

CÁC DẠNG TOÁN CÓ YẾU TỐ MAX- MIN TRONG SỐ PHỨC

Giáo viên: Trương Đức Thịnh – Nguyễn Thu Hằng

Nhóm giáo viên tiếp sức Chinh phục kỳ thi THPT 2021

Bài toán có yếu tố max-min trong số phức là một trong những dạng toán khó ở trong chương trình môn Toán THPT và thường được lựa chọn ở các câu VD-VDC mang tính phân loại thí sinh. Trong đề tham khảo của bộ năm 2021 cũng có một câu ở mức độ như vậy. Chúng ta cùng phân tích câu 49 dưới những góc nhìn khác nhau để tìm ra các hướng xử lý cho dạng toán này.

A. Phân tích bài toán số phức trong đề tham khảo 2021

Ví dụ 1. (Câu 49-Đề tham khảo 2021) Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$

và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

- A. $5 - \sqrt{19}$. B. $5 + \sqrt{19}$. C. $-5 + 2\sqrt{19}$. D. $5 + 2\sqrt{19}$.

Phân tích hướng giải

Đối với dạng toán có yếu tố max-min trong số phức ta có 2 hướng tiếp cận chính như sau:

+) Hướng 1: Sử dụng các phép toán số phức liên quan tới môđun để đưa bài toán về hàm số một biến rồi khảo sát hoặc dùng các bất đẳng thức để đánh giá.

+) Hướng 2: Đưa về bài toán cực trị hình học quen thuộc

Căn cứ vào yêu cầu bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $|3z_1 + z_2 - 5i|$ có dạng môđun của một tổng, bài toán có thể được giải quyết nếu $|3z_1 + z_2|$ là một hằng số, từ đó ta mạnh dạn đi tính $|3z_1 + z_2|$ từ các giả thiết của bài toán. Sau đó ta sẽ sử dụng một trong 2 hướng kể trên hoặc tổng hợp các hướng để kết thúc bài toán.

Lời giải tham khảo

+ Trước hết ta tính $|3z_1 + z_2|$ ta có một vài cách tính như sau

Cách 1: Tính toán trực tiếp

Đây là cách tiếp cận đơn giản nhất cho bài toán chỉ sử dụng những kiến thức cơ bản của số phức để biến đổi.

Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Theo giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} |z_1| = 1 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \\ |z_2| = 2 &\Leftrightarrow c^2 + d^2 = 4 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{3} &\Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = 3. \end{aligned}$$

Khai triển và rút gọn $a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = 3 \Rightarrow ac + bd = 1$.

Ta có $3z_1 + z_2 = (3a + c) + (3b + d)i$ nên

$$|3z_1 + z_2|^2 = (3a + c)^2 + (3b + d)^2 = 9(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 6(ac + bd) = 19.$$

Suy ra $|3z_1 + z_2| = \sqrt{19}$.

Cách 2: Sử dụng các đẳng thức môđun

Để sử dụng cách này đòi hỏi các em phải có kỹ năng biến đổi phép toán trên số phức ở dạng hình thức. Ta có đẳng thức

$$|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2).$$

Đẳng thức này ta được chứng minh nhờ hai tính chất cơ bản $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ và $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Thật vậy

$$\begin{aligned} |mz_1 + nz_2|^2 &= (mz_1 + nz_2) \cdot \overline{(mz_1 + nz_2)} = (mz_1 + nz_2)(\overline{mz_1} + \overline{nz_2}) \\ &= m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

Áp dụng đẳng thức trên ta được:

$$|3z_1 + z_2|^2 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 3(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = 13 + 3(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2).$$

Lại có $3 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \Rightarrow (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 2$. Thay lại ta được $|3z_1 + z_2| = \sqrt{19}$.

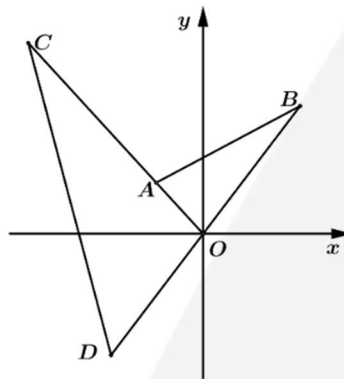
Cách 3: Sử dụng hình học

Để sử dụng được pháp pháp này các em cần phải vận dụng linh hoạt về biểu diễn hình học của số phức, kết hợp với kiến thức về vécto hay hệ thức lượng trong tam giác... để giải quyết bài toán.

Gọi A, B, C, D là các điểm biểu diễn của $z_1, z_2, 3z_1, -z_2$ giả thiết trở thành

$$|z_1| = 1 \Leftrightarrow OA = 1; |z_2| = 2 \Leftrightarrow OB = 2; |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}.$$

Khi đó $|3z_1 + z_2| = CD$.



Sử dụng định lý Cosin trong tam giác OCD và để ý $\widehat{COD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ ta được

$$\begin{aligned} CD^2 &= OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos \widehat{COD} = 13 - 12 \cos \widehat{COD} = 13 + 12 \cos \widehat{AOB} \\ &= 13 + 12 \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = 19. \text{ Suy ra } |3z_1 + z_2| = CD = \sqrt{19}. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $|3z_1 + z_2 - 5i|$

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun

$$+ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}$$

$$+ |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun ta có

$$|3z_1 + z_2 - 5i| \leq |3z_1 + z_2| + |-5i| = \sqrt{19} + 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi $3z_1 + z_2 = k(-5i), k \geq 0 \Rightarrow 3z_1 + z_2 = -\sqrt{19}i$.

