x}{\sqrt{x-3}} = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải**Chọn D**Điều kiện: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

Câu 45. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+4x-1} = x+1$ là?

A. $S = \{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$.

B. $S = \{-1+\sqrt{3}\}$.

C. $S = \{-1-\sqrt{3}\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải**Chọn B**

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{3}$$

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 5 = 2x$ là?

- A. $S = \left\{ 2; \frac{14}{5} \right\}$. B. $S = \{2; 4\}$. C. $S = \left\{ \frac{14}{5} \right\}$. D. $S = \{2\}$

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 5 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 = (2x - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2 - 24x + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Câu 47. Khi giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3x$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x^2 + 3x = (3x - 1)^2$ (2)

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được: $8x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

Bước 3: Khi $x = 1$, ta có $x^2 + 3x > 0$. Khi $x = \frac{1}{8}$, ta có $x^2 + 3x > 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ 1; \frac{1}{8} \right\}$

Vậy Cách giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Đúng. B. Sai ở bước 1. C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

☐ Ta có: $x^2 + 3x > 0$, ở là điều kiện xác định của phương trình không phải là điều kiện có nghiệm của phương trình

☐ Ở Bước 3 ta thay $x = 1$ vào phương trình thỏa mãn nên $x = 1$ là nghiệm

Khi ta thay $x = \frac{1}{8}$ vào phương trình và thấy $x = \frac{1}{8}$ không thỏa mãn phương trình nên $x = \frac{1}{8}$ không là nghiệm

Câu 48. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 28} = x + 5$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 28} = x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x^3 + x^2 + 6x + 28 = (x + 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x^3 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: 0.

Câu 49. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x$ bằng:

A. -2.

B. 4.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 14x - 11 = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: -1.

Câu 50. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ là:

A. 0 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. 3 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Số các nghiệm là: 2.

Câu 51. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ bằng:

A. $3 - \sqrt{2}$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = (-x^2 + 3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: $3 - \sqrt{2}$

Câu 52. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$ là

- A.** $\frac{1}{2} \leq x$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $x \leq \frac{1}{2}$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Câu 53. $[-3; 1)$ là tập xác định của phương trình nào sau đây?

- A.** $\sqrt{3+x} = \sqrt{\frac{1}{1-x^3}}$ **B.** $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{3-2x-x^2}$
C. $\sqrt{-x^2-x+6} = \sqrt{-x^2-3x+4}$ **D.** $\sqrt{1-x} = \sqrt{-x^2-x+6}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{A. ĐK: } \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 1-x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{B. ĐK: } \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{3-2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0 \\ 3-2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ -(x-1)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

$$\text{C. ĐK: } \begin{cases} -x^2-x+6 \geq 0 \\ -x^2-3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+3)(x-2) \geq 0 \\ -(x-1)(x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

$$\text{D. ĐK: } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ -x^2-x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -(x+3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

Câu 54. Cho phương trình $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x+1}$ (1). Phép biến đổi nào sau đây là **sai**?

$$\text{A. (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

$$\text{B. (1)} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = x+1$$

$$\text{C. (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

$$\text{D. (1)} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn B

Phép biến đổi B thiếu điều kiện.

Câu 55. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}}$. Một bạn làm như sau:

$$\text{Bước 1: } \sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{4} \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ x^2-3x-\frac{7}{4} = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt, nên theo định lý Vi-et, ta có tổng hai nghiệm là $S=3$.

Bước 3: Vậy phương trình có tổng các nghiệm là 3.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt: $x=\frac{7}{2}$ (thỏa ĐK) và $x=-\frac{1}{2}$ (không thỏa ĐK) nên phương trình đã cho có một nghiệm $x=\frac{7}{2}$, và tổng các nghiệm là: $\frac{7}{2}$.

