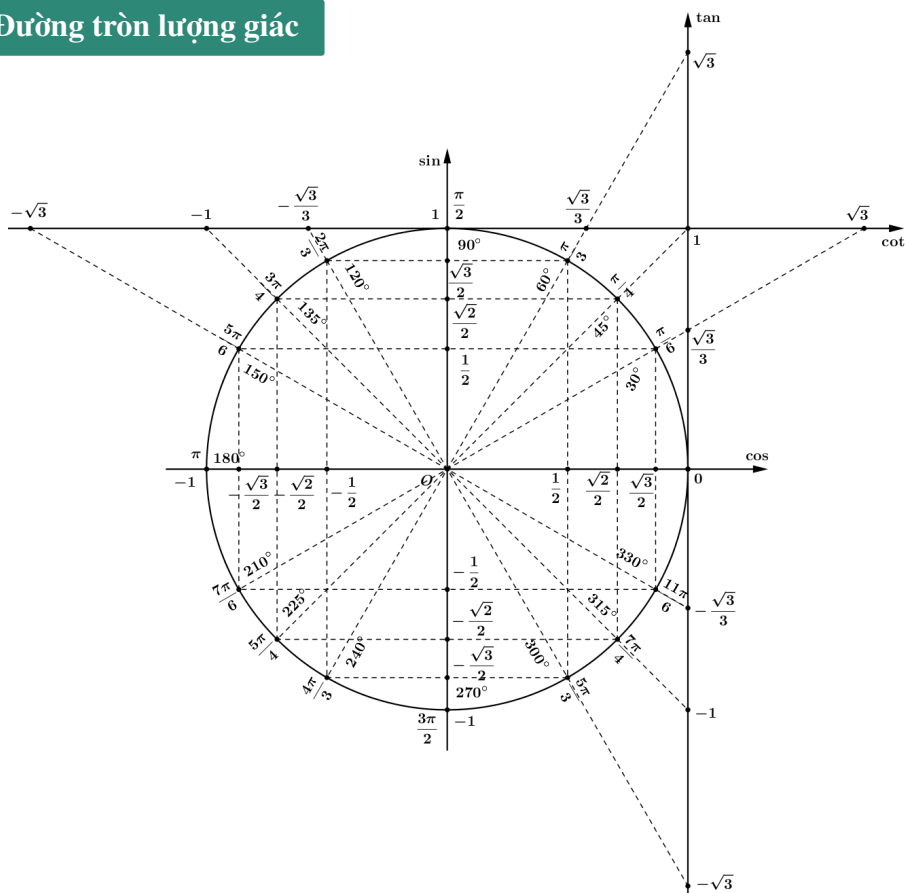


SỔ TAY TOÁN HỌC 12

Họ và tên:.....

Lớp:.....

Đường tròn lượng giác



Công thức lượng giác

Công thức cơ bản

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \textcircled{2} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \textcircled{3} \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \textcircled{4} \tan x \cdot \cot x &= 1. & \textcircled{5} \frac{1}{\cos^2} &= 1 + \tan^2 x. & \textcircled{6} \frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \cot^2 x \end{aligned}$$

Hai cung đối nhau: $(-x)$ và x

① $\cos(-x) = \cos x$

② $\sin(-x) = -\sin x$

③ $\tan(-x) = -\tan x$

④ $\cot(-x) = -\cot x$

Hai cung bù nhau: $(\pi - x)$ và x

① $\sin(\pi - x) = \sin x$

② $\cos(\pi - x) = -\cos x$

③ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

④ $\cot(\pi - x) = -\cot x$

Hai cung phụ nhau: $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ và x

① $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

④ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

Hai cung hơn, kém nhau π : $(\pi + x)$ và x

① $\sin(\pi + x) = -\sin x$

② $\cos(\pi + x) = -\cos x$

③ $\tan(\pi + x) = \tan x$

④ $\cot(\pi + x) = \cot x$

Hai cung hơn, kém nhau $\frac{\pi}{2}$: $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ và x

① $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

④ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

Công thức cộng

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

③ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \textcircled{2} \quad \sin 2x &= \sin x \cdot \cos x \quad \textcircled{3} \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Công thức hạ bậc

$$\textcircled{1} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \textcircled{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \textcircled{3} \quad \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Công thức tổng thành tích

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \textcircled{2} \quad \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\ \textcircled{3} \quad \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \textcircled{4} \quad \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \\ \textcircled{5} \quad \tan x + \tan y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \quad \textcircled{6} \quad \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} \end{aligned}$$

Công thức tích thành tổng

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \textcircled{2} \quad \sin x \cdot \sin y &= -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \textcircled{3} \quad \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}$$

Cấp số cộng

① Dãy số (u_n) được gọi là cấp số cộng

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + d}, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, d \text{ là hằng số}$$

★ $d = u_{n+1} - u_n$ gọi là công sai.

② Số hạng tổng quát: $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}, (n \geq 2)$ hay $d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$.

③ Tính chất: $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k, (k \geq 2)$ hay $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

④ Tổng n số hạng đầu: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}, (n \in \mathbb{N})$; $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

Cấp nhân

① Dãy số (u_n) được gọi là cấp số cộng

$$u_{n+1} = u_n \cdot q, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, q \text{ là hằng số}$$

★ $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ gọi là công bội.

② Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, (n \geq 1)$, hay $q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1}$.

③ Tính chất: $u_k^2 + u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}}, (k \geq 2)$.

④ Tổng n số hạng đầu: $S_n = \frac{u_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, (q \neq 1)$

Tổ hợp-xác suất

Hoán vị

Tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$

① Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử.

② Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = n! = 1.2 \cdot n$

Chỉnh hợp

Tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$

① Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho

- ② Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Tổ hợp

Tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$)

- ① Mỗi tập hợp gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.
- ② Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (0 \leq k \leq n)$

Xác suất

- ① Giả sử A là biến cố liên quan đến phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.
- ② Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- ③ Tính chất của xác suất
- ★ $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1$
 - ★ $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A .
 - ★ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, với mọi biến cố A .