Cách 2: Sử dụng hình học

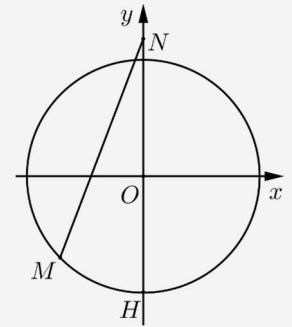
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của $3z_1 + z_2, 5i$ suy ra $OM = \sqrt{19}$ như vậy M thuộc

đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{19}$ và cần tìm giá trị lớn nhất MN .

Sử dụng kết quả quen thuộc ta được $MN \leq MO + ON = 5 + \sqrt{19}$.

Dấu bằng xảy ra khi M, O, N theo thứ tự thẳng hàng hay $M(0; -\sqrt{19})$.

Một cách tổng quát ta có thể xây dựng bài toán Max-min liên quan các yếu tố của số phức theo các dạng sau:



B. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Sử dụng biến đổi đại số kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá

1. Kiến thức cần chuẩn bị:

1.1. Đẳng thức Môđun:

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R} \text{ \& } i^2 = -1$) môđun của z ký hiệu là $|z|$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$+ |z|^2 = z \cdot \bar{z}; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z| = |\bar{z}|; |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$+ |mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \text{ với } m, n \in \mathbb{R} \text{ và } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$+ |z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right] \text{ với } z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$+ |z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right| \text{ với } z_1, z_2 \text{ là các số phức khác } 0.$$

1.2. Bất đẳng thức thường dùng

+ Bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}.$$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}.$$

+ Bất đẳng thức Bunhiacopxky $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

Ví dụ 2. Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z_1 + z_2| = \sqrt{35}$ và $|3z_1 - 2z_2| = 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 4. B. $\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{3}$ D. 5.

Phân tích tìm lời giải : Tương tự như đề minh họa khi biết $|2z_1 + z_2| = \sqrt{35}$ và $|3z_1 - 2z_2| = 7$ ta có thể tính được $m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 = p$, đến đây dùng bất đẳng thức Bunhiacopxky là có thể đánh giá được $T = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải

Nhận xét $\overline{z \cdot z} = |z|^2$ và $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$\begin{cases} 35 = (2z_1 + z_2)(\overline{2z_1 + z_2}) = 4|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) \\ 49 = (3z_1 - 2z_2)(\overline{3z_1 - 2z_2}) = 9|z_1|^2 + 4|z_2|^2 - 6(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 21|z_1|^2 + 7|z_2|^2 = 84 \Rightarrow 3|z_1|^2 + |z_2|^2 = 12.$$

$$\text{Ta có } T = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}|z_1|) + 1 \cdot (|z_2|) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3} + 1\right)(3|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 4.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} |z_2| = 3|z_1| \\ 3|z_1|^2 + |z_2|^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 3 \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 4.

Ví dụ 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Biết biểu thức $T=2|z-8i|-|z-7-9i|$ đạt giá trị

lớn nhất khi $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị $x-2y$ bằng

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

Phân tích tìm lời giải : Để đơn giản ta đặt $u = z-1-i$, khi đó $|u|=5$ và cần tìm giá trị lớn nhất của $T=2|u+1-7i|-|u-6-8i|$. Ta nghĩ đến bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun, tuy nhiên có một trở ngại ở đây là hệ số của z không giống nhau do vậy ta sẽ tìm cách để đưa về hệ số giống nhau.

Lời giải

Gọi $u = a+bi$; $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, giả thiết suy ra $a^2 + b^2 - 25 = 0$.

$$T = 2|u+1-7i| - \sqrt{(a-6)^2 + (b-8)^2 + 3(a^2 + b^2 - 25)} = 2|u+1-7i| - \sqrt{4a^2 + 4b^2 - 12a - 16b + 25}$$

$$= 2|u+1-7i| - 2\sqrt{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 + (b-2)^2} = 2\left(|u+1-7i| - \left|u-\frac{3}{2}-2i\right|\right).$$

$$\text{Từ đó } T = 2\left[|-1+7i-u| - \left|u-\frac{3}{2}-2i\right|\right] \leq 2\left|-1+7i-u+u-\frac{3}{2}-2i\right| = 5\sqrt{5}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} u-\frac{3}{2}-2i=0 \\ (-1+7i-u)=k\left(u-\frac{3}{2}-2i\right) \\ |u|=5 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ u=4-3i \end{cases}.$$

Từ $u = 4-3i \Rightarrow z = 5-2i$. Vậy $x-2y=9$.

Ngoài ra ta có thể sử dụng công thức cân hệ số để biến đổi, tuy nhiên công thức này không thực sự phổ biến. Áp dụng công thức $|z_1+z_2| = \left|\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0.

$$\text{Ta có } |u-(6+8i)| = \left|\frac{|6+8i|}{|u|}u - \frac{|u|}{|6+8i|}(6+8i)\right| = 2\left|u-\frac{3}{2}-2i\right|.$$

Ví dụ 4. (Đề thi thử sở GD&ĐT Hải phòng 2021) Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$|z_1 + 6 - 8i| = 7 - |z_2|$ và $|z_1 - z_2| = 3$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 2z_2 + 21 - 3i|$. Khi đó $M^2 - n^2$ bằng

A. 220.

B. 124.

C. 144.

D. 225.

Phân tích tìm lời giải : Biểu thức cần đánh giá của bài này tương tự như đề tham

khảo tuy nhiên giả thiết cho rất khó để tính được $|z_1 + 2z_2|$. Tinh ý một chút các em sẽ phát hiện ra $|6 - 8i| = 10 = 7 + 3$ và như vậy ta lại có thể dùng bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun.