Câu 56. Giải phương trình $\sqrt{x^2(x-1)} = \sqrt{x^2(3-x)}$ (*), một bạn làm như sau:

$$\text{Bước 1: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \quad (1) \\ x^2(x-1) = x^2(3-x) \quad (2) \end{cases}.$$

Bước 2: Giải (1): Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\text{Bước 3: } (2) \Leftrightarrow x^2(2x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Kết hợp ta được $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn C

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Câu 57. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 2$ là

- A. $1 \leq x$ **B.** $x \neq 1$ C. $\begin{cases} 2 < x \\ x < 0 \end{cases}$ D. $x > 1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Câu 58. Điều kiện xác định của phương trình $(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = -3$ là

- A. $x > 3$ **B.** $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ D. $x \leq -1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{x + 1}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$

Câu 59. Phép biến đổi nào sau đây là **sai**

- A. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Rightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
B. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
C. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2 \\ -x^2 - 2x + 7 \geq 0 \end{cases}$
D. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0 \\ t = \frac{1 - t^2}{5} + 7 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Phép biến đổi bình phương hai vế không phải là phép biến đổi tương đương nếu 2 vế không cùng dấu.

Câu 60. Giải phương trình $(x - 2)(x - 1) + 2(x - 2)\sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}} = 0$ (1)

Bước 1: Điều kiện: $\frac{x - 1}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Bước 2: (1) $\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) + 2\sqrt{(x - 2)(x - 1)} = 0$ (2)

Bước 3: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x - 2)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (tm) \\ x = 2 & (loại) \end{cases} \\ \sqrt{(x - 2)(x - 1)} = -2 & (loại) \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng

B. Sai từ bước 1

C. Sai từ bước 2

D. Sai từ bước 3

Lời giải

Chọn C

$$(x-2)(x-1)+2(x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)+2\sqrt{(x-2)(x-1)}=0 \text{ chỉ đúng khi } x > 2$$

Câu 61. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7$ là

A. -3

B. -5

C. -2

D. 2

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 0 \\ t=\frac{1-t^2}{5}+7 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-9(\text{loại}) \\ t=4(\text{tm}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t=4: 5x^2+10x+1=16 \Leftrightarrow 5x^2+10x-15=0 \Rightarrow x_1+x_2=-2$$

Câu 62. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x}+\frac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

Câu 63. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

A. $\{2\}$.

B. $\{1; -2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đk: } -2 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow 3-x=x+3+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3-x-x-3=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2x=2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Câu 64. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1+\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=-x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \geq 0 \\ 4(2x-1)=(-x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là 1.

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2.$$

$$\text{- PT } \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1}]^2 = [1 + \sqrt{2-x}]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 66. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+3})^2 = (3 + \sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -(3 + \sqrt{1-x}) \end{cases} \text{VN} \Leftrightarrow 1-x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ (do } \sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3; 1])$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 67. Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$.

Khi đó: $a + b =$

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \quad (\text{điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{8x+5} - (x+2)] + [\sqrt{6x+2} - (x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+4x+1)}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{-x^2+4x+1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+4x+1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+1=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 68. Biết phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1-1) \cdot (x_2-1)$.

A. 1.

B. 0.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $(x_1-1) \cdot (x_2-1) = 0$.

Câu 69. Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (ktm)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 70. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2} = 4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t=0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x=0.$$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{16 - x^2} = 2 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

A. Lời giải trên sai ở bước 2.

B. Lời giải trên đúng hoàn toàn.

C. Lời giải trên sai ở bước 1.

D. Lời giải trên sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

Ở bước 1, khi đặt $t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của lời giải trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

Câu 71. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

A. $x = 1$.

B. $x = 4$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

D. $x \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 5x-4x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} (*)$.

Từ phương trình: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{5x-4x^2}-x = 2(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-4x^2} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 5x-4x^2 = 9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 13x^2-17x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x=1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện (*) thì $x = 1$, $x = 4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 72. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \geq 3$.

Khi đó pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ \sqrt{x-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy

nhất $x = 3$.

Câu 73. Số nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2}$ ta được phương trình: $t^3 + 2 = 2t - 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Câu 74. Phương trình $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$ có hai nghiệm α, β . Khi đó tổng $\alpha + \beta$ thuộc đoạn nào sau đây ?