Bảng đạo hàm

Nhóm đa thức

- | | |
|--|---|
| ① $(x^n)' = n.x^{n-1}$ | ② $(u^n)' = n.u' . u^{n-1}$ |
| ③ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | ④ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| ⑤ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | ⑥ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |

Nhóm lượng giác

$$\textcircled{1} (\sin x)' = \cos x$$

$$\textcircled{2} (\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$\textcircled{3} (\cos x)' = -\sin x$$

$$\textcircled{4} (\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$\textcircled{5} (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\textcircled{6} (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$\textcircled{7} (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\textcircled{8} (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

Nhóm mũ

$$\textcircled{1} (a^x)' = a^x \ln a$$

$$\textcircled{2} (a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$$

$$\textcircled{3} (e^x)' = e^x$$

$$\textcircled{4} (e^u)' = u' \cdot e^u$$

Nhóm logarit

$$\textcircled{1} (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (x > 0)$$

$$\textcircled{2} (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}; (u > 0)$$

$$\textcircled{3} (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{4} (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

Quy tắc tính đạo hàm

$$\textcircled{1} (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\textcircled{2} (k \cdot u)' = k \cdot u'$$

$$\textcircled{3} (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\textcircled{4} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Tính đơn điệu hàm số

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm $x \in \mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm $x \in \mathbb{K}$ thì hàm số

$y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$

Các bước xét tính đơn điệu hàm số $y = f(x)$

Bước 1: Tìm tập xác định $\mathcal{D}$

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm nghiệm $f'(x) = 0, (x_1, x_2, \dots \in \mathcal{D})$

Bước 3: Lập bảng biến thiên

Bước 4: Từ bảng biến thiên ta kết luận tính đơn điệu hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$

$y(x_1)$

Điều kiện đồng biến, nghịch biến hàm bậc 3

① Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

② Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

Điều kiện đồng biến, nghịch biến hàm nhất biến

① Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, đồng biến trên tập xác định: $ad - bc > 0$

② Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, nghịch biến trên tập xác định: $ad - bc < 0$

③ Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, đồng biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \end{cases}$$

④ Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (-\infty; \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \geq \alpha \end{cases}$$

Cực trị hàm số

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Quy tắc 1

Bước 1: Tìm tập xác định. Tính đạo hàm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i (i = 1; 2; \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$

Quy tắc 2

Bước 1: Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$

Bước 2: Tìm nghiệm $x_i (i = 1; 2; \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$

Bước 3: Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$

+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_i .

+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_i .

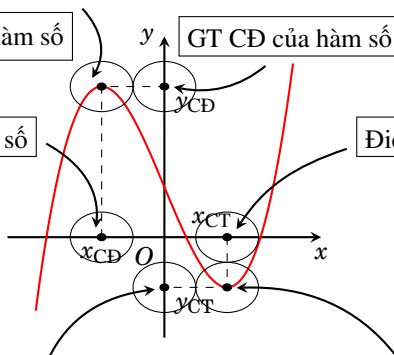
Đồ thị

Điểm CĐ của đồ thị hàm số

GT CĐ của hàm số

Điểm CĐ của hàm số

Điểm CT của hàm số



GT CT của hàm số

Điểm CT của đồ thị hàm số

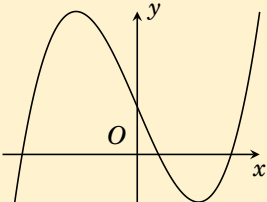
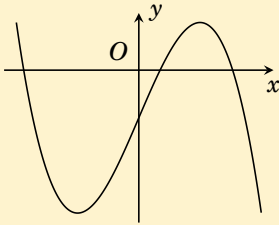
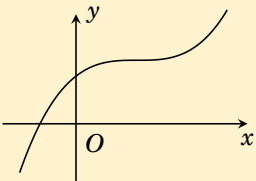
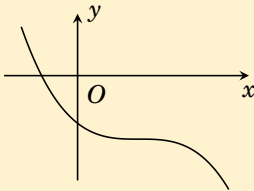
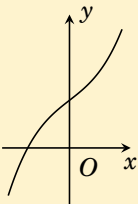
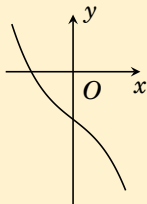
Điều kiện cực trị hàm bậc 3

- ① Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 cực trị: $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$
- ② Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ không có cực trị: $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$
- ③ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đạt cực đại tại x_0 : $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$
- ④ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, đạt cực tiểu tại x_0 : $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

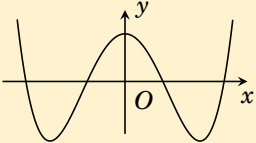
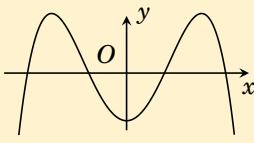
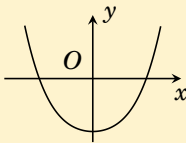
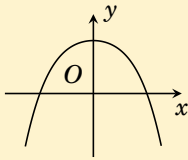
Điều kiện cực trị hàm trùng phương

- ① Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0$
- ② Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực trị $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \cdot b \geq 0 \end{cases}$
- ③ Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực đại, 2 cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
- ④ Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 2 cực đại, 1 cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
- ⑤ Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực đại $\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
- ⑥ Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực tiểu $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

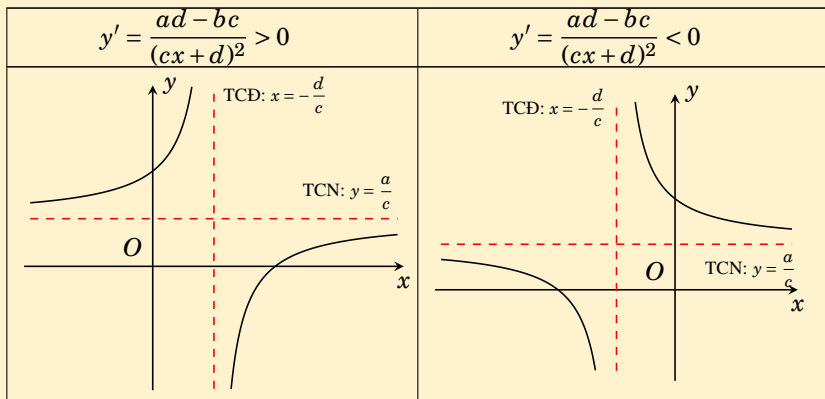
Hình dáng đồ thị hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y'; \Delta$	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0; \Delta_{y'} > 0$ (có 2 nghiệm)		
$y' = 0; \Delta_{y'} = 0$ (có nghiệm kép)		
$y' = 0; \Delta_{y'} < 0$ (vô nghiệm)		

Hình dáng đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

$y'; a; b$	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0; a \cdot b < 0$ (có 3 cực trị)		
$y' = 0; a \cdot b \geq 0$ (có 1 cực trị)		

Đồ thị hàm số nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- +) Tính y' , cho $y' = 0$, nhận nghiệm $x_1, x_2, \dots \in [a; b]$
- +) Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots$
- +) So sánh $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots$

Suy ra $\max_{[a; b]} y; \min_{[a; b]} y$

Đường tiệm cận

Đường tiệm ngang (TCN), đường tiệm cận đứng (TCD) của hàm số $y = f(x)$.

