UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10 THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. ***(5,0 điểm)***

1. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 4$ có đồ thị là (P) và đường thẳng d có phương trình: $y = 2x - m$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 = 57$, với O là gốc tọa độ.

2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} - x^3 - x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để tập nghiệm của bất phương trình $f(2x-1) > f(-2a)$ có ít nhất 3 số nguyên.

Câu II. ***(4,0 điểm)***

1. Giải phương trình: $(x^2 - x - 1)\sqrt{-x^2 + 7x - 6} = -x^3 + 5x^2 - 3x - 4.$

2. Tìm điều kiện của tham số m để mọi $x \in [-2;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình $x^2 + (m-2)x - 2m^2 - m + 1 \le 0.$

Câu III. ***(2,0 điểm)***

Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm, ký hiệu là I và II. Mỗi tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, mỗi tấn sản phẩm II lãi 2,2 triệu đồng. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm I, thì phải dùng máy M_1 liên tục trong 3 giờ và máy M_2 liên tục trong 1 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm II, thì phải dùng máy M_1 liên tục trong 1 giờ và máy M_2 liên tục trong 2 giờ. Biết rằng, một máy không thể sản xuất đồng thời 2 loại sản phẩm, các máy hoạt động bình thường và máy M_1 làm việc không quá 9 giờ trong một ngày, máy M_2 làm việc không quá 8 giờ trong một ngày. Hỏi trong một ngày, xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu tấn sản phẩm I và sản phẩm II để thu được tổng số tiền lãi cao nhất?

Câu IV. ***(2,0 điểm)***

Cho tập hợp $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Từ các phần tử của A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và có hai chữ số 2 và 4 luôn đứng cạnh nhau?

Câu V. ***(4,0 điểm)***

1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{BN} + 5\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC},\ k \in \mathbb{R}$. Tìm k để 3 điểm G, P, N thẳng hàng.

2. Cho tam giác nhọn ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi S là diện tích tam giác ABC và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng: $a.m_a.\cos A + b.m_b.\cos B + c.m_c.\cos C \ge 3S$.

Câu VI. ***(3,0 điểm)***

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D và $AB = 2DC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn thẳng HB. Giả sử $H(1;-1)$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng $AE: x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang $ABCD$.

--- HẾT---

Họ và tên thí sinh:……………………………....…Số báo danh:...
Người coi thi số 1…………………………......Người coi thi số 2…………….........................

UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 – 2023

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(*Hướng dẫn chấm gồm 08 trang*)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

CÂU	SƠ LƯỢC LỜI GIẢI	ĐIỂM
Câu I. ***(5,0 điểm)***	**1.** Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 4$ có đồ thị là (P) và đường thẳng d có phương trình: $y = 2x - m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 = 57$, (với O là gốc tọa độ).	**3,0**
	Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 4 = 2x - m$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 4 = 0 \quad (1)$	0,25
	$\Delta = 25 - 4.1.(m+4) = 9 - 4m$	0,25
	Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ (*)	0,25
	Với điều kiện (*), gọi hai giao điểm của d và (P) là $A(x_1; 2x_1 - m), B(x_2; 2x_2 - m)$, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1).	0,25
	Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = m + 4$. *(Học sinh có thể không có bước này, các bước sau đúng vẫn được điểm tối đa)*	0,25
	Ta có: $OA^2 + OB^2 = 57 \Leftrightarrow x_1^2 + (2x_1 - m)^2 + x_2^2 + (2x_2 - m)^2 = 57$	0,25
	$\Leftrightarrow 5(x_1^2 + x_2^2) - 4m(x_1 + x_2) + 2m^2 = 57$ $\Leftrightarrow 5(x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2 - 4m(x_1 + x_2) + 2m^2 = 57$	0,25
	$\Leftrightarrow 5.5^2 - 10(m+4) - 4m.5 + 2m^2 = 57$	0,25
	$\Leftrightarrow 2m^2 - 30m + 28 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 14 \end{array}\right.$.	0,25
	Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy $m = 14$ bị loại, $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,25
	2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 + x} - x^3 - x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để tập nghiệm của bất phương trình $f(2x - 1) > f(-2a)$ có ít nhất 3 số nguyên.	**2,0**
	Tập xác định: $D = [-3; 3]$	0,25