- A. $[2; 5]$. B. $[-1; 1]$. C. $[-10; -6]$. D. $[-5; -1]$.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $t = \sqrt[4]{x^2 + 481}, t \geq \sqrt[4]{481}$. Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases} \text{ .Đổi chiều điều kiện, loại } t = -2.$$

$$\text{Với } t = 5 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 + 481} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow x = \pm 12 \Rightarrow \alpha = 12, \beta = -12$$

Do đó : $\alpha + \beta = 0 \in [-1; 1]$. Chọn **B**.

Câu 75. Phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ có nghiệm là $a \pm \sqrt{b}$ thì $2a - b$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện xác định $x \geq 1$.

$$\text{Ta có } 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1} \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \quad (1)$$

Với $x = 1$ ta thấy không thỏa mãn (1) nên không phải là nghiệm.

Với $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Leftrightarrow 2\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3x + 5 = 0 \\ x^2 - 8x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4$ và $b = 6$. Do đó, $2a - b = 2.4 - 6 = 2$.

Câu 76. Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}, b < 20$. Tính

giá trị biểu thức $P = a^3 + 2b^2 + 5c$.

- A. $P = 61$. B. $P = 109$. C. $P = 29$. D. $P = 73$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \geq 0 \\ \frac{x - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow x < \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{Xét } x \geq 1 \quad x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x^2 - x} = x - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (tm) \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (l) \end{cases}$$

$$a = 1, b = 5, c = 2 \Rightarrow P = a^3 + 2b^2 + 5c = 61$$

- Câu 77.** Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất
A. $m > 4$. **B.** $4 < m < 5$. **C.** $3 < m < 4$. **D.** $m < 4$.

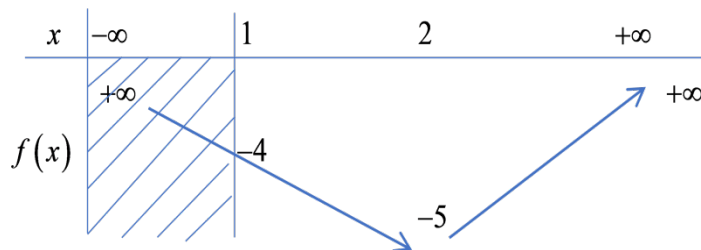
Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \quad (1) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $x \geq 1$.

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -m$ và đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1$.



$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } \begin{cases} -m = -5 \\ -m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m < 4 \end{cases}$$

- Câu 78.** Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm. Đáp số nào sau đây đúng?
A. $m \geq -\frac{25}{4}$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq -\frac{25}{8}$.

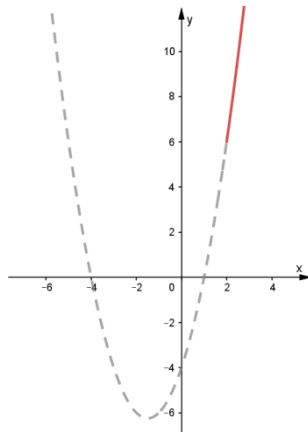
Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x - 4$ với đường thẳng $y = m$ trên tập $[2; +\infty)$.

Ta có đồ thị sau



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình có nghiệm khi $2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 79. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

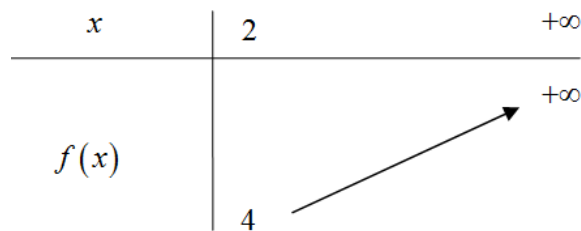
Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 2m = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 2m \quad (*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 4, (x \geq 2)$

BBT:



Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 80. Với mọi giá trị dương của m phương trình $\sqrt{x^2 - m^2} = x - m$ luôn có số nghiệm là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Với mọi giá trị dương của m

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 - m^2} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x^2 - m^2 = (x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2xm = 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow x = m.$$

Vậy phương trình luôn có 1 nghiệm $x = m$.