- +) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \pm \infty \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = \pm \infty \right) \Rightarrow \text{TCD: } x = x_0$
- +) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \right) \Rightarrow \text{TCN: } y = y_0$

Lũy thừa ($a, ; b > 0$)

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\textcircled{2} (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\textcircled{3} \sqrt[k]{a^k} = a^{\frac{k}{k}}$$

$$\textcircled{4} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\textcircled{6} \sqrt[n]{a^k} = a^{n \cdot \frac{k}{n}}$$

$$\textcircled{7} (a^m)^n = a^{m.n}$$

$$\textcircled{8} a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\textcircled{9} \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^k}} = a^{\frac{k}{m.n}}$$

Lôgarit ($0 < a, b, x \neq 1$)

Tính chất

$$\textcircled{1} \log_a 1 = 0.$$

$$\textcircled{2} \log_a a = 1.$$

$$\textcircled{3} \log_a a^\alpha = \alpha$$

$$\textcircled{4} \log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\textcircled{5} a^{\log_a b} = b.$$

Tích-thương

$$\textcircled{1} \log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y.$$

$$\textcircled{2} \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Đổi cơ số

$$\textcircled{1} \log_x a = \frac{1}{\log_a x}.$$

$$\textcircled{2} \log_a x \cdot \log_x a = 1$$

$$\textcircled{3} \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

$$\textcircled{4} \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x.$$

$$\textcircled{5} \log_{a^m} x^\alpha = \frac{\alpha}{m} \log_a x.$$

$$\textcircled{6} \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

$$\textcircled{7} \log_a b \cdot \log_b x = \log_a x.$$

$$\textcircled{8} \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Đặc biệt

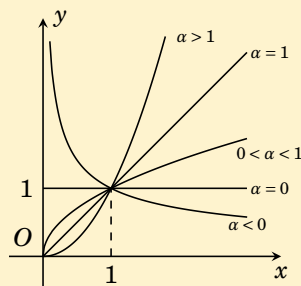
$$\textcircled{1} \log_e a = \ln a \text{ (lôc-nê-pe)}$$

$$\textcircled{2} \log_{10} a = \log a \text{ (lôc thập phân)}$$

Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Tập xác định:

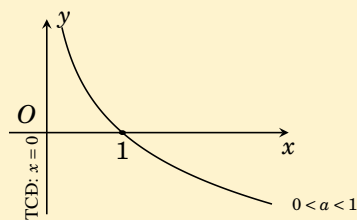
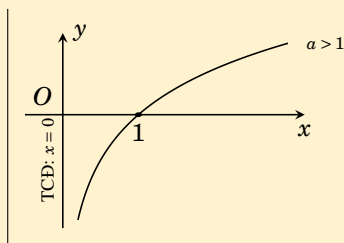
- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ khi α nguyên dương
- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ khi α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$
- $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ khi α không nguyên


Hàm số mũ $y = a^x$

$a > 1$	$0 < a < 1$
• Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ • Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$ • Đường TCN: Trục Ox ($y = 0$) • Đồ thị	• Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ • Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$ • Đường TCN: Trục Ox ($y = 0$) • Đồ thị

Hàm số logarit $y = \log_a x$

$a > 1$	$0 < a < 1$
• Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ • Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ • Đồng biến khi: $a > 1$ • Đường TCĐ: Trục Oy ($x = 0$) • Đồ thị	• Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ • Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ • Nghịch biến khi: $0 < a < 1$ • Đường TCĐ: Trục Oy ($x = 0$) • Đồ thị



Lãi suất ngân hàng

Lãi kép: Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1+r)^n; \quad n = \log_{1+r} \left(\frac{S_n}{A} \right); \quad r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1; \quad A = \frac{S_n}{(1+r)^n}$$

Phương trình, bất phương trình mũ

Phương trình mũ

- ① Phương trình mũ cơ bản: ② Đưa về cùng cơ số:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

- ③ Đặt ẩn phụ $a^x = t (t > 0)$

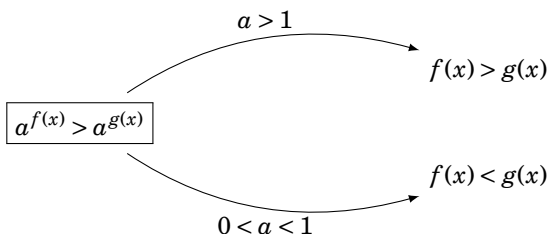
- ④ Mũ hóa:

$$a^x = b^y \Leftrightarrow x = y \cdot \log_a b$$

Bất phương trình mũ

$a > 1$	$0 < a < 1$
① Cơ bản: $a^{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$	$a^{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$
② cùng cơ số: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Sơ đồ



Phương trình, bất phương trình logarit

Phương trình logarit

① Cơ bản:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

② Cùng cơ số:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

③ Đặt ẩn phụ: $t = \log_a x$.

④ Logarit hóa.

