

CHUYÊN ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa nguyên hàm; các tính chất của nguyên hàm và bảng nguyên hàm cơ bản.
- + Nắm vững các phương pháp tính nguyên hàm.

❖ Kỹ năng

- + Hiểu rõ định nghĩa và tính chất của nguyên hàm để vận dụng vào việc tìm nguyên hàm
- + Sử dụng thành thạo bảng nguyên hàm và các phương pháp tìm nguyên hàm.
- + Vận dụng nguyên hàm vào các bài toán thực tế.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
- Ngược lại, với mỗi nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$. Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Tính chất

Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K thì:

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, với k là hằng số thực khác 0.
- $\int [mf(x) + ng(x)] dx = m \int f(x) dx + n \int g(x) dx$ với m, n là hai số thực khác 0.
- Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ ta có:

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, ở đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Sự tồn tại nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

Ví dụ: $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ vì $(x^3)' = 3x^2$

Nhận xét: Nếu $F(x)$ và $G(x)$ cùng là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì:

- $F'(x) = G'(x), \forall x \in K$.
- $F(x) - G(x) = C$, với C là hằng số nào đó.

Ví dụ 1:

$$\begin{aligned} \int [2 \sin x + 3 \cos x] dx &= 2 \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx \\ &= 2(-\cos x) + 3 \sin x + C = -2 \cos x + 3 \sin x + C \end{aligned}$$

Ví dụ 2:

$$\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$$

BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = ax + b; a \neq 0$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	$\int d(ax + b) = ax + b + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$	$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln ax + b + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax + b} + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3} (ax + b)\sqrt{ax + b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax + b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{2}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan u du = -\ln \cos u + C$	$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax + b) + C$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot u du = \ln \sin u + C$	$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left \tan \frac{x}{2}\right + C$	$\int \frac{1}{\sin u} du = \ln\left \tan \frac{u}{2}\right + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax + b)} = \frac{1}{a} \ln\left \tan \frac{ax + b}{2}\right + C$

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \frac{1}{\cos u} du = \ln \left \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \frac{1}{\cos(ax+b)} dx$ $= \frac{1}{a} \ln \left \tan \left(\frac{ax+b}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
---	---	--

HỆ THỐNG HÓA KIẾN THỨC

NGUYÊN HÀM: $\int f(x) dx = F(x) + C$

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

2. Định lí

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Hàm số $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ được gọi là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Kí hiệu $\int f(x) dx = F(x) + C$.

3. Tính chất

Nếu hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên K và $k \neq 0$ thì ta luôn có:

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, với k là hai số thực khác 0.
- $\int [mf(x) + ng(x)] dx = m \int f(x) dx + n \int g(x) dx$ với m, n là hai số thực khác 0.
- Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ ta có: $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

4. Sự tồn tại nguyên hàm

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa

Bài toán 1: Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp và hàm số mũ

Phương pháp giải

- Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng tổng, hiệu của các biểu thức chứa x , trong đó mỗi biểu thức chứa x là những dạng cơ bản có trong

Ví dụ 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là:

A. $e^x + x^2 + C$

B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

bảng nguyên hàm.

- Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $e^x + 1 + C$

Hướng dẫn giải

$$\int (e^x + x) dx = \int e^x dx + \int x dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$?

A. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ B. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2019$
C. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ D. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2020$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, với C là hằng số.

Nên các phương án A, B, D đều là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 3^x$ là

A. $x^3 + 3^x \ln 3 + C$ B. $x^3 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$
C. $x^3 + 3^x + C$ D. $x^3 + \frac{\ln 3}{3^x} + C$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int f(x) dx &= \int (3x^2 + 3^x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3^x dx \\ &= x^3 + \frac{3^x}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{x}$ là:

A. $x^5 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$ B. $x^5 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$
C. $x^5 - \frac{3}{x^2} - 3x\sqrt[3]{x} + C$ D. $20x^3 - \frac{6}{x^4} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \left(5x^4 + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{x} \right) dx = x^5 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$

Chọn A.

Ví dụ 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x^2 + \sqrt{x} - 6}{x}$ là:

A. $2x^2 - 2\sqrt{x} - 6 \ln|x| + C$

B. $x^2 + 2\sqrt{x} - 6 \ln|x| + C$

C. $2x^2 + 2\sqrt{x} - 6 \ln|x| + C$

D. $x^2 + \sqrt{x} - 3 \ln|x| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{4x^2 + \sqrt{x} - 6}{x} dx = \int \left(4x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} \right) dx = 2x^2 + 2\sqrt{x} - 6 \ln|x| + C$

Chọn C.

Chú ý: Tính chất phân thức: $\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$.

Ví dụ 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$ là:

A. $\frac{2^x}{e^x \ln 2} + e^{-x} + C$

B. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} - e^{-x} + C$

C. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$

D. $\frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2^x - 1}{e^x} dx = \int \left(\frac{2}{e} \right)^x dx - \int e^{-x} dx = \frac{2^x}{e^x (\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$.

Chọn C.

Ví dụ 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+2)^{2019}$ là:

A. $-\frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

B. $\frac{(x+2)^{2020}}{2021} - \frac{(x+2)^{2018}}{1009} + C$

C. $\frac{(x+2)^{2021}}{2021} + \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

D. $\frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int x(x+2)^{2019} dx = \int [(x+2) - 2](x+2)^{2019} dx$
 $= \int (x+2)^{2020} dx - 2 \int (x+2)^{2019} dx = \frac{(x+2)^{2021}}{2021} - \frac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

Chọn D.

Ví dụ 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ là:

A. $x + \ln \sqrt{e^{2x} + 1} + C$

B. $x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$

C. $\ln(e^{2x} + 1) + C$

D. $x - \ln(e^{2x} + 1) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{(e^{2x}+1)-e^{2x}}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Do đó $\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + C$

Chọn B.

Ví dụ 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$ là:

A. $\frac{1}{6} \left[(\sqrt{x+2})^3 - (\sqrt{x-2})^3 \right] + C$

B. $\frac{1}{6} [\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}] + C$

C. $\frac{1}{6} \sqrt{x+2} + \frac{1}{6} (x-2) \sqrt{x-2} + C$

D. $\frac{1}{6} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{1}{6} \sqrt{x-2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} dx = \int \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{4} dx$
 $= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x-2} \right] + C = \frac{1}{6} (x+2) \sqrt{x+2} - \frac{1}{6} (x-2) \sqrt{x-2} + C$

Chọn A.

Chú ý: Sử dụng kỹ thuật nhân liên hợp: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$.

Lưu ý: $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b) \sqrt{ax+b} + C$.

Ví dụ 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5x-13}{x^2-5x+6}$ là:

A. $2 \ln|x-3| - 3 \ln|x+2| + C$

B. $3 \ln|x-3| + 2 \ln|x-2| + C$

C. $2 \ln|x+3| + 3 \ln|x+2| + C$

D. $2 \ln|x-3| + 3 \ln|x-2| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{5x-13}{x^2-5x+6} = \frac{5x-13}{(x-2)(x-3)}$

Ta sẽ phân tích: $5x-13 = A(x-2) + B(x-3)$ (1)

Thế $x=2$ và $x=3$ lần lượt vào (1) ta có $B=3$ và $A=2$.

Khi đó $\int \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{2(x-2)+3(x-3)}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{2}{x-3} dx + \int \frac{3}{x-2} dx$
 $= 2 \ln|x-3| + 3 \ln|x-2| + C$

Chọn D.

Ví dụ 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1-x^4}{x^5+x}$ là:

A. $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

B. $\ln|x| - \ln(x^4+1) + C$

C. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

D. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{1-x^4}{x^5+x} dx = \int \frac{(1+x^4)-2x^4}{x(x^4+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x^3}{x^4+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^4+1) + C$

Chọn C.

Ví dụ 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$ là:

A. $\ln|x+2| + 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

B. $\ln|x+2| - 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C$

C. $2\ln|x+2| + \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

D. $2\ln|x+2| + \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} dx = \int \frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)} dx$.

Ta phân tích $3x^2+3x+3 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$.

Ta có thể dùng các giá trị riêng, tính ngay $A=1, C=3$ và $B=2$.

(thay $x=-2 \Rightarrow A=1; x=1 \Rightarrow C=3$ và $x=0 \Rightarrow B=2$).

Khi đó $\int \frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + 2\int \frac{1}{x-1} dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x+2| + 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$.

Chọn A.

Lưu ý: Ta có kiến thức tổng quát dùng cho các nguyên hàm hữu tỉ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là

các đa thức, cụ thể như sau:

- Nếu $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ thì ta thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ (ở đây, kí hiệu $\deg(P(x))$ là bậc của đa thức $P(x)$).
- Khi $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ thì ta quan sát mẫu số $Q(x)$ ta tiến hành phân tích thành các nhân tử, sau đó, tách $P(x)$ theo các tổ hợp của các nhân tử đó. Đến đây, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức (hoặc giá trị riêng) để đưa về dạng tổng của các phân thức.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp

Trường hợp 1: $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d} \right).$

Trường hợp 2: $\frac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} = \frac{(Ax+Ba)x + Ad + Bb}{(ax+b)(cx+d)}.$

Ta đồng nhất thức $mx+n = (Ax+Ba)x + Ad + Bb$ (1).

Cách 1. Phương pháp đồng nhất hệ số.

Đồng nhất đẳng thức, ta được $\begin{cases} Ac + Ba = m \\ Ad + Bb = n \end{cases}$. Suy ra A, B .

Cách 2. Phương pháp giá trị riêng.

Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}$ vào hai vế của (1), tìm được A, B .