Ta thấy: $\forall x_1; x_2 \in [-3;3]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Thật vậy:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{3-x_1} - \sqrt{3-x_2} - \left(\sqrt{3+x_1} - \sqrt{3+x_2}\right) - (x_1^3 - x_2^3) - (x_1 - x_2)$$

$$= (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{\sqrt{3-x_1}+\sqrt{3-x_2}} + \frac{1}{\sqrt{3+x_1}+\sqrt{3+x_2}} + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1\right)$$

Do đó $f(x_1) - f(x_2) > 0,\ \forall x \in [-3;3], x_1 < x_2$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-3;3]$ — 0,5

Do đó:

$$f(2x-1) > f(-2a) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le -2a \le 3 \\ -3 \le 2x-1 \le 3 \\ 2x-1 < -2a \end{cases}$$

0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{2} \le a \le \dfrac{3}{2} \\ -1 \le x \le 2 \\ x < \dfrac{1-2a}{2} \end{cases}$$

0,25

Bất phương trình có **ít nhất** 3 nghiệm nguyên khi

$$\begin{cases} \dfrac{-3}{2} \le a \le \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1-2a}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{2} \le a \le \dfrac{3}{2} \\ a < \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \le a < \frac{-1}{2}.$$

0,5

Câu II. ***(4,0 điểm)***

1. Giải phương trình: $\left(x^2 - x - 1\right)\sqrt{-x^2+7x-6} = -x^3 + 5x^2 - 3x - 4$ — **2,0**

Điều kiện: $-x^2 + 7x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 6$. — 0,25

Với điều kiện đó

Phương trình $(x^2 - x - 1)\sqrt{-x^2+7x-6} = (x^2 - x - 1)(4 - x)$ — 0,25

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(\sqrt{-x^2+7x-6} + x - 4\right) = 0$$

0,25

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{-x^2+7x-6} + x - 4 = 0 & (1) \\ x^2 - x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

0,25

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \ge 0 \\ -x^2 + 7x - 6 = 16 - 8x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \ge 0 \\ 2x^2 - 15x + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{11}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

0,5

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

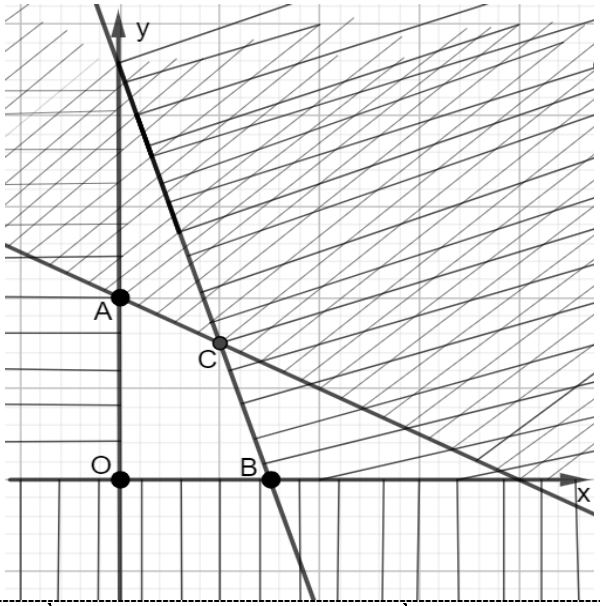
0,25

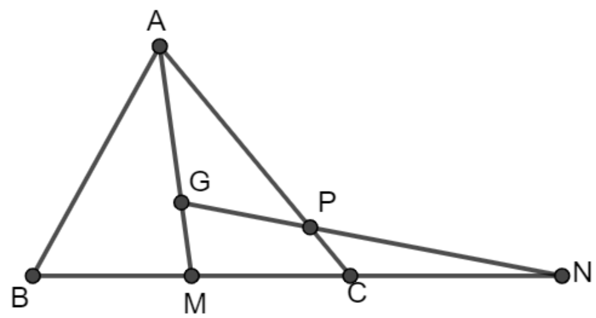
Đối chiếu với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{2; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ — 0,25

2. Tìm điều kiện của tham số m để mọi $x \in [-2;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình $x^2 + (m-2)x - 2m^2 - m + 1 \le 0$. — **2,0**