Câu 81. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + m} = 2x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình đã cho vô nghiệm.

A. $m \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$.

B. $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; \frac{15}{4}\right)$.

D. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x + m = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ m = 3x^2 + 4x + 1 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi (*) vô nghiệm.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^2 + 4x + 1$ như sau

x	$-\infty$	$-2/3$	$1/2$	$+\infty$
$y = 3x^2 + 4x + 1$	$+\infty$		$15/4$	$+\infty$

Từ BBT suy ra pt vô nghiệm khi và chỉ khi $m < \frac{15}{4}$.

Câu 82. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2m} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt là $S = (a; b]$. Khi đó giá trị $P = a.b$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2m} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2m = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 2x + 1 - 2m = 0 (*) \end{cases}.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{2}$; phương trình (*) trở thành: $3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - t + \frac{3}{4} - 2m = 0 (**)$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 \leq t_1 < t_2$. Điều

$$\text{kiện: } \begin{cases} \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - 2m\right) > 0 \\ S = -\frac{-1}{3} > 0 \\ P = \frac{\frac{3}{4} - 2m}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \leq \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m \leq \frac{3}{8}.$$

Vậy $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{8}\right]$. Ta có: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$.

Câu 83. Cho phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{2m + 3x - x^2}$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì $m \in [a; b]$. Giá trị $a^2 + b^2$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{2m+3x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 \\ -x^2+4x-3 = 2m+3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2m+3 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có nghiệm thì: $1 \leq 2m+3 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0 \Rightarrow m \in [-1; 0] \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Câu 84. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1} = \sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình tương đương: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-m-1 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2-4x-m = 0 \end{cases}$$

Để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1} = \sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x-m = 0$ có hai

$$\text{nghiệm phân biệt thỏa } x_2 > x_1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 1 \\ \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+m > 0 \\ 4 > 0 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+m > 0 \\ -m - \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -\frac{7}{4}.$$

Câu 85. Cho phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + 2\sqrt{4-x^2} + m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. vô số.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$$

$$\text{Lại có: } \left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}\right)^2 \leq (2-x+2+x)(1^2+1^2) \Rightarrow t \leq 2\sqrt{2}$$

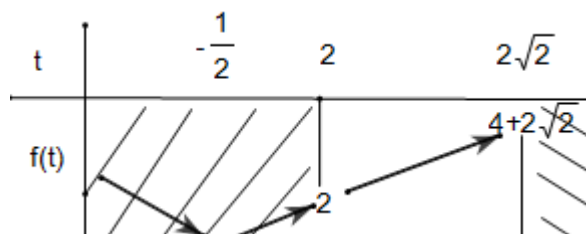
Khi đó phương trình đã cho chuyển về: $t + t^2 - 4 + m = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 4 = -m(1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm m để phương trình (1) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $f(t) = t^2 + t - 4$ cắt đường thẳng $y = -m$ trong đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$ (*)

Bảng biến thiên của $f(t) = t^2 + t - 4$ trên $[2; 2\sqrt{2}]$



Từ BBT ta có (*) $\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Câu 86. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

- A. $m < -\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3} < m \leq 1$. C. $-\frac{1}{3} \leq m < 1$. D. $-\frac{1}{3} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x \geq 1$.

$$3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, ($0 \leq t < 1$), (vì $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ mà $0 < \frac{2}{x+1} \leq 1, \forall x \geq 1$ nên $0 \leq \frac{x-1}{x+1} < 1$)

Ta được $m = 3t^2 - 2t = f(t)$, ($0 \leq t < 1$)

$$f'(t) = 6t - 2, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	0		$-\frac{1}{3}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 1$.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là (C_m) , (m là tham số). Số

giá trị của m để đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [-2018; 2018] \setminus \{0\}, m \neq \pm 1$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng khi $f(-x) = f(x), \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2018-x} + (m^2-2)\sqrt{2018+x}}{-(m^2-1)x} = \frac{m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow (2-m^2)\sqrt{2018+x} - m\sqrt{2018-x} = m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}, \forall x \in D \quad \Leftrightarrow 2-m^2 = m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = -2 \end{cases}. \text{ Vậy } m = -2.$$

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}} = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in [-1; +\infty)$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -3$.