Bất phương trình logarit

① Cơ bản:

$$\log_a f(x) > b \xrightarrow{a > 1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases} \quad \log_a f(x) > b \xrightarrow{0 < a < 1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases}$$

② Cùng cơ số:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \xrightarrow{a > 1} \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \xrightarrow{0 < a < 1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Bảng nguyên hàm

Nhóm đa thức

① $\int dx = x + C$

② $\int k dx = kx + C$

③ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

④ $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

⑤ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

⑥ $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$

⑦ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

⑧ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

⑨ $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

⑩ $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

Nhóm mũ

① $\int e^x dx = e^x + C$

② $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

③ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

④ $\int a^{ax+\beta} dx = \frac{1}{a} \frac{a^{ax+\beta}}{\ln a} + C$

Nhóm lượng giác

① $\int \cos x dx = \sin x + C$

② $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

③ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

④ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

⑤ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

⑥ $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$

⑦ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

⑧ $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

⑨ $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

⑩ $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax+b)| + C$

⑪ $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

⑫ $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax+b)| + C$

Tích phân

Tích phân xác định

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Tính chất

$$\textcircled{1} \int_a^a dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\textcircled{3} \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$\textcircled{4} \int_a^b f'(x)dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\textcircled{5} \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\textcircled{6} \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, (a < c < b).$$

Phương pháp tích phân

Phương pháp đổi biến số

$$\text{Tích phân: } I = \int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x)dx.$$

$$\star \text{ Đặt } t = u(x) \xrightarrow{\text{đạo hàm}} dt = u'(x)dx$$

$$\star \text{ Đổi cận: } x = a \Rightarrow t = u(a); x = b \Rightarrow t = u(b).$$

$$\star I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Phương pháp từng phần

Công thức:
$$I = \int_a^b u(x).v'(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx$$

Viết gọn:
$$I = \int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Cách đặt: u và dv

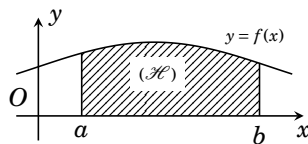
Đặt:
$$\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \xrightarrow{\text{đạo hàm}} u'(x)dx \\ v = \xrightarrow{\text{nguyên hàm}} v(x) \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng

Dạng 1

$(\mathcal{H}): \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0; x = a; x = b \end{cases}$

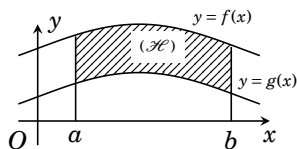
$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Dạng 2

$(\mathcal{H}): \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases}$

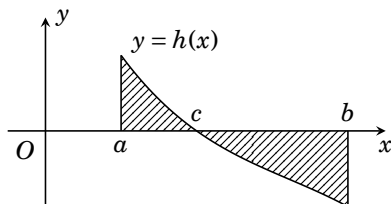
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Dạng 3

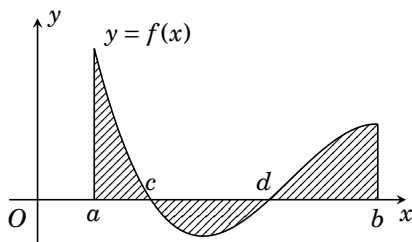
$$S = \int_a^c |h(x)| dx + \int_c^b |h(x)| dx$$

$$S = \int_a^c h(x) dx - \int_c^b h(x) dx$$



Dạng 4

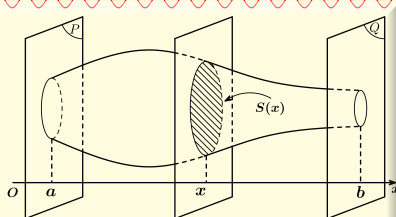
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



Thể tích vật thể tròn xoay

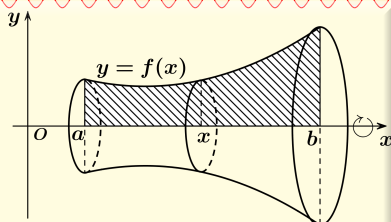
Dạng 1

$$\begin{cases} (P), (Q) \perp Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \quad V = \int_a^b S(x)dx$$



Dạng 2

$$\begin{cases} y = f(x), Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \quad V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$



Số phức

Định nghĩa

- $z = a + bi$, ($i^2 = -1$) là số phức
- +) Phần thực: a .
- +) Phần ảo: b .
- +) Số phức: $\bar{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z .
- +) Số phức: $-z = -a - bi$ là số phức đối của z .
- +) Số phức: $\frac{1}{z}$ là số phức nghịch đảo của z .

Tổng hiệu tích thương

Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ thì

- ① $z + z' = (a + a') + (b + b')i$. ② $z - z' = (a - a') + (b - b')i$.
- ③ $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$ ④ $\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i$

Tính chất

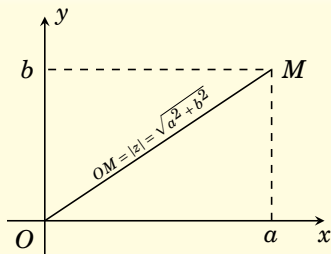
- ① $z.\bar{z} = a^2 + b^2$; ② $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- ③ $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$ ④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- ⑤ $z + \bar{z} = 2a$; $z - \bar{z} = 2bi$

Mô-đun

- Cho $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|\bar{z}| = |z|$; $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Biểu diễn hình học

$$z = a + bi \Rightarrow M(a; b)$$



Phương trình bậc hai

Phương trình: $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ phương trình có 2 nghiệm thực: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- $\Delta < 0$ phương trình có 2 nghiệm phức: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$

Khối đa diện đều

Tên	Loại	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Mặt đ.x	Hình
① Khối tứ diện đều	{3;3}	4	6	4	6	
② Khối lập phương	{4;3}	8	12	6	9	

③ Khối bát diện đều

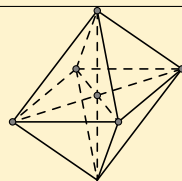
{3;4}

6

12

8

9



④ Khối 12 mặt đều

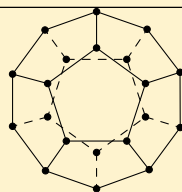
{5;3}

20

30

12

15



⑤ Khối 20 mặt đều

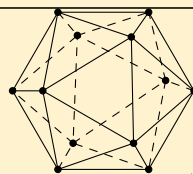
{3;5}

12

30

20

15



Hình học phẳng

Tam giác vuông

$\triangle ABC$ vuông tại A , khi đó:

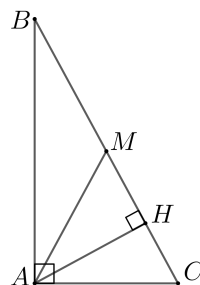
① $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Py-ta-go)

② $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

③ $AM = MC = MB = \frac{BC}{2}$

④ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$

⑤ $AC^2 = CH.CB$; $AB^2 = BH.BC$



Tam giác vuông cân

$\triangle ABC$ vuông tại **cân** tại A , khi đó:

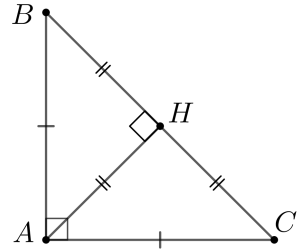
① $BC = AB \cdot \sqrt{2} = AC \cdot \sqrt{2}$

② $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$

③ $AH = \frac{BC}{2} = HC = HB$

④ Diện tích:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{BC^2}{4}$$



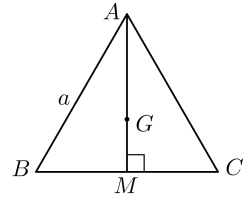
Tam giác đều

$\triangle ABC$ đều cạnh bằng a .