Lời giải

Giả thiết suy ra $7 = |z_1 + 6 - 8i| + |z_2| \geq |z_1 - z_2 + 6 - 8i| \geq ||z_1 - z_2| - |6 - 8i|| = 7$.

Suy đẳng thức tương đương
$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, z_1 + 6 - 8i = kz_2, k \leq 0. \\ z_1 - z_2 = m(6 - 8i), m \leq 0 \end{cases}$$

Do $|z_1 - z_2| = 3 \Rightarrow z_1 - z_2 = \frac{-3}{10}(6 - 8i)$.

+) Nếu $z_2 = 0$ suy ra $z_1 = \frac{-3}{10}(6 - 8i) \Rightarrow P = 3\sqrt{41}$.

+) Trường hợp $z_2 \neq 0, z_1 + 6 - 8i = kz_2, k \leq 0$ thay vào ta được

$$z_1 = \frac{-3k + 10}{10(k - 1)}(6 - 8i); z_2 = \frac{7}{10(k - 1)}(6 - 8i).$$

Khi đó $z_1 + 2z_2 = \frac{-3k + 24}{10(k - 1)}(6 - 8i)$. Đặt $x = \frac{-3k + 24}{10(k - 1)}, k \leq 0 \Rightarrow \frac{-12}{5} \leq x < \frac{-3}{10}$.

Thay vào ta được $P = |x(6 - 8i) + 21 - 3i| = \sqrt{100x^2 + 300x + 450}$.

Khảo sát hàm số theo biến x ta được $15 \leq P < 3\sqrt{41}$.

Như vậy ta được $15 \leq P \leq 3\sqrt{41}$ do đó $M^2 - n^2 = 144$.

Ví dụ 5. Xét số phức z thoả mãn $3|\bar{z} - 3i| - |z^2 + 3iz| = |z^2 + 9|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị

lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 5i|$. Khi đó $M^2 - 2m^2$ thuộc khoảng

- A. $(0; 13)$. B. $[13; 40)$. C. $[40; 55)$. D. $[55; 70)$.

Phân tích tìm lời giải : Giả thiết bài toán sẽ trở nên quen thuộc nếu các em để ý

$$|\bar{z} - 3i| = |\overline{z - 3i}| = |z + 3i|; |z^2 + 9| = |z^2 - 9i^2| = |(z - 3i)(z + 3i)|.$$

Lời giải

Khai thác giả thiết, ta có:

$$|z^2 + 9| + |z^2 + 3iz| = 3|z + 3i| \Leftrightarrow |z - 3i||z + 3i| + |z||z + 3i| = 3|z + 3i|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z + 3i| = 0 \\ |z - 3i| + |z| = 3 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: $|z + 3i| = 0 \Leftrightarrow z = -3i \Rightarrow |z - 1 + 5i| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$.

+ Trường hợp 2: $|z| + |3i - z| = 3$.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $i^2 = -1$, khi đó $|z - 3i| + |z| = 3$

$$\Rightarrow \sqrt{(-x)^2 + (3 - y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad (1).$$

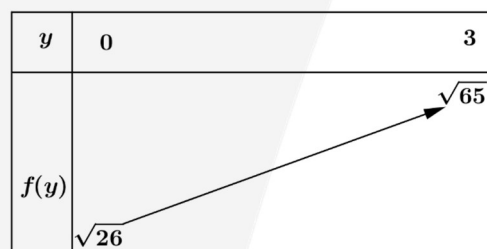
Ta có $VT(1) \geq \sqrt{(3 - y)^2} + \sqrt{y^2} = |3 - y| + |y| \geq 3 = VP(1)$.

$$\text{Do đó từ suy ra } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z - 1 + 5i| = |-1 + (y + 5)i| = \sqrt{y^2 + 10y + 26}.$$

Khảo sát hàm số $f(y) = \sqrt{y^2 + 10y + 26}$ với $0 \leq y \leq 3$.

Ta được $m = \sqrt{5}$, $M = \sqrt{65}$. Suy ra $M^2 - 2m^2 = 55$.

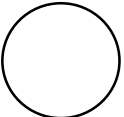
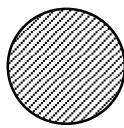
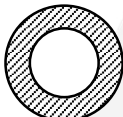


Dạng 2: Sử dụng biểu diễn hình học của số phức

đưa về các bài toán cực trị quen thuộc

2.1 Các quỹ tích cơ bản

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $i^2 = -1$.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$\circ Ax + By + C = 0.$ 	Là đường thẳng $d : Ax + By + C = 0.$
$\circ MA = MB.$ Dạng số phức $ z - a - bi = z - c - di $ 	Là đường trung trực của đoạn thẳng $AB.$
$\circ \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$ Dạng số phức $ z - a - bi = R$ 	Là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$
$\circ \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases}$ Dạng số phức $ z - a - bi \leq R$ 	Là hình tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (đường tròn kẻ cả bên trong)
$\circ R_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_2^2.$ Dạng số phức $R_1 \leq z - a - bi \leq R_2$ 	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và $R_2.$
$\circ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$ Dạng số phức $ z - c + z + c = 2a$ 	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c$ trong đó $a^2 = b^2 + c^2, (a > b > 0).$

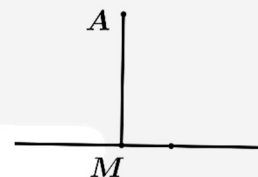
2.2 Một số kết quả quan trọng cần nhớ:

Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là M, A . Khi đó $|z - z_0| = MA$.