Trường hợp 3: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}.$

Trường hợp 4: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ax+b}$
 $\Rightarrow mx+n = A(cx+d) + B(ax+b)^2 + C(ax+b)(cx+d)$ (*)

Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}; x = 0$ vào hai vế của (*) để tìm A, B, C .

Trường hợp 5: $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Trường hợp 6: $\frac{1}{(x-a)^2 + (x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}; f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá

trị của biểu thức $P = f(-1) + f(3)$ là:

A. $3\ln 5 + \ln 2$

B. $3\ln 2 + \ln 5$

C. $3 + 2\ln 5$

D. $3 + \ln 15$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vi } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1)+2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } P = f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$$

Chọn D.

Chú ý:

Chú ý đến tính liên tục của hàm số $f'(x)$ và cách xử lý dấu giá trị tuyệt đối.

Ở đây, ta sử dụng hai hằng số khác nhau ứng với $x > \frac{1}{2}$ và $x < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$; $f(-3) + f(3) = 2 \ln 2$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Giá trị của biểu thức $P = f(-2) + f(0) + f(4)$ là:

A. $2 \ln 2 - \ln 5$

B. $6 \ln 2 + 2 \ln 3 - \ln 5$

C. $2 \ln 2 + 2 \ln 3 - \ln 5$

D. $6 \ln 2 - 2 \ln 5$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$\text{Hay } f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln \frac{1-x}{1+x} + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có: } \begin{cases} f(-3) + f(3) = 2 \ln 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 2 \ln 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-2) + f(0) + f(4) = \ln 3 + C_3 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_1 = 2 \ln 2 + 2 \ln 3 - \ln 5.$$

Chọn C.

Bài toán 2. Nguyên hàm của hàm số lượng giác



Phương pháp giải

Yêu cầu chung: Nắm vững công thức lượng giác và biến đổi lượng giác.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x \cdot \cos 2x$ trên $\mathbb{R}$ ta thu được kết quả:

- Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm

về dạng tổng, hiệu của các hàm số lượng giác trong đó, mỗi hàm số là những dạng cơ bản có trong bảng nguyên hàm.

- Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

$$\text{A. } \int f(x) dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin x}{2} + C$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \frac{\sin 5x}{5} + \sin x + C$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin 3x \cdot \sin 2x + C$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{\sin 5x}{10} - \frac{\sin x}{2} + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta viết: } f(x) = \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x).$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin x}{2} + C$$

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Nguyên hàm của hàm số $\int (2 \cos x - 3 \cos 5x) dx$ là:

$$\text{A. } -2 \sin x + 15 \sin 5x + C$$

$$\text{B. } -2 \sin x + \frac{3}{5} \sin 5x + C$$

$$\text{C. } 2 \sin x - \frac{3}{5} \sin 5x + C$$

$$\text{D. } 2 \sin x - 5 \sin 5x + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int (2 \cos x - 3 \cos 5x) dx = 2 \sin x - \frac{3}{5} \sin 5x + C$$

Chọn C.

Lưu ý: $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C$; $\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$.

Ví dụ 2. Nguyên hàm của hàm số $\int \sin 5x \sin 2x dx$ là:

$$\text{A. } \frac{1}{10} \cos 5x \cos 2x + C$$

$$\text{B. } \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$$

$$\text{C. } \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{7} \sin 7x + C$$

$$\text{D. } \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 7x + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \sin 5x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 7x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Nguyên hàm của hàm số $\int 4 \cos^2 x dx$ là:

- A. $4x + 2\sin 2x + C$ B. $\frac{4\cos^3 x}{3} + C$ C. $2x - \sin 2x + C$ D. $2x + \sin 2x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 4\cos^2 x dx = 2\int (1 + \cos 2x) dx = 2x + \sin 2x + C$.

Chọn D.

Chú ý: Dùng công thức hạ bậc: $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

Ví dụ 4. Nguyên hàm của hàm số $\int (1 + 2\sin x)^2 dx$ là:

- A. $3x - 4\cos x - \sin 2x + C$ B. $\frac{(1 + 2\sin x)^3}{3} + C$
C. $3x - \sin 2x + C$ D. $3x - 4\cos x + \sin 2x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (1 + 2\sin x)^2 dx = \int (1 + 4\sin x + 4\sin^2 x) dx = \int \left(1 + 4\sin x + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx$
 $= \int (3 + 4\sin x - 2\cos 2x) dx = 3x - 4\cos x - \sin 2x + C$

Chọn A.

Ví dụ 5. Nguyên hàm của hàm số $\int (\sin x - \cos x) \sin x dx$ là:

- A. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$ B. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$
C. $x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$ D. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (\sin x - \cos x) \sin x dx = \int (\sin^2 x - \sin x \cos x) dx$
 $= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$

Chọn B.

Ví dụ 6. Nguyên hàm của hàm số $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là:

- A. $-\tan x - \cot x + C$ B. $\tan x - \cot x + C$ C. $\tan x + \cot x + C$ D. $\cot x - \tan x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \tan x - \cot x + C$.

Chọn B.

Ví dụ 7. Nguyên hàm của hàm số $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx$ là:

A. $\frac{\cot 2x}{2} + C$

B. $\tan 2x + C$

C. $\cot 2x + C$

D. $\frac{\tan 2x}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{1}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} dx = \int \frac{1}{(2\cos^2 x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 2x} d(2x) = \frac{\tan 2x}{2} + C$

Chọn D.

Chú ý: Công thức nhân đôi: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Ví dụ 8. Nguyên hàm của hàm số $\int \cos^3 x dx$ là:

A. $\frac{\cos^4 x}{4} + C$

B. $3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$

C. $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

D. $4\sin x - \frac{4}{3}\sin 3x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \int (3\cos x + \cos 3x) dx = \frac{1}{4} \left(3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x \right) + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Chọn C.

Chú ý: Công thức nhân ba: $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

Ví dụ 9. Nguyên hàm của hàm số $\int \tan^3 x dx$ là:

A. $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

B. $\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$

D. $\frac{\tan^4 x}{4\cos^2 x} + C$

Hướng dẫn giải

Từ $\tan^3 x = \tan x (1 + \tan^2 x) - \tan x$

Suy ra $\int \tan^3 x dx = \int \tan x d(\tan x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

Chọn A.

Chú ý: $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ví dụ 10. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x \tan x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Giá trị của

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\pi}{12}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\pi}{12}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \sin 2x \cdot \tan x dx = \int 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = 2 \int \sin^2 x dx$.

Suy ra $F(x) = \int (1 - \cos 2x) dx = x - \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Theo giả thiết, ta có: $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + C = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$.

Vậy $F(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\pi}{12}$.

Chọn D.

Ví dụ 11. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 2x$ thỏa mãn $F(0) = 2019$. Giá trị của

$F\left(\frac{\pi}{8}\right)$ là:

A. $\frac{3\pi+16153}{64}$

B. $\frac{3\pi+129224}{8}$

C. $\frac{3\pi+129224}{64}$

D. $\frac{3\pi-129224}{32}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos^4 2x = \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 4x+\cos^2 4x)$
 $= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right) = \frac{1}{8}(3+4\cos 4x+\cos 8x)$

Do đó $F(x) = \frac{1}{8} \int (3+4\cos 4x+\cos 8x) dx = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right) + C$

Mà $F(0) = 2019$ nên ta có $C = 2019$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right) + 2019$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi+129224}{64}$

Chọn C.

Ví dụ 12. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^5 x}{1-\sin x}$, với $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn

$F(\pi) = \frac{3}{4}$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $\frac{2}{3}$

B. 0.

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy: $\frac{\cos^5 x}{1 - \sin x} = \cos^3 x (1 + \sin x) = (1 - \sin^2 x) \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x$

$$\Rightarrow F(x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) - \int \cos^3 x d(\cos x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Theo giả thiết, ta có $F(\pi) = \frac{3}{4}$ nên $C = 1$.

Vậy $F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

Do đó $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Chọn D.

Chú ý:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\int \cos^n x \cdot \sin x dx = -\int \cos^n x d(\cos x) = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$ và $\int \sin^n x \cdot \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$.

Bài toán 3: Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm

Phương pháp giải

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm:

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = S(t)$, với $S(t)$ là quãng đường mà chất điểm đó đi được trong thời gian t , kể từ thời điểm ban đầu.

Gọi $v(t)$ và $a(t)$ lần lượt là vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t , ta có: $v(t) = S'(t)$ và $a(t) = v'(t)$.

Từ đó ta có: $S(t) = \int v(t) dt$ và $v(t) = \int a(t) dt$.

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động với phương trình

$$S = \frac{1}{2}t^2, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng giây (s) và } S$$

là quãng đường tính bằng mét (m). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 5(s)$ là:

- A. 5 (m/s). B. 25 (m/s).
C. 2,5 (m/s.) D. 10 (m/s).

Hướng dẫn giải

Ta có: $v(t) = S'(t) = t$ nên $v(t_0) = t_0 = 5(m/s)$

Chọn A.

Ví dụ 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 2t(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A. 50 (m). B. 25 (m).

C. 55 (m).

D. 10 (m).

Hướng dẫn giải

Chọn mốc thời gian và gốc tọa độ lúc ô tô bắt đầu đạp phanh. Ta có: $t = 0; s = 0$.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (10 - 2t) dt = 10t - t^2 + C,$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 10t - t^2$$

Ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

Trong 8 giây cuối, ô tô chuyển động đều với vận tốc 10 (m/s) trong 3 giây đầu và chuyển động chậm dần đều trong 5 giây cuối.