Với $x > -3$; phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}} = 0 \Leftrightarrow 2(x-m)-x-m=0 \Leftrightarrow x=3m$.

Để phương trình có nghiệm thì $3m > -3 \Leftrightarrow m > -1 \Leftrightarrow m \in (-1; +\infty)$.

Câu 89. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình:

$$x^2 + (2-m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$$

có nghiệm là

A. 2020.

B. 2019.

C. 2018.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x \geq 0$

Ta có $x^2 + (2-m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 + (2-m)x = 4\sqrt{(x^2 + 4)x} \quad (1)$$

Với $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$ phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{x} + (2-m) = 4\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}, t \geq 2$

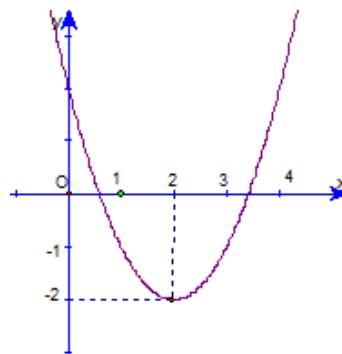
Phương trình (2) trở thành: $t^2 - 4t + 2 - m = 0$.

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 2 = m \quad (*)$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm $y = t^2 - 4t + 2$ và đường thẳng $y = m$

Xét hàm số $y = t^2 - 4t + 2$ có đồ thị như hình vẽ



Dựa vào đồ thị hàm số, để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 suy ra $m \geq -2$.

Suy ra số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình có nghiệm là 2021.

Câu 90. Tìm m để phương trình $(\sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 1)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm

thuộc khoảng $(-1; 0)$, ta được điều kiện $m \notin [a; b]$. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + 2b$ bằng

A. $P = 10$.

B. $P = 12$.

C. $P = 20$.

D. $P = 15$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = (\sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 1)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(-1) = -1 < 0, f(0) = \sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 4.$$

Để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ thì

$$f(0) = \sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 2m - 2} > 4 - m.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m < 0 \\ 5m^2 - 2m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 4 \\ 4m^2 + 6m - 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -3 \vee \frac{3}{2} < m \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -3 \vee m > \frac{3}{2}.$$

Do đó $m \notin \left[-3; \frac{3}{2}\right]$ hay $P = a^2 + 2b = 12$.

Câu 91. Cho phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + 3\sqrt{(x-1)(5-x)} = m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm?

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = [1; 5]$.

Đặt $u = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$, ta có $u^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \geq 4$; nên $u \geq 2$.

Ta lại có: $u^2 = (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{5-x})^2 \stackrel{Bunhiacopski}{\leq} (1^2 + 1^2)(x-1 + 5-x) = 8$, nên $u \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy với $x \in [1; 5]$ thì $u \in [2; 2\sqrt{2}]$.

$$\text{Mặt khác } u^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = \frac{u^2 - 4}{2}.$$

$$\text{Khi đó ta thu được phương trình: } u + \frac{3}{2}(u^2 - 4) = m \Leftrightarrow \frac{3}{2}u^2 + u - 6 = m.$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{3}{2}u^2 + u - 6$ trên đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

u	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(u)$			2	$6+2\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán tương đương $2 \leq m \leq 6 + 2\sqrt{2}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 92. Tìm m để phương trình $x + 2\sqrt{x+1} + m = 0$ vô nghiệm

- A. $m \in (2; +\infty)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$ ta có phương trình $t^2 + 2t - 1 = -m$ (2). Phương trình ban đầu vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) không có nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Lập BBT cho hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 1$ với $t \in [0; +\infty)$ ta có kết luận $-m < -1 \Leftrightarrow m > 1$ là các giá trị cần tìm. Suy ra đáp án **B**.