Một số bất đẳng thức hình học thường dùng:

1. Cho M di động trên đường thẳng Δ , A là điểm cố định.

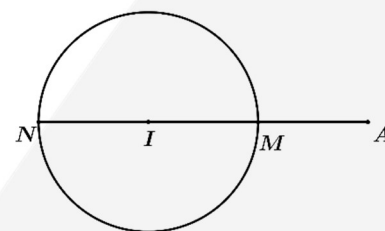
$MA \geq d(A; \Delta)$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM \perp \Delta$.



2. Cho M di động trên đường tròn $(I; R)$, A là điểm cố định.

$MA \leq AI + R$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \uparrow \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow M \equiv N$.

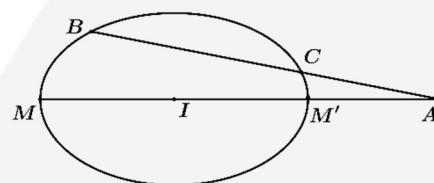
$MA \geq |AI - R|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IM}$



3. Cho M di động trên Elip (E) có trục lớn Δ , độ dài $2a$, tâm I , A là điểm cố định trên trục lớn

$MA \leq AI + a$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \uparrow \overrightarrow{IM}$.

$MA \geq |AI - a|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IM}$.



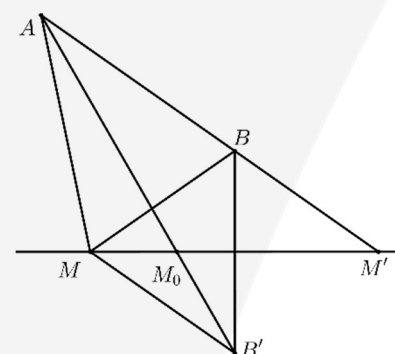
4. Cho M di động trên đường thẳng Δ . A, B là hai điểm cố định khác phía với Δ

$MA + MB \geq AB$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$.

5. Cho M di động trên đường thẳng Δ

Và A, B là hai điểm cố định cùng phía với Δ

$MA + MB \geq AB'$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ .



6. Cho M di động trên đường thẳng Δ

A, B là hai điểm cố định cùng phía với Δ

$|MA - MB| \leq AB$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$.

7. Cho M di động trên đường thẳng Δ và A, B là hai điểm cố định khác phía với Δ

$|MA - MB| \leq AB'$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ .

Ví dụ 6. Xét hai số phức z, w thoả mãn $z\bar{z} = 1$ và $|w - 3 + 4i| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = |z - w|$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. 10.

D. $5 + \sqrt{2}$.

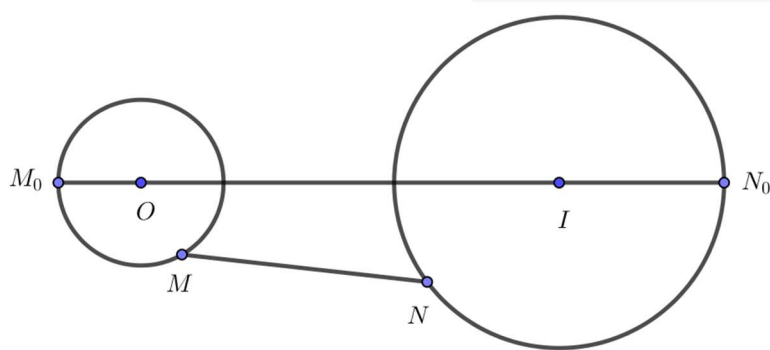
Phân tích tìm lời giải: Ta thấy $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ như vậy điểm biểu diễn của hai số phức đều nằm trên đường tròn và ta đưa về bài toán hình học quen thuộc: Tìm hai điểm trên hai đường tròn sao cho khoảng cách giữa chúng là lớn nhất.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z , $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow M \in (C_1)$ có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R_1 = 1$. Gọi N là điểm biểu diễn của số phức w .

$|w - 3 + 4i| = 2 \Rightarrow N \in (C_2): (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$, có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R_2 = 2$.

Do $OI = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1); (C_2)$ nằm ngoài nhau.



$P = |z - w| = MN$. Ta có $P - R_1 - R_2 = MN - OM - IN \leq ON - IN \leq OI = 5 \Rightarrow P \leq 8$.

Dấu bằng xảy ra M, O, I, N theo thứ tự thẳng hàng.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8.

Ví dụ 7. (Đề tham khảo 2018) Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$.

Khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị $P = a + b$ bằng

- A. $P = 8$. B. $P = 10$. C. $P = 4$. D. $P = 6$.

Phân tích tìm lời giải: Ta thấy điểm biểu diễn của số phức $M(a; b)$ đường tròn. Với biểu thức cần đánh giá có dạng $MA + MB$ thì ta có thể nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxky để đưa về bình phương độ dài và dùng công thức đường trung tuyến hay sử dụng tâm tỷ cự của một họ điểm để đánh giá tiếp.

