GIỚI HẠN

BÀI GIẢNG GIỚI HẠN DÃY SỐ

Mục tiêu

- **Kiến thức**
  + Hiểu được khái niệm giới hạn của dãy số.
  + Biết được một số định lí giới hạn của dãy số, cấp số nhân lùi vô hạn.
- **Kĩ năng**
  + Áp dụng khái niệm giới hạn dãy số, định lí về giới hạn của dãy số vào giải các bài tập.
  + Biết cách tính giới hạn của dãy số.
  + Biết cách tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 9

1.1. Định nghĩa: Ta có nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết: $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

(Kí hiệu "$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$", đọc là dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi *n* dần đến vô cực).

Nhận xét:

a) Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

1.2. Một số dãy số có giới hạn 0 thường gặp

Dựa vào định nghĩa, người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim \frac{1}{n} = 0;$

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0;$

c) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0;$

d) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

e) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Định lí sau đây thường được sử dụng để chứng minh một số dãy số có giới hạn 0.

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi *n* và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

2.1. Định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn

Định nghĩa: Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực *L* nếu $\lim (u_n - L) = 0$.

Khi đó ta viết $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

Tức là $\lim u_n = L \Leftrightarrow \lim (u_n - L) = 0$.

Nhận xét:

- Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L, khi và chỉ khi khoảng cách từ điểm u_n đến điểm L là $|u_n - L|$ gần 0 bao nhiêu cũng được miễn là chọn n đủ lớn. Tức là khi biểu diễn các số hạng trên trục số ta thấy khi n tăng thì các điểm u_n tụ tại quanh điểm L.

- Có những dãy số không có giới hạn hữu hạn.

2.2. Các định lý cơ bản về giới hạn hàm số

Định lí 1: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

- $\lim|u_n| = |L|$ và $\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.
- Nếu $u_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 2: Giả sử $\lim u_n = L; \lim v_n = M$ và c là một hằng số.

Khi đó

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$. • $\lim(u_n - v_n) = L - M$.
- $\lim(u_n.v_n) = L.M$. • $\lim(cu_n) = cL$.
- $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \ne 0$).

Định lí 3 (Nguyên lí kẹp giữa): Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ và số thực L. Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Định lí 4:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

2.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Khái niệm: Cấp số nhân gọi là lùi vô hạn nếu có công bội q thỏa mãn điều kiện $|q| < 1$.

Tổng các số hạng:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + ... = u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + ... = \frac{u_1}{1-q},$$

$(|q| < 1)$.

Chẳng hạn dãy số $\left((-1)^n\right)$, tức là dãy số: $-1; 1; -1; 1; ...$

- Nếu C là hằng số thì $\lim C = C$.

3. Dãy số có giới hạn vô cực

3.1. Định nghĩa dãy số có giới hạn vô cực

Định nghĩa:

- Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Khi đó ta viết $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

- Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số,

Nhận xét: *Nếu* $\lim u_n = -\infty$ *thì* $\lim(-u_n) = +\infty$.

Chú ý:

- *Các dãy số có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.*
- *Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.*

Nhận xét:

Từ định nghĩa, ta có kết quả sau:

a) $\lim n = +\infty$.

b) $\lim\sqrt{n} = +\infty$.

kể từ một số hạn nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Khi đó ta viết $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

c) $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

d) $\lim n^k = +\infty \left(k > 0\right)$.

e) $\lim q^n = +\infty \left(q > 1\right)$.

• *Định lí: Nếu* $\lim \left|u_n\right| = +\infty$ *thì* $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

3.2. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

• Nếu $\lim u_n = +\infty; \lim v_n = +\infty$ thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = +\infty$.

• Nếu $\lim u_n = +\infty; \lim v_n = -\infty$ thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = -\infty$.

• Nếu $\lim u_n = -\infty; \lim v_n = +\infty$ thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = -\infty$.

• Nếu $\lim u_n = -\infty; \lim v_n = -\infty$ thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = +\infty$.

Quy tắc 2

• Nếu $\lim u_n = +\infty; \lim v_n = L \neq 0$

thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = \begin{cases} +\infty \; khi \; L > 0 \\ -\infty \; khi \; L < 0 \end{cases}$.

• Nếu $\lim u_n = -\infty; \lim v_n = L \neq 0$

thì $\lim \left(u_n.v_n\right) = \begin{cases} -\infty \; khi \; L > 0 \\ +\infty \; khi \; L < 0 \end{cases}$.

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ thì

• Khi $\lim u_n = L > 0 \Rightarrow \lim \dfrac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty \; khi \; v_n > 0, \forall n \\ -\infty \; khi \; v_n < 0, \forall n \end{cases}$.

• Khi $\lim u_n = L < 0 \Rightarrow \lim \dfrac{u_n}{v_n} = \begin{cases} -\infty \; khi \; v_n > 0, \forall n \\ +\infty \; khi \; v_n < 0, \forall n \end{cases}$.

3.3. Một số kết quả

a) $\lim \dfrac{q^n}{n} = +\infty$ và $\lim \dfrac{n}{q^n} = 0$, với $q > 1$.

b) Cho hai dãy số $\left(u_n\right)$ và $\left(v_n\right)$,

• Nếu $u_n \le v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.

• Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ và $\lim \left|v_n\right| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Mở rộng:

Ta có $\lim \dfrac{q^n}{n^k} = +\infty$ *và* $\lim \dfrac{n^k}{q^n} = 0$*, với* $q > 1$ *và* k *là một số nguyên dương.*

- Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ thì $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

Định nghĩa

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mọi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Trường hợp thường gặp

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \, (k > 0)$
- $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$
- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n)
$$\begin{cases} |u_n| \le v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = 0$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn

- **Định nghĩa**
  - Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$
- **Các định lí**
  - Phép tính giới hạn
    - $\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$
    - $\lim(u_n.v_n) = L.M$
    - $\lim(cu_n) = cL$
    - $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}(M \neq 0)$
  - Nguyên lí kẹp giữa
    - Cho ba dãy số $(u_n),(v_n),(w_n)$

      Nếu $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim u_n = \lim w_n = L \end{cases}$

      Thì $\lim v_n = L$
- **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn**
  - $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + q_1q^3 + ... = \frac{u_1}{1-q}(|q| < 1)$

Dãy số có giới hạn vô cực

Định nghĩa

Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Định nghĩa

1

$$\lim u_n = +\infty, \lim v_n = +\infty \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = +\infty$$

$$\lim u_n = +\infty, \lim v_n = -\infty \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = -\infty$$

$$\lim u_n = -\infty, \lim v_n = +\infty \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = -\infty$$

$$\lim u_n = -\infty, \lim v_n = -\infty \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = +\infty$$

2

$$\left.\begin{matrix} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = L \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = \begin{cases} +\infty \ khi \ L > 0 \\ -\infty \ khi \ L < 0 \end{cases}.$$

$$\left.\begin{matrix} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = L \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(u_n.v_n) = \begin{cases} -\infty \ khi \ L > 0 \\ +\infty \ khi \ L < 0 \end{cases}.$$

3

$\lim u_n = L \neq 0$

$\lim v_n = 0$

$$\lim u_n = L > 0 \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty \ khi \ v_n > 0, \forall n \\ -\infty \ khi \ v_n < 0, \forall n \end{cases}.$$

$$\lim u_n = L < 0 \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} -\infty \ khi \ v_n > 0, \forall n \\ +\infty \ khi \ v_n < 0, \forall n \end{cases}.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn bằng định nghĩa

Bài toán 1. Chứng minh dãy số có giới hạn 0 bằng định nghĩa

Phương pháp giải

Cách 1: Áp dụng định nghĩa.