Câu 93. Phương trình $\sqrt{2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2} = 2x - 1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (a, b)$. Tính $b - a$.

- A. 1. B. 0. **C.** $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn C

Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt tương đương với phương trình

$2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2 = (2x - 1)^2$ (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1/2; +\infty)$.

Mà (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + (2m^2 - 3)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 1 - m^2 \end{cases}$. Như vậy ta cần

$$1 - m^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Suy ra đáp án **C**.

Câu 94. Phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A.** $m \in (1; 3)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (4; 6)$.

Lời giải:

Chọn A.

TXĐ: $[1; +\infty)$

$$\text{Phương trình ban đầu} \Leftrightarrow \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} + 1 \right| = m \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = m & (x \in [2; +\infty)) \\ 2 = m & (x \in [1; 2]) \end{cases}$$

Để phương trình có vô số nghiệm thì $m = 2$, suy ra chọn đáp án **A**.

Câu 95. Phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m \in [a; b] \setminus \{0\}$, tính giá trị của $a^2 + b$

- A. 0. B. 3. **C.** 2. D. 4.

Lời giải:

Chọn C.

TXĐ: $[1; +\infty)$

$$\text{Phương trình ban đầu} \Leftrightarrow 2(x+1) = m^2(x+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2 = m^2(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}) \end{cases} (1)$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $x \geq 1$.

Lại có (1) $\Leftrightarrow \frac{2}{m^2} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ do $m = 0$ là cho phương trình vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m^2}$ thuộc miền giá trị của hàm số $y = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ với

$$x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{2}{m^2} \geq 2 \Leftrightarrow m \in [-1; 1] \setminus \{0\}. \text{ Suy ra đáp án C.}$$

Câu 96. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải:

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Leftrightarrow x(x+5) = t^3 + 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

$$\text{Với } t = -2: x^2 + 5x - 2 = -8 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Câu 97. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-1} - \sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}} = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. -5

C. 5

D. 1

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-1} = 3-t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$$3-t^2-t=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1(tm) \\ t=-2(loai) \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1: x^2-x-1=4 \Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Rightarrow x_1.x_2=-5$$

Câu 98. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7$ là

A. 11

B. -1

C. -9

D. $\frac{25}{4}$

Lời giải:

Chọn A

$$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{(\sqrt{x^2+x-1}+1)^2}=7$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-(\sqrt{x^2+x-1}+1)=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{x^2+x-1}-8=0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+2x=2(t^2+1)$. Phương trình trở thành

$$2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2(tm) \\ t=-\frac{3}{2}(loai) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2: x^2 + x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -5 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 11$$

Câu 99. Nếu phương trình $x^2 + 2x + \sqrt{-x^2 - 2x + 15} + m = 0$ có nghiệm duy nhất thì

- A. $m \in (-2; 0)$ B. $m = -4$ C. $m \in (-4; 0)$ D. $m = -\frac{65}{4}$

Lời giải:

Chọn C

$$x^2 + 2x + \sqrt{-x^2 - 2x + 15} + m = 0 \Leftrightarrow -(x+5)(3-x) + \sqrt{(x+5)(3-x)} + m + 15 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét: Nếu a là nghiệm của (1) thì $-2-a$ cũng là nghiệm của (1). Để (1) có nghiệm duy nhất thì $a = -2-a \Leftrightarrow a = -1$. Thay $a = -1$ là nghiệm của (1) ta tính được $m = -3$.