Lời giải

Goi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Theo giả thiết ta có: $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(4; 3)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $\begin{cases} A(-1; 3) \\ B(1; -1) \end{cases} \Rightarrow Q = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = MA + MB$

Gọi E là trung điểm của AB , kéo dài EI cắt đường tròn tại D

$$\Leftrightarrow Q^2 \leq (MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2)$$

Vì ME là trung tuyến trong $\triangle MAB$

$$\Rightarrow ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$$

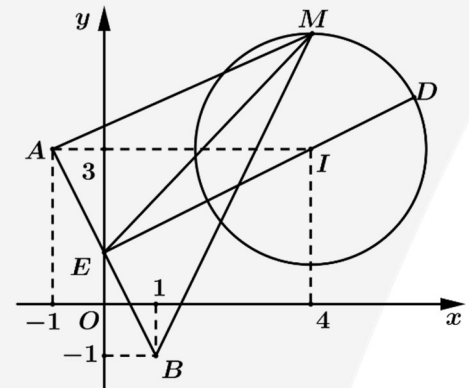
$$\Rightarrow Q^2 \leq 2 \left(2ME^2 + \frac{AB^2}{2} \right) = 4ME^2 + AB^2.$$

Mặt khác $ME \leq DE = EI + ID = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow Q^2 \leq 4 \cdot (3\sqrt{5})^2 + 20 = 200$$

$$\Rightarrow Q \leq 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ M \equiv D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(x_D - 4) \\ 2 = 2(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow M(6; 4) \Rightarrow P = a + b = 10.$$



Ví dụ 8. (Đề thi thử THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh 2019) Xét số phức z thỏa mãn

$$|z+1+i|+4|\bar{z}-2+5i|=4|(1-i)z-4-2i|. \text{ Giá trị lớn nhất của } |z-1-3i| \text{ bằng}$$

A. $4\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{6}$.

Phân tích tìm lời giải: Trước hết ta biến đổi các biểu thức môđun để đưa về dạng quen thuộc.

Nhận xét với mọi số phức u, v ta có $|\bar{u}| = |u|; |uv| = |u||v|$

$$\text{Giả thiết } |z+1+i|+4|\bar{z}-2+5i|=4|(1-i)z-4-2i|$$

$$\Leftrightarrow |z+1+i|+4|\overline{z-2+5i}|=4|1-i|\left|z-\frac{4+2i}{1-i}\right| \Leftrightarrow |z+1+i|+4|z-2-5i|=4\sqrt{2}|z-1-3i|$$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $A(-1;-1), B(2;5), I(1;3)$.

Giả thiết trở thành $MA+4MB=4\sqrt{2}MI$. Giá trị cần đánh giá nằm ở vế phải tương tự như Ví dụ 7 ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxky để đưa về bình phương độ dài, tuy nhiên cần lựa chọn hệ số thích hợp để đánh giá được vế phải. Rất may ta có được $\overline{IA}+2\overline{IB}=\vec{0}$ nên $MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$. Từ đó ta chọn được hệ số cho bất đẳng thức Bunhiacopxky.

Lời giải:

$$\text{Giả thiết } |z+1+i|+4|\bar{z}-2+5i|=4|(1-i)z-4-2i| \Leftrightarrow |z+1+i|+4|z-2-5i|=4\sqrt{2}|z-1-3i|$$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $A(-1;-1), B(2;5), I(1;3)$.

Giả thiết trở thành $MA+4MB=4\sqrt{2}MI$. Ta thấy $\overline{IA}+2\overline{IB}=\vec{0}$ từ đó ta có đánh giá sau

$$4\sqrt{2}MI=1.MA+2\sqrt{2}.\sqrt{2}MB \leq \sqrt{\left(1+\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)\left(MA^2+2MB^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 32MI^2 \leq 9\left(\left(\overline{MI}+\overline{IA}\right)^2+2\left(\overline{MI}+\overline{IB}\right)^2\right) \Leftrightarrow 32MI^2 \leq 9\left(3\overline{MI}^2+2\overline{MI}\left(\overline{IA}+2\overline{IB}\right)+\overline{IA}^2+2\overline{IB}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 32MI^2 \leq 9\left(3MI^2+2\overline{MI}.\vec{0}+IA^2+2IB^2\right) \Leftrightarrow 5MI^2 \leq 9(20+2.5) \Leftrightarrow MI \leq 3\sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{MA}{\sqrt{2}MB} \Rightarrow \begin{cases} MB=2MA \\ MI=3\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA=\frac{8\sqrt{3}}{3} \\ MI=3\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow M \in \left(A; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \cap (I; 3\sqrt{6}).$$

Mà $IA=\sqrt{20}<\frac{8\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{6}$ nên hai đường tròn luôn cắt nhau hay luôn tồn tại M .

Vậy giá trị lớn nhất của $MI=3\sqrt{6}$.

Ví dụ 9. (Đề thi thử Chuyên Hà Tĩnh Lần 2- 2021)

Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|\sqrt{3}z + i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = |z - 1| + |z + 1| + |z + \sqrt{3}i| \text{ bằng}$$

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{16}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Phân tích tìm lời giải: Làm đẹp lại giả thiết ta thấy rằng điểm M biểu diễn của số

phức z thuộc đường tròn tâm $I\left(0; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Biểu thức cần đánh giá là

$S = MA + MB + MC$ thấy rằng $A, B, C \in (I; R)$ hơn nữa $\triangle ABC$ đều, đến đây ta sử dụng một kết quả quen thuộc nếu M thuộc cung nhỏ AB thì $MC = MA + MB$ từ đó ta chỉ việc đánh giá MC .

