

CHỦ ĐỀ 1: LŨY THỪA

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho n là một số nguyên dương. Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (n \text{ thừa số})$$
- Ta gọi a là cơ số, n là số mũ của lũy thừa a^n .
- Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm thì lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi $a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Chú ý rằng: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa
- Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

- Với $a, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\begin{aligned} \oplus \quad a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \oplus \quad \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; & \oplus \quad (a^m)^n &= a^{m \cdot n}; \\ \oplus \quad (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m; & \oplus \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}; & \oplus \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} &= \left(\frac{b}{a}\right)^m; \\ \oplus \quad a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*); & \oplus \quad a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

- Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. Còn với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.
- Với mọi $0 < a < b$, ta có $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

3. Căn bậc n

- Định nghĩa: cho số thực b và số nguyên dương $n (n \geq 2)$. Số a được gọi căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Một số chú ý quan trọng
 - Nếu n lẻ và $a \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n , được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
 - Nếu n chẵn thì có các trường hợp sau:
 - Với $a < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của a .
 - Với $a = 0$ thì có một căn bậc n của a là số 0 .
 - Với $a > 0$ thì có hai căn bậc n là $\pm \sqrt[n]{a}$.

DẠNG 1

Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

- Câu 1:** Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}}$ được kết quả là
- A. ab^2 . B. a^2b . C. ab . D. a^2b^2 .
- Câu 2:** Biểu thức $T = \sqrt[5]{a^3 \sqrt{a}}$ với $a > 0$. Viết biểu thức T dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:
- A. $a^{\frac{3}{5}}$. B. $a^{\frac{2}{15}}$. C. $a^{\frac{1}{3}}$. D. $a^{\frac{4}{15}}$.
- Câu 3:** Cho a là số thực dương, khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng
- A. $a^{\frac{8}{3}}$. B. $\sqrt[6]{a}$. C. $\sqrt[3]{a^2}$. D. $a^{\frac{3}{8}}$.
- Câu 4:** Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)$ là
- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{2}$.
- Câu 5:** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.
- A. $P = \sqrt{x}$. B. $P = x^{\frac{1}{8}}$. C. $P = x^{\frac{2}{9}}$. D. $P = x^2$.
- Câu 6:** Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.
- A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.
- Câu 7:** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x}$, với x là số thực dương.
- A. $P = x^{\frac{1}{12}}$. B. $P = x^{\frac{7}{12}}$. C. $P = x^{\frac{2}{3}}$. D. $P = x^{\frac{2}{7}}$.
- Câu 8:** Cho $x > 0, y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}}$ về dạng y^n .
Tính $m-n$.
- A. $\frac{11}{6}$. B. $-\frac{8}{5}$. C. $-\frac{11}{6}$. D. $\frac{8}{5}$.
- Câu 9:** Cho $a > 0, b > 0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?
- A. $(a+b)^x = a^x + b^x$. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x \cdot b^{-x}$. C. $a^{x+y} = a^x + a^y$. D. $a^x b^y = (ab)^{xy}$.
- Câu 10:** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[5]{x}$?
- A. $x^{\frac{4}{7}}$. B. $x^{\frac{3}{10}}$. C. $x^{\frac{17}{10}}$. D. $x^{\frac{13}{2}}$.

Câu 11: Cho $a > 0$, $b > 0$ và biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

- A. $T = \frac{2}{3}$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = 1$. D. $T = \frac{1}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2016})$

- A. $M = 2017^{1008} - 1$ B. $M = -2017^{1008} - 1$ C. $M = 2017^{2016} - 1$ D. $M = 1 - 2017^{2016}$

Câu 13: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$

- A. $P = a$ B. $P = a^3$ C. $P = a^4$ D. $P = a^5$

Câu 14: Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{18}$

Câu 15: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $P \in (330; 340)$. B. $P \in (350; 360)$. C. $P \in (260; 370)$. D. $P \in (340; 350)$.

Câu 16: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m^2 - n^2 = 312$. B. $m^2 + n^2 = 543$. C. $m^2 - n^2 = -312$. D. $m^2 + n^2 = 409$.

