

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

Họ, tên thí sinh:..... SBD:

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $u_2 = 12$. Công bội của cấp số nhân đó là

- A. 4. B. 9. C. 36. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) = 4$ là

- A. $x = 65$. B. $x = 81$. C. $x = 82$. D. $x = 64$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I = (1; 2; -1); R = 2$. B. $I = (1; 2; -1); R = 4$.
C. $I = (-1; -2; 1); R = 4$. D. $I = (-1; -2; 1); R = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-2		3	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Câu 5: Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $\frac{1}{3} Bh$. B. Bh . C. $\frac{1}{3} B\pi h$. D. $\frac{1}{3} \pi B^2 h$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (2; 0; -1)$. B. $\vec{n}_4 = (2; -1; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (2; -1; 0)$. D. $\vec{n}_2 = (2; 1; -1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

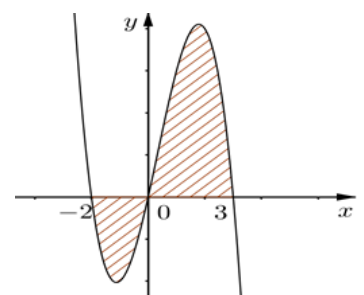
- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 1; -3)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(2; 0; -3)$.

Câu 8: Cho đa giác gồm 10 đỉnh. Số tam giác có ba đỉnh là ba trong số 10 đỉnh của đa giác là

- A. 3^{10} . B. 10^3 . C. A_{10}^3 . D. C_{10}^3 .

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$. B. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.
C. $S = \left| \int_{-2}^3 f(x)dx \right|$. D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$.



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		1		$-\infty$

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
 D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{x^2}{2} + C$. B. $xe^{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$. C. $e^x + \frac{x^2}{2} + C$. D. $e^x + 1 + C$.

Câu 12: Cho $\int_0^2 f(x)dx = 2$ và $\int_2^0 g(x)dx = 1$, khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 5. D. -1.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$		1	$+\infty$		-2	$+\infty$		3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 1 = 0$ là

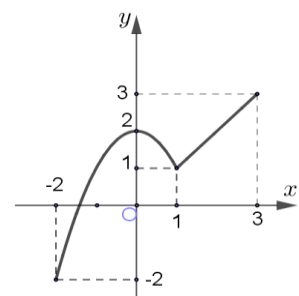
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$+$	
y	-1	$+\infty$	0	1

- A. 0. B. 3.
 C. 2. D. 1.

Câu 15: Khối cầu có bán kính bằng a có thể tích là

- A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. B. $\frac{4}{3}\pi a^2$. C. πa^3 . D. $4\pi a^2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng



- A. 5. B. 1.
 C. 3. D. -1.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = z-2$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) ?

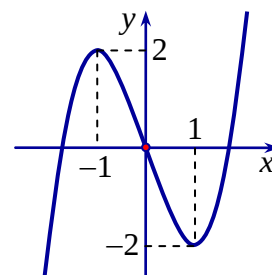
- A. $\vec{u}_1 = (3; 2; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (3; 2; 0)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; -3; -2)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$.

Câu 18: Với a là số thực khác không tùy ý, $\log_3 a^2$ bằng

- A. $\frac{1}{2}\log_3 |a|$. B. $\frac{1}{2}\log_3 a$ C. $2\log_3 a$. D. $2\log_3 |a|$.

Câu 19: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^3 + 3x$. B. $y = x^4 - 2x^2$.
C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^3 - 3x$.



Câu 20: Hàm số $y = 3^{-x}$ có đạo hàm là

- A. $\frac{-3^{-x}}{\ln 3}$. B. $-3^{-x} \ln 3$. C. $3^{-x} \ln 3$. D. $-x3^{-x-1}$.

Câu 21: Số phức liên hợp của số phức $2 - 3i$ là

- A. $-2 - 3i$. B. $-2 + 3i$. C. $2 + 3i$. D. $3 + 2i$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (MNP) là

- A. $x + 3y + 2z - 14 = 0$. B. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 0$. D. $6x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Câu 23: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Giá trị $|z_1| + |z_2|$ bằng

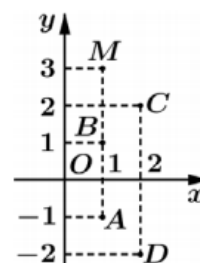
- A. 6 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$.

Câu 24: Thể tích của khối nón có độ dài đường sinh $l = 5$ và bán kính đáy $r = 3$ là

- A. 20π . B. 12π . C. 36π . D. 60π .

Câu 25: Trong hình vẽ bên điểm M là điểm biểu diễn số phức $\bar{z} - 1 + i$. Điểm biểu diễn số phức z là

- A. Điểm C. B. Điểm A.
C. Điểm D. D. Điểm B.



Câu 26: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 27: Biết rằng a, b là những số thực để phương trình $9^x - a \cdot 3^x + b = 0$ luôn có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng

- A. b . B. $\log_3 a$. C. a . D. $\log_3 b$.