Thử lại: Thay $m = -3$ vào phương trình và giải được nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 100. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm (ẩn x)

$$2x^2 - 4x + m + \sqrt{-x^2 + 2x} = -1$$

- A. $-\frac{9}{8} \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ C. $-1 \leq m$ D. $-\frac{9}{8} \leq m \leq -1$

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x} = \sqrt{-(x-1)^2 + 1} \in [0; 1]$. Bài toán trở thành: tìm m để phương

trình $2t^2 - t - 1 = m$ có nghiệm $t \in [0; 1]$. Lập bảng biến thiên của hàm số

$$f(t) = 2t^2 - t - 1, t \in [0; 1] \text{ ta tìm được tập giá trị của nó là } \left[-\frac{9}{8}; 0\right]$$

Câu 101. Cho phương trình $\sqrt{x^2(1-2x)} = \sqrt{x^2(m+x)}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất?

- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$ D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn C

$$\sqrt{x^2(1-2x)} = \sqrt{x^2(m+x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-2x) \geq 0 \\ x^2(1-2x) = x^2(m+x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ x^2(3x+m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -\frac{m-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{m-1}{3} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi } \begin{cases} -\frac{m-1}{3} = 0 \\ x = -\frac{m-1}{3} > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 102. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3-2x-x^2}$ là:

A. 1.**B. 3.****C. 0.****D. 2.****Lời giải:**Chọn A

$$\sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3-2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 3-x^2 + \sqrt{x+3} = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-1)(x+3) \geq 0 \\ \sqrt{x+3} = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \leq 0 \\ x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Câu 103. Cho phương trình $4\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{9x^2+54x+81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?**A. $\frac{13}{23}$.****B. 5.****C. $\frac{102}{23}$.****D. $\frac{125}{23}$.****Lời giải:**Chọn C

$$4\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{9x^2+54x+81} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ 32x^2-48x+16 = 9x^2+54x+81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ 23x^2-102x-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x=5 \\ x=-\frac{13}{23} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-\frac{13}{23} \Rightarrow 5 + \left(-\frac{13}{23}\right) = \frac{102}{23}. \end{cases}$$

Câu 104. Biết phương trình $\sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} = \sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2}$ có tập nghiệm S . Phát biểu nào là đúng trong các phát biểu sau?**A. $S \cap \left(0; \frac{1}{4}\right) = \emptyset$.****B. $S = \mathbb{R}$.****C. $S = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.****D. S có hai phần tử.****Lời giải:**Chọn A

$$\sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} = \sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} \Leftrightarrow (x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ \begin{cases} 2x^2-5x+2 > 0 \\ x^2-3x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 105. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sqrt{m-x^2} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m > -5$.

B. $m < -3$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải:

Chọn D

$$\begin{aligned} \sqrt{m-x^2} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-x^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ m-x^2 + \sqrt{2x+9} = x-x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2x+9} = x-m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq m \\ 2x+9 = (x-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 (*) \\ x \geq m (**) \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 9 = 0 (1) \end{cases}. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa điều kiện (*), (**)

$$(1): \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow m > -5.$$

$$\text{Khi đó hai nghiệm thỏa } (*), (**) \text{ khi và chỉ khi: } \begin{cases} f(0) \geq 0; f(1) \geq 0; f(m) \geq 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \leq 1; m \leq \frac{S}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 9; f(0) = m^2 - 9; f(1) = m^2 - 2m - 10; f(m) = -2m - 9.$$

$$\frac{S}{2} = m+1.$$

Giải hệ ta được hệ vô nghiệm.

Câu 106. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} = 2$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17 \leq x \leq 17$

$$\begin{aligned} \sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{17+x} &= 2 + \sqrt{17-x} \\ \Leftrightarrow 17+x &= 4 + 4\sqrt{17-x} + 17-x \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{17-x} &= x-2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 = 64 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Câu 107. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} = 8$ là:

A. 5.

B. 2.

C. 128.

D. 256.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17 \leq x \leq 17$

$$\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17+x} \cdot \sqrt{17-x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 289 - x^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 8$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 128

Câu 108. Số nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Chọn C

$$x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt{x^2 + 16} + x^2 + 16 = 40$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + 16} = 24 - x^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 16x^2 = 576 - 48x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Thử lại ta có: $x = 3$ thỏa mãn còn $x = -3$ không thỏa mãn phương trình

Câu 109. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định: $D = [-1; 1]$. Đặt $x = \cos t$, ($t \in [0; \pi]$)

Phương trình trở thành: $4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$.

