

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I. (5,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y = x^2 + bx + c$.

1) Tìm b, c để Parabol (P) có đỉnh $S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

2) Với b, c tìm được ở câu 1. Tìm m để đường thẳng $\Delta: y = -2x - m$ cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Câu II. (6,0 điểm)

1) Tìm m để bất phương trình: $mx^2 - 2(m+3)x + 2m + 14 \geq 0$ vô nghiệm trên tập số thực.

2) Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\left(\sqrt{2x^2 + 4} - x - 2\right)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$.

3) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực :
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x - 1) = 1 \end{cases}$$

Câu III. (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng 3. Trên các cạnh BC, CA lần lượt lấy các điểm N, M sao cho $BN = 1, CM = 2$.

a) Phân tích véc tơ $\overrightarrow{AN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Trên cạnh AB lấy điểm $P, (P \neq A, P \neq B)$ sao cho AN vuông góc với PM . Tính tỉ số $\frac{AP}{AB}$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy là AD, BC và $AD > BC$, biết rằng $AB = BC, AD = 7$. Đường chéo AC có phương trình là $x - 3y - 3 = 0$, điểm $M(-2; -5)$ thuộc đường thẳng AD . Tìm tọa độ đỉnh D biết đỉnh $B(1; 1)$.

Câu IV. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có diện tích S và bán kính của đường tròn ngoại tiếp R thỏa mãn hệ thức $S = \frac{2}{3}R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

2) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{9}{x + y + z}.$$

3) Cho đa thức $P(x) = x^{2018} - mx^{2016} + m$ trong đó m là tham số thực. Biết rằng $P(x)$ có 2018 nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm thực x_0 của $P(x)$ thỏa mãn $|x_0| \leq \sqrt{2}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT.

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG 10 NĂM HỌC 2018-2019.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I (5,0 điểm)	1) (2,0 điểm). Định $S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -b/2 = -1/2 \\ \frac{1}{4} - \frac{b}{2} + c = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases}$	2
	2) (3,0 điểm). Pt hoành độ giao điểm của (P) và Δ : $x^2 + x - 1 = -2x - m \Leftrightarrow x^2 + 3x + m - 1 = 0$ (*). Δ cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(*)	0,5
	có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$ (**)	0,5
	Giả sử $A(x_1; -2x_1 - m); B(x_2; -2x_2 - m)$ theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$.	0,5
	Ta có tam giác OAB vuông tại	
	$O \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow 5x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.	0,5
	Đối chiếu đk (**) ta có đáp số $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.	1
Câu II (6,0 điểm)	1) (2,0 điểm) <u>TH 1</u>: $m = 0$, bpt trở thành $-6x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$ (không thỏa ycbt).	0,5
	<u>TH 2</u>: $m \neq 0$, $mx^2 - 2(m+3)x + 2m + 14 \geq 0 \forall x \Leftrightarrow mx^2 - 2(m+3)x + 2m + 14 < 0$ CN	0,5
	$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 - 8m + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -9 \text{ hoặc } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -9.$	1
	Vậy $m < -9$.	
	2) (2,0 điểm). <u>TH1</u>: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$	0,5
	<u>TH 2</u>: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$. Khi đó, bpt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4} \geq x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 4 \geq (x + 2)^2 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \\ x \geq 4 \vee x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$.	0,5
	Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = (-\infty; 0] \cup \{2, 3\} \cup [4; +\infty)$	0,5
	3) (2,0 điểm) Hpt: $\begin{cases} x^2 + x^3 y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$	0,5
	Đặt $a = x^2 - y, b = xy$ hệ thành $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$.	0,5