Quãng đường ô tô đi chuyển là:

$$s = 3 \cdot 10 + 10 \cdot 5 - 5^2 = 55m.$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc ban đầu của vật là. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

A. 10 m/s.

B. 15,2 m/s.

C. 13,2 m/s.

D. 12 m/s.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t được tính theo công thức: $v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{3}{t+1} dt = 3 \ln|t+1| + C$

Vì vận tốc ban đầu (lúc $t = 0$) của vật là $v_0 = 6m/s$ nên:

$$v(0) = 3 \ln|0+1| + C = 6 \Leftrightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3 \ln|t+1| + 6.$$

Vận tốc của vật chuyển động tại giây thứ 10 là: $v(10) = 3 \ln|10+1| + 6 \approx 13,2 (m/s)$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

A. 5,6 m/s.

B. 6,51 m/s.

C. 7,26 m/s.

D. 6,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ nên ta có:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 \right) dt = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3 + C$$

Tại thời điểm ban đầu ($t=0$) thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là:

$$v_0 = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96} \cdot 0^4 + \frac{5}{48} \cdot 0^3 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

Vậy công thức vận tốc là $v(t) = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3$

Vận tốc của vận động viên tại giây thứ 5 là $v(5) = 6,51 \text{ m/s}$.

Chọn B.

Chú ý: Gia tốc của vật chuyển động là $a(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$. Ta tính $v(t) = \int a(t) dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Suy ra công thức tính vận tốc $v(t)$ tại thời điểm t và tính được $v(10)$.

Ví dụ 3. Một nhà khoa học tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20 m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực. Hỏi sau 2s thì tên lửa đạt đến tốc độ là bao nhiêu?

A. 0,45 m/s.

B. 0,4 m/s.

C. 0,6 m/s.

D. 0,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Xem như tại thời điểm $t_0 = 0$ thì nhà khoa học phóng tên lửa với vận tốc đầu 20 m/s. Ta có $s(0) = 0$ và $v(0) = 20$.

Vì tên lửa chuyển động thẳng đứng nên gia tốc trọng trường tại mọi thời điểm t là $s''(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$.

Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc nên ta có vận tốc của tên lửa tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1$.

Do $v(0) = 20$ nên $-9,8t + C_1 = 20 \Leftrightarrow C_1 = 20 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 20$.

Vậy vận tốc của tên lửa sau 2s là $v(2) = -9,8 \cdot 2 + 20 = 0,4 (m/s)$.

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x^2 + 7)^{15}$ là:

A. $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$

B. $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

C. $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$

D. $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -e^{6x} - 2x + 3$ là:

A. $\frac{1}{6}e^{6x} - 4x^2 + 3x + C$

B. $-e^{6x} - 4x^2 + 3x + C$

C. $e^{6x} - x^2 + 3x + C$

D. $-\frac{1}{6}e^{6x} - x^2 + 3x + C$

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ là:

A. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C$

B. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$

C. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln|4x-3| + C$

D. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là:

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

D. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1-3e^{-2x})$ là:

A. $e^x - 3e^{-2x} + C$

B. $e^x + e^{-2x} + C$

C. $e^x - 3e^{-x} + C$

D. $e^x + 3e^{-x} + C$

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Giá trị của $F(1)$ là:

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$

B. $F(1) = \ln 3 + 2$

C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$

D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$

Câu 7: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm số $f(x)$ là:

A. $2e^x + 2x$

B. $2e^x + 2$

C. $e^{2x} + x + 2$

D. $e^{2x} + x + 1$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$, ta có $\int f(x) dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$, với m, n, p là các số hữu tỉ và C là hằng số thực. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$

B. 2.

C. $\frac{13}{6}$

D. $\frac{7}{6}$

Câu 9: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ là:

A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$

B. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$

C. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$

D. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 10: Cho biết $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$, với a, b là các số hữu tỉ và C là hằng số thực. Giá trị của biểu thức $P = 2a + b$ là:

A. 0.

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. 1.

Câu 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ là:

A. $x - 4 \ln|x+1| + C$

B. $x + \frac{4}{x+1} + C$

C. $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{4}{x+1} + C$

D. $x - \frac{4}{x+1} + C$

Câu 12: Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$, với a, b là các số nguyên và C là hằng số thực. Giá trị biểu thức $P = a^2 + ab + b^2$ là:

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Câu 13: Gọi $\int 2020^x dx = F(x) + C$ với C là hằng số. Khi đó hàm số $F(x)$ bằng:

A. $2020^x \ln 2020$

B. $\frac{2020^{x+1}}{x+1}$

C. $\frac{x \cdot 2020^{x-1}}{\ln 2020}$

D. $\frac{2020^x}{\ln 2020}$.

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ là:

A. $\int f(x) dx = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln x + C$

C. $\int f(x) dx = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C$

Câu 15: Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là:

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$

B. $\int 2^x dx = 2^x + C$

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$

C. $\ln|2x+3| + C$

D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 + 1$ là:

A. $x^3 + x + C$

B. $x^3 + C$

C. $6x + C$

D. $\frac{x^3}{3} + x + C$

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là:

A. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C$

B. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C$

C. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C$

D. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$

Câu 19: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = 3x^2 + 3x + C$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

Câu 20: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là:

A. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C$

B. $F(x) = 3e^x - x + C$

C. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C$

D. $F(x) = 3e^x + x + C$

Câu 21: Với C là hằng số, nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là:

A. $\int (e^x + x) dx = e^x - \frac{x^2}{2} + C$

B. $\int (e^x + x) dx = e^x + 2x + C$

C. $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C$

D. $\int (e^x + x) dx = e^x + x^2 + C$

Câu 22: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$ là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

B. $F(x) = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x + C$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x \cdot \ln 3 + C$

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ là:

A. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C$

B. $\int \frac{2}{4x-3} dx = \frac{1}{2} \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$

C. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln|4x-3| + C$

D. $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$

Câu 24: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$

B. $\ln|5x+4| + C$

C. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$

D. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$

Câu 25: Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

A. $\frac{x^{2020}}{2020} + 1$

B. $\frac{x^{2020}}{2020}$

C. $y = 2019x^{2018}$

D. $\frac{x^{2020}}{2020} - 1$

Câu 26: Hàm số nào trong các hàm số sau đây là nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x}$?

A. $y = -\frac{e^{-2x}}{2}$

B. $y = -2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R})$

C. $y = 2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R})$

D. $y = \frac{e^{-2x}}{2}$

Câu 27: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \frac{2}{x}$ là:

A. $\frac{x^2}{2} - 2 \ln x + C$

B. $\frac{x^2}{2} + x + C$

C. $1 + \frac{2}{x^2} + C$

D. $\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x| + C$

Câu 28: Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là:

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$

B. $\int 2^x dx = 2^x + C$

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$

Câu 29: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Giá trị của $F'(2\sqrt{2}) - F'(0)$ là:

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{8}{9}$

D. $\frac{1}{3}$

Câu 30: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Hàm số $F(x)$ là:

A. $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3$

B. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1$

C. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1$

D. $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$

Câu 31: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 - 2x$?

A. $F(x) = x^4 - 2x^2$

B. $F(x) = 3x^2 - 2$

C. $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + 1$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Câu 32: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là:

A. $\int f(x) dx = \frac{e^{3x+1}}{3x+1} + C$

B. $\int f(x) dx = 3e^{3x} + C$

C. $\int f(x) dx = e^3 + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

Câu 33: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 1$ là:

A. $\int f(x) dx = 3^x \ln x + x + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{3^x}{\ln x} + x + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C$

D. $\int f(x) dx = 3^x + x + C$

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$ là:

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$

B. $\int f(x) dx = 1 - \sin x + C$

C. $\int f(x) dx = x \sin x + \cos x + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$

Câu 35: Hàm số $F(x) = \int \pi^2 dx$ có dạng:

A. $F(x) = \pi^2 x + C$

B. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$

C. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$

D. $F(x) = 2\pi x + C$

Câu 36: Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Giá trị của $F'(25)$ bằng:

A. 125.

B. 625.

C. 5.

D. 25.

Câu 37: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x(2^{-x} + 5)$ là:

A. $x + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$

B. $x + 5 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + C$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} \left(-\frac{2^x}{\ln 2} x + 5x\right) + C$

D. $1 + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$

Câu 38: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+1} + \frac{1}{x}$ là:

A. $\frac{1}{2}e^{2x+1} + \ln x + C$

B. $\frac{1}{2}e^{2x+1} + \ln|x|$

C. $2e^{2x+1} + \ln|x| + C$

D. $\frac{1}{2}e^{2x+1} + \ln|x| + C$

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1}$ là:

A. $F(x) = 3e^{3x+1} + C$ B. $F(x) = 3e^{3x+1} \cdot \ln 3 + C$ C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} \cdot \ln 3 + C$ D. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

Câu 40: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ là:

A. $x^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C$ C. $6x + C$ D. $x^3 - x + C$

Câu 41: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là:

A. $e^x + x^2 + C$ B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $e^x + 1 + C$

Câu 42: Hàm số $F(x) = e^{x^2} - 3x + 4$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = 2e^{2x} - 3$ B. $f(x) = 2xe^{x^2} - 3$ C. $f(x) = xe^{x-1} - 3$ D. $f(x) = x^2e^{x^2-1} - 3$

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$
C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$ D. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$

Câu 44: Nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$ B. $\ln|3x-1| + C$ C. $3\ln|3x-1| + C$ D. $-\frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng:

A. $5 - \frac{1}{2}\ln 2$ B. $6 - \frac{1}{2}\ln 2$ C. $5 + \frac{1}{2}\ln 2$ D. $6 + \frac{1}{2}\ln 2$

Câu 46: Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, với $m \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là:

A. $x^3 + x^2 - 3x - 5$ B. $x^3 + 2x^2 - 5x - 5$ C. $2x^3 + x^2 - 7x - 5$ D. $x^3 + x^2 + 4x - 5$

Câu 47: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là:

A. $\int f(x)dx = \ln^2 x + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$
C. $\int f(x)dx = \ln x + C$ D. $\int f(x)dx = e^x + C$

Câu 48: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$ với a, b là các số nguyên và C là hằng số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 8$

B. $a + b = 8$

C. $2a - b = 8$

D. $a - b = 8$

Câu 49: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2) = 3$. Hàm số $F(x)$ là:

A. $F(x) = x + 4\ln|2x-3| + 1$

B. $F(x) = x + 2\ln(2x-3) + 1$

C. $F(x) = x + 2\ln|2x-3| + 1$

D. $F(x) = x + 2\ln|2x-3| - 1$

Câu 50: Hàm số $y = f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x) = e^{2x}$. Nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}$ là:

A. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + C$

B. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x - e^{-x} + C$

C. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x + e^{-x} + C$

D. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = \frac{1}{2}e^x - e^{-x} + C$

Câu 51: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{-3x+1}$ là:

A. $\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C$

B. $-3e^{-3x+1} + C$

C. $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C$

D. $3e^{-3x+1} + C$

Câu 52: Cho $\int \left(\frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = 9\sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 5e^x + C$, với a, b, c là các số

nguyên và C là hằng số thực. Giá trị biểu thức $M = a + b + c$ là:

A. 6.

B. 20.

C. 16.

D. 10.

Câu 53: Biết $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = a\sqrt{x} - b\sqrt{x+2} + C$ với a, b là các số nguyên dương và C là hằng

số thực. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ là:

A. $P = 2$

B. $P = 8$

C. $P = 46$

D. $P = 22$

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{5}{5x-3}, f(0) = 0$ và

$f(-2) = -1$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(-1)$ bằng:

A. $\ln \frac{16}{21} - 1$

B. 0.

C. $4 + \ln 15$

D. $\ln \frac{16}{21} + 1$

Câu 55: Kết quả $\int \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1}$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$

B. $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$

C. $\ln(e^x - 2e^{-x} + 1) + C$

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 2} + C$

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + e^x + m - 1$. Biết $f(0) = 2, f(1) = 2e$. Giá trị của m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2; 0)$

B. $(2; 3)$

C. $(5; +\infty)$

D. $(1; 2)$

Câu 57: Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 e^x$.

Giá trị của biểu thức $S = a + 2b + c$ là:

A. $S = 3$

B. $S = -2$

C. $S = 0$

D. $S = 4$

Câu 58: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sin^2 x \cos x$ là:

- A. $\sin^3 x + C$ B. $-\sin^3 x + C$ C. $\cos^3 x + C$ D. $-\cos^3 x + C$

Câu 59: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2(3-2x)}$ là:

- A. $\frac{1}{2}\cot(3-2x) + C$ B. $-\frac{1}{2}\cot(3-2x) + C$ C. $\frac{1}{2}\tan(3-2x) + C$ D. $\cot(3-2x) + C$

Câu 60: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$:

- A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$ B. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$ C. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$ D. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Câu 61: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

- A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$ B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$ C. $-\cot x + x^2 - 1$ D. $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 62: Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là:

- A. $2e^x + \tan x + C$ B. $2e^x - \tan x + C$ C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 63: Biết $F(x) = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c}\sin 3x + 2019$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-2)\sin 3x$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $ab+c$ bằng:

- A. 14. B. 15. C. 10. D. 18.

Câu 64: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F(0) = 2020$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

- A. $\frac{8085-3\pi}{8}$ B. $\frac{16170-3\pi}{8}$ C. $\frac{16170+3\pi}{8}$ D. $\frac{8085+3\pi}{8}$

Câu 65: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 66: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 67: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\cos 3x + C$ B. $\int e^x dx = e^x + C$

C. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Câu 68: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là:

A. $x^3 + \cos x + C$

B. $6x + \cos x + C$

C. $x^3 - \cos x + C$

D. $6x - \cos x + C$

Câu 69: Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

B. $\int e^x dx = e^x + C$

C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$

D. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 70: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là:

A. $e^x - \sin x + C$

B. $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + \sin x + C$

C. $xe^{x-1} - \sin x + C$

D. $e^x + \sin x + C$

Câu 71: Chọn đáp án đúng $\int \sin x dx = f(x) + C$ khi và chỉ khi:

A. $f(x) = \cos x + m \ (m \in \mathbb{R})$

B. $f(x) = \cos x$

C. $f(x) = -\cos x + m \ (m \in \mathbb{R})$

D. $f(x) = -\cos x$

Câu 72: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

C. $\int \frac{1}{2} dx = \ln|x| + C$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$

Câu 73: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 2x$ là:

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Câu 74: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2 \sin x$ là:

A. $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x - \cos^2 x + C$

B. $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x + \sin^2 x + C$

C. $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x - 2 \cos x + C$

D. $\int (e^x + 2 \sin x) dx = e^x + 2 \cos x + C$

Câu 75: Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

A. $f(x) = -\cos x$

B. $f(x) = \sin x$

C. $f(x) = \cos x$

D. $f(x) = -\sin x$

Câu 76: Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

D. $\int f(x)dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

Câu 77: Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\int \sin 2x dx = \frac{\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

B. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

C. $\int \sin 2x dx = 2 \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

D. $\int \sin 2x dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$

B. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$

C. $f(x) = 3x - 5\sin x + 2$

D. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$

Câu 79: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, biết

$F(0) = 1; F(\pi) = 0$. Giá trị của biểu thức $P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ là:

A. $P = 2 - \sqrt{3}$

B. $P = 0$

C. Không tồn tại P .

D. $P = 1$

Câu 80: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sin \frac{x}{2}\right)$ là:

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \cos \frac{x}{2} + C$

B. $\int f(x)dx = x^2 + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\cos \frac{x}{2} + C$

Câu 81: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan 2x$ là:

A. $\int \tan 2x dx = 2(1 + \tan^2 2x) + C$

B. $\int \tan 2x dx = -\ln|\cos 2x| + C$

C. $\int \tan 2x dx = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 2x) + C$

D. $\int \tan 2x dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$

Câu 82: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng:

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ và $f(1) = e - 3$. Hàm số đã cho là:

A. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$

B. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + \cos(\pi x) - \frac{9}{4}$

C. $f(x) = x^4 + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$

D. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + \frac{17}{4}$

Câu 84: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 6x$ là:

A. $\int \cos 6x dx = 6 \sin 6x + C$

B. $\int \cos 6x dx = \frac{1}{6} \sin 6x + C$

C. $\int \cos 6x dx = -\frac{1}{6} \sin 6x + C$

D. $\int \cos 6x dx = \sin 6x + C$

Câu 85: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ là:

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$

C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$

D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$

Câu 86: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$

C. $-\cot x + x^2 - 1$

D. $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 87: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ là:

A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$

C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$

D. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$

Câu 88: Hàm số nào trong các hàm số sau đây có một nguyên hàm bằng $\cos^2 x$?

A. $y = \frac{\cos^3 x}{3}$

B. $y = -\frac{\cos^3 x}{3} + C (C \in \mathbb{R})$

C. $y = -\sin 2x$

D. $y = -\sin 2x + C (C \in \mathbb{R})$

Câu 89: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là:

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

B. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$

C. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

D. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 90: Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan^{2019} x$, với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là:

A. $F(x) = \frac{\tan^{2018} x}{2018} - \frac{\tan^{2016} x}{2016} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$

B. $F(x) = \frac{\tan^{2018} x}{2018} - \frac{\tan^{2016} x}{2016} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$

C. $F(x) = \frac{\tan^{2018} x}{2018} - \frac{\tan^{2016} x}{2016} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$

D. $F(x) = \frac{\tan^{2018} x}{2018} - \frac{\tan^{2016} x}{2016} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

Câu 91: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 3x \cos x$, biết đồ thị $y = F(x)$ đi qua gốc tọa độ là:

A. $F(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2}$

B. $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}$

$$\text{C. } F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 4x}{4}$$

Câu 92: Cho hàm số $F(x)$ xác định trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm $F'(x) = \frac{a \sin^2 x \cos^2 x + b\sqrt{3}}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Biết rằng $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ và $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\text{A. } F(x) = 9x - 2\pi$$

$$\text{B. } F(x) = x + \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\tan x - \cot x) - \frac{\pi}{12}$$

$$\text{C. } F(x) = x + \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\tan x - \cot x)$$

$$\text{D. } F(x) = x + \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\tan x - \cot x) + \frac{\pi}{6}$$

Câu 93: Biết $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \sin 4x dx = -\frac{\cos^m nx}{p} + C$, với $m, n, p \in \mathbb{Z}$ và C là hằng số thực. Giá trị của biểu thức $T = m + n + p$ là:

$$\text{A. } T = 9$$

$$\text{B. } T = 14$$

$$\text{C. } T = 16$$

$$\text{D. } T = 18$$

Câu 94: Số lượng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $N(x)$, trong đó x là số ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Hỏi ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn gần nhất với kết quả nào sau đây?

$$\text{A. } 10130.$$

$$\text{B. } 10120.$$

$$\text{C. } 5154.$$

$$\text{D. } 10132.$$

Câu 95: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) (m/s)$, có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$. Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Vận tốc của ô tô tại giây thứ 20 là:

$$\text{A. } v = 3 \ln 3$$

$$\text{B. } v = 14$$

$$\text{C. } v = 3 \ln 3 + 6$$

$$\text{D. } v = 26$$

Câu 96: Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \frac{10000}{1+2t}$, $\forall t > 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là:

$$\text{A. } 17094.$$

$$\text{B. } 9047.$$

$$\text{C. } 8047.$$

$$\text{D. } 32118.$$

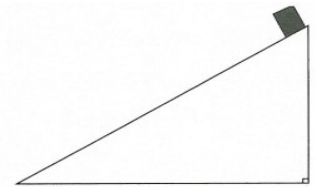
Câu 97: Một vật chuyển động không vận tốc đầu xuất phát từ đỉnh mặt phẳng nằm nghiêng. Biết gia tốc của chuyển động là $5 m/s^2$ và sau 1,2 s thì vật đến chân của mặt ván. Độ dài của mặt ván là:

$$\text{A. } 3,6 \text{ m.}$$

$$\text{B. } 3,2 \text{ m.}$$

$$\text{C. } 3 \text{ m.}$$

$$\text{D. } 2,8 \text{ m.}$$



Câu 98: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích, kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1 (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian kể từ lúc nhấn ga. Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h?

$$\text{A. } 200 \text{ km/h.}$$

$$\text{B. } 243 \text{ km/h.}$$

$$\text{C. } 288 \text{ km/h.}$$

$$\text{D. } 300 \text{ km/h.}$$

Câu 99: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B(t)$ liên tục và có đạo hàm $B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}$, trong đó t là khoảng thời gian kể từ lúc ban đầu. Số lượng vi khuẩn ban

đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

- A. 9 ngày. B. 10 ngày. C. 11 ngày. D. 12 ngày.