Câu 28: Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối lăng trụ là

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

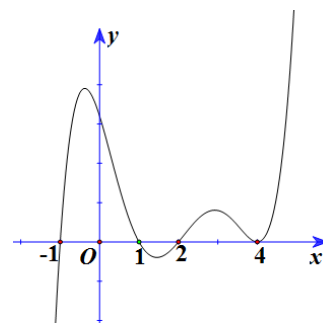
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 30: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^{\log_2 5} = 4, b^{\log_4 5} = 2$. Giá trị của $a^{\log_2^2 5} + 5b^{\log_4^2 5}$ bằng

- A. 150. B. 30. C. $25 + \sqrt{5}$. D. $25 + 5\sqrt{5}$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(2019 - 2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 32: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x+1}$ là

A. $2(x-1)e^{x+1} + C$. B. $(x-1)e^{x+1} + C$. C. $(2x-1)e^{x+1} + C$. D. $\frac{1}{2}(x-1)e^{x+1} + C$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 2 = 0$ và điểm $A(1; 1; -1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng là

A. π . B. 11π . C. 10π . D. 4π .

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(9^x - m) = x + 1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 4. B. 2. C. Vô số. D. 3.

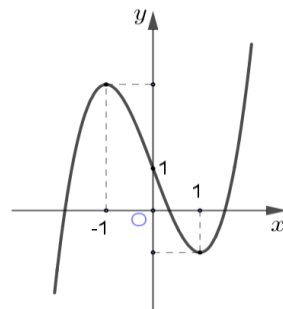
Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{30}}{20}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{3a\sqrt{30}}{40}$.

Câu 36: Một hộp đựng 15 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ trong hộp. Xác suất để tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ được chọn là một số lẻ bằng

A. $\frac{71}{143}$. B. $\frac{56}{715}$. C. $\frac{72}{143}$. D. $\frac{56}{143}$.

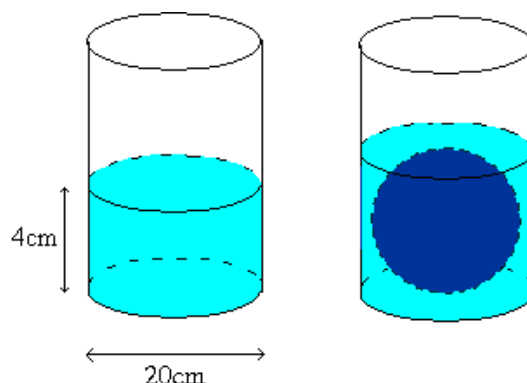
Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + e^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi



A. $m \leq \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}$. B. $m < f(0) - 1$.

C. $m < \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}$. D. $m \leq f(0) - 1$.

Câu 38: Một chiếc cốc hình trụ có bán kính lòng trong đáy $R = 10\text{cm}$, trong cốc chứa nước có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta bỏ vào cốc một viên bi hình cầu bằng kim loại, lúc này mặt nước trong cốc dâng lên vừa phủ kín viên bi (tham khảo hình vẽ). Bán kính của viên bi gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $2,06\text{cm}$. B. $4,31\text{cm}$.

C. $11,09\text{cm}$. D. 2cm .

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Đường thẳng OH có phương trình là

A. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

C. $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = 2$, biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = 1$. Giá trị $f(0)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} - 5 + i - |z|i = 0$. Môđun của z bằng

A. 13.

B. 169.

C. 7.

D. 49.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình

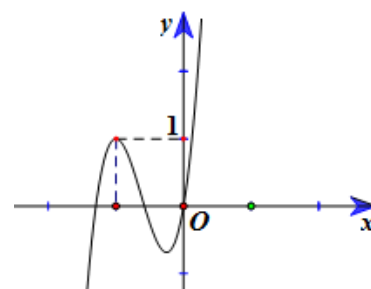
$$f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$$
 là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.



Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15.

B. 30.

C. 16.

D. 17.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32, 2 và 3.

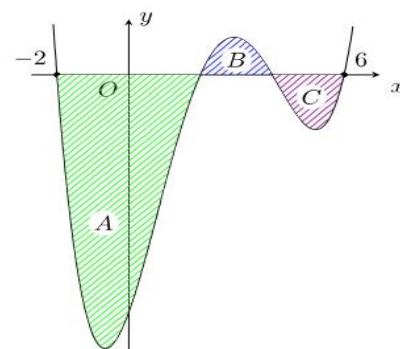
Tích phân $I = \int_{-2}^2 (3x - 4) \left(1 + f\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5\right) \right) dx$ bằng

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = -82$.

C. $I = 66$.

D. $I = 50$.



Câu 45: Cho phương trình $(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số.

B. 11.

C. 10.

D. 5.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$f'(0) = -1$, $f'(x) < 0$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $\forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; -1)$.

Câu 47: Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 3.