Cách 2: Sử dụng các định lí sau:

• Nếu k là số thực dương thì $\lim \frac{1}{n^k}=0.$

• Với hai dãy số (u_n) và (v_n).

nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ và $\lim u_n = 0.$

• Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n = 0.$

Ví dụ: Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}.$ b) $u_n = \frac{\sin 4n}{n+3}.$

hướng dẫn giải

a) Với mỗi số dương ε tùy ý cho trước, ta có

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{3n+2}\right| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon}-2\right).$$

Đặt $n_0 = 1+\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]$ thì $n_0 \in \mathbb{N}^*$ và $|u_n|<\varepsilon, \forall n \ge n_0.$

Vậy $\lim u_n = 0.$

b) Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$|\sin 4n| \le 1 \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{\sin 4n}{n+3}\right| \le \left|\frac{1}{n+3}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Áp dụng cho định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim \frac{1}{n^k}=0$" ta được $\lim \frac{1}{n}=0.$

Từ đó suy ra $\lim u_n = 0.$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a) $u_n = \frac{1+\sin n^4}{4n+5}.$ b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{5^{n-1}}.$

hướng dẫn giải

a) Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $|\sin n^4| \le 1 \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{1+\sin n^4}{4n+5}\right| \le \left|\frac{2}{4n+5}\right| \le \left|\frac{2}{4n}\right| = \frac{1}{2n}.$

Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$" ta được $\lim \frac{1}{n} = 0.$ Từ đó suy ra $\lim u_n = 0.$

b) Ta có $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Vì $\lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0.$

Từ đó suy ra $\lim u_n = 0.$

Bài toán 2. Giới hạn của dãy số có số hạng tổng quát dạng phân thức

Phương pháp giải

Để tính giới hạn của dãy số có số hạng tổng quát dạng phân thức: $\lim \frac{u_n}{v_n}.$

• Nếu $u_n; v_n$ là hàm đa thức theo biến n thì chia cả tử số và mẫu số cho n^p, trong đó p là số mũ lớn nhất. Sau đó áp dụng: $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (với $k > 0$).

• Nếu $u_n; v_n$ là hàm số mũ thì chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất. Sau đó sử dụng công thức: $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1.$

Chú ý: Thông thường, ta sẽ biến đổi các dãy số tổng quát về dãy số có giới hạn 0 quen thuộc như trên.

Ví dụ: Chứng minh rằng: $\lim \frac{1}{n+1} = 0.$

Hướng dẫn giải

Ta có $0 < \left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{n}$ và $\lim \frac{1}{n} = 0.$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} \right).$ b) $u_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} \right).$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} \right)\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n} \right) = \left(\sqrt{2n+3} \right)^2 - \left(\sqrt{2n} \right)^2 = 3$

$\Rightarrow \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} = \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}}.$

Mà $\frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} < \frac{3}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n}} = \frac{3}{2\sqrt{2n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}$ và $\lim \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b) Ta có $\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)=(n+2)-(n-2)=4$

$\Rightarrow \sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}=\dfrac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}$.

Mà $\dfrac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-2}}$ và $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n-2}}=0$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau có giới hạn 0.

a) $u_n=\dfrac{\cos n}{n+4}$.

b) $u_n=\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{5}}{4^n}$.

c) $u_n=\dfrac{(-1)^n\cos n}{n^2+1}$.

d) $u_n=\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\left|\dfrac{\cos n}{n+4}\right|<\dfrac{1}{n+4}<\dfrac{1}{n}$ và $\lim\dfrac{1}{n}=0$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b) Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n\cos n}{n^2+1}\right|<\left|\dfrac{\cos n}{n^2+1}\right|<\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

c) Ta có $\left|\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{5}}{4^n}\right|<\dfrac{1}{4^n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ và $\lim\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ (do $\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$).

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

d) Ta có $\left|\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}\right|<\dfrac{1}{(1,01)^n}=\left(\dfrac{1}{1,01}\right)^n$ và $\lim\left(\dfrac{1}{1,01}\right)^n=0$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng các dãy số sau có giới hạn bằng 0.

a) $\lim\dfrac{2^n+3^n}{4^n}=0$.

b) $\lim\dfrac{a^n}{n!}=0$.

hướng dẫn giải

a) Ta có $\lim\dfrac{2^n+3^n}{4^n}=\lim\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0+0=0$ (do $\left|\dfrac{2}{4}\right|<1$ và $\left|\dfrac{3}{4}\right|<1$).

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b) Gọi m là số tự nhiên thỏa $m+1>|a|$. Khi đó với mọi $n>m+1$.

Ta có $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a}{1}.\frac{a}{2}...\frac{a}{m}\right|.\left|\frac{a}{m+1}...\frac{a}{n}\right| < \frac{|a|^m}{m!}.\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$.

Mà $\lim\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} = 0$ và $\frac{|a|^m}{m!} \le |a|^m$. Từ đó suy ra $\lim\frac{a^n}{n!} = 0$.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ với mọi *n*.

b) Chứng minh rằng $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ với mọi *n*.

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.

Hướng dẫn giải

a) Với mọi *n* ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right):\left(\frac{n}{3^n}\right) = \frac{n+1}{3n} \le \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$.

ta được điều phải chứng minh.

b) Sử dụng phương pháp quy nạp toán học chứng minh $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n; \forall n (*)$

- $n = 1$ ta có $0 < u_1 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$, suy ra (*) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (*) đúng với $n = k$ tức là $0 < \frac{k}{3^k} \le \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$. Thật vậy,

$u_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}} > 0$. Mặt khác $u_{k+1} \le \frac{2}{3}u_k \Leftrightarrow u_{k+1} \le \frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$.

Ta được điều phải chứung minh.

c) Do $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ mà $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

Ta được điều phải chứng minh.

CHÚ Ý: MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI NHANH

Quy ước: Trong máy tính không có biến *n* nên ta ghi *x* thay cho *n*.

Ghi nhớ cách nhập giá trị của *x*.

- $x \to +\infty$ thì ta nhập $x = 9999999999$ (10 số 9)
- $x \to -\infty$ thì ta nhập $x = -9999999999$ (10 số 9)
- Đề bài yêu cầu tính $\lim(u_n)$ thì ta hiểu rằng, biến

Ví dụ 1. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{1}{n+1}$.