① Đường cao: $AM = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

② $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

③ Diện tích: $S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Tam giác thường

★ Tam giác ABC , có $BC = a$, $BC = b$, $CA = c$; h_a : đường cao hạ từ A ; m_a : đường trung tuyến hạ từ A ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại, nội tiếp $\triangle ABC$;

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

① $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_a \cdot a$

② $S_{\triangle ABC} = pr$

③ $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$

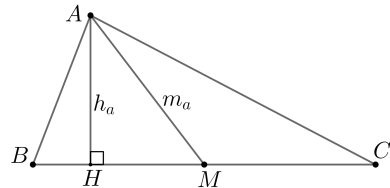
④ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$

⑤ $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hê-rông)

⑥ Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cos A$

⑦ Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

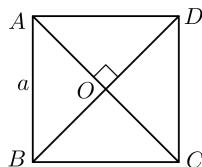
⑧ Đường trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.



Hình vuông

Hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a

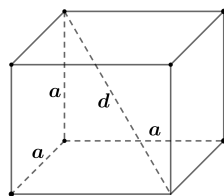
- ① $AC = BD = (\text{cạnh}) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2}$
- ② $S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2$



Thể tích khối đa diện

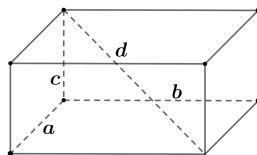
Thể tích khối lập phương

- ① Thể tích: $V = (\text{cạnh})^3 = a^3$
- ② Diện tích toàn phần: $S = 6 \cdot (\text{cạnh})^2 = 6 \cdot a^2$
- ③ Đường chéo: $d = (\text{cạnh}) \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{3}$



Thể tích khối hộp chữ nhật

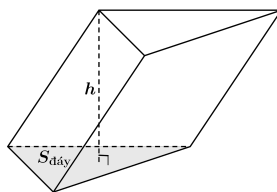
- ① Thể tích: $V = a \cdot b \cdot c$
- ② Diện tích toàn phần:
 $S = 2(ab + bc + ca)$
- ③ Đường chéo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Thể tích khối lăng trụ xiên

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

- ★ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy
- ★ h : chiều cao lăng trụ

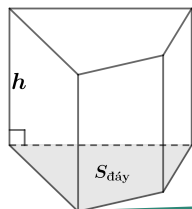


Thể tích khối lăng trụ đứng

$$V = S_{\text{đáy}} \times (\text{cạnh bên}) = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

★ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy

★ h : chiều cao lăng trụ

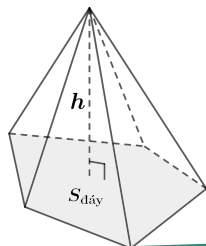


Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$$

★ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy

★ h : chiều cao lăng trụ

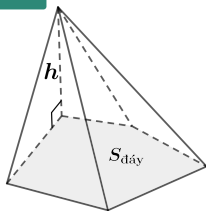


Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc mặt đáy

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \times (\text{cạnh bên}) = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$$

★ $S_{\text{đáy}}$: Diện tích đáy

★ h : chiều cao lăng trụ

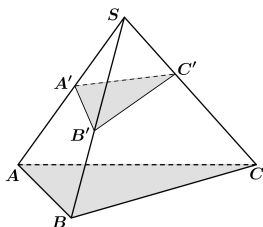


Tỉ lệ thể tích

Dạng 1

Hình chóp $S.ABC$, gọi A', B', C' lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC

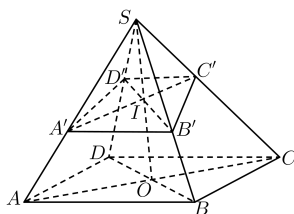
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



Dạng 2

$$a = \frac{SA}{SA'}, b = \frac{SB}{SB'}, c = \frac{SC}{SC'}, d = \frac{SD}{SD'}$$

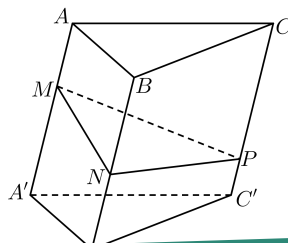
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$



Dạng 3

$$a = \frac{AM}{AA'}, b = \frac{BN}{BB'}, c = \frac{CP}{CC'}$$

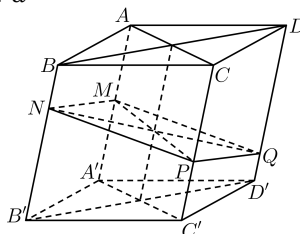
$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}$$



Dạng 4

$$a = \frac{AM}{AA'}, b = \frac{BN}{BB'}, c = \frac{CP}{CC'}, d = \frac{DQ}{DD'} \text{ và } a+c=b+d$$

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

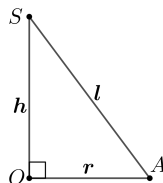


Thể tích khối tròn xoay

Định nghĩa-nón

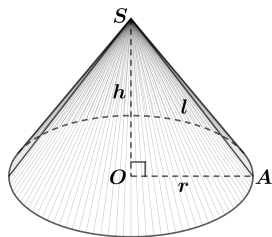
Khi quay đường gấp khúc SAB quanh trục SO tạo thành mặt nón

- ① $SO = h$ chiều cao nón
- ② $OA = r$ bán kính đường tròn đáy
- ③ $SA = l$ đường sinh.



Thể tích, diện tích-nón

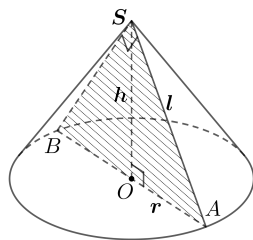
- ① Thể tích $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.
- ② Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = \pi \cdot l \cdot r$.
- ③ Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = \pi \cdot r(l + r)$.
 +) $OA = r$: Bán kính đường tròn đáy.
 +) $SA = l$: Đường sinh.
 +) $SO = h$: Chiều cao nón.
- ④ Tính chất: $l^2 = r^2 + h^2$.