B. $3\sqrt{2}$.

C. 4.

D. $2\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{27}{64}$.

D. $\frac{9}{64}$.

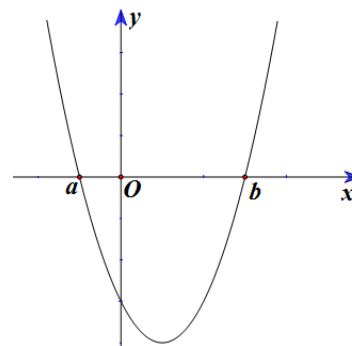
Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng năm điểm cực trị là

A. 8

B. 10

C. 9

D. 7



Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-2018}{1} = \frac{y-2019}{2} = \frac{z-2020}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 11 = 0$. A, B là hai điểm bất kỳ trên (S) sao cho hai mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại hai điểm A, B vuông góc với nhau. Gọi A', B' là hai điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA' và BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

A. $\frac{54+18\sqrt{6}}{5}$.

B. $\frac{54+18\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{27+9\sqrt{6}}{5}$.

D. $\frac{27+9\sqrt{3}}{5}$.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN ĐỀ THI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	A	C	A	C	B	D	B	B	C	D	B	C	A	B	A	D	D	B	C	D	D	B	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	A	B	D	D	A	B	B	D	C	A	A	C	A	A	B	A	D	D	C	C	A	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội q .

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow 3 \cdot q = 12 \Leftrightarrow q = 4$.

Câu 2. Chọn C

Điều kiện xác định của phương trình: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (1).

Khi đó ta có $\log_3(x - 1) = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 3^4 \Leftrightarrow x = 82$.

So sánh với điều kiện (1) suy ra nghiệm của phương trình $x = 82$.

Câu 4. Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên: Tại vị trí $x = 0$, y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ nên $x_{CT} = 0$.

Câu 5. Chọn A. Ta có: $V = \frac{1}{3} Bh$.

Câu 6. Chọn C

Ta có: $P : 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow P : 2 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z + 1 = 0$.

Suy ra $\vec{n}_3 = (2; -1; 0)$ là một vectơ pháp tuyến của P .

Câu 7. Chọn B. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là: $(0; 1; -3)$.

Câu 8. Chọn D. Số tam giác có ba đỉnh là ba trong số 10 đỉnh của đa giác là: C_{10}^3 .

Câu 9. Chọn B

Ta có $S = \int_{-2}^0 |f(x)| dx + \int_0^3 |f(x)| dx$.

$S = -\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$ (dựa vào hình vẽ).

Nên $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

Câu 10. Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$. Nên ta chọn đáp án B.

Câu 11. Chọn C

Có $\int f(x) dx = \int e^x + x dx = \int e^x dx + \int x dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 12. Chọn D

Có $\int_2^0 g(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 g(x) dx = -1$.

Suy ra $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx = \int_0^2 f(x) dx + 3 \int_0^2 g(x) dx = 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 13. Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang.

Vậy có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3.

Câu 14. Chọn C

Ta có phương trình tương đương $f(x) = \frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt. Suy ra phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 15. Chọn A. Thể tích khối cầu có bán kính bằng a là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 16. Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại giá trị $x = 3$, nên $M = 3$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại giá trị $x = -2$, nên $m = -2$.

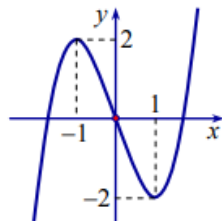
Vậy $M + m = 3 - 2 = 1$.

Câu 17. Chọn A

$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$. Vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u}_1 = (3; 2; 1)$.

Câu 18. Chọn D

Với $a \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ta có: $\log_3 a^2 = 2\log_3 |a|$.

Câu 19. Chọn D

Ta có đồ thị là dạng hàm bậc 3 nên loại phương án B và C.

Mặt khác nhìn đồ thị ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và

+ Xét đáp án A ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x) = -\infty$ nên loại.

+ Xét đáp án D ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$ nên chọn.

Câu 20. Chọn B. Ta có $y' = (3^{-x})' = 3^{-x} \cdot (-x)' \cdot \ln 3 = -3^{-x} \ln 3$.

Câu 21. Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $2 - 3i$ là $2 + 3i$.

Câu 22. Chọn D

Vì M, N, P lần lượt là hình chiếu của $A(1; 3; 2)$ lên trục Ox, Oy, Oz nên $M(1; 0; 0), N(0; 3; 0), P(0; 0; 2)$.

Phương trình mặt phẳng đoạn chắn (MNP) là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow 6x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Câu 23. Chọn D

Xét phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$ có $\Delta' = 1 - 3 = -2 = 2i^2$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$; $z_2 = 1 - \sqrt{2}i \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{3}$.

Câu 24. Chọn B

Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Vậy thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$.

Câu 25. Chọn C

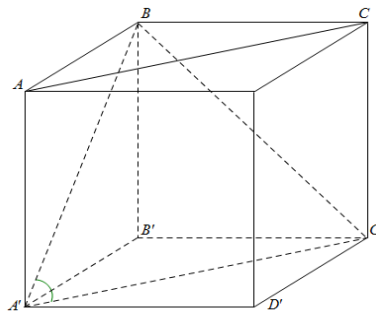
Gọi số phức cần tìm có dạng $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy điểm M biểu diễn cho số phức $1 + 3i$. Mặt khác điểm M là điểm biểu diễn số phức $\bar{z} - 1 + i = x - yi - 1 + i = (x - 1) + (-y + 1)i$, nên ta có:

$$(x - 1) + (-y + 1)i = 1 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ -y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - 2i.$$

Từ đó, ta được điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng phức có tọa độ là $(2; -2)$.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy điểm có tọa độ $(2; -2)$ là điểm D .