Hướng dẫn giải

Cách bấm máy:

- Nhập vào máy tính biểu thức sau:

$n \to -\infty$.

Ghi nhớ cách hiển thị kết quả

• Gặp hằng số $c.10^{n}$ (trong đó α là số nguyên âm, thông thường $\alpha = -10, \alpha = -12, ...$)

Ví dụ: 15.10^{-12} là số rất nhỏ và gần bằng 0.

• Gặp hằng số $c.10^{10}, c.10^{20}, ...$ đọc là (dấu của c) nhân vô cực với c là hằng số (chú ý có thể lớn hơn 10).

Ví dụ: -5.10^{10} là âm vô cực, ghi là $-\infty; 5.10^{10}$ là dương vô cực, ghi là $+\infty$.

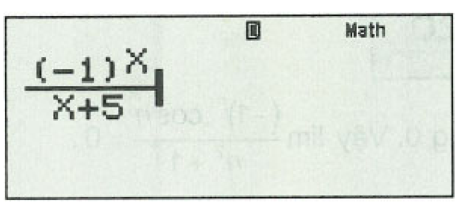
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{(-1)^{n}}{n+5}$.

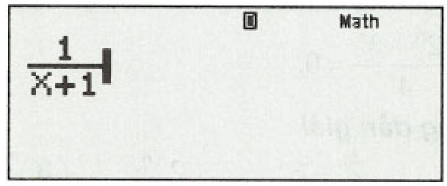
Hướng dẫn giải

Cách bấm máy:

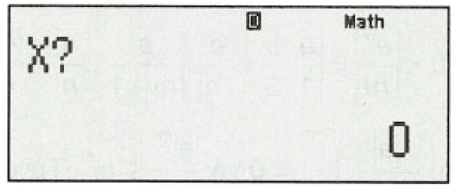
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



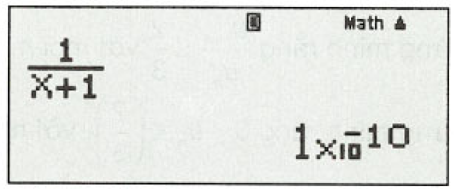
• Sau đó bấm CALC.



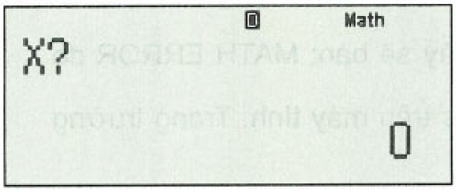
• Sau đó bấm CALC, màn hình sẽ xuất hiện như hình bên. Ta hiểu rằng "Bạn muốn gán x bằng bao nhiêu?"



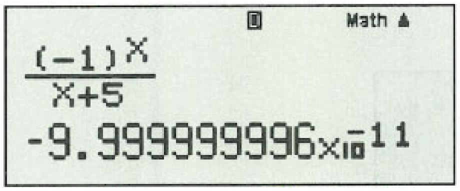
• Nhập: $x = 9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: 1.10^{-10} là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0. Vậy $\lim \frac{1}{n+1} = 0$.



• Nhập $x=9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: $-9,999999996.10^{-11}$ là một giá trị rất nhỏ gần bằng 0.

Vậy $\lim\frac{(-1)^n}{n+5}=0$.

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{(-1)^n.\cos n}{n^2+1}$.

• Nếu ta nhập $\frac{(-1)^n.\cos n}{n^2+1}$, sau đó CALC như trên máy sẽ báo: MATH ERROR.

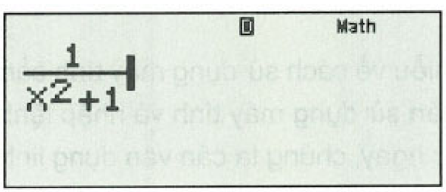
Hướng dẫn giải

Vận dụng định lí 1 nếu $|u_n|\le v_n$ với mọi n và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$.

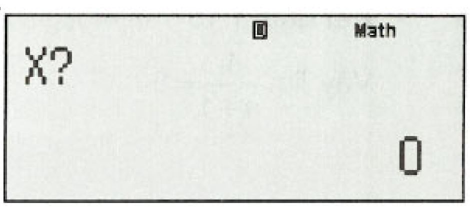
Ta có đánh giá sau: $\left|\frac{(-1)^n.\cos n}{n^2+1}\right|<\left|\frac{\cos n}{n^2+1}\right|<\frac{1}{n^2+1}$, ta chỉ cần ghi $\frac{1}{n^2+1}$ vào máy tính là sẽ tính được.

Cách bấm máy:

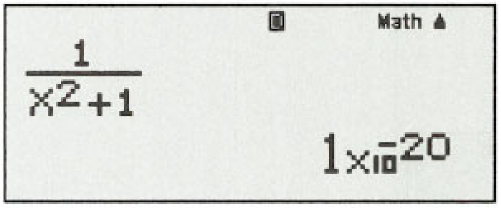
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC.



• Nhập: $x=9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: 1.10^{-20} là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0. Vậy $\lim\dfrac{(-1)^n.\cos n}{n^2+1}=0.$

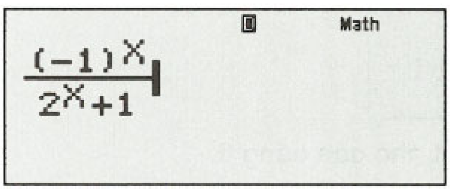
Ví dụ 3. Tính giới hạn sau $\lim\dfrac{(-1)^n}{2^n+1}.$

• Nếu ta nhập $\dfrac{(-1)^n}{2^n+1}$, sau đó CALC như trên máy sẽ báo: MATH ERROR do hàm số mũ tăng rất nhanh nên sẽ không tính được trên máy tính. Trong trường hợp này ta sẽ xử lý như sau:

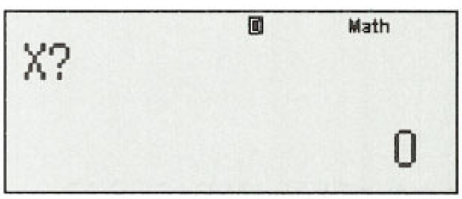
Hướng dẫn giải

Cách bấm máy:

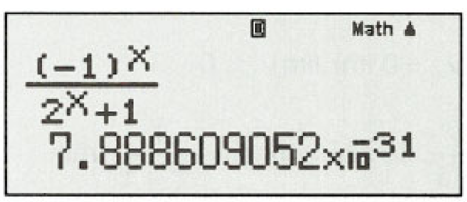
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Bấm CALC.



• Nhập: $x=100$, sau đó bấm “=”, ta được kết quả:



Kết quả: $7,888609052.10^{-31}$ là một giá trị rất rất nhỏ gần bằng 0.