Câu 17: Cho $4^x + 4^{-x} = 2$ và biểu thức $A = \frac{4 - 2^x - 2^{-x}}{1 + 2^x + 2^{-x}} = \frac{a}{b}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

- A. 6. B. -10. C. -8. D. 8.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{-1}{4}} \right)}$.

- A. $P = a(a+1)$. B. $P = a-1$. C. $P = a$. D. $P = a+1$.

Câu 19: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^3 \sqrt{x}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$

B. $P = x^{\frac{7}{12}}$

C. $P = x^{\frac{5}{8}}$

D. $P = x^{\frac{7}{24}}$

Câu 20: Tích $(2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b , khi đó (a, b) là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2018; 2017)$.

B. $(2019; 2018)$.

C. $(2015; 2014)$.

D. $(2016; 2015)$.

Câu 21: Cho $f(x) = 5^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f(1) \cdot f(2) \dots f(2020) = 5^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$

A. $m - n^2 = 2021$.

B. $m - n^2 = -1$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = 2020$.

Câu 22: Cho $m > 0$, $a = m\sqrt{m}$, $y = \frac{\sqrt[3]{m}}{a^2 \cdot \sqrt[4]{m}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$.

B. $y = \frac{1}{a^2}$.

C. $y = \frac{1}{\sqrt[9]{a^{34}}}$.

D. $y = \frac{1}{\sqrt[6]{a^{11}}}$.

Câu 23: Biểu thức $C = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$ với $x > 0$ được viết dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{3}{16}}$.

B. $x^{\frac{7}{8}}$.

C. $x^{\frac{15}{16}}$.

D. $x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 25$.

B. $m^2 + n^2 = 43$.

C. $3m^2 - 2n = 2$.

D. $2m^2 + n = 15$.

Câu 25: Cho a, b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $\frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$, kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$.

B. ab .

C. $\frac{b}{a}$.

D. $\frac{a}{b}$.

Câu 26: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

A. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

B. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$.

C. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$.

D. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 27: Cho a là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^{-2019} = a^{2019}$.

B. $a^{-2019} = -\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

C. $a^{-2019} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

D. $a^{-2019} = -a^{2019}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot b^2\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}}$ được kết quả là

A. ab .

B. a^2b^2 .

C. ab^2 .

D. a^2b .

Câu 29: Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x$ B. $P = x^{\frac{11}{6}}$ C. $P = x^{\frac{7}{6}}$ D. $P = x^{\frac{5}{6}}$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

- A. $\frac{2}{1009}$ B. $\frac{1}{1009}$ C. $\frac{3}{1009}$ D. $\frac{3}{2018^2}$

Câu 31: Cho số thực $a > 1$ và các số thực α, β . Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $a^\alpha > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ B. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ C. $\frac{1}{a^\alpha} < 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ D. $a^\alpha < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Câu 32: Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $\alpha \cdot \beta = 1$ B. $\alpha > \beta$ C. $\alpha < \beta$ D. $\alpha + \beta = 0$

Câu 33: Với các số thực a, b bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(3^a)^b = 3^{a+b}$ B. $(3^a)^b = 3^{ab}$ C. $(3^a)^b = 3^{a-b}$ D. $(3^a)^b = 3^{a^b}$

Câu 34: Cho a, b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $a > 0$ và $b > 1$ B. $a > 0$ và $0 < b < 1$ C. $a < 0$ và $0 < b < 1$ D. $a < 0$ và $b > 1$

Câu 35: Cho a thuộc khoảng $\left(0; \frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(a^\alpha)^b = a^{\alpha \cdot \beta}$ B. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ C. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ D. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Câu 36: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$ B. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$ C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$

Câu 37: Cho các số thực $a; b$ thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

- A. $\ln a > \ln b$ B. $(0,5)^a < (0,5)^b$ C. $\log_a b < 0$ D. $2^a > 2^b$

Câu 38: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$ B. $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$ C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$ D. $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$

Câu 39: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$ C. $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

B. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$.

D. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$.

Câu 41: Cho $P = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$ và $Q = 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q ta có

A. $P < Q$.

B. $P = Q$.

C. $P = -Q$.

D. $P > Q$.

Câu 42: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[2]{a^5} > \sqrt[3]{a^2}$?