Câu 26. Chọn A

Xét tứ giác $ACC'A'$ có $AA' \parallel CC'$, $AA' = CC'$ và $AA' \perp A'C' \Rightarrow$ tứ giác $ACC'A'$ là hình chữ nhật, nên $AC \parallel A'C'$. Từ đó $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = BA'C'$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương và $A'B, BC', A'C'$ là các đường chéo của các mặt của hình lập phương nên $A'B = BC' = A'C'$.

Tam giác $BA'C'$ có $A'B = BC' = A'C'$ nên tam giác $BA'C'$ đều, suy ra $BA'C' = 60^\circ$.

Nhận xét: Ngoài cách làm ở trên, ta còn có cách xác định góc khác như sau:

Vì $A'B \parallel CD' \Rightarrow (AC, A'B) = (AC, CD') = ACD'$. Cách tìm góc tương tự như lời giải ở trên.

Câu 27. Chọn D

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Khi đó phương trình: $9^x - a \cdot 3^x + b = 0$ trở thành phương trình: $t^2 - at + b = 0$ (*). Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 dương. Điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4b > 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 và $\begin{cases} t_1 = 3^{x_1} \\ t_2 = 3^{x_2} \end{cases}$

$\Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 3^{x_1 + x_2} = b \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_3 b$. Vậy đáp án D

Câu 28. Chọn A

Lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a nên đáy của lăng trụ là tam giác đều cạnh a và chiều cao của lăng trụ cũng bằng a .

Khi đó: $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Vậy đáp án A đúng

Câu 29. Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 30. Chọn D

$$a^{\log_2 5} = 4 \Leftrightarrow a = 4^{\frac{1}{\log_2 5}} \text{ và } b^{\log_4 5} = 2 \Leftrightarrow b = 2^{\frac{1}{\log_4 5}}.$$

$$a^{\log_2^2 5} + 5b^{\log_4^2 5} = \left(4^{\frac{1}{\log_2 5}}\right)^{\log_2^2 5} + 5\left(2^{\frac{1}{\log_4 5}}\right)^{\log_4^2 5} = 4^{\log_2 5} + 5.2^{\log_4 5} = 25 + 5\sqrt{5}.$$

Câu 31. Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019 - 2020x$. $f'(2019 - 2020x) = -2020 f'(2019 - 2020x)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2019 - 2020x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2019 - 2020x < -1 \\ 1 < 2019 - 2020x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2017}{2020} < x < \frac{1009}{1010} \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty$ và $\left(\frac{2017}{2020}; \frac{1009}{1010}\right)$.

Đối chiếu đáp án ta chọn đáp án D.

Câu 32. Chọn A

Ta có $I = \int f(x) dx = \int 2xe^{x+1} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^{x+1} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = 2xe^{x+1} - 2 \int e^{x+1} dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + C = 2x - 2 e^{x+1} + C.$$

Câu 33. Chọn B

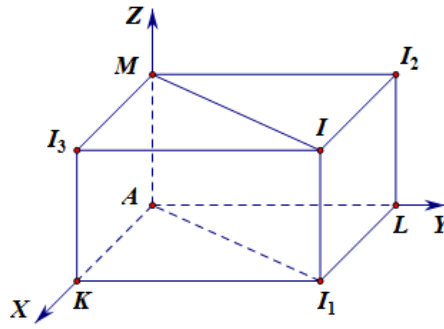
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = 2$.

Vì $IA = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi $C_1(I_1, R_1)$, $C_2(I_2, R_2)$, $C_3(I_3, R_3)$ là ba đường tròn giao tuyến.

$$\text{Ta có: } R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = (R^2 - II_1^2) + (R^2 - II_2^2) + (R^2 - II_3^2) = 3R^2 - (II_1^2 + II_2^2 + II_3^2) \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh $II_1^2 + II_2^2 + II_3^2 = IA^2$. Thật vậy, xét hệ trục tọa độ $AXYZ$ có gốc tọa độ tại A và ba mặt phẳng tọa độ là ba mặt phẳng đã cho trong đề bài (như hình vẽ).



Khi đó, I_1, I_2, I_3 lần lượt là hình chiếu của I lên ba mặt phẳng tọa độ.

Gọi K, L, M lần lượt là hình chiếu của I trên AX, AY, AZ . Ta có:

$$\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AL}; \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{I_2I}; \overrightarrow{I_3I}; \overrightarrow{I_1I}) \Rightarrow AI = \sqrt{I_2I^2 + I_3I^2 + I_1I^2} \text{ hay } II_1^2 + II_2^2 + II_3^2 = IA^2.$$

Thay vào (*), ta được $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 3R^2 - IA^2 = 3 \cdot 2^2 - 1^2 = 11$.

Từ đó suy ra tổng diện tích ba hình tròn là: $\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = 11\pi$.

Câu 34. Chọn B

Điều kiện: $9^x - m > 0$ (*)

Ta có: $\log_3(9^x - m) = x + 1 \Leftrightarrow 9^x - m = 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - m = 0$ (1)

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), ta được phương trình $t^2 - 3t - m = 0$ (2)

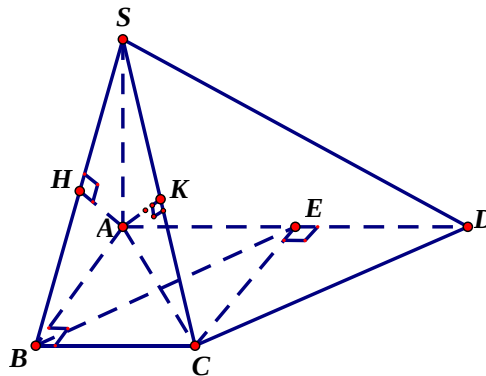
Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m < 0 \end{cases}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1\}$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy có 2 giá trị nguyên cần tìm.