Vậy $\lim\dfrac{(-1)^n}{2^n+1}=0.$

NHẬN XÉT: Qua 4 ví dụ trên, phần nfao bạn đọc đã hiểu về cách sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để giải các bài toán về dãy số có giới hạn là 0. Có những bài toán sử dụng máy tính và nhập lệnh CALC $x=9999999999$ sẽ ra luôn kết quả, có những bài toán không ra được ngay, chúng ta cần vận dụng linh hoạt các cách đánh giá cũng như đổi cách bấm máy để ra được kết quả bài toán. Qua đây, đòi hỏi chúng ta cần có kiến thức khá chắc chắn về định nghĩa giới hạn dãy số để có thể vận dụng làm các bài tập cho tốt hơn.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn 0?

A. $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$. **B.** $u = \left(-\sqrt{2}\right)^n$. **C.** $u_n = \left(\frac{4}{2+\sqrt{5}}\right)^n$. **D.** $u_n = \left(-\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

Câu 2: Dãy số với $u_n = \frac{(-1).\cos 5n}{3^n}$ có giới hạn bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** 0.

Câu 3: Giới hạn $\lim \frac{\sin \frac{\pi n}{6}}{3n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 4: Giới hạn $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+5}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $-\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 0.

Câu 5: Giới hạn $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$ là

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 6: Giới hạn $\lim \frac{n^2-n+3}{n^3+2n}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 7: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào có giới hạn 0?

(1): $\frac{(-1)^n}{n+5}$; (2): $\frac{\sin n}{n+5}$; (3): $\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$; (4): $\frac{n^2+2}{n(n+1)}$; (5): $\frac{(-1)^n.\cos n}{n^2+2}$.

A. (1), (2), (3), (4). **B.** Chỉ (2), (3). **C.** (1), (2), (3), (5). **D.** Chỉ (1), (5).

Câu 8: Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{2n+1}{n}$. **D.** $\frac{1}{n}$.

Câu 9: Xét các câu sau:

(1) Ta có $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$;

(2) Ta có $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k là số nguyên tùy ý.

A. Cả hai câu đều đúng. **B.** Cả hai câu đều sai.

C. Chỉ (1) đúng. **D.** Chỉ (2) sai.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_n = m, (m \geq 1) \\ 2^n u_{n+1} = |2^n u_n - 1|, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tham số m để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 0 là

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Dạng 2: Dãy số có giới hạn hữu hạn

Bài toán 1. Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim u_n = L$

Phương pháp giải

Ta đi chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u_n = \frac{3n-1}{2n+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = \lim\left(\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right) = \lim \frac{-5}{2n+1} = 0.$$

Do đó $\lim u_n = \frac{3}{2}$. Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$, ta có thể nhận xét $\lim(u_n - 1) = \lim\left(\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right) = \lim\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right) = 0$.

Do đó $\lim u_n = 1$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn

Phương pháp giải

Sử dụng nguyên lí kẹp:

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ và số thực L.

Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Ví dụ: Chứng minh các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\frac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b) $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

hướng dẫn giải

a) Ta có $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}-(-1)\right)=\lim\dfrac{1}{n^3+1}$.

xét dãy $u_n=\dfrac{1}{n^3+1}\Rightarrow|u_n|=\dfrac{1}{n^3+1}<\dfrac{1}{n^3}=v_n,\forall n$ và

$\lim v_n=\lim\dfrac{1}{n^3}=0$ nên $\lim\dfrac{1}{n^3+1}=0$.

Do đó $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right)=-1$.

Ta được điều phải chứng minh.

b) Ta có $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)}$.

Xét dãy $u_n=\dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)}$

$\Rightarrow|u_n|=\dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)}<\dfrac{5n+4}{4n^2}=\dfrac{5}{4n}+\dfrac{1}{n^2}=v_n,\forall n.$

Mà $\lim v_n=\lim\dfrac{5}{4n}+\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\dfrac{3}{2\left(3n^2+n\right)}=0$.

Do đó $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Chứng minh có giới hạn: $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Ta lại có $\dfrac{|\sin 3n|}{3^n}\le\dfrac{1}{3^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\ \forall n$ và $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, nên $\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)=0$.

Do đó $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$. Ta được điều cần phải chứng minh.

Bài toán 3. Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn

Phương pháp giải

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa dãy số cần tìm giới hạn về tổng, hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim C = C$, với C là hằng số.

2. Kết quả trong định lí 1.

3. Kết quả trong định lí 2.

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$.

b) $\lim (2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$.

hướng dẫn giải

a) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1} = \lim \dfrac{n^2\left(-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

$= \lim \dfrac{-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

Mà

- $\lim\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$= \lim 2 + \lim \dfrac{1}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2} = 2+0+0 = 2 \neq 0$.

- $\lim\left(-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = \lim(-4) + \lim\dfrac{1}{n} + \lim\dfrac{2}{n^2}$

$= -4+0+0 = -4$

Nên $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1} = \dfrac{-4}{2} = -2.$

Chú ý: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của n và sử dụng kết quả $\lim \dfrac{a}{n^k} = 0$ với $k > 0$.

a) $\lim (2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

$= \lim \dfrac{3(2n+1)^2}{n^2+2n} - \lim \dfrac{(2n+1)^2}{n^2+3n-1}$.

Mà

- $\lim \frac{3(2n+1)^2}{n^2+2n} = \lim \frac{3\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3.2^2}{1} = 12.$

- $\lim \frac{(2n+1)^2}{n^2+3n-1} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{2^2}{1} = 4.$

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa.

Nên

- $\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n} - \frac{1}{n^2+3n-1}\right) = 12-4=8.$

Chú ý: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép tách thành các giới hạn nhỏ.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{4n+3}$. b) $\lim \frac{3\sqrt[4]{n^5}+4n-2}{2\sqrt[4]{n^5}-3n}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{4n+3} = \lim \frac{n\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}-3n}{4n+3} = \lim \frac{\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}-3}{4+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{9+0}-3}{4+0} = \frac{0}{4} = 0.$

b) $\lim \frac{3\sqrt[4]{n^5}+4n-2}{2\sqrt[4]{n^5}-3n} = \lim \frac{3+\frac{4}{\sqrt[4]{n}}-\frac{2}{\sqrt[4]{n^5}}}{2-\frac{3}{\sqrt[4]{n}}} = \frac{3+0-0}{2-0} = \frac{3}{2}.$

ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$. b) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$.

hướng dẫn giải

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right) = \lim \frac{4n^2+2n-4n^2}{\sqrt{4n^2+2n}+2n} = \lim \frac{2n}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right)}$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$

b) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right) + \lim\left(n-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right).$

Mà

- $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=\dfrac{2}{1+1}=1.$

- $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)=\lim\dfrac{n^3-\left(n^2+n^3\right)}{n^2+n.\sqrt[3]{n^2+n^3}+\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2}$

$=\lim\dfrac{-1}{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+1}\right)^2}=\dfrac{-1}{1+1+1}=-\dfrac{1}{3}.$

Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}.$

Chú ý: *Để tính các giới hạn trên trước tiên chúng ta cần sử dụng phép nhân liên hợp để khử dạng* $\infty-\infty$ *và* $\dfrac{k}{\infty-\infty}$.