A. $a > 0$.

B. $0 < a < 1$.

C. $a > 1$.

D. $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Câu 43: Tìm khẳng định đúng.

A. $(2 - \sqrt{3})^{2016} > (2 - \sqrt{3})^{2017}$.

B. $(2 + \sqrt{3})^{2016} > (2 + \sqrt{3})^{2017}$.

C. $-(2 + \sqrt{3})^{-2016} > -(2 + \sqrt{3})^{-2017}$.

D. $(2 - \sqrt{3})^{-2016} > (2 - \sqrt{3})^{-2017}$.

Câu 44: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$

B. $\frac{1}{a^{2017}} < \frac{1}{a^{2018}}$

C. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$

D. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$

Câu 45: Cho biết $(x-2)^{\frac{1}{3}} > (x-2)^{\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2 < x < 3$.

B. $0 < x < 1$.

C. $x > 2$.

D. $x > 1$.

Câu 46: Cho $U = 2.2019^{2020}$, $V = 2019^{2020}$, $W = 2018.2019^{2019}$, $X = 5.2019^{2019}$ và $Y = 2019^{2019}$. Số nào trong các số dưới đây là số bé nhất?

A. $X - Y$.

B. $U - V$.

C. $V - W$.

D. $W - X$.

Câu 47: Tìm tất cả các số thực m sao cho $\frac{4^a}{4^a + m} + \frac{4^b}{4^b + m} = 1$ với mọi $a + b = 1$.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 2$.

D. $m = 8$.

Câu 48: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$ với $x_1 > x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1^{2017} \cdot x_2^{2018}$

A. $P = 1$

B. $P = 3 + 2\sqrt{2}$

C. $P = 3 - 2\sqrt{2}$

D. $P = (3 - 2\sqrt{2})^{17}$

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \left(3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2018}$.

A. $P = 1$.

B. $P = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}$.

C. $P = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

D. $P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{4035}$.

Câu 50: Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2018} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{2017}$

A. 1.

B. $7 - 4\sqrt{3}$.

C. $7 + 4\sqrt{3}$.

D. $(7 + 4\sqrt{3})^{2017}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.B	4.C	5.A	6.C	7.B	8.A	9.B	10..C
11.C	12.B	13.D	14.C	15.D	16.A	17.A	18.C	19.C	20.A
21.B	22.A	23..D	24.D	25.D	26.D	27.C	28.A	29.A	30.A
31.B	32.B	33.B	34.C	35.D	36.B	37.B	38.C	39.B	40.D
41.A	42.B	43.A	44.C	45.A	46.C	47.A	48.C	49.C	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

$$\text{Ta có: } P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[6]{(a^2 \cdot b)^6}} = a \cdot b.$$

Câu 2: Chọn D

$$\text{Ta có } T = \sqrt[5]{a^3 \sqrt{a}} = \sqrt[5]{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{4}{15}}.$$

Câu 3: Chọn B

$$\text{Ta có } \sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3 \cdot 4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

Câu 4: Chọn C

$$\text{Ta có: } P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a^2} \right) = \log_a \left(a \cdot a^{\frac{2}{3}} \right) = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}.$$

Câu 5: Chọn A

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có } P = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Câu 6: Chọn C

$$\text{Ta có } A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \frac{2^{3+\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = 2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Câu 7: Chọn B

$$P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}.$$

Câu 8: Chọn BVới $x > 0, y > 0$, ta có

$$x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \left(x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}} \Rightarrow m = \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}.$$

$$y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} \quad y = x + 1. \text{ Do đó } m - n = \frac{11}{6}.$$

Câu 9: Chọn B

$$\text{Ta có } \left(\frac{a}{b} \right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x}.$$

Câu 10: Chọn C

$$\text{Với } x > 0 \text{ thì } P = x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[5]{x} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}} = x^{\frac{17}{10}}.$$

Câu 11: Chọn C

Do $a > 0, b > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} T &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right)} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(a-b)^2}{ab}} \\ &= \frac{1}{a+b} \sqrt{4ab + a^2 - 2ab + b^2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b} = 1. \end{aligned}$$