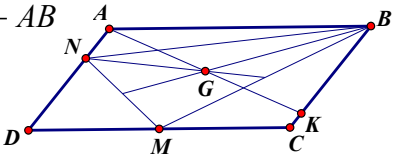
	+) Với $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$ +) Với $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \{(0; -1), (1; 0), (-1; 0)\}.$ +) Với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}.$ Vậy hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1), (0; -1), (1; 0), (-1; 0), (-1; 3)\}.$	0,5 0,5
	1) (4,0 điểm) a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	2,0
	b) Đặt $AP = x, (0 < x < 3).$ Ta có $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3}\overrightarrow{AB}$ $AN \perp PM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3}\overrightarrow{AB}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2x}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{x}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 = 0$ $\Leftrightarrow 1 - 2x - \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$ Vậy $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{15}.$	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu III (6,0 điểm)	2) (2,0 điểm). Do $ABCD$ là hình thang cân nên $ABCD$ là hình thang nội tiếp đường tròn tâm O. Do $AB = BC = CD \Rightarrow AC$ là đường phân giác trong góc $\angle BAD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC, khi đó E thuộc AD. Ta có $BE \perp AC$ và BE qua $B(1;1)$ nên phương trình $BE: 3x + y - 4 = 0.$ Gọi $F = AC \cap BE \Rightarrow$ tọa độ F là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$ Do F là trung điểm Của $BE \Rightarrow E(2; -2).$ Do $M(-2; -5) \in AD \Rightarrow$ phương trình $AD: 3x - 4y - 14 = 0.$ Do $A = AD \cap AC \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6; 1).$ Do $D \in AD \Rightarrow D(2 + 4t; -2 + 3t)$ và $AD = 7 \Rightarrow (4t - 4)^2 + (3t - 3)^2 = 49 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{5} \\ t = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\left(\frac{58}{5}; \frac{26}{5}\right) \\ D\left(\frac{2}{5}; -\frac{16}{5}\right) \end{cases}$ Do B, D nằm khác phía với đường thẳng AC nên kiểm tra vị trí tương đối của điểm	0,5 0,5 0,5

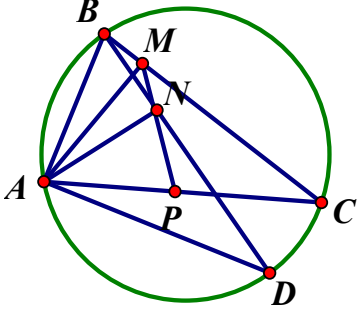
	B và hai điểm D ta có đáp số $D\left(\frac{2}{5}; -\frac{16}{5}\right)$	0,5
Câu IV (3,0 điểm).	1) (1,0điểm). Theo định lí sin ta có : $\sin^3 A = \frac{a^3}{8R^3}$; $\sin^3 B = \frac{B^3}{8R^3}$; $\sin^3 C = \frac{c^3}{8R^3}$ $VT = \frac{2}{3}R^2 \left(\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3} \right) = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{12R}$ Áp dụng bất đẳng thức cô – si ta có: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ $\Rightarrow VT \geq \frac{abc}{4R}$ Mà $S = \frac{abc}{4R}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều	0,5
	2) (1,0 điểm). Ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{yz} + \frac{z^2}{zx} \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$. Ta cần chứng minh: $\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq \frac{9}{x+y+z} \Leftrightarrow (x+y+z)^3 \geq 9(xy+yz+zx) \quad (*)$. Đặt $t = x+y+z, (\sqrt{3} < t \leq 3) \Rightarrow xy+yz+zx = \frac{t^2-3}{2}$. BĐT (*) thành	0,5
	$t^3 \geq \frac{9(t^2-3)}{2} \Leftrightarrow (t-3)^2(2t+3) \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$	0,5
	3) (1,0 điểm). Ta có $P(-1)=1, P(1)=1$. Giả sử các nghiệm thực của $P(x)$ là $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$, tức là $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2018})$. Khi đó, $P(1) = (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{2018}) = 1$, $P(-1) = (-1-a_1)(-1-a_2)\dots(-1-a_{2018}) = 1$ hay $P(-1) = (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{2018}) = 1$	0,5
	Suy ra $P(1).P(-1) = (1-a_1^2)(1-a_2^2)\dots(1-a_{2018}^2) = 1$. Suy ra tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, 2018\}$ sao cho $a_k^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow a_k \leq \sqrt{2}$. Hay tồn tại nghiệm $x_0 := a_k$ thỏa mãn điều kiện $x_0 \leq \sqrt{2}$.	0,5