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$.

b) $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$.

hướng dẫn giải

a) $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-2}{7.\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+3}=\dfrac{0-2}{7.0+3}=-\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}=\lim\dfrac{2^{n+1}-1}{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}=\lim 2.\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}=0.$

Chú ý: *Để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho cơ số cao nhất và sử dụng kết quả* $\lim q^n=0$ *với* $|q|<1$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$

b) $\lim\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right).$

Hướng dẫn giải

a) Do $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}.\frac{2k+1-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

Suy ra $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)$

$=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$

b) Ta có $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}...\frac{n-2}{n-1}.\frac{n}{n-1}.\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$

Suy ra $\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\frac{n+1}{2n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$

Chú ý: Ta thường gặp giới hạn của một số dãy số sau:

• ***Dạng 1:*** *Nếu dãy số (u_n) có $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n),Q(n)$ là các đa thức của n), thì chia tử và mẫu cho n^k, với n^k là lũy thừa có số mũ cao nhất của n trong các đa thức $P(n)$ và $Q(n)$, sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn.*

• ***Dạng 2:*** *Nếu dãy số (u_n) có u_n là biểu thức chứa n dưới dấu căn, thì đưa n^k ra ngoài dấu căn (với k là số cao nhất của n trong dấu căn) rồi áp dụng các định lí. Nếu gặp dạng (vô định) $n^k.n_u$ với $\lim u_n=0$, thì phải nhân và chia với biểu thức liên hợp của biểu thức chứa căn tiến về 0. Cần chú ý các hằng đẳng thức:*

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b.$$

• ***Dạng 3:*** *Nếu dãy số (u_n) có u_n là một phân thức mà tử và mẫu là các biểu thức của các lũy thừa có dạng $a^n,b^n,...(n\in\mathbb{N})$ trong đó $a,b,...$ là các hằng số, thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa có cơ số có trị tuyệt đối lớn nhất trong các lũy thừa ở tử và mẫu, rồi áp dụng các định lí.*

• ***Dạng 4:*** *Nếu dãy số (u_n) trong đó u_n là một tổng hoặc một tích của n số hạng (hoặc n thừa số), thì phải rút gọn u_n rồi tìm $\lim u_n$ theo định lí.*

• ***Dạng 5:*** *Nếu dãy số (u_n) trong đó u_n được cho bởi một hệ thức truy hồi, thì ta tìm công thức tổng quát của (u_n) rồi tìm $\lim u_n$ theo định lí.*

Bài toán 4. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp giải

- Sử dụng công thức: $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... = \dfrac{u_1}{1-q}$, với $|q| < 1$.

Ví dụ: Tính các tổng sau:

a) $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} + ...$

b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ...$

Hướng dẫn giải

a) Xét dãy số $(u_n): \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, ..., \dfrac{1}{3^n}, ...$ là một cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{1}{3}, q = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} - 1.$

Vậy $\lim S = \dfrac{1}{2}$.

b) Xét dãy số $(u_n): 16; -8; 4; -2; ...$ là một cấp số nhân có $u_1 = 16, q = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ...$ có $\lim S = \dfrac{16}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{32}{3}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $\alpha = 0,353535...$ b) $\beta = 5,231231...$

Hướng dẫn giải

a) $\alpha = 0,353535... = 0,35 + 0,0035 + ... = \dfrac{35}{10^2} + \dfrac{35}{10^4} + ... = \dfrac{\dfrac{35}{10^2}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = \dfrac{35}{99}$.

b) $\beta = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ... = 5 + \dfrac{231}{10^3} + \dfrac{231}{10^6} + ...$

$= 5 + \dfrac{\dfrac{231}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = 5 + \dfrac{231}{999} = \dfrac{1742}{333}$.

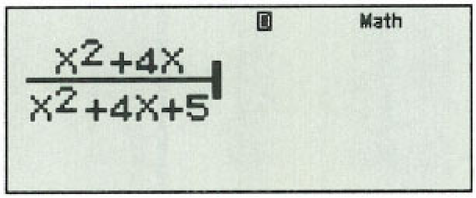
Để biểu diễn một số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số, ta biểu diễn số đó thành tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và suy ra kết quả.

Cách bấm máy:

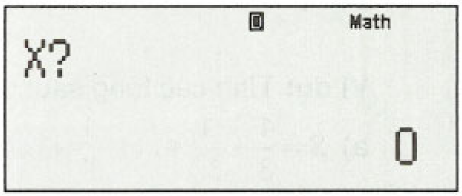
Ví dụ 1: Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{n^2+4n}{n^2+4n+5}$.

Hướng dẫn giải

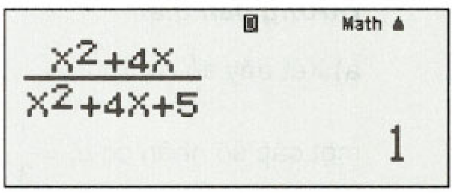
- Nhập vào máy tính biểu thức sau:



- Sau đó bấm **CALC.**



- Nhập $x=9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:

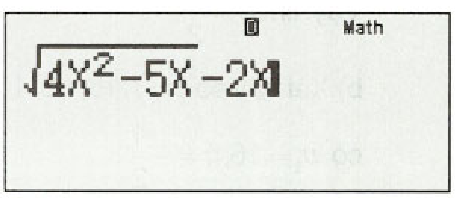


Kết quả: Vậy giới hạn của dãy số bằng 1.

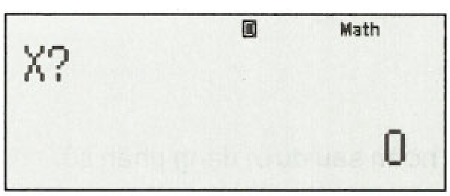
Ví dụ 2: Tính giới hạn sau $\lim\left(\sqrt{4n^2-5n}-2n\right)$.

Hướng dẫn giải

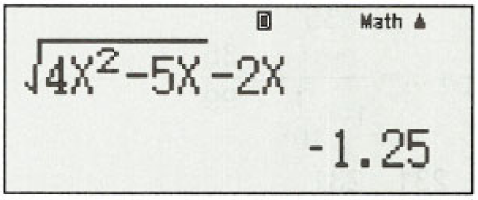
- Nhập vào máy tính biểu thức sau:



- Sau đó bấm CACL.



- Nhập: $x=9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: Vậy giới hạn của dãy số bằng $-1,25=-\dfrac{5}{4}$.