Thiết diện qua trục-nón

Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S .

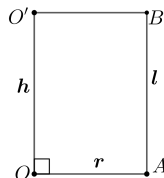
- ① Chiều cao: $SO = h = r$
- ② Đường kính: $AB = 2r$
- ③ Đường sinh: $l = r \cdot \sqrt{2}$; $r = \frac{l}{\sqrt{2}}$
- ④ Diện tích: $S_{\Delta SAB} = r^2$



Định nghĩa-trụ

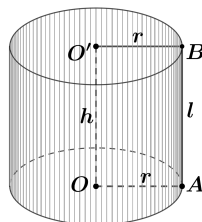
Khi quay hình chữ nhật $OO'BA$ quanh trục OO' tạo thành mặt trụ

- ① $OO' = h = l$ chiều cao trụ
- ② $OA = O'B = r$ bán kính đường tròn 2 đáy
- ③ $AB = l$ đường sinh.



Thể tích, diện tích-trụ

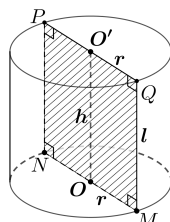
- ① Thể tích: $V_{\text{trụ}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
- ② Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot l \cdot r$
- ③ Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = 2 \cdot \pi \cdot r(l + r)$.
- ④ Tính chất: $h = l$.



Thiết diện qua trục-trụ

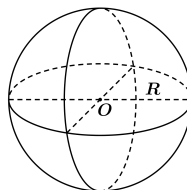
Thiết diện qua trục là hình vuông $MNPQ$.

- ① Cạnh hình vuông: $2r$
- ② Chiều cao: $OO' = h = l = 2r$
- ③ Diện tích: $S_{\diamond MNPQ} = 4r^2$



Thể tích, diện tích-cầu

- ① Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$
- ② Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- ★ Diện tích hình tròn: $S = \pi \cdot R^2$
- ★ Chu vi đường tròn: $2\pi \cdot R$

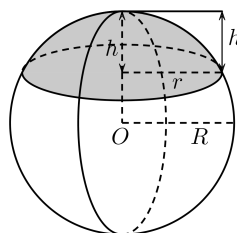


Chỏm cầu

- ① Diện tích chỏm cầu

$$S_{\text{xq}} = 2\pi R h = \pi (r^2 + h^2)$$
- ② Thể tích chỏm cầu:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)$$

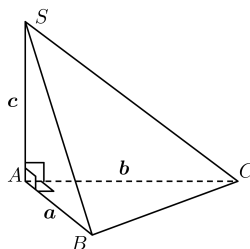


Công thức tính nhanh thể tích

Công thức 1

Hình chóp $S.ABC$ có $SA = c, AB = a, AC =$

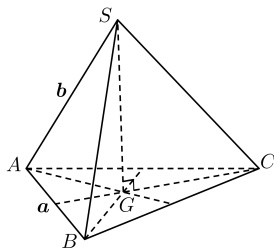
b đôi một vuông góc: $V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}$



Công thức 2

Hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng b :

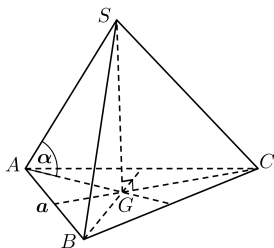
$$V_{S.ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12} \xrightarrow{a=b} V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$



Công thức 3

Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy a , cạnh bên tạo

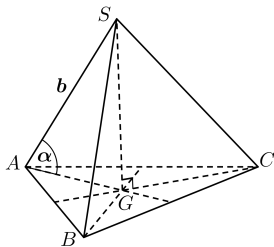
với đáy 1 góc α : $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan \alpha}{12}$



Công thức 4

Hình chóp tam giác đều có cạnh bên b , cạnh bên tạo

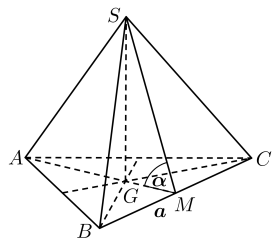
với đáy 1 góc α : $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4}$



Công thức 5

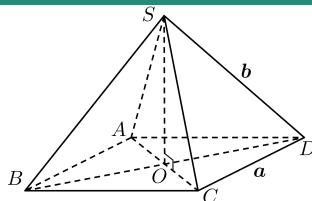
Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a , mặt bên

tạo với đáy 1 góc α : $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \tan \alpha}{24}$



Công thức 6

Hình chóp đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên b :

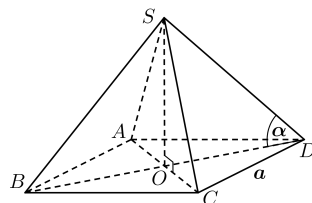


$$V_{S.ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6} \xrightarrow{a=b} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

Công thức 7

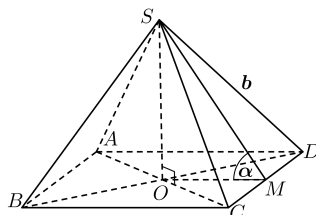
Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α :

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2} \tan \alpha}{6}$$

**Công thức 8**

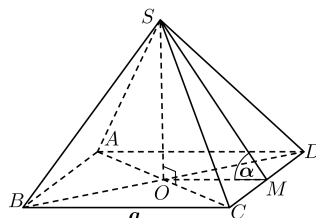
Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α :

$$V_{S.ABCD} = \frac{4b^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}$$

**Công thức 9**

Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α :

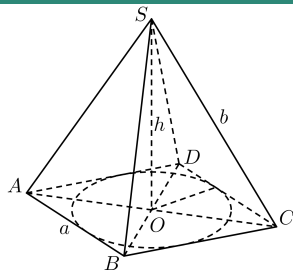
$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \tan \alpha}{6}$$



Công thức 10

- ① Hình nón nội tiếp hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b :

$$r = \frac{a}{2}, h = SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

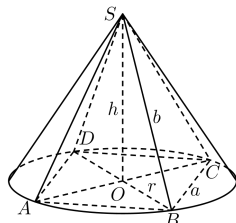


- ② Thể tích nón: $V_{\text{nón}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{12} \xrightarrow{a=b} V_{\text{nón}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{24}$

Công thức 11

- ① Hình nón ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b :

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}, h = SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