--	--	--

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG 10 NĂM HỌC 2017-2018.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I 5,0 điểm	1. Đỉnh $S(2; -1) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -b/2a = 2 \\ 4a + 2b + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$	2
	2. Pt hoành độ giao điểm của (P) và $\Delta: x^2 - 4x + 3 = kx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (k+4)x - 1 = 0$	
	(*). PT(*) có $ac = -1$ nên $\forall k$ pt luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và theo Viet ta có $x_1 + x_2 = k + 4$. Khi đó tọa độ M, N là $M(x_1; kx_1 + 4), N(x_2; kx_2 + 4)$.	
	Gọi I là trung điểm MN ta có tọa độ $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{k(x_1 + x_2)}{2} + 4\right)$ hay $I\left(\frac{k+4}{2}; \frac{k^2 + 4k + 8}{2}\right)$. Theo ycbt ta có:	

	$I\left(\frac{k+4}{2}; \frac{k^2+4k+8}{2}\right) \in d \Leftrightarrow -k^2 - 3k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -4.$	
Câu II 6,0 điểm	1. Bpt: $-x^2 + 2(m+1)x + 2 - 2m^2 > 0 \quad \forall n \Leftrightarrow -x^2 + 2(m+1)x + 2 - 2m^2 \leq 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ (vì $a = -1 < 0$) $\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 3.$	
	2. Bpt $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ x < 0 \vee x > 2 \\ x \leq 1 \vee x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 2. \\ x \geq 3 \end{cases}.$ Vậy tập nghiệm bpt $S = (-\infty; 0] \cup \{2\} \cup [3; +\infty).$	
	3. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + 2y + x = 4xy \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$	
	Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0.$ Chia hai vế của (1) cho xy ta có phương trình $x + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4.$	
	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + x \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = 4$ $\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = 4$ Ta có hệ $\begin{cases} x + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 \\ \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$	
Câu III 6,5 điểm	1a. $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$ $= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ $= \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$ 	

	1b. Đặt $\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ Ba điểm A, G, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{AK} = m\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4m}{9}\overrightarrow{AD}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{m}{2} \\ x = \frac{4m}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ x = \frac{8}{9} \end{cases}$ $\Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{8}{9}$	
	2. Pt MN: $x + y - 4 = 0$. Tọa độ P là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vì AM song song với DC và các điểm A, B, M, N cùng thuộc một đường tròn nên ta có: $\angle PAM = \angle PCD = \angle ABD = \angle AMP$. Suy ra $PA = PM$ Vì $A \in AC: x - y - 1 = 0$ nên $A(a; a - 1), a < 2$. Ta có: $\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1).$  Đt BD đi qua N và vuông góc với AN nên có pt: $2x + 3y - 10 = 0. \text{ Đt BC đi qua M và vuông góc với AM nên có pt: } y - 4 = 0. \text{ Tọa độ B là nghiệm của hệ: } \begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)$.	
Câu IV	1a. $x + y + z = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$ (1) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$	
2,5 điểm	1b. $P = \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$ (3) $\frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2}$ Ta có: $= (x-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + (y-1)\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + (z-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)$ $\geq (x-1)\frac{2}{xy} + (y-1)\frac{2}{yz} + (z-1)\frac{2}{xz}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $P \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$ (5) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3}$ (6)	

Từ (1), (2), (5) và (6) $\Rightarrow P \geq \sqrt{3} - 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{3} - 1$.

2. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $x_0 \neq 0$

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0}.$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1 \right) = \left(a^2 + c^2 + \left(-x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0} \right)^2 \right) \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1 \right)$$

$$\geq \left(ax_0 + c \frac{1}{x_0} - x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0} \right)^2 = \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2}{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1} = \frac{t^2}{t+1}, \text{ với } t = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \geq 2$$

$$\text{Mặt khác } \frac{t^2}{t+1} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+2) \geq 0 \text{ Vì } t \geq 2 \text{ nên}$$

$$(t-2)(3t+2) \geq 0$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{-2}{3}$ (ứng với $x_0 = 1$) hoặc

$$a = c = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3} \text{ (ứng với } x_0 = -1 \text{).}$$