Câu 12: Chọn B

$$f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)} = \frac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -1 - \sqrt{a} \quad \text{nên}$$

$$M = f(2017^{2016}) = -1 - \sqrt{2017^{2016}} = -1 - 2017^{1008}$$

Câu 13: Chọn D

$$\text{Ta có } P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2} \right)^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^3}{a^{2-4}} = a^5$$

Câu 14: Chọn C

$$A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} \right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m \cdot n = \frac{1}{9}.$$

Câu 15: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} &= \sqrt[5]{2^3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{30}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = 2^{\frac{11}{15}} \\ \Rightarrow \frac{m}{n} &= \frac{11}{15} \Rightarrow \begin{cases} m=11 \\ n=15 \end{cases} \Rightarrow P = m^2 + n^2 = 11^2 + 15^2 = 346. \end{aligned}$$

Câu 16: Chọn A

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{\frac{-5}{7}}} = \frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$$

$$\text{Mà } A = a^{\frac{m}{n}}, m, n \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{m}{n} \text{ là phân số tối giản} \Rightarrow m=19, n=7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 312$$

Câu 17: Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^x + 4^{-x} = 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 4 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 4 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 2$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{4 - 2^x - 2^{-x}}{1 + 2^x + 2^{-x}} = \frac{4 - (2^x + 2^{-x})}{1 + (2^x + 2^{-x})} = \frac{4 - 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a.b = 2.3 = 6.$$

Câu 18: Chọn C

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a.$$

Câu 19: Chọn C

$$\text{Ta có: } P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^3} \sqrt{x}} = [x(x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = [x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{7}{24}} = x^{\frac{5}{8}}$$

Câu 20: Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017} &= (2017)! \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016} \left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017} \\ &= (2017)! \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{2016} \cdot \frac{2018^{2017}}{2017} = 2018^{2017}. \text{ Vậy } a = 2018; b = 2017. \end{aligned}$$

Câu 21: Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = 5^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = 5^{\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}} = 5^{\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}} = 5^{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

$$\text{Do đó: } f(1) \cdot f(2) \dots f(2020) = 5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 5^{\sum_{x=1}^{2020} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)} = 5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{2020} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{m}{n}.$$

$$\Leftrightarrow 2021 - \frac{1}{2021} = \frac{4084440}{2021} = \frac{m}{n} \Rightarrow m = 4084440 = 2021^2 - 1, n = 2021.$$

$$\text{Vậy: } m - n^2 = (2021^2 - 1) - 2021^2 = -1.$$

Câu 22: Chọn A

$$a = m\sqrt{m} = m^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{18}} = m^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{18}} = m^{\frac{1}{12}}, y = \frac{\sqrt[3]{m}}{a^2 \cdot \sqrt[4]{m}} = \frac{m^{\frac{1}{3}}}{a^2 \cdot m^{\frac{1}{4}}} = \frac{m^{\frac{1}{12}}}{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{18}}}{a^2} = \frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}.$$

Câu 23: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0 \text{ ta có } C^2 &= x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \Leftrightarrow C^4 = x^2 \cdot x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \Leftrightarrow C^8 = x^4 \cdot x^2 \cdot x\sqrt{x\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow C^{16} = x^8 \cdot x^4 \cdot x^2 \cdot x\sqrt{x} \Leftrightarrow C^{32} = x^{16} \cdot x^8 \cdot x^4 \cdot x^2 \cdot x \Leftrightarrow C^{32} = x^{31} \Leftrightarrow C = x^{\frac{31}{32}}. \end{aligned}$$

Câu 24: Chọn D

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{2}{7}}} = a^{\frac{5}{3} + \frac{7}{3} - 4 + \frac{2}{7}} = a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 + n = 15.$$

Câu 25: Chọn D

Ta có: $\frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}} = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}} = a^1 \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}.$

Câu 26: Chọn D

Ta có: $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Câu 27: Chọn C

Ta có: $a^{-2019} = \frac{1}{a^{2019}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2019}.$

Câu 28: Chọn A

Ta có: $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[6]{(a^2 \cdot b)^6}} = ab.$

Câu 29: Chọn A

$P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x$

Câu 30: Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a} = a^{\frac{3}{2018}} \cdot a^{\frac{1}{2018}} = a^{\frac{4}{2018}} = a^{\frac{2}{1009}}.$ Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\frac{2}{1009}.$