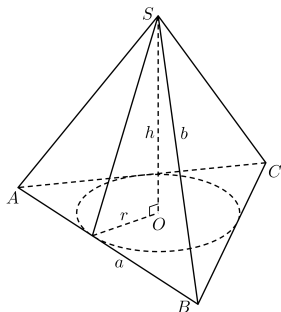


- ② Thể tích nón: $V_{\text{nón}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{6} \xrightarrow{a=b} V_{\text{nón}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$

Công thức 12

- ① Hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b :

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, h = SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$



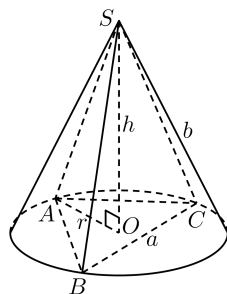
- ② Khi $a = b$: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}, V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}$

Công thức 13

- ① Hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bằng a , cạnh bên bằng

$$b: r = \frac{a\sqrt{3}}{3}, h = SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

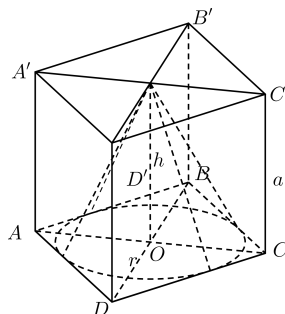
- ② Khi $a = b$: $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}, V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$



Công thức 14

- ① Hình nón nội tiếp hình lập phương cạnh a .

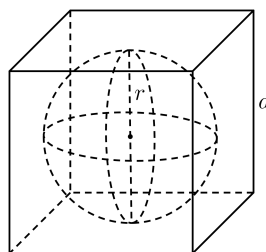
$$r = \frac{a}{2}, h = a, V = \frac{\pi a^3}{12}$$



Công thức 15

Hình cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a

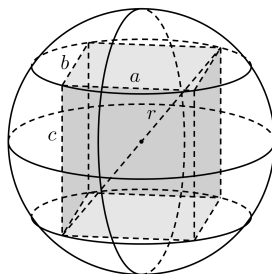
$$r = \frac{a}{2}, V = \frac{\pi a^3}{6}$$



Công thức 16

Hình cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có cạnh

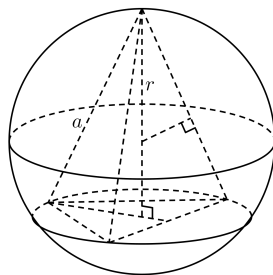
$$a, b, c: R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$



Công thức 17

Hình cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a :

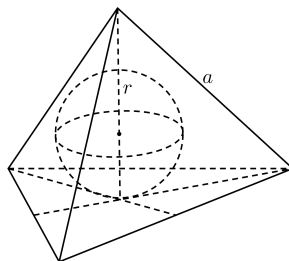
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{4}, V = \pi a^3 \sqrt{6}$$



Công thức 18

Hình cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh a :

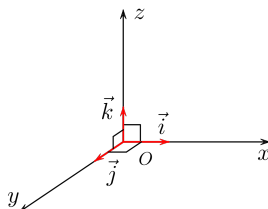
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{216}$$



Hệ tọa độ trong không gian

Hệ trục tọa độ trong không gian

- ① Trục hoành: Ox ; trục tung: Oy ; trục cao: Oz
- ② Vec-tơ đơn vị: $\vec{i} = (1, 0, 0)$; $\vec{j} = (0, 1, 0)$; $\vec{k} = (0, 0, 1)$
- ③ $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$



Tọa độ vec-tơ

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$$

Tính chất

Cho hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

① Tổng-hiệu: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

② Tích 1 số với 1 vec-tơ: $k\vec{a} = (k.a_1; k.a_2; k.a_3)$

③ Độ dài vec-tơ: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

④ Hai vec-tơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

⑤ Hai vec-tơ cùng phương: $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$

⑥ Tích vô hướng của hai vec-tơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

⑦ Hai vec-tơ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

⑧ Góc hai vec-tơ:

$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

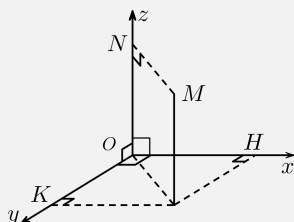
⑨ Tích có hướng của hai vec-tơ:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Tọa độ điểm

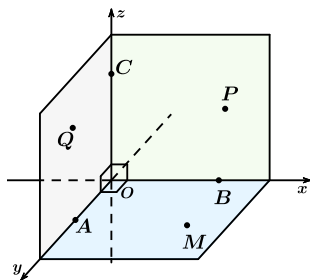
+) $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow M(x; y; z)$

+) $M(x; y; z): \begin{cases} x : \text{hoành độ} \\ y : \text{tung độ} \\ z : \text{cao độ} \end{cases}$



Các điểm đặc biệt

- ① $O(0;0;0)$
- ② $B \in Ox \longrightarrow B(x;0;0)$
- ③ $A \in Oy \longrightarrow A(0;y;0)$
- ④ $C \in Oz \longrightarrow C(0;0;z)$
- ⑤ $M \in (Oxy) \longrightarrow M(x;y;0)$
- ⑥ $P \in (Oxz) \longrightarrow P(x;0;z)$
- ⑦ $Q \in (Oyz) \longrightarrow Q(0;y;z)$



Tính chất

Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B); C(x_C; y_C; z_C)$

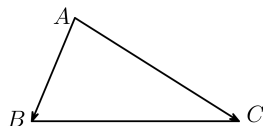
- ① Tọa độ vec-tơ: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ② Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- ③ Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB :
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$
- ④ Điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k : $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$:

$$x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}; z_M = \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k}$$
- ⑤ Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$

$$G : \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

Ứng dụng tích có hướng của 2 vec-tơ

- ① Diện tích $\triangle ABC$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$



- ② Diện tích hình bình hành $ABCD$

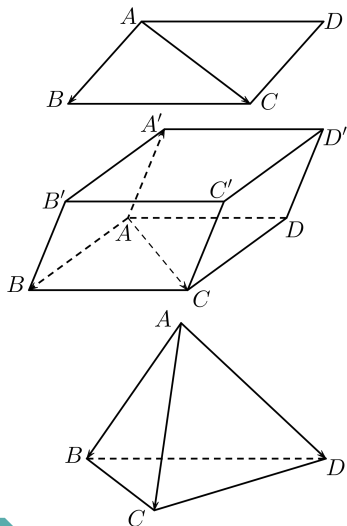
$$S_{\Delta ABCD} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|$$