NHẬN XÉT: Qua 2 ví dụ trên, phần nào bạn đọc đã hiểu cách sử dụng MTCT để tính toán các bài toán liên quan đến giới hạn của dãy số (giới hạn là số thực). Tuy nhiên, MTCT không hẳn là một công cụ vạn năng để chúng ta giải quyết các bài toán phức tạp hay những bài toán hay và khó. Vì vậy, chúng ta cần phải hiểu sâu bản chất của vấn đề và rèn luyện nhiều dạng bài tập để thao tác nhanh và tập được cách xử lí khi gặp một bài toán lạ hay không sử dụng được MTCT. Chúng ta cùng nhau sang các bài tập rèn luyện dưới đây.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Giới hạn $\lim \dfrac{2n+1}{n+2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 2: Giới hạn $\lim \dfrac{n+1}{n^2+2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 3: Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 4: Giới hạn $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 5: Giới hạn $\left(\sqrt{9n^2+2n}-\sqrt[3]{8n^3+6n+1}-n\right)$ là

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 6: Giới hạn $\lim \dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^2+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5}{n^5}$ bằng

A. 64. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 128.

Câu 7: Giới hạn $\lim \dfrac{1-4^n}{1+4^n}$ là

A. 1. B. -1. C. 0. D. $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 8: Giới hạn $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ là

A. 4. B. 2. C. 7. D. -6.

Câu 9: Giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{4.6}+...+\dfrac{1}{2n\left(2n+2\right)}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. 2. D. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 10: Giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+\left(n+1\right)\sqrt{n}}\right]$ là

A. -2 B. 1. C. $\dfrac{3}{2}$. D. $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 11: Tổng $S=8+88+888+...+\underbrace{888...8}_{n\text{ chữ số } 8}$ bằng

A. $10^{n+1}-10-36n$.

B. $10^{n+1}+10+54n$.

C. $\dfrac{8}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$.

D. $\dfrac{1}{81}\left(10^{n+1}-10-72n\right)$.

Câu 12: Tổng $S=5-\sqrt{5}+1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5}-...$ bằng

A. $\dfrac{25-5\sqrt{5}}{4}$.

B. $\dfrac{25-3\sqrt{5}}{4}$.

C. $\dfrac{25+3\sqrt{5}}{4}$.

D. $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}$.

Dạng 3: Dãy số có giới hạn vô cực

Phương pháp giải

Để tìm giới hạn vô cực của dãy số, ta biến đổi dãy số đã cho về tích hoặc thương của các dãy số đã biết giới hạn, rồi dựa theo các quy tắc để tìm giới hạn vô cực của các dãy số.

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$.

b) $\lim\dfrac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}=\lim\dfrac{n^5\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{2}{n^5}\right)}{n^3\left(4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}\right)}$.

$$=\lim n^2.\left(\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}{4+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3}}\right).$$

Mà $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}{4+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3}}\right)=\frac{1}{4}>0$

Nên $\lim\frac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}=+\infty.$

b) $\lim\frac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$

$$=\lim\frac{-n^2.\sqrt[3]{1-\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^6}}}{n\left(1+\frac{12}{n}\right)}$$

$$=\lim(-n).\frac{\sqrt[3]{1-\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^6}}}{1+\frac{12}{n}}$$

Mà $\lim(-n)=-\infty$ và $\lim\frac{\sqrt[3]{1-\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^6}}}{1+\frac{12}{n}}=\frac{1}{1}=1>0$

Nên $\lim\frac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}=-\infty.$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right).$ b) $\lim\frac{\left(n^2+1\right)\left(2n+3\right)}{\sqrt{n^4-n^2+1}}.$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\sqrt{n}.\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right).$

Do $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{2}-1>0.$

Nên $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)=+\infty$.

b) $\lim \dfrac{\left(n^2+1\right)\left(2n+3\right)}{\sqrt{n^4-n^2+1}} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}}$.

Do $\lim\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)=1.2=2>0; \lim\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}=0$ và $\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}>0.$

Nên $\lim \dfrac{\left(n^2+1\right)\left(2n+3\right)}{\sqrt{n^4-n^2+1}}=+\infty.$

Chú ý:

Khi tính các giới hạn phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

• Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.

• Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và mẫu số.

Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right)$.
b) $\lim \dfrac{(-3)^n-6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right)=\lim 5^n.\left[1-3.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]$.

Do $\lim 5^n=+\infty$ và $\lim\left[1-3.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]=1-3.0=1>0$ nên $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right)=+\infty$.

b) $\lim \dfrac{(-3)^n-6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}=\lim \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$.

Do $\lim\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1\right]=-1<0; \lim\left[3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right]=0$ và $3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n>0$

Nên $\lim \dfrac{(-3)^n-6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}=-\infty.$

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right)$.
b) $\lim\left(\dfrac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right)=\lim n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$.

Do $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=1>0$ nên $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right)=+\infty.$

b) $\lim\left(\frac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)=\lim n^3\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sin 2n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)$.

Mà $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sin 2n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)=\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}>0.$

(do $\left|\frac{2\sin 2n}{n^3}\right|\le\frac{2}{n^3},\forall n;\lim\frac{2}{n^3}=0\Rightarrow\lim\frac{2\sin 2n}{n^3}=0$)

Nên $\lim\left(\frac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)=+\infty.$

MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI NHANH

Quy ước: Trong máy tính không có biến *n* nên ta ghi *x* thay cho *n*.

Ghi nhớ cách nhập giá trị của *x*

- $x\to+\infty$ thì ta nhập $x=9999999999$ (10 số 9)
- $x\to-\infty$ thì ta nhập $x=-9999999999$ (10 số 9)
- Đề bài yêu cầu tính $\lim\left(u_n\right)$ thì ta hiểu rằng, biến $n\to\infty$.
- Gặp hằng số $c.10^{\alpha}$ (trong đó α là số nguyên âm, thông thường $\alpha=-10;\alpha=-12,...$).

Ghi nhớ cách hiển thị kết quả

Ví dụ: 15.10^{-12} đọc là 0.

- Gặp hằng số $c.10^{10}c.10^{20},...$ đọc là (dấu của *c*) nhân vô cực đối với *c* là hằng số (chú ý có thể lớn hơn 10).

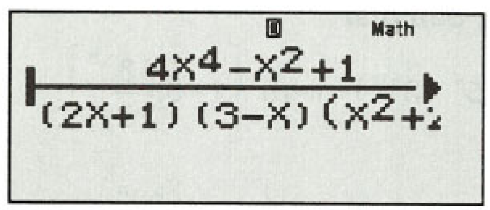
Ví dụ: -5.10^{10} đọc là âm vô cực, ghi là $-\infty$; 5.10^{10} đọc là dương vô cực, ghi là $+\infty$.

Ví dụ: Tính giới hạn sau: $\lim\frac{4n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)\left(n^2+1\right)}$.

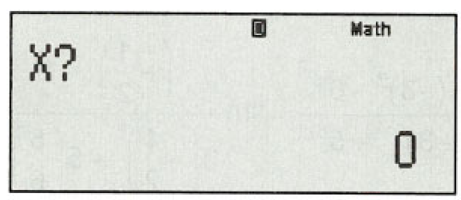
Hướng dẫn giải

Cách bấm máy:

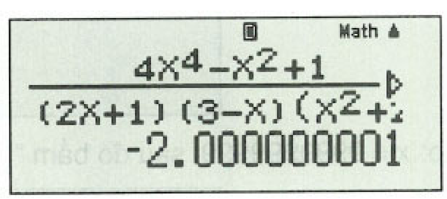
- Nhập vào máy tính biểu thức sau:



- Sau đó bấm CALC.