Câu 31: Chọn B

Với $a > 1$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$ Ta có: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta.$

Câu 32: Chọn B

Vì $\pi \approx 3,14 > 0$ nên $\pi^\alpha > \pi^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta.$

Câu 33: Chọn B

Câu 34: Chọn C

Vì $\left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a \Rightarrow a < 0.$

Và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < b < 1.$

Câu 35: Chọn D

$a \in \left(0; \frac{2}{e}\right) \Rightarrow$ Hàm số $y = a^x$ nghịch biến. Do đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta.$

Vậy đáp án **sai** là **D**.

Câu 36: Chọn B

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$ nên **A** đúng.

$$+) \begin{cases} 0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)^{2018} < (\sqrt{3} - 1)^{2017} \text{ nên B sai.}$$

$$+) \begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2} + 1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}} \text{ nên C đúng.}$$

$$+) \begin{cases} 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017} \text{ nên D đúng.}$$

Câu 37: Chọn B

Do cơ số $e \in (1; +\infty)$ và $0 < a < b$ nên ta có $\ln a < \ln b$. Đáp án A sai.

Do cơ số $0,5 \in (0; 1)$ và $0 < a < b$ nên ta có $(0,5)^a > (0,5)^b$. Đáp án B sai.

Do cơ số $a \in (0; 1)$ và $b > 1$ nên ta có $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$. Đáp án C đúng.

Do cơ số $2 \in (1; +\infty)$ và $a < b$ nên ta có $2^a < 2^b$. Đáp án D sai.

Câu 38: Chọn C

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{-2017} > (\sqrt{5} + 2)^{-2018} \Rightarrow A \text{ sai}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{2018} < (\sqrt{5} + 2)^{2019} \Rightarrow B \text{ sai}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 39: Chọn B

Ta có:

$$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}. \text{ Phương án A sai.}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}. \text{ Phương án B đúng.}$$

$$3 < 5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Phương án C sai.}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100} \Rightarrow (2^{-2})^{-50} < (2)^{100} \Rightarrow 2^{100} < 2^{100}. \text{ Phương án D sai.}$$

Câu 40: Chọn D

A đúng vì $2 > 1$ và $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{3}$ nên $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

B đúng vì $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 1$ và $2019 > 2018$ nên $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C đúng vì $(\sqrt{2}-1) < 1$ và $2017 < 2018$ nên $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$.

D sai vì $\sqrt{3}-1 < 1$ và $2017 < 2018$ nên $(\sqrt{3}-1)^{2018} < (\sqrt{3}-1)^{2017}$.

Câu 41: Chọn A

Ta có $x^2, y^2, \sqrt[3]{x^4y^2}, \sqrt[3]{x^2y^4}$ là những số thực dương.

$$\begin{aligned} Q &= 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3} = 2\sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} + \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} > \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} \\ &> \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} = P \end{aligned}$$

Vậy $P < Q$.

Câu 42: Chọn B

$\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}$. Ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

Câu 43: Chọn A

Có $0 < 2 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{2016} > (2 - \sqrt{3})^{2017}$.

Câu 44: Chọn C

Ta có: $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a > 1$.

Câu 45: Chọn A

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Ta có $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{6}$ nên $(x-2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x-2 < 1 \Leftrightarrow x < 3$. Vậy $2 < x < 3$.

Câu 46: Chọn C

Ta có: $X - Y = 4.2019^{2019}$.

$U - V = 2019^{2020} = 2019.2019^{2019}$.

$V - W = 2019.2019^{2019} - 2018.2019^{2019} = 2019^{2019}$.

$W - X = 2013.2019^{2019}$.

Vậy trong các số trên, số nhỏ nhất là $V - W$.