Đặt $f(x) = x^2 + (m-2)x - 2m^2 - m + 1$

	Ta có: $\Delta=(m-2)^2-4.1.(-2m^2-m+1)$ $=m^2-4m+4+8m^2+4m-4$ $=9m^2$	0,25
	$\Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm $x_1=m+1,\ x_2=-2m+1$.	0,25
	TH1: $m+1<-2m+1$ $\Rightarrow$ Để mọi $x\in[-2;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho khi : $\begin{cases}m+1\le -2\\ -2m+1\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -3$	0,5
	TH2: $m+1=-2m+1\Leftrightarrow m=0$ $\Rightarrow$Thay vào bất phương trình đã cho ta được: $x^2-2x+1\le 0\Leftrightarrow x=1$ nên $m=0$ (không thỏa mãn)	0,25
	TH3: $m+1>-2m+1$ $\Rightarrow$ Để mọi $x\in[-2;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho khi $\begin{cases}-2m+1\le -2\\ m+1\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge \dfrac{3}{2}\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{2}$	0,5
	Kết luận: $\left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
Câu III. ***(2,0 điểm)***	Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm, ký hiệu là I và II. Mỗi tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, mỗi tấn sản phẩm II lãi 2,2 triệu đồng. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm I, thì phải dùng máy M_1 liên tục trong 3 giờ và máy M_2 liên tục trong 1 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm II, thì phải dùng máy M_1 liên tục trong 1 giờ và máy M_2 liên tục trong 2 giờ. Biết rằng, một máy không thể sản xuất đồng thời 2 loại sản phẩm; các máy hoạt động bình thường và máy M_1 làm việc không quá 9 giờ trong một ngày, máy M_2 làm việc không quá 8 giờ trong một ngày. Hỏi trong một ngày, xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu tấn sản phẩm I và sản phẩm II để thu được tổng số tiền lãi cao nhất?	**2,0**
	Gọi x là số tấn sản phẩm I, y là số tấn sản phẩm II mà xí nghiệp cần sản xuất trong một ngày để thu được tổng số tiền lãi cao nhất. Điều kiện: $x\ge 0; y\ge 0$.	0,25
	Số giờ máy M_1 phải làm việc trong một ngày để sản xuất ra x tấn sản phẩm I và y tấn sản phẩm II là: $3x+y$ Mà máy M_1 làm việc không quá 9 giờ trong một ngày nên ta có bất phương trình: $3x+y\le 9$ Số giờ máy M_2 phải làm việc trong một ngày để sản xuất ra x tấn sản phẩm I và y tấn sản phẩm II là: $x+2y$ Mà máy M_2 làm việc không quá 8 giờ trong một ngày nên ta có bất phương trình $x+2y\le 8$ Tiền lãi khi sản xuất x tấn sản phẩm I và y tấn sản phẩm II trong một ngày là $T=2x+2,2y$	0,5

	Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x+y\le 9 \\ x+2y\le 8 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad (I)$ Ta cần tìm các số thực x, y thỏa mãn hệ bất phương trình trên sao cho biểu thức $T=F(x;y)=2x+2,2y$ đạt giá trị lớn nhất.	
	Ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) (như hình vẽ). 	0,5
	Miền nghiệm của hệ trên là miền trong của tứ giác $OACB$, kể cả các cạnh của tứ giác. Trong đó: $O(0;0), A(0;4), C(2;3), B(3;0)$. T đạt lớn nhất tại $(x_0;y_0)$, với $(x_0;y_0)$ là tọa độ một trong các đỉnh của tứ giác $OACB$.	0,25
	Thay tọa độ các đỉnh $O(0;0), A(0;4), C(2;3), B(3;0)$ của tứ giác $OACB$ vào biểu thức: $T=F(x,y)=2x+2,2y$ ta được: $F(0,0)=0;\ F(0,4)=\frac{44}{5};\ F(2,3)=\frac{53}{5};\ F(3,0)=6$ Suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức T là $T=F(2;3)=\frac{53}{5}$.	0,25
	Vậy cần sản xuất 2 tấn sản phẩm I và 3 tấn sản phẩm II trong 1 ngày để xí nghiệp thu được tổng số tiền lãi cao nhất.	0,25
Câu IV. ***(2,0 điểm)***	Cho tập hợp $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Từ các phần tử của A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và có hai chữ số 2 và 4 luôn đứng cạnh nhau?	**2,0**
	Vì số thỏa mãn yêu cầu bài toán $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số lẻ nên a_6 có thể chọn một trong các số $\{1,3,5\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a_6. Ứng với mỗi cách chọn a_6 ta lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ như sau:	0,25