Câu 35. Chọn D



Gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCE$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BE$. Kẻ $AK \perp SC$.

Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $AD \parallel BC$. Mặt khác $BC = AE = ED = a$ nên suy ra $BCDE$ là hình bình hành. Do đó $CD \parallel BE \Rightarrow BE \parallel (SCD)$.

Ta có $\left. \begin{matrix} CD \parallel BE \\ BE \perp AC \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC \perp CD$. Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SCA) \Rightarrow CD \perp AK$.

Ta có $\left. \begin{matrix} AK \perp SC \\ AK \perp CD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK = d(A, (SCD))$.

Ta có góc giữa SB và mặt phẳng đáy là $SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$BH = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}; SH = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = 3HB.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } d(H, (SCD)) &= \frac{3}{4} d(B, (SCD)) = \frac{3}{4} d(E, (SCD)) \text{ (vì } BE \parallel (SCD)). \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{3}{8} AK. \end{aligned}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAC \text{ ta có } AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{3}{8} AK = \frac{3a\sqrt{30}}{40}.$$

Câu 36. Chọn C

Chọn 6 tấm thẻ trong hộp có 15 ta có $C_{15}^6 = 5005$ cách $\Rightarrow n(\Omega) = 5005$.

Ta thấy trong 15 tấm thẻ có 8 tấm thẻ đánh số lẻ và 7 tấm thẻ đánh số chẵn.

Gọi A là biến cố: “Tổng các số ghi trên 6 tấm thẻ là số lẻ”. Ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: Chọn được 5 thẻ đánh số lẻ và 1 thẻ đánh số chẵn có: $C_8^5 \cdot C_7^1 = 392$ cách.

+ TH 2: Chọn được 3 thẻ đánh số lẻ và 3 thẻ đánh số chẵn có: $C_8^3 \cdot C_7^3 = 1960$ cách.

+ TH 3: Chọn được 1 thẻ đánh số lẻ và 5 thẻ đánh số chẵn có: $C_8^1 \cdot C_7^5 = 168$ cách.

Do đó $n(A) = 392 + 1960 + 168 = 2520$.

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2520}{5005} = \frac{72}{143}.$$

Câu 37. Chọn A

Nhận xét:

Với $x \in (-1; 0)$ thì $f'(x) > 1 > e^x \Rightarrow f'(x) - e^x > 0$.

Với $x \in (0; 1)$ thì $f'(x) < 1 < e^x \Rightarrow f'(x) - e^x < 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - e^x$. Khi đó $m + e^x < f(x), \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow g(x) > m, \forall x \in (-1; 1)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - e^x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

$$g(x) > m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \min g(x) > m \Leftrightarrow m \leq \min \left\{ f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e} \right\}.$$

Câu 38. Chọn A

Gọi R_c là bán kính khối cầu, $R_c > 0$, $2R_c > 4$.

Thể tích của phần khối trụ chứa nước sau khi thả viên bi vô là $V_s = \pi R^2 \cdot (2R_c) = 200\pi \cdot R_c$.

Thể tích của phần khối trụ chứa nước ban đầu là $V_{tr} = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 4 = 400\pi$.

Thể tích viên bi là $V_b = \frac{4}{3} \pi R_c^3$.

Theo giả thiết ta có $V_s = V_{tr} + V_C \Leftrightarrow 200R_C = 400\pi + \frac{4}{3}\pi R_C^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}R_C^3 - 200R_C + 400 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_C \approx -13,146 \text{ (l)} \\ R_C \approx 11,087 \text{ (l)} \\ R_C \approx 2,058 \text{ (n)} \end{cases} \text{ . Ở đây loại phương án C vì bán kính bi lớn hơn bán kính đáy nên viên bi không đặt}$$

vào được cốc nước.

Câu 39. Chọn C

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -2; 3)$, $\overrightarrow{AH} = (x-1; y; z)$ và $\overrightarrow{CH} = (x; y; z-3)$.

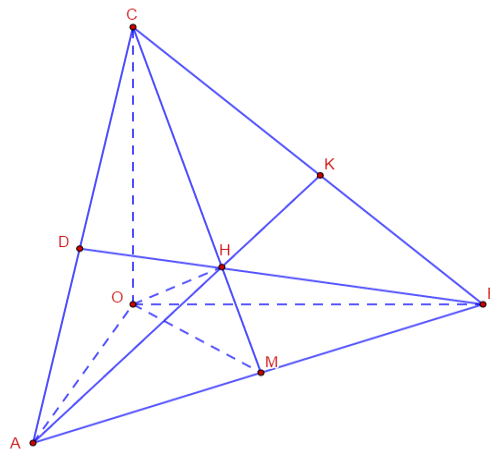
Do H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ CH \perp AB \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{49} \\ y = \frac{18}{49} \\ z = \frac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right).$$

Suy ra đường thẳng OH nhận véc-tơ $\vec{u} = (6; 3; 2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng OH là $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

Cách khác. Chứng minh $OH \perp (ABC)$.