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z .

$$|\sqrt{3}z + i| = 2 \Leftrightarrow \left|z + \frac{i}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn tâm } I\left(0; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); R = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Gọi $A(1;0), B(-1;0), C(0;-\sqrt{3})$. Ta thấy $A, B, C \in (I; R)$ và $\triangle ABC$ đều.

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung nhỏ AB .

Lấy điểm $E \in MC$ sao cho $MB = ME$ do $\widehat{BMC} = \widehat{BMC} = 60^\circ$ nên $MB = ME = EC$.

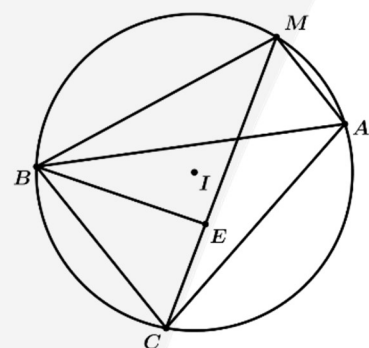
Từ đó suy ra được $\triangle BCE = \triangle BAM (c.g.c) \Rightarrow MA = EC$

và do đó $MC = MA + MB$

$$\Rightarrow S = MA + MB + MC = 2MC \leq 2.2R = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Dấu “=” xảy ra khi M, I, C thẳng hàng.

Chú ý: Bạn nào chuyên sâu hơn có thể sử dụng định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp $AMBC$ $AB.MC = AC.MB + BC.MA$ cũng suy ra được $MC = MA + MB$ (do $\triangle ABC$ đều).



Ví dụ 10. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6$. Giá trị lớn nhất của $T = |z + 2i|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $2 + \sqrt{5}$.

Phân tích tìm lời giải: Nhìn vào giả thiết ta thấy rằng tập hợp các điểm biểu diễn của z số là đường Elíp, do đó ta đưa về bài toán đánh giá khoảng cách từ một điểm cụ thể đến một điểm thay đổi trên đường Elíp. Khó khăn gặp phải ở đây là ta phải đưa phương trình đường Elíp về dạng chính tắc để thuận tiện cho việc tính toán. Ta xét cách đổi biến sau

Đặt $z = u + a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $|u + a + 1 + (b - 1)i| + |u + a - 3 + (b + 1)i| = 6$.

Ta chọn a, b sao cho $\begin{cases} a + 1 = -a + 3 \\ b - 1 = -b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được $|u + (2 - i)| + |u - (2 - i)| = 6$.

Đến đây chỉ việc chia 2 vế cho $|2 - i|$ ta sẽ đưa được Elíp về dạng chính tắc.

Lời giải

Ta có $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6 \Leftrightarrow |(z - 1) + 2 - i| + |(z - 1) - (2 - i)| = 6$

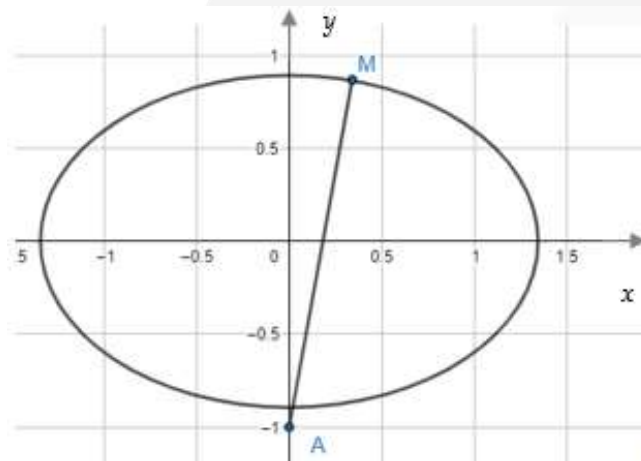
$\Leftrightarrow \left| \frac{z - 1}{2 - i} + 1 \right| + \left| \frac{z - 1}{2 - i} - 1 \right| = \frac{6}{\sqrt{5}}$, đặt $\frac{z - 1}{2 - i} = t$ ta sẽ đưa về $|t + 1| + |t - 1| = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Như vậy ta được tập hợp điểm biểu diễn của t là một đường Elíp có trục lớn $2a = \frac{6}{\sqrt{5}}$, tiêu

cự $2c = 2$, do đó $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{4}{5}$ suy ra phương trình đường Elíp: $\frac{5x^2}{9} + \frac{5y^2}{4} = 1, (E)$.

Từ cách đặt $\frac{z - 1}{2 - i} = t \Rightarrow z = (2 - i)t + 1$ thay vào $T = |(2 - i)t + 1 + 2i| = \sqrt{5}|t + i|$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của t , $M(x; y) \in (E)$ và $A(0; -1)$ khi đó $T = \sqrt{5}MA$.



Lại có $MA^2 = x^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{5} \left(1 - \frac{5}{4}y^2\right) + (y+1)^2 = -\frac{5}{4}y^2 + 2y + \frac{14}{5}$.

Khảo sát hàm số $f(y) = -\frac{5}{4}y^2 + 2y + \frac{14}{5}, y \in \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ ta được giá trị lớn nhất của $f(y)$ là $\frac{18}{5}$.