	Xét hai chữ số chẵn 2 và 4 đứng cạnh nhau dạng $\overline{24}$: + Nếu $\overline{a_1a_2}=\overline{24}$,chọn 3 chữ số từ 4 chữ số trong tập A sau khi bỏ đi chữ số a_6 đã chọn và 2 chữ số $2,4$ để xếp vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách. Suy ra có A_4^3 cách lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $\overline{a_1a_2}=\overline{24}$.	0,25
	+Nếu $\overline{a_1a_2}\neq\overline{24}$ .Có 3 cách chọn a_1 từ 3 chữ số trong tập A sau khi bỏ đi chữ số a_6 đã chọn và 3 chữ số $0,2,4$. .Có 3 cách đặt chữ số $\overline{24}$ vào phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ . .Chọn 2 chữ số từ 3 chữ số trong tập A sau khi bỏ đi chữ số a_6,a_1 đã chọn và 2 chữ số $2,4$ để xếp vào 2 vị trí còn lại có A_3^2 cách. Suy ra có $3.3.A_3^2$ cách lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $\overline{a_1a_2}\neq\overline{24}$	0,5
	Như vậy có $A_4^3+3.3.A_3^2$ cách lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà hai chữ số chẵn kề nhau dạng $\overline{24}$	0,25
	Tương tự có $A_4^3+3.3.A_3^2$ cách lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà hai chữ số chẵn kề nhau dạng $\overline{42}$	0,25
	Do đó ta có $2.(A_4^3+3.3.A_3^2)$ cách lập phần $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà hai chữ số 2 và 4 đứng kề nhau.	0,25
	Vậy có tất cả $3.\left[2.(A_4^3+3.3.A_3^2)\right]=468$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,25
	(Nếu học sinh làm theo cách coi 2 số 2 và 4 kề nhau là một phần tử X thì ta có $3.(C_3^4.4!-C_3^2.3!).2!=468$ *(nếu học sinh không nói và loại đi trường hợp số 0 đứng đầu thì không cho điểm, nếu có nói đến trường hợp này nhưng bị sai ở trường hợp số 0 đứng đầu thì cho 0,5 điểm cho phần phía trên khi xét cả những trường hợp có số 0 đứng đầu)*	
Câu V. **(4,0 điểm)**	**1.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi N,P lần lượt là các điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PC},\ k\in\mathbb{R}$. Tìm k để 3 điểm G,P,N thẳng hàng.	**2,0**
		
	Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đặt $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{-k}{1-k}\overrightarrow{AC}$ (vì $k=1$ không thỏa mãn) Ta có: $2\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{NM}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{NM}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{7}{6}\overrightarrow{BC}$	0,5
	$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}=\dfrac{-k}{1-k}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\left(\dfrac{-2k-1}{3-3k}\right)\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$	0,5

$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{7}{6}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{7}{6}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

0,5

Mà 3 điểm G,P,N thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{GP},\overrightarrow{GN}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{\frac{-2k-1}{3-3k}}{\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{1}{3}}{-1}\Leftrightarrow \frac{\frac{-2k-1}{3-3k}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{-2k-1}{1-k}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow k=\frac{-7}{2}.$$

Chú ý: *Nếu học sinh sử dụng định lý Me-ne-la-us mà không chứng minh để xác định k thì chỉ cho 0,5 điểm.*

0,5

2. Cho tam giác nhọn ABC có $BC=a, AC=b, AB=c$. Gọi S là diện tích tam giác ABC và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A,B,C. Chứng minh rằng: $a.m_a.\cos A+b.m_b.\cos B+c.m_c.\cos C\ge 3S.$

2,0

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A,B,C của tam giác ABC.

Ta có: $S=\frac{1}{2}a.h_a\Leftrightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$. Tương tự $\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$; $\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$

Do đó: $a.m_a.\cos A+b.m_b.\cos B+c.m_c.\cos C\ge 3S$

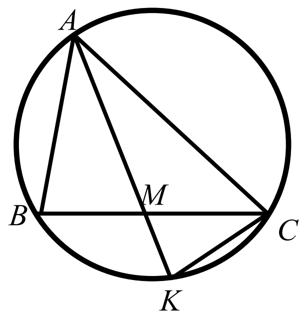
$$\Leftrightarrow \frac{a.m_a.\cos A}{2S}+\frac{b.m_b.\cos B}{2S}+\frac{c.m_c.\cos C}{2S}\ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_a.\cos A}{h_a}+\frac{m_b.\cos B}{h_b}+\frac{m_c.\cos C}{h_c}\ge \frac{3}{2}\quad (1)$$