Câu 100: Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian kể từ lúc bắt đầu chuyển động. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 2$. Tọa độ chất điểm sau 1 giây chuyển động là:

- A. $x = 9$ B. $x = 4$ C. $x = 5$ D. $x = 6$

Dạng 2: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến

Bài toán 1: Phương pháp đổi biến dạng 1, đặt $u = u(x)$

Phương pháp giải

Định lý: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì **Ví dụ 1:** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

- A. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$ B. $\frac{1 - \ln x}{x^2} + C$
C. $\frac{\ln x}{2} + C$ D. $\ln^2 x + C$

Các bước thực hiện đổi biến:

$$\text{Xét } I = \int f(u(x))u'(x)dx$$

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)dx$

Bước 2: Chuyển nguyên hàm ban đầu về ẩn u ta được $I = \int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $F(u)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(u)$.

Bước 3: Trả về biến x ban đầu, ta có nguyên hàm cần tìm là $I = F(u(x)) + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Do đó } A = \int u du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\text{Vậy } \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$. Bằng phép đổi biến

$u = \sqrt{x^2+1}$, khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $x^2 = u^2 - 1$ B. $xdx = udu$
C. $I = \int (u^2 - 1).udu$ D. $I = \frac{u^3}{3} - u + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = u^2 - 1$ và $xdx = udu$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } I &= \int (u^2 - 1).u du = \int (u^2 - 1) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + C\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Chọn C.

Hệ quả: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ta có:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Ví dụ 3: Ta biết $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$, với $x > 0$.

$$\text{Suy ra } \int \frac{1}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax + b} + C$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$, biết $F(-1) = \frac{1}{3}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + 2019$ C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + \frac{1}{3}$ D. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } u = x^3 + 1 \text{ ta có } du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$$

$$\text{Suy ra } \int f(x) dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} e^u + C$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{Mặt khác } F(-1) = \frac{1}{3} \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1}.$$

Chọn D.

$$\text{Lưu ý: Ta có thể viết như sau: } \int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3 + 1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$$

Chú ý: Với các viết $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 1)$, ta có thể tính nguyên hàm đã cho một cách đơn giản và nhanh gọn.

Ví dụ 2. Nguyên hàm $M = \int \frac{2 \sin x}{1 + 3 \cos x} dx$ là:

A. $M = \frac{1}{3} \ln(1 + 3 \cos x) + C$

B. $M = \frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

C. $M = -\frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

D. $M = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = 1 + 3\cos x$, ta có $du = -3\sin x dx$ hay $2\sin x dx = -\frac{2}{3}du$.

Khi đó $M = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{u} du = -\frac{2}{3} \ln|u| + C$

Vậy $M = \int \frac{2\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{2}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

Chọn C.

Ví dụ 3. Nguyên hàm $P = \int x \sqrt[3]{x^2+1} dx$ là:

A. $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$

B. $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

C. $P = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1} + C$

D. $P = \frac{3}{4}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int x \sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$.

Chọn A.

Chú ý: chú ý rằng với $a > 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}; n > 0$ ta luôn có: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ví dụ 4. Nguyên hàm $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ là:

A. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

B. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

C. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

D. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1$. Suy ra $x = u^2 - 1$ và $dx = 2udu$.

Khi đó $R = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$.

Vậy $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Chọn D.

Chú ý: Với $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực dương, ta có: $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$.

Ví dụ 5. Nguyên hàm $S = \int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$ là:

$$\text{A. } S = \frac{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9} + C$$

$$\text{B. } S = \frac{(x^2 + 9)^4 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9} + C$$

$$\text{C. } S = \frac{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9} + C$$

$$\text{D. } S = \frac{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3\sqrt{x^2 + 9} + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét } S = \int x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx = \int x^2 \sqrt{x^2 + 9} x dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow u^2 = x^2 + 9. \text{ Suy ra } x^2 = u^2 - 9 \text{ và } x dx = u du.$$

$$\text{Khi đó } S = \int (u^2 - 9) u \cdot u du = \int (u^4 - 9u^2) du = \frac{u^5}{5} - 3u^3 + C.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9} + C$$

Chọn A.

Ví dụ 6. Nguyên hàm $T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$ là:

$$\text{A. } T = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + C$$

$$\text{B. } T = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$$

$$\text{C. } T = \frac{2}{3}(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1} + C$$

$$\text{D. } T = \sqrt{\ln x + 1} + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x + 1}} d(\ln x + 1) = 2\sqrt{\ln x + 1} + C.$$

Chọn B.

Ví dụ 7. Nguyên hàm $U = \int \frac{(x-2)^{2020}}{(x+1)^{2022}} dx$ là:

$$\text{A. } U = \frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

$$\text{B. } U = \frac{1}{6060} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2020} + C$$

$$\text{C. } U = \frac{1}{6063} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

$$\text{D. } U = \frac{1}{6069} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2023} + C$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét } U = \int \frac{(x-2)^{2020}}{(x+1)^{2022}} dx = \int \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2020} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow du = \frac{3}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{1}{3} du = \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Suy ra. } U = \frac{1}{3} \int u^{2020} du = \frac{1}{6063} u^{2021} + C. \text{ Vậy } U = \frac{1}{6063} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2021} + C$$

Chọn C.

Lưu ý:

$$\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}} dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{ad-bd} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{n+1} + C$$

Ví dụ 8. Xét nguyên hàm $V = \int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx$. Đặt $u = 1 + \sqrt{1 + \ln x}$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{dx}{x} = (2u-2) du$

B. $V = \int \frac{(u^2-2u)^2}{u} \cdot (2u-2) du$

C. $V = \frac{2}{5} u^5 - \frac{5}{2} u^4 + \frac{16}{3} u^3 - 4u^2 + C$

D. $V = \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{2} - \frac{16}{3} u^3 + 4u^2 + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } u = 1 + \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow (u-1)^2 = 1 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = u^2 - 2u \Rightarrow \frac{dx}{x} = (2u-2) du.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V &= \int \frac{\ln^2 x}{x(1+\sqrt{\ln x+1})} dx = \int \frac{(u^2-2u)^2}{u} \cdot (2u-2) du \\ &= 2 \int (u^4 - 5u^3 + 8u^2 - 4u) du = \frac{2}{5} u^5 - \frac{5}{2} u^4 + \frac{16}{3} u^3 - 4u^2 + C \end{aligned}$$

Chọn C.

Ví dụ 9. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Giá trị

$F(2019\pi)$ là:

A. $F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$

B. $F(2019\pi) = 0$

C. $F(2019\pi) = -\frac{2}{15}$

D. $F(2019\pi) = \frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = \cos 2x dx$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } F(x) &= \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int u^2 \cdot (1-u^2) du = \frac{1}{2} \int (u^2 - u^4) du \\ &= \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{10} u^5 + C = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + C\end{aligned}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{10} \sin^5 \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{15}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$$

$$\text{Do đó } F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$$

Chọn A.

Ví dụ 10. Biết rằng $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (với C là hằng số). Gọi S là tập nghiệm của

phương trình $g(x) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 0.

B. $-3 + \sqrt{5}$

C. -3

D. $-3 - \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Vì $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$ nên ta đặt $u = x^2+3x$, khi đó

$$du = (2x+3)dx$$

Nguyên hàm ban đầu trở thành $\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C$.

$$\text{Suy ra } \int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$$

$$\text{Vậy } g(x) = x^2+3x+1; g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S = \left\{ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Tổng giá trị các phần tử của S bằng -3 .

Chọn C.

Ví dụ 11. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ trên khoảng $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ thỏa mãn

$F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

D. $x = 1 - \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C$

Mặt khác $F(2) = 0 \Rightarrow -\sqrt{8-x^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2$

Vậy $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2$.

Xét phương trình $F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Chọn D.

Ví dụ 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và

$F(1) = \frac{1}{2}$. Tổng $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ là

A. $\frac{2019}{2020}$

B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$

C. $2018 \frac{1}{2020}$

D. $-\frac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải

Phân tích $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

Khi đó $F(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} dx = \int \frac{1}{(x^2+x)^2} d(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C$.

Mặt khác $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = -\frac{1}{x^2+x} + 1 = -\frac{1}{x(x+1)} + 1 = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + 1$.

Do đó $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019$

$$= -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = 2018 + \frac{1}{2020} = 2018 \frac{1}{2020}$$

Chọn C.