Câu 47: Chọn A

Ta có $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$. Thay vào $\frac{4^a}{4^a + m} + \frac{4^b}{4^b + m} = 1$ ta được

$$\frac{4^a}{4^a + m} + \frac{4^{1-a}}{4^{1-a} + m} = 1 \Leftrightarrow \frac{4 + m.4^a + 4 + m.4^{1-a}}{4 + m.4^a + m.4^{1-a} + m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 48: Chọn C

Ta có $P = x_1^{2017} \cdot x_2^{2018} = (x_1 \cdot x_2)^{2017} \cdot x_2$. Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow P = x_2$

$$\text{Ta có } x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Câu 49: Chọn C

Đặt $x = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ ta có

$$x^3 = 9 + \sqrt{80} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} + 3 \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \left(\sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \right)^2 + 9 - \sqrt{80}$$

$$= 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \right)$$

$$= 18 + 3x \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 18 + 3x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$$

$$\text{Ta có } P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \right)^{2017} \cdot \left(3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \right)^{2018} = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \right)^{2017} \cdot \left(\sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \right)^{2018}$$

$$= \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \right)^{2017} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \left(\sqrt[3]{1} \right)^{2017} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$$

Câu 50: Chọn C

$$\text{Ta có } P = \left(7 + 4\sqrt{3} \right)^{2018} \cdot \left(7 - 4\sqrt{3} \right)^{2017} = \left[\left(7 + 4\sqrt{3} \right) \cdot \left(7 - 4\sqrt{3} \right) \right]^{2017} \left(7 + 4\sqrt{3} \right) =$$

$$= 1^{2017} \left(7 + 4\sqrt{3} \right) = 7 + 4\sqrt{3}.$$

CHỦ ĐỀ 2: LOGARIT**LÝ THUYẾT****1. Định nghĩa**

- Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và được kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết như sau: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.
- Một số chú ý:
Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall a$.
Cơ số của logarit phải dương và khác 1 ($a \neq 1$).
Một số công thức logarit theo định nghĩa:

$$\oplus \log_a 1 = 0;$$

$$\oplus \log_a a = 1;$$

$$\oplus \log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\oplus a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$$

2. Các tính chất của logarit

- So sánh hai logarit cùng cơ số**
Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c
 - Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$
 - Ta có $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
- Logarit của một tích:** $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- Logarit của một thương:**
 - $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 - Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ thì $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.
- Logarit của một lũy thừa**
 - $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
 - Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- Công thức đổi cơ số**
 - $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
 - Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b (\alpha \neq 0)$

3. Logarit tự nhiên và logarit thập phân

- Logarit tự nhiên** (hay còn được gọi là **logarit Nepe**) là logarit cơ số e , được viết là: $\log_e b = \ln b$
- Logarit thập phân** là logarit cơ số 10, được viết là: $\log_{10} b = \log b = \lg b$.

DẠNG 2

Biến đổi Logarit

- Câu 1:** Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $x = 4a + 7b$. B. $x = 4a - 7b$. C. $x = a^4 b^7$. D. $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.
- Câu 2:** Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\log_2 x = 4^a$. B. $\log_2 x = a + 1$. C. $\log_2 x = 2^{a+1}$. D. $\log_2 x = 4^{a+1}$.
- Câu 3:** Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \frac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S = m + 2n + 3p$
- A. $S = 6$. B. $S = 9$. C. $S = 0$. D. $S = 3$.
- Câu 4:** Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \frac{b}{4}, \log_a b = \frac{16}{b}$. Tính ab ?
- A. $ab = 256$. B. $ab = 16$. C. $ab = 32$. D. $ab = 64$.
- Câu 5:** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x + y)$. Tính $\frac{y}{x}$?
- A. $\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{y}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{y}{x} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.
- Câu 6:** Cho $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 3$. Tính $S = \log_c(ab)$.
- A. $S = \frac{7}{5}$. B. $S = \frac{7}{6}$. C. $S = \frac{5}{7}$. D. $S = \frac{6}{7}$.
- Câu 7:** Gọi a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2\log_2 \sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $P = \log_2(2018a)$.
- A. 14. B. 22. C. 19. D. 16.
- Câu 8:** Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\log_a x = b^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. B. $\log_a x = a^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. C. $\log_a x = b^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$. D. $\log_a x = a^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$.
- Câu 9:** Cho các số thực dương x, y, z, t, a, b, c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $x \cdot y = z^2 \cdot t^2$. Tính $S = a + b - 2c$
- A. $S = 4$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = -2$. D. $S = 2$.
- Câu 10:** Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008 \cdot 2017^2 \log_a 2019$
- A. $n = 2016$. B. $n = 2019$. C. $n = 2017$. D. $n = 2020$.