- Nhập: $x=9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: Vậy giới hạn của dãy số bằng -2.

• Kết quả có thể là một số thực cụ thể, đó chính là giới hạn mà ta cần tìm.

Chú ý: Thông thường, để tính giới hạn của dãy số (là số thực *L*), ta cho $x \to +\infty$, tức là nhập vào máy tính $x = 9999999999$ (10 số 9).

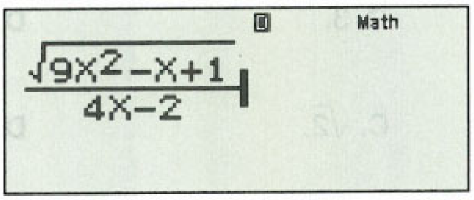
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$.

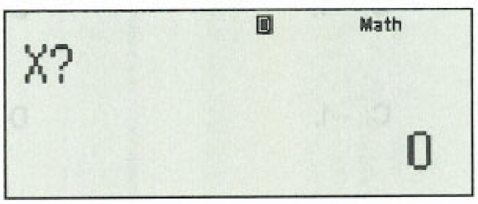
Hướng dẫn giải

<u>Cách bấm máy:</u>

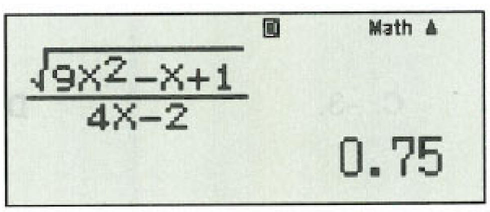
Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC.



• Nhập: $x = 9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



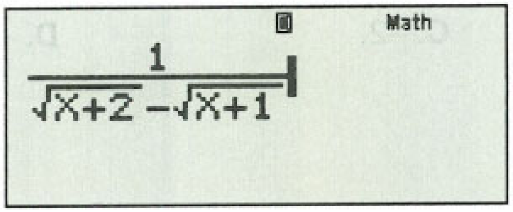
Kết quả: Vậy giới hạn của dãy số bằng $0,75 = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 2: Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$.

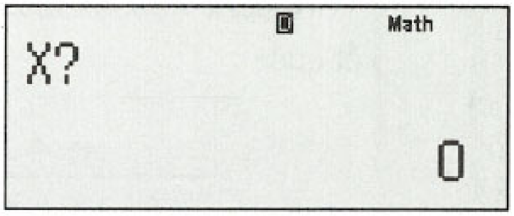
Hướng dẫn giải

Cách bấm máy:

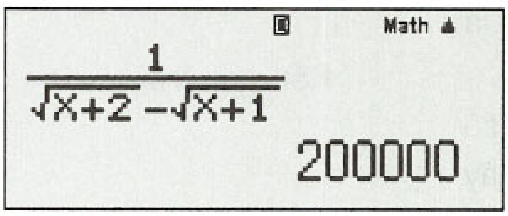
• Nhập vào máy tính biểu thức sau:



• Sau đó bấm CALC.



• Nhập $x = 9999999999$, sau đó bấm "=", ta được kết quả:



Kết quả: Vậy giới hạn của dãy số bằng $+\infty$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Giới hạn $\lim\left(2n^2 - n + 1\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 2: Giá trị của $\lim\left(-n^3 + 2n^2 + 2\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 3: Giới hạn $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 4: Giá trị của $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt[3]{2}$. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Câu 5: Giá trị của $\lim n\sqrt{n+1}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Câu 6: Giới hạn $\lim\left(-2n^2 + 5n\right)\left(3^n - 2^n\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $+\infty$.

Câu 7: Giới hạn $\lim\dfrac{3n^3}{-n^2 + 1}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $+\infty$.

Câu 8: Giới hạn $\lim\dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $+\infty$.

Câu 9: Giá trị của $\lim n\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 10: Giá trị của $\lim n\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n+n^3}\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 11: Giới hạn $\lim \frac{n\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 12: Giới hạn $\lim \frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -7. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 13: Giới hạn $\lim\left(n^2-2\cos 3n+2\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Câu 14: Giới hạn $\lim \frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1}$ bằng

A. 5. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 15: Giới hạn $\lim\left(\frac{\sin n^2}{\sqrt{n}}-5\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

Đáp án và lời giải

Dạng 1. Dãy số có giới hạn 0

1 – C	**2 – D**	**3 – A**	**4 – D**	**5 – A**	**6 – B**	**7 – C**	**8 – C**	**9 – C**	**10 – C**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\left|\frac{4}{2+\sqrt{5}}\right|<1$ nên $\lim\left(\frac{4}{2+\sqrt{5}}\right)^n=0$.

Câu 2.

Ta có $0\le\left|\frac{(-1).\cos 5n}{3^n}\right|=\left|\frac{\cos 5n}{3^n}\right|<\frac{1}{3^n}=\left|\frac{1}{3}\right|^n$ mà $\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ nên $\lim\frac{(-1).\cos 5n}{3^n}=0$.

Câu 3.

Ta có $0 \le \left|\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{6}}{3n^2+1}\right| < \dfrac{1}{3n^2+1} < \dfrac{1}{3n^2}$ mà $\lim\dfrac{1}{3n^2} = 0$ nên $\lim\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{6}}{3n^2+1} = 0.$

Câu 4.

Ta có $0 \le \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n+5}\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{3^n+5}\right| < \dfrac{1}{3^n+5} < \dfrac{1}{3^n}$ mà $\lim\dfrac{1}{3^n} = 0$ nên $\lim\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n+5} = 0.$

Câu 5.

Ta có $\left(2+\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right) - 2 = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$ mà $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right| < \dfrac{1}{n}, \forall n$ và $\lim\dfrac{1}{n} = 0.$

Suy ra $\lim\left[\left(2+\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right) - 2\right] = 0 \Rightarrow \lim\left(2+\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right) = 2.$

Câu 6.

Ta có $\dfrac{n^2-n+3}{n^3+2n} = \dfrac{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}}$ mà $\lim\dfrac{1}{n} = 0; \lim\dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 1.$

Suy ra $\lim\dfrac{n^2-n+3}{n^3+2n} = 0.$

Câu 7.

Dễ dàng nhận thấy các các phương án (1); (2); (3); (5) đều có giới hạn là 0, bạn đọc có thể tự chứng minh.

Ta xét phương án:

(4): $\dfrac{n^2+2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+2}{n^2+1} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$, mà $\lim\dfrac{1+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1.$

Vậy phương án (4) không thỏa mãn.

Câu 8.

Dễ dàng chứng minh được các đáp án A, B và D có giới hạn là 0, bạn đọc có thể tự chứng minh.

Ta xét phương án C:

$\dfrac{2n+1}{n} = \dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n} = 2+\dfrac{1}{n}$, mà $\lim\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2 \ne 0$. Vậy phương án C không thỏa mãn.

Câu 9.