Ví dụ 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2\sqrt{2}, f(x) > 0$ và

$f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ là:

A. $6\sqrt{2}$

B. $\sqrt{10}$

C. $5\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = 2x+1.$

Suy ra $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow \int \frac{d(1+f^2(x))}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} = C \Leftrightarrow C = 3$

Với $C = 3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 3)^2 - 1}$

Vậy $f(1) = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Chọn D.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là:

A. $2\sqrt[3]{42}$

B. $2\sqrt[3]{15}$

C. $\sqrt[3]{42}$

D. $\sqrt[3]{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 \quad (*)$

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức (*) ta được:

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} f^3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow f^3(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3C$$

Theo giả thiết, ta có $f(0) = 3$ nên

$$(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9 \Rightarrow f^3(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 27$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 27$ trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có $g'(x) = 9x^2 + 12x + 6 > 0, \forall x \in [-2;1]$ nên đồng biến trên đoạn $[-2;1]$.

Vậy $\max_{[-2;1]} f(x) = \sqrt[3]{\max_{[-2;1]} g(x)} = \sqrt[3]{42}.$

Chọn C.

Bài toán 2: Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến dạng 2



Phương pháp giải

Kiến thức cần nhớ:

Ta đã biết các đẳng thức sau:

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}.$

Các kỹ thuật đổi biến dạng 2 thường gặp và cách xử lý.

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \forall t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \forall t \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Với các bài toán sau đây thì ta không thể giải quyết ngay bằng nguyên hàm cơ bản cũng như đổi biến số ở dạng 1, đòi hỏi người học phải trang bị tư duy đổi biến theo kiểu “**lượng giác hóa**” dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản và một số biến đổi thích hợp, cụ thể ta xem xét các nguyên hàm sau đây:

Bài toán 1: Tính $A_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Bài toán 1: Tính $A_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Đặt $x = |a| \sin t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc

$x = |a| \cos t$ với $t \in (0; \pi)$

Bài toán 2: Tính $A_2 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

Bài toán 2: Tính $A_2 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

Đặt $x = |a| \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài toán 3: Tính $A_3 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

Bài toán 3: Tính $A_3 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

Đặt $x = a \cos 2t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 4: Tính $A_4 = \int \sqrt{(x-a)(x-b)} dx$

Bài toán 4: Tính $A_4 = \int \sqrt{(x-a)(x-b)} dx$

Đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

Đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Nguyên hàm $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ là:

A. $\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

B. $2 \arccos \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

C. $\arccos \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

D. $2\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = 2 \sin t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\cos t > 0$ và $dx = 2 \cos t dt$.

Khi đó $I = \int \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} 2 \cos t dt = \int 4 \sin^2 t dt$ (vì $\cos t > 0, \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).

Suy ra $I = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = 2t - \sin 2t + C$

Từ $x = 2 \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$ và $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

Vậy $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Chọn D.

Ví dụ 2. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ là:

A. $\sqrt[3]{(1-x^2)^2} + C$

B. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

C. $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C$

D. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \cos t, t < 0 < \pi \Rightarrow dx = -\sin t \cdot dt$.

Khi đó $I = -\int \frac{\sin t \cdot dt}{\sin^3 t} = -\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \cot t + C$ hay $I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

Vậy $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

Chọn B.

Ví dụ 3. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{1+x^2} dx$ là:

A. $\arctan x + C$

B. $\operatorname{arccot} x + C$

C. $\arcsin x + C$

D. $\arccos x + C$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

Khi đó $I = \int \frac{1}{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int dt = t + C$

Vậy $I = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Chọn A.

 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hàm số $F(x)$ có $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1$. Hàm số $F(x)$ là:

- A. $\ln(x^4+1)+1$ B. $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+1$ D. $4\ln(x^4+1)+1$

Câu 2: Biết rằng $\int 2x(3x-2)^6 dx = a(3x-2)^8 + b(3x-2)^7 + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$ và C là hằng số thực. Giá trị của biểu thức $P = 12a + 7b$ là:

- A. $\frac{23}{252}$ B. $\frac{241}{252}$ C. $\frac{52}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

Câu 3: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Giá trị của $F(0)$ là:

- A. $-\frac{1}{3}\ln 2 + 2$ B. $-\frac{2}{3}\ln 2 + 2$ C. $-\frac{2}{3}\ln 2 - 2$ D. $-\frac{1}{3}\ln 2 - 2$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}f(\sqrt{x}) + C$ B. $f(\sqrt{x}) + C$ C. $-2f(\sqrt{x}) + C$ D. $2f(\sqrt{x}) + C$

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9+3x^5}$, với $x \neq 0$ là:

- A. $-\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C$ B. $-\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C$
C. $-\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C$ D. $-\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C$

Câu 6: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0) = 2$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

- A. $\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$ là:

- A. $\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} + \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}\right] + C$ B. $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C$
C. $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} + \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C$ D. $\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}\right] + C$

Câu 8: Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, \forall x \neq -1$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$ và C là hằng số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2b$ B. $b = 2a$ C. $a = 2018b$ D. $b = 2018a$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = x \cdot f'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng:

- A. 5. B. 10. C. 20. D. 15.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và

$f(x) \cdot f'(x) = \sqrt{1 + f^2(x)} \cdot \cos x$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 11: Xét $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$ B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$ C. $I = \int u^5 du$ D. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$

Câu 12: Nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ bằng:

- A. $-\sin \frac{1}{x} + C$ B. $\sin \frac{1}{x} + C$ C. $-2 \sin \frac{1}{x} + C$ D. $2 \sin \frac{1}{x} + C$

Câu 13: Cho hàm số $F(x)$ có $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$ và $F(0) = 1$ Hàm số $F(x)$ là:

- A. $F(x) = \ln(x^4 + 1) + 1$ B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{4}$
C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1$ D. $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1$

Câu 14: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- A. $\int 2u(u^2 - 4) du$ B. $\int (u^2 - 4) du$ C. $\int 2(u^2 - 4) du$ D. $\int (u^2 - 3) du$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$?

- A. $y = \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + C$ B. $y = -\frac{4}{3} \cos^3 x + \frac{4}{5} \cos^5 x + C$
C. $y = \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{4}{5} \cos^5 x + C$ D. $y = -\frac{4}{3} \cos^3 x + \frac{4}{5} \sin^5 x + C$

Câu 16: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai xác định trên $[1; +\infty]$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với $x \geq 1$. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị của $f^2(2)$ là:

A. $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2$ B. $f^2(2) = 2 \ln 2 + 1$ C. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 2}$ D. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 1}$

Câu 18: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2e^x + 3}$ thỏa mãn $F(0) = 10$. Hàm số $F(x)$ là:

A. $\frac{1}{3}(x - \ln(2e^x + 3)) + 10 + \frac{\ln 5}{3}$ B. $\frac{1}{3}(x + 10 - \ln(2e^x + 3))$
C. $\frac{1}{3}\left(x - \ln\left(2e^x + \frac{3}{2}\right)\right) + \ln 5 - \ln 2$ D. $\frac{1}{3}(x - \ln(2e^x + 3)) + 10 + \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}$

Câu 19: Biết $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}}$ là:

A. $\ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}) + C$ B. $-\ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}) + C$
C. $\ln(x + \sqrt{\cos^2 x + 1}) + C$ D. $-\ln(x + \sqrt{\cos^2 x + 1}) + C$

Câu 20: Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng:

A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 21: Cho nguyên hàm $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Nếu $u = \cos 2x$ đặt thì mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int \frac{-1}{u^2 + 1} du$ B. $I = \int \frac{1}{2u^2 + 1} du$ C. $I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$ D. $I = \int \frac{2}{u^2 + 1} du$

Câu 22: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ thỏa mãn $F(0) = -\ln 2$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3$ là:

A. $S = \{\pm 3\}$ B. $S = \{3\}$ C. $S = \emptyset$ D. $S = \{-3\}$

Câu 23: Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}}$ và đồ thị của hàm số

$y = F(x)$ đi qua điểm $(e; 2019)$. Khi đó $F(e^{\sqrt{6}})$ bằng:

A. 2020. B. 2018. C. 2021. D. 2019.

Câu 24: Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(2\sqrt{x^2+1}+5)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 6$. Giá trị của $F\left(\frac{3}{4}\right)$ là:

A. $\frac{125}{16}$

B. $\frac{126}{16}$

C. $\frac{123}{16}$

D. $\frac{127}{16}$

Câu 25: Cho $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx = -\frac{(\sin x + \cos x + 1)^m}{(\sin x + \cos x + 2)^n} + C$, với $m, n \in \mathbb{N}$ và C là hằng số thực. Giá trị của biểu thức $A = m + n$ là:

A. $A = 5$

B. $A = 2$

C. $A = 3$

D. $A = 4$

Câu 26: Nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$ là:

A. $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

B. $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

C. $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$

D. $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$

Câu 27: Nguyên hàm $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ là:

A. $I = -\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$

B. $I = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$

C. $I = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1+x^2} + C$

D. $I = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1+x^2} + C$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

Phương pháp giải

Cơ sở của phương pháp:

Với $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm trên khoảng K thì ta có: $(u.v)' = u'.v + v'.u$

Viết dưới dạng vi phân $d(uv) = vdu + u dv$

Khi đó lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$$

$$\text{Từ đó suy ra } \int u dv = uv - \int vdu \quad (1)$$

Công thức (1) là công thức nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 1: Kết quả nguyên hàm $\int x e^x dx$ là:

A. $x e^x - e^x + C$

B. $\frac{x^2}{2} e^x + C$

C. $x e^x + e^x + C$

D. $x e^x + x + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int x e^x dx &= \int x d e^x = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \end{aligned}$$

Chọn A.