0,25

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+) Trước hết ta chứng minh $m_a\ge \frac{b^2+c^2}{4R}$



Thật vậy, gọi M là trung điểm của BC, trung tuyến AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K thì $AM.MK=BM.MC=\frac{a^2}{4}$ hay $m_a.MK=\frac{a^2}{4}$

Mặt khác ta có $AK\le 2R$ nên $MK=AK-AM\le 2R-m_a$

Suy ra $m_a\left(2R-m_a\right)\ge \frac{a^2}{4}\Leftrightarrow 2m_aR\ge m_a^2+\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow 2m_aR\ge \frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}$

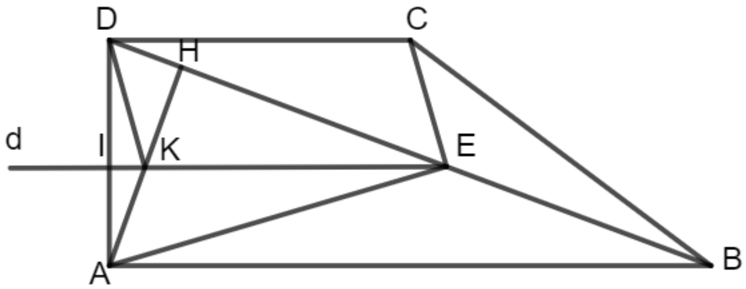
$$\Leftrightarrow 2m_aR\ge \frac{b^2+c^2}{2}\Leftrightarrow m_a\ge \frac{b^2+c^2}{4R}$$

+) Tương tự ta cũng có $m_b\ge \frac{a^2+c^2}{4R}; m_c\ge \frac{a^2+b^2}{4R}$

0,5

+) Lại có $h_a=b\sin C=\frac{bc}{2R}$ và $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a}\cos A\ge \frac{b^2+c^2}{4R}.\frac{2R}{bc}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4b^2c^2}$$

	$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a}\cos A \ge \frac{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4b^2c^2}$ +) Tương tự $\frac{m_b}{h_b}\cos B \ge \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{4a^2c^2}$; $\frac{m_c}{h_c}\cos C \ge \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4a^2b^2}$	0,5
	Suy ra $\frac{m_a}{h_a}\cos A+\frac{m_b}{h_b}\cos B+\frac{m_c}{h_c}\cos C \ge \frac{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4b^2c^2}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{4a^2c^2}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4a^2b^2}$ $\frac{m_a}{h_a}\cos A+\frac{m_b}{h_b}\cos B+\frac{m_c}{h_c}\cos C \ge \frac{6a^2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$ Do đó (1) đúng.	0,5
	Vậy $a.m_a.\cos A+b.m_b.\cos B+c.m_c.\cos C \ge 3S$. Dấu "=" xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.	0,25
Câu VI. ***(3,0 điểm)***	Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D và $AB=2DC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn thẳng HB. Giả sử $H(1;-1)$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng $AE: x-y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang $ABCD$.	**3,0**
		
	Từ E kẻ đường thẳng d song song với đường thẳng AB. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng AD. K là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng AH. $\Rightarrow$ K là trực tâm của tam giác $DAE \Rightarrow DK \perp AE$	0,5
	Xét tam giác HAB có E là trung điểm của HB và $KE // AB$ $\Rightarrow$ K là trung điểm của AH $\Rightarrow$ KE là đường trung bình của tam giác HAB $\Rightarrow KE // AB$ và $KE=\frac{1}{2}AB$. Do đó: $KE // DC$ và $KE=DC \Rightarrow$ Tứ giác $DCEK$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $CE // DK$ mà $DK \perp AE \Rightarrow$ $CE \perp AE$	0,5
	Đường thẳng CE có phương trình là: $x+y-1=0$.	0,25
	Vì E là giao điểm của đường thẳng CE và $AE \Rightarrow$ Tọa độ E là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow E(2;-1)$	0,25
	Mà E là trung điểm của $HB \Rightarrow B(3;-1)$.	0,5

	Đường thẳng AH có phương trình: $x-1=0$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(1;-2)$.	0,5
	Vì $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2};-1\right)$.	0,5

---HẾT---