Phương trình này có 3 nghiệm thuộc $[0; \pi]$ là: $\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$. Do vậy pt đã cho có 3 nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_2 = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$x_3 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Tổng bình phương 3 nghiệm bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 110. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 1} - x = m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có nghiệm:

A. $m \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

B. $m \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

D. $m \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải:Chọn B

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = m \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = m + x \Leftrightarrow \begin{cases} m + x \geq 0 \\ x^2 - 1 = (m + x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -m^2 - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Với $m = 0$ phương trình (2) vô nghiệm.Với $m \neq 0$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm thỏa mãn $x \geq -m$

$$\Leftrightarrow -\frac{m^2 + 1}{2m} \geq -m \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{2m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ -1 \leq m < 0 \end{cases}$$

Câu 111. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình vô nghiệm:

A. $m > 1$ **B.** $m \leq -1$.**C.** $m > 3$.**D.** $m \geq 2$ **Lời giải:**Chọn A

$$\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x^2 + mx - 3 = (x - m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ f(x) = x^2 + 3mx - 3 - m^2 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

pt(1) vô nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) vô nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq x_2 < m$.

$$\Delta = 9m^2 + 4 \cdot (3 + m^2) = 13m^2 + 12 \geq 12 \forall m,$$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 - m < 0 \\ x_2 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ (x_1 - m) + (x_2 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - m^2 + 3m^2 + m^2 > 0 \\ -3m - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 3 \\ -5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Câu 112. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

A. $m \in [2; 6]$ **B.** $m \in [4; 6)$.**C.** $m \in [2; 5)$.**D.** $m \in [4; 5)$ **Lời giải:**Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 4x - 1 + m = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \leq x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 1 \geq 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 5 - m > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -1 + m - 4 + 1 \geq 0 \\ 4 - 2 > 0 \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 5$$

Cách khác:

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

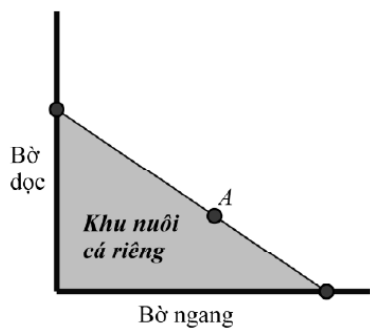
pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \leq x_1 < x_2$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ trên $[1; +\infty)$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại hai điểm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
y	$y(1) = -4$	$y(2) = -5$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-5 < -m \leq -4 \Leftrightarrow 4 \leq m < 5$

Câu 113. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$.



A. $120m^2$.

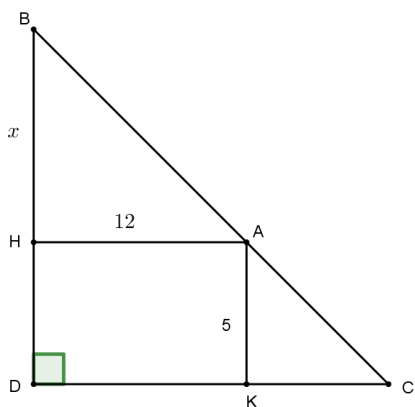
B. $156m^2$.

C. $238,008(3)m^2$.

D. $283,003(8)m^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K là hình chiếu của A trên bờ dọc và bờ ngang. Đặt $BH = x (x > 0)$.

Khi đó, $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{60}{x}$.

Diện tích khu nuôi cá là:

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot DC = \frac{1}{2} (x + 5) \left(\frac{60}{x} + 12 \right) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 \text{ (bất đẳng thức Côsi)}$$

$\Rightarrow S \geq 120, S = 120$ khi $x = 5$. Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120m^2$.