- ③ Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$:

$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$$

- ④ Thể tích tứ diện $ABCD$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

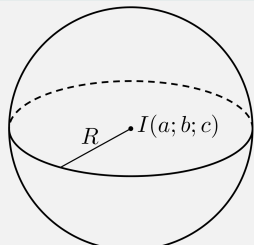


Mặt cầu

- ① Phương trình mặt cầu

$$\text{Mặt cầu } (S): \begin{cases} \text{tâm } I(a; b; c) \\ \text{bán kính } R \end{cases}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$



- ② Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với điều kiện:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \text{ là phương trình mặt cầu } (S)$$

$$\begin{cases} \text{tâm } I(a; b; c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng-Vec-tơ pháp tuyến

$$\text{PTPQ } (P): Ax + By + Cz + D = 0 \xrightarrow{\text{có VTPT}} \vec{n} = (A; B; C)$$

Phương trình mặt phẳng

- ① $(P): \begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vttpt } \vec{n} = (A; B; C) \end{cases}$

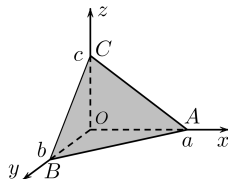
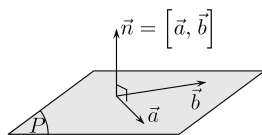
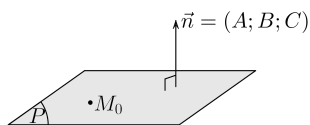
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Viết gọn: $Ax + By + Cz + D = 0$

- ② Mặt phẳng (P) có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$

- ③ Mặt phẳng (ABC) với $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$

Phương trình mặt chắn: $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



Các mặt phẳng đặc biệt

- ① $(Oyz): x = 0$ ② $(Oxz): y = 0$ ③ $(Oxy): z = 0$
 ④ $(Oyz) \parallel x + a = 0$ ⑤ $(Oxz) \parallel y + b = 0$ ⑥ $(Oxy) \parallel z + c = 0$

Khoảng cách

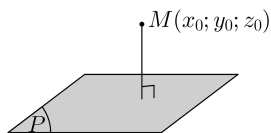
- ① Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (P)) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- ② Khoảng cách 2 mặt song song

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ và } (Q): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

★ Lấy 1 điểm $M \in (Q)$. Khoảng cách: $d[(P), (Q)] = d(M, P)$.



Góc giữa 2 mặt phẳng

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \xrightarrow{\text{VTPT}} \vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$$

$$(Q): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \xrightarrow{\text{VTPT}} \vec{n}_{(Q)} = (A_1; B_1; C_1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|A.A_1 + B.B_1 + C.C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

Vị trí giữa 2 mặt phẳng

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$$

$$(Q): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \vec{n}_{(Q)} = (A_1; B_1; C_1)$$

$$\textcircled{1} (P) \text{ và } (Q) \text{ cắt nhau: } \frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}.$$

$$\textcircled{2} (P) \parallel (Q): \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1}.$$

$$\textcircled{3} (P) \equiv (Q): \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}.$$

$$\textcircled{4} (P) \perp (Q): A.A_1 + B.B_1 + C.C_1 = 0$$

Phương trình đường thẳng

Đường thẳng-Vec-tơ chỉ phương

① Phương trình tham số:

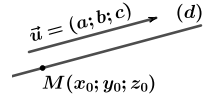
$$(d): \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{array} \right. \xrightarrow[\text{đi qua điểm}]{\text{VTCP}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (a; b; c) \\ M(x_0; y_0; z_0) \end{array} \right.$$

② Phương trình chính tắc

$$(d): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \xrightarrow[\text{đi qua điểm}]{\text{VTCP}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (a; b; c) \\ M(x_0; y_0; z_0) \end{array} \right.$$

Phương trình tham số

$$(d): \begin{cases} \text{có VTCP } \vec{u} = (a; b; c) \\ \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \xrightarrow{\text{PTTS}} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$



Phương trình chính tắc

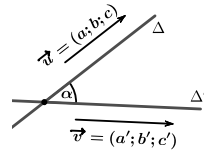
$$(d): \begin{cases} \text{có VTCP } \vec{u} = (a; b; c) \\ \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \xrightarrow{\text{PTCT}} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$

Đường thẳng Δ' có VTCP $\vec{v} = (a'; b'; c')$

$$\cos(\Delta; \Delta') = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

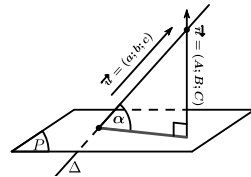


Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$

Mặt phẳng (P) có VTCP $\vec{n} = (A; B; C)$

$$\sin(\Delta; (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \text{ và } (P): Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}$$

Thế (Δ) vào (P)

$$A(x_0 + a \cdot t) + B(y_0 + b \cdot t) + C(z_0 + c \cdot t) + D = 0$$

(1)

★ Nếu (1) có đúng nghiệm $t = t_0$ suy ra (Δ) cắt (P) tại điểm

$$M_0(x_0 + at_0; y_0 + bt_0; z_0 + zt_0)$$

★ Nếu (1) vô nghiệm thì $(\Delta) \parallel (P)$

★ Nếu (1) vô số nghiệm thì (Δ) thuộc (P)

$$\textcircled{1} \Delta \perp (P): \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

$$\textcircled{2} (\Delta) \parallel (P): A.a + B.b + C.c = 0$$

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \text{ và } (\Delta'): \begin{cases} x = x'_0 + a'.t' \\ y = y'_0 + b'.t' \\ z = z'_0 + c'.t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$$

$$\star \text{ Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x_0 + at = x'_0 + a't \\ y_0 + bt = y'_0 + b't \\ z_0 + ct = z'_0 + c't \end{cases} \quad (1)$$

$\textcircled{1} (\Delta)$ cắt (Δ') :

(1) có đúng 1 nghiệm t, t'

$\textcircled{2} (\Delta)$ chéo (Δ') :

$$\begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \end{cases}$$

$\textcircled{3} (\Delta) \parallel (\Delta')$:

$$\begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm} \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \end{cases}$$

$\textcircled{4} (\Delta) \equiv (\Delta')$:

(1) vô số nghiệm