Câu 11: Xét số nguyên dương a và số thực $b > 0$ thỏa mãn $\log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) \right) = 0$. Tìm số a biết rằng $\log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) \in [2016; 2017]$.

- A. $a = 2016$. B. $a = 2017$. C. $a = 2027$. D. $a = 2026$.

Câu 12: Cho các số thực dương a, x, y, z thỏa mãn $4z \geq y^2, a > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + x^2z) + \sqrt{4z - y^2}$.

- A. -4 . B. $-\frac{25}{16}$. C. $-\frac{25}{4}$. D. $-\frac{9}{4}$.

Câu 13: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 14: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) + \ln\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln 15$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 15: Cho ba số thực dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2(ab + bc + ca) - \log_2(abc)$ bằng:

- A. 18. B. 6. C. 24. D. 8

Câu 16: Cho 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Công sai của cấp số cộng này bằng:

- A. 1. B. 12. C. 9. D. 20.

Câu 17: cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_x + \log_y \geq \log(x + 2y^3)$. Giá trị nhỏ nhất của: $\log_2 x - \log_3 y$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19: Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\log_3(3^{a+1} - 1) = 2a + \log_{\frac{1}{3}} 2$ và $\log_3(3^{b+1} - 1) = 2b + \log_{\frac{1}{3}} 2$. Tính tổng $S = 27^a + 27^b$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 45$. C. $S = 204$. D. $S = 180$.

Câu 20: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{120}{\log_3 x}$ với $0 < x \neq 1$

- A. $n = 15$. B. $n = 20$. C. $n = 12$. D. $n = 10$.

- Câu 21:** Với mỗi số thực dương x , khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\lceil \log x \rceil + 1$. Cho biết $\log 2 = 0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).
- A. 607. B. 606. C. 609. D. 608.
- Câu 22:** Tập hợp các số thực x để hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \log_m^2(nx)}$ ($m > 1, n > 0$) xác định là một đoạn có độ dài bằng $L = \frac{1}{2016}$. Giá trị của $\log_{2016} \frac{m^2 - 1}{mn}$ là?
- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 23:** Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $2\log_x(2y) = 2\log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) = 2$. Giá trị của xy^5z được viết dưới dạng $2^{-\frac{p}{q}}$ trong đó p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $p + q$ bằng?
- A. 49. B. 48. C. 50. D. 52.
- Câu 24:** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}$, với mọi $n \geq 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 10^{100}$ là
- A. 225. B. 226. C. 224. D. 227.
- Câu 25:** Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 1. B. Vô số. C. 2. D. 0.
- Câu 26:** Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn $\log_2 \left[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) \right] = \log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y) \right] = \log_5 \left[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z) \right] = a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $z < x < y$. B. $x < y < z$. C. $y < z < x$. D. $z < y < x$.
- Câu 27:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 10^{81}$ và $(\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y) \cdot (\log_{10} z) = 468$. Tính giá trị của biểu thức $S = \sqrt{(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 + (\log_{10} z)^2}$.
- A. 75. B. 936. C. 625. D. 25.
- Câu 28:** Cho hai số thực dương $x, y \neq 1$ thỏa mãn $\log_x y = \log_y x$ và $\log_x(x-y) = \log_y(x+y)$. Tính giá trị biểu thức $S = x^4 - x^2 + 1$.
- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 5$.
- Câu 29:** Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực $(x; y; z)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$.
- A. 8. B. 4. C. 3. D. 2.