Ở ví dụ 1 này, ta ưu tiên đặt $u = x$, phần còn lại sẽ là dv , tức là $dv = e^x dx$. Dòng thứ nhất tính đạo hàm, dòng thứ hai tìm nguyên hàm

Dấu hiệu nhận biết phải sử dụng phương pháp

Ví dụ 2: Kết quả nguyên hàm $\int \ln(x+2019) dx$ là:

nguyên hàm từng phần.

Bài toán: Tìm $I = \int u(x) \cdot v(x) dx$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm có tính chất khác nhau, chẳng hạn:

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số mũ.

$u(x)$ là hàm số logarit, $v(x)$ là hàm số đa thức.

$u(x)$ là hàm số mũ, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

A. $(x+2019)\ln(x+2019)+x+C$

B. $(x+2019)\ln(x+2019)-x+C$

C. $(x+2019)\ln(x+2019)+C$

D. $\ln(x+2019)+C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2019) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+2019} dx \\ v = x+2019 \end{cases}$$

(ở đây từ $dv = dx \Rightarrow v = x + C$, ta có thể chọn $C = 2019$ để việc tính toán đơn giản hơn)

Khi đó

$$\int \ln(x+2019) dx = (x+2019)\ln(x+2019) - \int dx$$

Vậy

$$\int \ln(x+2019) dx = (x+2019)\ln(x+2019) - x + C$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Tìm $\int e^x \cdot \sin x dx$

A. $2e^x(\sin x + \cos x) + C$

B. $2e^x(\sin x - \cos x) + C$

C. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

D. $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

Phương pháp nguyên hàm từng phần

Bước 1: Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = \int v(x) dx \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng công thức (1), ta được:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Lưu ý: Đặt $u = u(x)$ (ưu tiên) theo thứ tự: “**Nhất lồi, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**”. Tức là, nếu có logarit thì ưu tiên đặt u là logarit, không có logarit thì ưu tiên u là đa thức,... thứ tự ưu tiên sắp xếp như thế.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx$$

Đến đây ta phải áp dụng phương pháp từng phần một lần nữa, cụ thể:

Với $\int e^x \cdot \cos x dx$ ta thực hiện tương tự như sau:

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$+ \text{Khi đó } \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x dx$$

Còn đối với nguyên hàm $v = \int v(x) dx$ ta chỉ cần

chọn một hằng số thích hợp. Điều này sẽ được làm rõ qua các ví dụ minh họa ở cột bên phải.

Vậy

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin x dx &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx \\ \Leftrightarrow \int e^x \cdot \sin x dx &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x dx \right) \\ \Leftrightarrow \int e^x \cdot \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

Chọn C.

Ở đây, lần từng phần thứ hai, ta nên nhớ tuân thủ nguyên tắc ở lần từng phần thứ nhất. Tức là lần thứ nhất đã ưu tiên u là lượng giác ($u = \sin x$) thì lần thứ hai ta cũng sẽ ưu tiên u là lượng giác ($u = \cos x$).

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Kết quả nguyên hàm $I = \int x \ln(2 + x^2) dx$ là:

A. $\frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) + \frac{x^2}{2} + C$

B. $(x^2+2) \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$

C. $(x^2+2) \ln(x^2+2) + x^2 + C$

D. $\frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2 + x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2+2} dx \\ v = \frac{x^2+2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \int x dx = \frac{x^2+2}{2} \ln(x^2+2) - \frac{x^2}{2} + C$$

Chọn D.

Chú ý: Thông thường thì với $dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Tuy nhiên trong trường hợp này, ta để ý $v = \frac{x^2+2}{2}$ mang lại sự hiệu quả.

Ví dụ 2. Kết quả nguyên hàm $I = \int \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx$ là:

A. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x + 2 \ln|\cos x| + C$

B. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C$

C. $(\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln(\cos x) + C$

D. $(\cot x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(\sin x + 2 \cos x) \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx \\ v = \tan x + 2 = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2 \cos x) - \int \frac{\cos x - 2 \sin x}{\cos x} dx \\ &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2 \cos x) - x - 2 \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Chọn B.

Chú ý: Ở ví dụ này, chọn $v = \tan x + 2$ có thể rút gọn được ngay tử và mẫu trong nguyên hàm $\int v du$.

Ví dụ 3. Kết quả nguyên hàm $I = \int x^2 \sin 5x dx$ là:

- A. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x - \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$ B. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x - \frac{2}{125} \cos 5x + C$
C. $\frac{1}{5}x^2 \cos 5x - \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$ D. $-\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Ở đây ta sẽ ưu tiên $u = x^2$ là đa thức, tuy nhiên vì bậc của u là 2 nên ta sẽ từng phần hai lần mới thu được kết quả. Nhằm tiết kiệm thời gian, tôi gợi ý với phương pháp “sơ đồ đường chéo” cụ thể như sau:

Bước 1: Chia thành 3 cột:

- + Cột 1: Cột u luôn lấy đạo hàm đến 0.
- + Cột 2: Dùng để ghi rõ dấu của các phép toán đường chéo.
- + Cột 3: Cột dv luôn lấy nguyên hàm đến khi tương ứng với cột 1.

Bước 2: Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu (+), sau đó đan dấu (-), (+), (-),... rồi cộng các tích lại với nhau.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = x^2$	+	$dv = \sin 5x dx$
$2x$	-	$-\frac{1}{5} \cos 5x$
2	+	$-\frac{1}{25} \sin 5x$
0		$\frac{1}{125} \cos 5x$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C$$

Chọn D.

Chú ý:

Kỹ thuật này rất đơn giản và tiết kiệm nhiều thời gian.

Trong kỹ thuật tìm nguyên hàm theo sơ đồ đường chéo, yêu cầu độc giả cần tính toán chính xác đạo hàm và nguyên hàm ở hai cột 1 và 3. Nếu nhầm lẫn thì rất đáng tiếc.

Ví dụ 4. Nguyên hàm $I = \int x^4 e^{3x} dx$ là:

A. $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$

B. $I = \frac{x^5}{5} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C$

C. $I = \left(\frac{x^4}{3} + \frac{4x^3}{3^2} - \frac{12x^2}{3^3} + \frac{24x}{3^4} - \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$

D. $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} \right) e^{3x} + C$

Hướng dẫn giải

Nếu làm thông thường thì từng phần 4 lần ta mới thu được kết quả. Ở đây, chúng tôi trình bày theo sơ đồ đường chéo cho kết quả và nhanh chóng hơn.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = x^4$	+	$dv = e^{3x} dx$
$4x^3$	-	$\frac{1}{3} e^{3x}$
$12x^2$	+	$\frac{1}{3^2} e^{3x}$
$24x$	-	$\frac{1}{3^3} e^{3x}$
24	+	$\frac{1}{3^4} e^{3x}$
0		$\frac{1}{3^5} e^{3x}$

Vậy $I = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5} \right) e^{3x} + C$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Nguyên hàm $I = \int e^x \sin x dx$ là:

A. $2e^x (\sin x + \cos x) + C$

B. $2e^x (\sin x - \cos x) + C$

C. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

D. $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Sự tồn tại của hàm số mũ và lượng giác trong cùng một nguyên hàm sẽ rất dễ gây cho người học sự nhầm lẫn, nếu ta sẽ không biết điểm dừng thì có thể sẽ bị lạc vào vòng luẩn quẩn. Ở đây, để tìm được kết quả thì ta phải từng phần hai lần như trong ví dụ 3. Tuy nhiên, với sơ đồ đường chéo thì sao? Khi nào sẽ dừng lại?

Đạo hàm u cho đến khi lặp lại	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u = \sin x$	+	$dv = e^x dx$
$\cos x$		e^x
$-\sin x$	+	e^x (dừng lại)

Khi đó, ta sẽ có thể kết luận $I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$.

Hay $2I = e^x \sin x - e^x \cos x$. Vậy $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

Chọn C.

Chú ý: Chỉ dừng lại khi đạo hàm của nó có dạng giống dòng đầu tiên. Dòng cuối thu được $-\int \sin x e^x dx = -I$.

Ví dụ 6. Tìm $I = \int \ln^n(ax+b)v(x)dx$, trong đó $v(x)$ là hàm đa thức, $n \in \mathbb{N}^*$ và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Vì ưu tiên $u(x) = \ln^n(ax+b)$ nên $du = \frac{na \cdot \ln^{n-1}(ax+b)}{ax+b} dx$ và tiếp tục đạo hàm thì cột 1 sẽ

không về 0 được, vì vậy phải chuyển lượng $t(x) = \frac{na}{ax+b}$ từ cột 1 sang nhân với $v(x)$ ở cột 3 để rút gọn bớt; tiếp tục quá trình như thế cho đến khi đạo hàm cột 1 về 0, và chú ý sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Ví dụ 6.1. Kết quả nguyên hàm $I = \int x \cdot \ln x dx$ là:

- A. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{4} + C$ B. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 + \frac{x^2}{4} + C$ C. $\frac{x^2}{4} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{2} + C$ D. $\frac{x^2}{4} \cdot \ln 2 + \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với
$u = \ln x$	+	$dv = x dx$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	
1	-	$\frac{x}{2}$	
0		$\frac{x^2}{4}$	

Vậy $I = \int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 - \frac{x^2}{4} + C$

Chọn A.

Chú ý: chuyển lượng $t(x) = \frac{1}{x}$ bên cột 1 sang nhân với $v(x) = \frac{x^2}{2}$ ta thu được kết quả $\frac{x}{2}$. Khi đó bên cột 1 còn lại 1, đạo hàm của nó bằng 0; bên cột 3 có nguyên hàm của $\frac{x}{2}$ là $\frac{x^2}{4}$.