Thay vào ta được giá trị lớn nhất của T là $3\sqrt{2}$.

Dạng 3: Một vài cách hỏi khác cho bài toán số phức ở mức độ VD-VDC

Quan sát đề tham khảo và đề thi chính thức qua các năm gần đây chúng ta thấy rằng các câu ở mức độ vận dụng cao thường không dập khuôn theo đề tham khảo mà chỉ liên quan đến đề tham khảo ở mảng kiến thức nhất định, vì vậy ngoài việc nắm chắc kiến thức cơ bản, thành thạo các bài toán gốc các em còn phải rèn luyện thêm tư duy nhạy bén để xử lý được các bài toán một cách nhanh nhất. Dưới đây là một vài dạng toán khác liên quan tới câu số phức mức độ vận dụng cao.

Ví dụ 11. (Đề thi thử sở GD&ĐT Hà nội 2021)

Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $\left| (z_1 \overline{z_2})^3 + (\overline{z_1} z_2)^3 \right|$ bằng

- A. 1458. B. 324. C. 729. D. 6561.

Lời giải

Giả thiết $|z_1 + z_2| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = 9$.

$$|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = 27.$$

Từ đó suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 18 \Rightarrow z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = -9$ và $|z_2| = 3$.

Biểu thức cần tính

$$\left| (z_1 \overline{z_2})^3 + (\overline{z_1} z_2)^3 \right| = \left| (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2)^3 - 3z_1 \overline{z_2} \overline{z_1} z_2 (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \right| = \left| -9^3 + 27|z_1|^2 |z_2|^2 \right| = 1458.$$

Ví dụ 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 6i| + |z + 4i| = |z - 3i| + |z + i|$ và $|z| \leq 2021$?

- A. 4032 B. 4034 C. 2021 D. 2020

Lời giải

Đặt $u = z - i$ giả thiết trở thành $|u - 5i| + |u + 5i| = |u - 2i| + |u + 2i| = 2b$.

Nhận xét được $2b \geq |u - 5i - u - 5i| \Leftrightarrow b \geq 5$. Ta xét 2 trường hợp

+Trường hợp 1 : $b = 5 \Rightarrow u = \pm 5i$ thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $b > 5$ gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của u khi đó $M(x; y)$ thuộc 2 Elíp

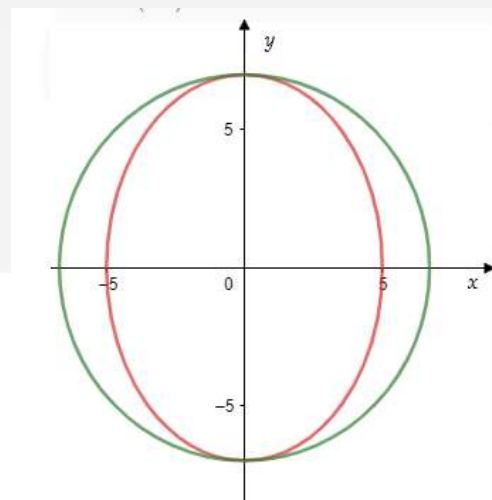
$$(E_1): \frac{x^2}{b^2 - 25} + \frac{y^2}{b^2} = 1; (E_2): \frac{x^2}{b^2 - 4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ dễ thấy}$$

$$(E_1) \cap (E_2) = (0; \pm b) \Rightarrow u = \pm bi.$$

Với $u = bi \Rightarrow z = (b + 1)i$ do $|z| \leq 2021 \Rightarrow 5 < b \leq 2020$.

Với $u = -bi \Rightarrow z = (-b + 1)i$ do

$$|z| \leq 2021 \Rightarrow 5 < b \leq 2022. \text{ Vậy có 4034 số } z \text{ thỏa mãn.}$$



Ví dụ 13. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $4z^2 + |z + 3i|z - 84 = 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có phương trình bậc 2 theo z có $a.c = 4.(-84) < 0$ nên phương trình luôn có nghiệm thực. Do đó $z \in \mathbb{R}$, nên $|z + 3i| = \sqrt{z^2 + 9}$

$$\text{Vậy ta có } 4z^2 + z\sqrt{z^2 + 9} - 84 = 0 \Leftrightarrow z\sqrt{z^2 + 9} = 84 - 4z^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15z^4 - 681z^2 + 7056 = 0 \\ z(84 - 4z^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 16 \\ z^2 = \frac{147}{5} \\ z(84 - 4z^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = -\sqrt{\frac{147}{5}} \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn.

Ví dụ 14. (Đề thi THPT NĂM 2018)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$?