Gọi H là hình chiếu của điểm O xuống mặt phẳng (ABC) , tức là $OH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} AO \perp BC \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp AH \text{ (1)}.$

Tương tự, ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ OH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \text{ (2)}.$

Từ (1), (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC .

Do $OH \perp (ABC)$ nên $\vec{n} = (6; 3; 2)$ (véc-tơ pháp tuyến của (ABC)) là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng OH .

Vậy phương trình đường thẳng OH là $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

Câu 40. Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x) \end{cases}$, khi đó ta có

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = -f(0) + 2.$$

Mặt khác do $I = 1$ nên $-f(0) + 2 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

Câu 41. Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với $\bar{z} = 5 + (|z| - 1)i$.

Lấy module hai vế của phương trình trên, ta được $|z| = \sqrt{5^2 + (|z| - 1)^2}$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |z|^2 - 2|z| + 26 \Leftrightarrow |z| = 13.$$

Vậy $|z| = 13$.

Câu 42. Chọn B

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$ ($t \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành $f(f(t) + t^2 + 2t) = f(1)$ (1).

Đặt $u = f(t) + t^2 + 2t$ ($t \geq 0$). Theo đồ thị, vì $f(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ nên $u \geq 0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$ (vì $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$)

$$\Leftrightarrow f(t) + t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (2).$$

Xét hàm số $g(t) = f(t) + t^2 + 2t - 1$, với $t \in [0; +\infty)$. Hiển nhiên $g(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Mặt khác, $g'(t) = f'(t) + 2t + 2 > 0 \forall t \geq 0$ nên $g(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Mà $g(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ nên (2) có đúng một nghiệm là $t_0 \in (0; +\infty)$.

Hơn nữa, nếu $t_0 \geq 1$ thì $g(t_0) \geq g(1) = f(1) + 2 > 0$ (mâu thuẫn với $g(t_0) = 0$).

Do đó, $t_0 \in (0; 1)$.

Tới đây, ta được $\sqrt{f(x)} = t_0 \Leftrightarrow f(x) = t_0^2$.

Dễ thấy đường thẳng $y = t_0^2$, với $t_0^2 \in (0; 1)$, cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Vậy tóm lại phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 43. Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - x^2 - (x^2 - 3x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + m)(x^2 - x + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x (*) \\ m = -x^2 + x + 1 (**) \end{cases}$$

(*) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 khi $m < \frac{9}{4}; m \neq 0$

(**) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 khi $m < \frac{5}{4}; m \neq -5$

Mặc khác (*) và (**) có chung nghiệm $x = \frac{1}{2}$ loại vì m nguyên.

Từ đó suy ra điều kiện cắt tại 4 điểm là $m < \frac{5}{4}; m \neq 0; m \neq -5$. Có 15 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 44. Chọn D

$$I = \int_{-2}^2 (3x-4) \left(1 + f\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5\right) \right) dx = \int_{-2}^2 (3x-4) dx + \int_{-2}^2 (3x-4) f\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5\right) dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - 4x \right) \Big|_{-2}^2 + I_1 = -16 + I_1.$$

* Tính $I_1 = \int_{-2}^2 (3x-4) f\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x + 5\right) dx$

Đặt $t = -\frac{3}{4}x^2 + 2x \Rightarrow dt = -\frac{(3x-4)}{2} dx$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -2; x = 2 \Rightarrow t = 6$

$$\Rightarrow I_1 = -2 \int_{-2}^6 f(t) dt$$

Giả sử $f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm còn lại là $a, b (a < b)$

Khi đó $I_1 = -2 \left(\int_{-2}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^6 f(t) dt \right) = -2(-32 + 2 - 3) = 66$

$$\Rightarrow I = -16 + 66 = 50.$$

Câu 45. Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} mx > 0 \\ x > -1 \end{cases}$. Khi đó phương trình (*) tương đương

$$\begin{cases} me^x - 10x - m = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xm = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$$

□ Khi $m = 0$: phương trình (*) vô nghiệm.

□ Khi $m < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0)$. Khi đó:

□ Phương trình (1): $me^x = 10x + m$ có nhiều nhất một nghiệm.

□ Phương trình (2): $m = \frac{(x+1)^2}{x}$ có đúng 1 nghiệm $\forall x \in (-1; 0)$. Thật vậy

Bảng biến thiên hàm số $y = \frac{(x+1)^2}{x}, \forall x \in (-1; 0)$.

x	-1	0
y'		-
y	0	$\rightarrow +\infty$

Vậy với $m < 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□ Khi $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$. Khi đó:

□ Phương trình (2): $m = \frac{(x+1)^2}{x} = x + \frac{1}{x} + 2 \geq 4$. Vậy ta có các trường hợp sau:

Bảng biến thiên hàm số $y = \frac{(x+1)^2}{x}, \forall x > 0$.

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		4	

□ Nếu $0 < m < 4$: phương trình (2) vô nghiệm.

□ Nếu $m = 4$: phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

□ Nếu $m > 4$: phương trình (2) có đúng 2 nghiệm.

Xét phương trình (1): $me^x = 10x + m \Leftrightarrow m = \frac{10x}{e^x - 1}$.