Ví dụ 6.2. Kết quả nguyên hàm $I = \int (4x-1) \cdot \ln^3(2x) dx$ là:

- A. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) - (3x^2 - 6x) \ln(2x) + \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- B. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- C. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) + (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$
- D. $(2x^2 - x) \ln^3(2x) + (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} - 6x + C$

Hướng dẫn giải

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với cột 3
$u = \ln^3(2x)$	+	$dv = (4x-1)dx$	
$\frac{3}{x} \cdot \ln^2(2x)$		$2x^2 - x$	
$\ln^2(2x)$	-	$6x - 3$	$\boxed{\frac{3}{x}}$
$\frac{2}{x} \cdot \ln(2x)$		$3x^2 - 3x$	
$\ln(2x)$	+	$6x - 6$	$\boxed{\frac{2}{x}}$
$\frac{1}{x}$		$3x^2 - 6x$	
1	-	$3x - 6$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
0		$\frac{3x^2}{2} - 6x$	

Vậy $I = (2x^2 - x) \ln^3(2x) - (3x^2 - 3x) \ln^2(2x) + (3x^2 - 6x) \ln(2x) - \frac{3x^2}{2} + 6x + C$

Chọn B.

Chú ý:

Chuyển $\frac{3}{x}$, nhân với $(2x^2 - x)$ thu được $(6x - 3)$

Chuyển $\frac{2}{x}$, nhân với $(3x^2 - 3x)$ thu được $(6x - 6)$.

Chuyển $\frac{1}{x}$, nhân với $(3x^2 - 6x)$ thu được $(3x - 6)$.

Ví dụ 7. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là:

- A. $(2-x)e^x + C$ B. $(2+x)e^x + C$ C. $(1-x)e^x + C$ D. $(1+x)e^x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có $F'(x) = f(x)e^{2x} \Leftrightarrow e^x + (x-1)e^x = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow f(x).e^{2x} = x.e^x$.

Xét $\int f'(x)e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = f(x).e^{2x} - 2 \int f(x)e^x dx = xe^x - 2(x-1)e^x + C$$

$$\text{Vậy } I = \int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$$

Chọn A.

 Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

- A. $x \cos x + \sin x + C$ B. $x \cos x - \sin x + C$ C. $-x \cos x - \sin x + C$ D. $-x \cos x + \sin x + C$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

- A. $2x^2 \ln x + 3x^2$ B. $2x^2 \ln x + x^2$ C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$ D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \ln x$ là:

- A. $x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C$ B. $x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$
C. $x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$ D. $x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$

Câu 4: Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là:

- A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$ B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$
C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$ D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 6: Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$.

Giá trị của biểu thức $S = a + 2b + c$ là:

- A. $S = 3$ B. $S = -2$ C. $S = 0$ D. $S = 4$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là:

- A. $(x-2)e^x + e^x + C$ B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$ C. $(x-1)e^x + C$ D. $(x+1)e^x + C$

Câu 8: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ thỏa mãn $F(-2) + F(1) = 0$ và $F(-1) + F(2) = a \ln 2 + b \ln 5$, với a, b là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + 6b$ bằng:

- A. -4 B. 5 C. 0 D. -3

Câu 9: Biết $\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(1+2x)}{x} + a \ln(1+2x) + b \ln|x| + C$ với a, b là các số nguyên và C là hằng số thực. Giá trị của $a + 2b$ là:

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$.

Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng:

- A. $\frac{14}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

Câu 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + x \ln x$ là:

- A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ B. $F(x) = -\cos x + \ln x + C$
C. $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ D. $F(x) = -\cos x + C$

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1) \ln x$ là:

- A. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$ B. $(x^2 - x) \ln x - x^2 - x + C$
C. $(x^2 - x) \ln x + x^2 - x + C$ D. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$

Câu 13: Cho $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{a} - \frac{x^2}{b}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln x$ (với a, b là hằng số). Giá trị của $a^2 - b$ là:

- A. 8 B. 0 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

Câu 14: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(3 + 2 \ln x)$ và $F(1) = 3$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $F(x) = 2x^2 + 2x^2 \ln x + 1$

B. $F(x) = 2x^2 + 2x^2 \ln x - 1$

C. $F(x) = 4x^2 + 2x^2 \ln x$

D. $F(x) = 4x^2 + 2x^2 \ln x - 1$

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2(1 + 3 \ln x)$ là:

A. $\frac{2x^3}{3} + x^3 \ln x + C$

B. $x^3 \ln x + C$

C. $x^3 \ln x + C$

D. $x^3 + x^3 \ln x + C$

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 + 2x)[1 + \ln(x + 1)]$ là:

A. $x + \frac{x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$

B. $x + \frac{3x^2}{2} - (x + x^2) \ln x + C$

C. $x + \frac{x^2}{2} - (x + x^2) \ln x + C$

D. $x + \frac{3x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$

Câu 17: Nguyên hàm $I = \int 2x(e^x + 1)dx$ có kết quả là:

A. $x^2 + 2xe^x - 2e^x + C$

B. $x^2 + 2xe^x - e^x + C$

C. $x^2 - 2xe^x - 2e^x + C$

D. $x^2 + xe^x - e^x + C$

Câu 18: Nguyên hàm $I = \int (1 + 2x)(\cos x + 1)dx$ có kết quả là:

A. $(1 + 2x) \sin x + 2 \cos x + C$

B. $x + x^2 - (1 + 2x) \sin x - 2 \cos x + C$

C. $x + x^2 + (1 + 2x) \sin x - 2 \cos x + C$

D. $x + x^2 + (1 + 2x) \sin x + 2 \cos x + C$

Câu 19: Công thức nào sau đây **sai**?

A. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$

B. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

D. $\int e^x dx = e^x + C$

Câu 20: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ là:

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$

Câu 21: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x + 1) \ln x$ là:

A. $(x^2 + x) \ln x - x^2 + x + C$

B. $(x^2 + x) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$

C. $(x^2 + x) \ln x - x^2 - x + C$

D. $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$

Câu 22: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + C$

Câu 23: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2 e^{ax}$ ($a \neq 0$), sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0 < a \leq 1$

B. $a < -2$

C. $a \geq 3$

D. $1 < a < 2$

Câu 24: Cho $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định với mọi $x \neq 0$. Kết quả nguyên hàm $\int f'(x)e^x dx$ là:

A. $3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

B. $x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$

C. $3x^2e^x - 6xe^x + e^x + C$

D. $3x^2 + 6xe^x + 6e^x + C$

Câu 25: Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) và C là hằng số thực. Giá trị tích ab là:

A. $ab = -\frac{1}{4}$

B. $ab = \frac{1}{4}$

C. $ab = -\frac{1}{8}$

D. $ab = \frac{1}{8}$

Câu 26: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Giá trị của $F(1)$ là:

A. $F(1) = 11e - 3$

B. $F(1) = e + 3$

C. $F(1) = e + 7$

D. $F(1) = e + 2$

Câu 27: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

D. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

Câu 28: Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cos 2x$ là:

A. $F(x) = x \sin 2x + \cos 2x$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

D. $F(x) = x \sin 2x + \cos 2x + C$

Câu 29: Cho $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng.

A. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$

B. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$

C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$

D. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$

Câu 30: Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

A. $S = -2$

B. $S = 1$

C. $S = 2$

D. $S = 0$

Câu 31: Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$ với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $S = m^2 + n^2$ có giá trị bằng:

A. 10.

B. 5.

C. 65.

D. 41.

Câu 32: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1)$ là:

A. $6 - \frac{15}{e}$

B. $4 - \frac{10}{e}$

C. $\frac{15}{e} - 4$

D. $\frac{10}{e}$

ĐÁP ÁN

BÀI 1. NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa

1 – D	2 – D	3 – B	4 – D	5 – D	6 – D	7 – D	8 – C	9 – D	10 – A
11 – B	12 – B	13 – D	14 – D	15 – C	16 – A	17 – D	18 – A	19 – C	20 – D
21 – C	22 – A	23 – B	24 – D	25 – C	26 – A	27 – D	28 – C	29 – B	30 – B
31 – C	32 – D	33 – B	34 – A	35 – A	36 – B	37 – A	38 – D	39 – D	40 – D
41 – B	42 – B	43 – B	44 – A	45 – A	46 – A	47 – B	48 – D	49 – C	50 – B
51 – C	52 – C	53 – A	54 – A	55 – A	56 – D	57 – B	58 – A	59 – A	60 – C
61 – A	62 – A	63 – B	64 – B	65 – C	66 – C	67 – A	68 – C	69 – C	70 – D
71 – C	72 – D	73 – B	74 – C	75 – C	76 – A	77 – D	78 – C	79 – D	80 – A
81 – D	82 – A	83 – A	84 – B	85 – D	86 – A	87 – B	88 – C	89 – D	90 – D
91 – B	92 – C	93 – C	94 – A	95 – C	96 – B	97 – A	98 – C	99 – B	100 – C

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến

1 – C	2 – D	3 – B	4 – D	5 – B	6 – B	7 – D	8 – A	9 – C	10 – A
11 – C	12 – A	13 – A	14 – C	15 – C	16 – B	17 – A	18 – A	19 – A	20 – D
21 – B	22 – B	23 – A	24 – B	25 – A	26 – A	27 – C	28 – A	29 – B	30 – B

Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

1 – D	2 – D	3 – C	4 – A	5 – B	6 – B	7 – D	8 – B	9 – D	10 – A
11 – B	12 – D	13 – A	14 – D	15 – B	16 – A	17 – C	18 – A	19 – C	20 – D
21 – A	22 – D	23 – A	24 – D	25 – D	26 – C	27 – A	28 – A	29 – B	30 – B
31 – C	32 – C	33 – C	34 – C	35 – C	36 – B	37 – C	38 – C	39 – D	40 – D