Dễ dàng nhận thấy phương án (1) hoàn toàn chính xác do: $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ nên $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0.$

Phương án (2) là sai, vì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ khi *k* là số nguyên dương $\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$. Vậy phương án (2) sai.

Câu 10.

Ta có $2^n u_{n+1} = \left|2^n.u_n - 1\right| \Leftrightarrow u_{n+1} = \left|u_n - \frac{1}{2^n}\right|$.

Chứng minh: $u_n \ge 2^{1-n}$ (bằng quy nạp).

* Với $n = 1$ ta có $u_1 = m \ge 1 = 2^0$.

* Giả sử $u_k > 2^{1-k}$ (với $k > 1$)

* Cần chứng minh: $u_{k+1} > 2^{-k}$.

Ta có $u_{k+1} = \left|u_k - 2^{-k}\right| > \left|2^{1-k} - 2^{-k}\right| = 2^{-k}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Từ đó suy ra $u_n - 2^{-n} > 0$ với mọi $n \Rightarrow u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n}$.

Ta có $u_2 = u_1 - \frac{1}{2}; u_3 = u_2 - \frac{1}{2^2}; u_4 = u_3 - \frac{1}{2^3}; ...; u_n = u_{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow u_n = u_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Công thức tổng quát $u_n = m - \frac{1}{2}.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}} = m - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow \lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\left(m-1\right) + \lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

$\Rightarrow \lim\left(m-1\right) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

1 – A	**2 – C**	**3 – B**	**4 – D**	**5 – C**	**6 – B**	**7 – B**	**8 – C**	**9 – D**	**10 – B**
11 – C	**12 – A**								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\lim \frac{2n+1}{n+2} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2$.

Câu 2.

Ta có $\lim \frac{n+1}{n^2+2} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$.

Câu 3.

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{2+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 4.

Ta có $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}=\lim\dfrac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^6}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{3}{n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1.$

Câu 5.

Ta có $\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-\sqrt[3]{8n^3+6n+1}-n\right)=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+6n+1}-2n\right)=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}.$

Câu 6.

Ta có $\lim\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^5+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5}{n^5}=\lim\dfrac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)^5+\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)^5}{1}=2^5=32.$

Câu 7.

Ta có $\lim\dfrac{1-4^n}{1+4^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+1}=\dfrac{-1}{1}=-1.$

Câu 8.

Ta có $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\dfrac{4.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+1}=\dfrac{7}{1}=7.$

Câu 9.

Ta có

$\lim\left(\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{4.6}+...+\dfrac{1}{2n(2n+2)}\right)=\lim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+...+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\lim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n+2}\right)=\dfrac{1}{4}.$

Câu 10.

Ta có $\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\dfrac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{-k(k+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}.$

Suy ra $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1.$

Câu 11.

Ta viết lại $S=\frac{8}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{n\text{ số }9}\right)=\frac{8}{9}\left(10-1+100-1+...+\underbrace{100..0}_{n\text{ số }0}-1\right)$

$\Rightarrow S=\frac{8}{9}\left[\left(10+100+...+\underbrace{100..00}_{n\text{ số }0}\right)-n\right]\Leftrightarrow S=\frac{8}{9}\left[\frac{10.\left(10^n-1\right)}{10-1}-n\right]=\frac{8}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)=\frac{8}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right).$

Câu 12.

Ta có $S=5-\sqrt{5}+1-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}-...=\frac{5}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{25-5\sqrt{5}}{4}.$

Dạng 3. Dãy số có giới hạn vô cực

1 – D	**2 – A**	**3 – D**	**4 – A**	**5 – D**	**6 – A**	**7 – A**	**8 – D**	**9 – D**	**10 – D**
11 – D	**12 – D**	**13 – D**	**14 – B**	**15 – B**					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\lim\left(2n^2-n+1\right)=\lim n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty.$

Câu 2.

Ta có $\lim\left(-n^3+2n^2+2\right)=\lim n^3\left(-1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)=-\infty.$

Câu 3.

Ta có $\lim\sqrt{2n^2-3n-8}=\lim n\sqrt{2-\frac{3}{n}-\frac{8}{n^2}}=+\infty.$

Câu 4.

Ta có $\lim\sqrt[3]{1+2n-n^3}=\lim\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-1}=-\infty.$

Câu 5.

Ta có $\lim n\sqrt{n+1}=\lim n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=+\infty.$

Câu 6.

Ta có $\lim\left(-2n^2+5n\right)=\lim n^2\left(-2+\frac{5}{n}\right)=-\infty$ và $\lim\left(3^n-2^n\right)=\lim 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=+\infty.$

Nên $\lim\left(-2n^2+5n\right)\left(3^n-2^n\right)=-\infty.$

Câu 7.

Ta có $\lim \dfrac{3n^3}{-n^2+1} = \lim \dfrac{3n}{-1+\dfrac{1}{n^2}} = \lim \dfrac{3n}{-1} = \lim\left(-3n\right) = -\infty.$

Câu 8.

Ta có $\lim \dfrac{2n^2-3n+1}{n+1} = \lim \dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. Do $\lim\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 2$ và $\lim\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ mà $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} > 0.$

Nên $\lim \dfrac{\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = +\infty.$

Câu 9.

Ta có $\lim n\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right) = \dfrac{1}{2}.$

Câu 10.

Ta có $\lim n = +\infty$ và

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n + n - \sqrt[3]{n+n^3}\right) = \lim\left(\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}\right) + \lim\left(\frac{-n}{n^2+n.\sqrt[3]{n+n^3}+\left(\sqrt[3]{n+n^3}\right)^2}\right) = 1.$$

Vậy $\lim n\left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt[3]{n+n^3}\right) = +\infty.$

Câu 11.

Ta có $L = \lim \dfrac{n\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt[3]{n^2+2n}} = \lim \dfrac{n^2.\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{n^2\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2}\right)}} = \lim \dfrac{\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^3.\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{n^2}.\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}}} = \lim\left[\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}}}\right]$

Do $\lim\left[\dfrac{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}}}\right] = \sqrt{2}$ và $\lim\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^2 = +\infty$ nên $L = +\infty$.

Câu 12.

Ta có

$$L = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+2} = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6.\dfrac{n^6-7n^3-5n+8}{n^6}}}{n+2} = \lim \frac{n^2.\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{n+2} = \lim\left(n.\frac{\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)$$

Ta có $\lim\left(\dfrac{\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}-\dfrac{8}{n^6}}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)=1$ và $\lim n=+\infty$.

Từ đó suy ra $L=+\infty$.

Câu 13.

Ta có $\lim\left(n^2-2\cos 3n+2\right)=+\infty$.

Câu 14.

Ta có $\left|\dfrac{n\cos\dfrac{\pi}{n}}{n^2+1}\right|\le\dfrac{n}{n^2+1}$ và $\lim\dfrac{n}{n^2+1}=0$ nên $\lim\dfrac{n\cos\dfrac{\pi}{n}}{n^2+1}=0$.

Câu 15.

Ta có $\lim\left(\dfrac{\sin n^2}{\sqrt{n}}-5\right)=-5$.