Hàm số $f(x) = \frac{10x}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{10e^x(1-x) - 10}{(e^x - 1)^2} < 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 10, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Do vậy với phương trình (1) ta có:

□ Nếu $0 < m < 4$: phương trình (1) có 1 nghiệm. Kết hợp với phương trình (2) không thỏa.

□ Nếu $m = 4$: phương trình 1 có đúng 1 nghiệm. Kết hợp với phương trình (2) không thỏa.

□ Nếu $4 < m < 10$: phương trình (1) có đúng 1 nghiệm. Kết hợp với phương trình (2) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cuối cùng ta có $4 < m < 10 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{5; 6; 7; 8; 9\}$. Có 5 giá trị nguyên của m

Câu 46. Chọn C

Ta có $[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{f'(x)} \right]' = 1$.

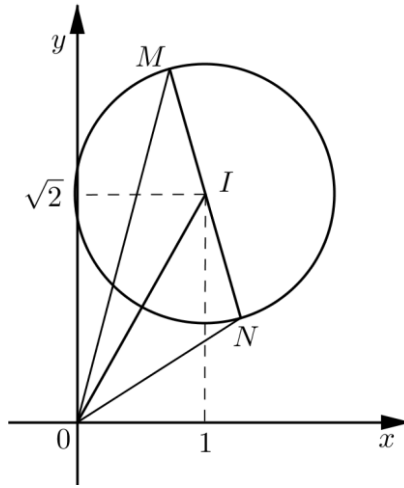
Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\int \left[-\frac{1}{f'(x)} \right]' dx = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = x + C.$$

Do $f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$.

Khi đó $f'(x) = \frac{-1}{x+1} \Leftrightarrow \int_1^0 f'(x) dx = f(0) - f(1) = \int_1^0 \frac{-1}{x+1} dx = -\ln|x+1| \Big|_1^0 = \ln 2 \in (0; 1)$.

Câu 47. Chọn C



+ Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ và $M(a_1; b_1)$, $N(a_2; b_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 , z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

+ Ta có $|iz_1 + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow (a_1 - 1)^2 + (b_1 - \sqrt{2})^2 = 1$. Tương tự ta có $(a_2 - 1)^2 + (b_2 - \sqrt{2})^2 = 1$. Vậy M, N thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; \sqrt{2})$, bán kính $R=1$ và $OI = \sqrt{3}$.

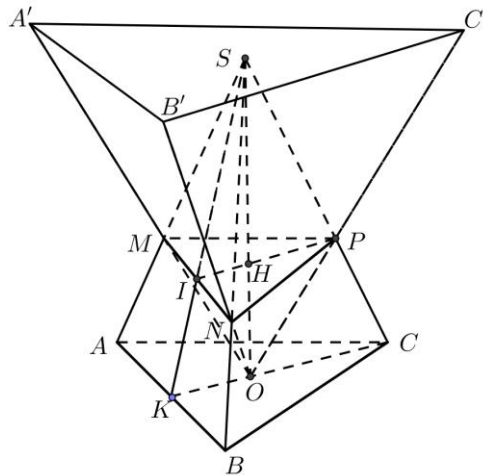
+ $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2 \Leftrightarrow MN = 2$. Suy ra MN là đường kính của đường tròn (C) .

+ Xét tam giác OMN , với I là trung điểm của MN ta có

$$OI^2 = \frac{2(OM^2 + ON^2) - MN^2}{4} \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = \frac{4OI^2 + MN^2}{2} = 8$$

+ $|z_1| + |z_2| = OM + ON \leq \sqrt{2(OM^2 + ON^2)} = 4$, dấu bằng xảy ra khi $OM = ON$ hay OI là đường trung trực của đoạn thẳng MN . Vậy giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng 4.

Câu 48. Chọn A



+ Theo bài ra ta có SO là đường cao của hai hình chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$.

Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của SA, SB, SC với OA', OB', OC' và I, K lần lượt là trung điểm của MN, AB . H là giao điểm của SO với PI .

+ Ta có: $MSO = NSO = PSO = 30^\circ$, $MOS = NOS = POS = 60^\circ$ suy ra $\triangle MOS = \triangle NOS = \triangle POS$, từ đó

$SM = SN = SP$ và do đó $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC}$ nên $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$, $NP \parallel BC$ hay $(MNP) \parallel (ABC)$,

vậy $SO \perp (MNP)$ vì $SO \perp (ABC)$.

$$+ SO \perp (MNP) \Rightarrow SO \perp HP \text{ nên } \frac{SH}{HO} = \frac{\frac{SH}{HP}}{\frac{HO}{HP}} = \frac{\cot 30^\circ}{\cot 60^\circ} = 3, \text{ suy ra } \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SH}{SO} = \frac{3}{4}.$$

+ Ta có

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{S.MNP}} = \frac{\frac{1}{3}OH.S_{\Delta MNP}}{\frac{1}{3}SH.S_{\Delta MNP}} = \frac{OH}{SH} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_{S.MNP}} + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow V_{O.MNP} + V_{S.MNP} = \frac{4}{3}V_{S.MNP} \Leftrightarrow V_{S.MNP} = \frac{3}{4}V_1.$$

$$+ \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4}V_1}{V_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}.$$

Câu 49. Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$f(a)$		$f(b) = 1$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$.