A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có } |z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$$

$$\Leftrightarrow |z|z - 4|z| - |z|i + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i.$$

Lấy môđun 2 vế ta được

$$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2} \Leftrightarrow |z|^2 \left[(|z| - 5)^2 + 1 \right] = (4|z|)^2 + (|z| - 2)^2 \quad (1).$$

Đặt $t = |z|$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 \left[(t-5)^2 + 1 \right] = (4t)^2 + (t-2)^2 \Leftrightarrow t^2 (t^2 - 10t + 26) = 17t^2 - 4t + 4$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 10t^3 + 9t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 9t^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t^3 - 9t^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t \approx 8,95 \\ t \approx 0,69 \\ t \approx -0,64 \end{cases}.$$

Ứng với mỗi giá trị $t \geq 0$ ta được $z = \frac{-4t + (2-t)i}{5-i-t}$ là 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Ví dụ 15. Xét các số phức $z_1, z_2, z_3 \neq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} \frac{|z_1|}{3} = \frac{|z_2|}{4} = \frac{|z_3|}{5} \\ 25z_1z_2 = 9z_2z_3 + 16z_1z_3 \\ |z_1 - z_2| = 10 \end{cases}$. Giá trị $|z_1 + z_3|$ bằng

A. $2\sqrt{13}$.

B. $4\sqrt{43}$.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $\frac{8\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Đặt $\frac{|z_1|}{3} = \frac{|z_2|}{4} = \frac{|z_3|}{5} = t > 0$ suy ra $|z_1| = 3t; |z_2| = 4t; |z_3| = 5t$

$$25z_1z_2 = 9z_2z_3 + 16z_1z_3 \Leftrightarrow 25t^2z_1z_2 = 9t^2z_2z_3 + 16t^2z_1z_3 \Leftrightarrow \overline{z_3}z_3z_1z_2 = \overline{z_1}z_1z_2z_3 + \overline{z_2}z_2z_1z_3$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \Leftrightarrow z_3 = z_1 + z_2.$$

Suy ra $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow |z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2$

$$\Leftrightarrow |z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 = 0.$$

Xét giả thiết $|z_1 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1) = 100 \Leftrightarrow 25t^2 = 100 \Rightarrow t = 4.$

Ta có $|z_1 + z_3| = |2z_1 + z_2| = \sqrt{4|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1)} = 4\sqrt{13}.$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

- Câu 1:** Xét số phức z thỏa mãn $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính giá trị $A = M^2 + m^2$.
- A. $A = 1258$. B. $A = 1758$. C. $A = 1268$. D. $A = 1287$.
- Câu 2:** Xét các số phức z_1, z_2, z thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2, |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$ bằng
- A. $P = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ B. $P = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$. C. $P = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{4} + \sqrt{3}$.
- Câu 3:** Xét số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$. Giá trị lớn nhất của $|z - 4 + 3i|$ bằng
- A. $\sqrt{41} + \sqrt{2}$. B. $\sqrt{41} - \sqrt{2}$. C. $\sqrt{5} + 2$. D. $\sqrt{29} + \sqrt{2}$.
- Câu 4:** Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + 2i| = 3; |z_2 + 2021 - 6i| = |z_2 + 2021 - 4i|$ và số phức z thỏa mãn rằng biểu thức $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là
- A. $\sqrt{2021}$ B. 5 C. $\sqrt{34}$ D. $\sqrt{26}$
- Câu 5:** Xét số phức z thỏa mãn điều kiện $5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z - 2 + 3i|$ bằng
- A. $3\sqrt{5}$. B. 80. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.
- Câu 6:** Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5 - 4i| = |z_1 - 1 + 4i|$ và $(1 - i)|z_2| = 2\bar{z}_2 - (2 - \bar{z}_2)i$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1|^2 + 2i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)$ bằng
- A. $\frac{4}{3}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 0$. D. $\frac{-1}{9}$.
- Câu 7:** Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng
- A. $6\sqrt{7}$. B. $4 + 2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{53}$. D. $4\sqrt{13}$.
- Câu 8:** Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng
- A. $3\sqrt{5} - 1$. B. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$. C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$. D. $\sqrt{10} + 1$.

- Câu 9:** [THPT Chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên 2021] Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 3$ và $\left|z_2 + 1 + \frac{i}{4}\right| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $a - 2b = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 4z_2|$ bằng:
A. $\sqrt{130}$. **B.** $\sqrt{130} - 2$. **C.** $\sqrt{130} - 3$. **D.** $\sqrt{130} - 5$.
- Câu 10:** Xét hai số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|$ là
A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.
- Câu 11:** Xét z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|\bar{z}_1 - 3 + 2i| = |\bar{z}_2 - 3 + 2i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2 - 3 - 5i|$. Giá trị của biểu thức $T = m + 2n$ bằng
A. $T = 3\sqrt{10} - 2$. **B.** $T = 6 - \sqrt{10}$. **C.** $6 - \sqrt{34}$. **D.** $3\sqrt{34} - 2$.
- Câu 12:** Xét số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng
A. $4 + 2\sqrt{3}$. **B.** $2 + \sqrt{3}$. **C.** $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. **D.** $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.
- Câu 13:** [Trường chuyên ĐH Vinh lần 2 năm 2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $5b + c = 4$. **B.** $5b + c = -12$. **C.** $5b + c = 12$. **D.** $5b + c = -4$.
- Câu 14:** Xét số phức z, w thỏa mãn $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6$ và $|w + 2 + 4i| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị lớn nhất của $T = |z + w + 2i|$ là $3\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Khi đó giá trị $a + b$ thuộc khoảng
A. $\left(0; \frac{9}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{6}; \frac{13}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{14}{5}; \frac{19}{6}\right)$. **D.** $\left(4; \frac{29}{6}\right)$.
- Câu 15:** Xét số phức z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn các điều kiện $|z - i| = |z - 1|, |z_2 - z_1| = 4\sqrt{2}$. Số phức w thỏa mãn $2|w + 2 - i| + 3|w - 1 + 2i| \leq 6\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $T = |w - z_1| + |w - z_2|$ bằng
A. $3\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.