Ta có $h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$.

$$\text{Khi đó } h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c \ (c < a) \end{cases}.$$

Vậy $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Xét $h(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 4f(x) = -m$ (*).

Đồ $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (*) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt.

Xét hàm số $t(x) = f^2(x) + 4f(x)$.

Ta có $t'(x) = 2.f(x).f'(x) + 4f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$.

$$\text{Khi đó } t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c \ (c < a) \end{cases}.$$

Ta có $t(c) = f^2(c) + 4f(c) = (-2)^2 - 8 = -4$. $t(b) = f^2(b) + 4f(b) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của $t(x)$:

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$			
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$t(x)$	$+\infty$			$t(a)$			5	$+\infty$
						</		

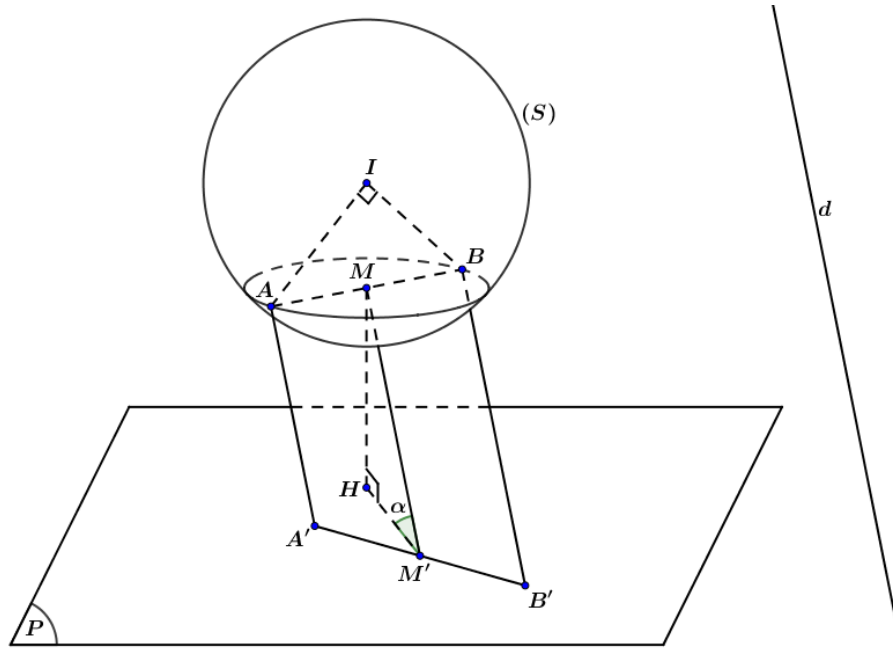
Từ YCBT $\Leftrightarrow t(x) = -m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq t(a) > 5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -t(a) < -5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Kết luận: Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

Vì $d(I;(P)) = \frac{|4+3-2+4|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} > R$ nên (P) và (S) không có điểm chung.

Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$.

Vì hai tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau nên $IA \perp IB$

$$\Rightarrow \triangle IAB \text{ vuông cân tại } I \Rightarrow IM = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow M \text{ thuộc mặt cầu } (S'): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{29}{2}.$$

Mặt khác, vì MM' là đường trung bình của hình thang $AA'B'B$ nên $AA' + BB' = 2MM'$ (1).

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là } (d;(P)). \text{ Ta có } \sin \alpha = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Kẻ $MH \perp (P)$ tại H .

$$\text{Vì } MM' \parallel d \text{ nên } \angle MM'H = (MM';(P)) = (d;(P)) = \alpha \text{ nên } MM' = \frac{MH}{\sin \alpha} \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow AA' + BB' = \frac{2}{\sin \alpha} \cdot MH = \frac{2}{\sin \alpha} \cdot d(M,(P)) \text{ (3).}$$

Tới đây, bài toán đưa về tìm GTLN của $d(M,(P))$.

Gọi $(a;b;c)$ là tọa độ của điểm M .

$$\Rightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 + (c+2)^2 = 9 \text{ (vì } M \in (S')) \text{ và } d(M, (P)) = \frac{|a+b+c+4|}{\sqrt{3}}.$$

Áp dụng BĐT

B. C. S, ta được

$$|(a-4)+(b-3)+(c+2)| \leq \sqrt{3 \cdot [(a-4)^2 + (b-3)^2 + (c+2)^2]} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow |a+b+c+4| = |(a-4)+(b-3)+(c+2)+9| \leq 9 + |(a-4)+(b-3)+(c+2)| \leq 9 + 3\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow d(M, (P)) = \frac{|a+b+c+4|}{\sqrt{3}} \leq 3 + 3\sqrt{3} \quad (4).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)^2 + (b-3)^2 + (c+2)^2 = 9 \\ a-4 = b-3 = c+2 \\ [(a-4)+(b-3)+(c+2)] \cdot 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4 = \sqrt{3} \\ b-3 = \sqrt{3} \\ c+2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + \sqrt{3} \\ b = 3 + \sqrt{3} \\ c = -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } AA' + BB' \leq \frac{54 + 18\sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \max(AA' + BB') = \frac{54 + 18\sqrt{3}}{5}.$$

----- HẾT -----