- Câu 30:** Cho $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. 5. C. 4. D. $\frac{15}{4}$.
- Câu 31:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn $\log_a b + 6\log_b a = 5$ và $2 \leq a; b \leq 2005$.
- A. 54. B. 43. C. 53. D. 44.
- Câu 32:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(9z) = \log_{3x^4}(27yz) \neq 0$. Biết $xy^4z = 3^{-\frac{a}{b}}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng
- A. 54. B. 43. C. 53. D. 36.
- Câu 33:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}(2y) = \log_{\sqrt{2x}}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\log x + 5\log y + \log z$ bằng
- A. $-\frac{35\log 2}{6}$. B. $-\frac{35\log 2}{12}$. C. $-\frac{43\log 2}{6}$. D. $-\frac{43\log 2}{12}$.
- Câu 34:** Gọi S là tập hợp tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử $(x; y)$ thuộc S . Xác suất để phần tử chọn ra thỏa mãn $\left[\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ và $\left[\log_5\left(\frac{1}{y}\right)\right]$ đều là các số nguyên chẵn bằng
- A. $\frac{5}{36}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{5}{12}$.
- Câu 35:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $\log^2 a + (4\sin b + 2)\log a + 4\sin b + 5 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a + b$ bằng:
- A. $\frac{1}{1000} + \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{1}{1000} + \frac{3\pi}{2}$. C. $10 + \frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}$.
- Câu 36:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $16^a - (2\sin b + 1)2^{2a+1} + 4\sin b + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng:
- A. $\log_3 4 + \frac{\pi}{2}$. B. $\log_4 3 + \frac{3\pi}{2}$. C. $\log_3 4 + \frac{3\pi}{2}$. D. $\log_4 3 + \frac{\pi}{2}$.
- Câu 37:** Có hai cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225} x + \log_{64} y = 4$ và $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$ là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2)$ bằng:
- A. 12. B. 15. C. 8. D. 36.
- Câu 38:** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = a$ và công bội $q = b$. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\log_8 u_1 + \log_8 u_2 + \dots + \log_8 u_{12} = 2006$.
- A. 46. B. 91. C. 45. D. 90.
- Câu 39:** Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. $\{\pm 5\}$. B. $\{\pm 7, \pm 5, \pm 1\}$. C. $\{\pm 5, \pm 1\}$. D. $\{\pm 1\}$.

Câu 40: Giá trị của tham số thực m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{2019}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$ là

- A. $m = \frac{-1}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{-1}{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \log_2 \frac{mx}{2-x}$ với m là số thực dương. Tìm giá trị thực của m , biết rằng với mọi số thực $a, b \in (0; 2)$ thỏa mãn $a+b=2$ ta luôn có $f(a)+f(b)=3$.

- A. $m = 3$. B. $m = 8$. C. $m = 2\sqrt{2}$. D. $m = 9$.

Câu 42: Với mỗi cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2)$ có bao nhiêu số thực z thỏa mãn $\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+zy^2)$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.A	5.A	6.A	7.B	8.A	9.D	10.A
11.C	12.B	13.C	14.B	15.A	16.A	17.D	18.C	19.D	20.A

21.D	22.A	23.A	24.A	25.C	26.C	27.A	28.A	29.B	30.D
31.A	32.D	33.C	34.B	35.A	36.D	37.A	38.A	39.C	40.A
41.C	42.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7$.

Câu 2: Chọn D

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2 \left(\frac{1}{2}t\right) = \log_4 t + a \Leftrightarrow \log_2 t = 2a + 2 \Leftrightarrow t = 4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 3: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x = \log_a bc \\ y = \log_b ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log_c bc}{\log_c a} \\ y = \frac{\log_c ca}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \log_c a - \log_c b = 1 \\ \log_c a - y \log_c b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a = \frac{y+1}{xy-1} \\ \log_c b = \frac{x+1}{xy-1} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } \log_c ab = \log_c a + \log_c b = \frac{x+y+2}{xy-1}. \text{ Do đó } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow S = m + 2n + 3p = 6.$$

Câu 4: Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2 a \cdot \log_a b = \frac{b}{4} \cdot \frac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 2^4 \Leftrightarrow b = 16$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow a \cdot b = 16^2 \Leftrightarrow ab = 256.$$

Câu 5: Chọn A

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x+y) = t$. Khi đó, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x = 9^t \\ y = 12^t \\ x + y = 16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 12^t = 16^t \quad (1)$$

Xét phương trình (1) chia hai vế cho $9^t > 0$ ta được:

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (N) \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}. \text{ Ta có } \frac{y}{x} = \frac{12^t}{9^t} = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Câu 6: Chọn A

$$\text{Đặt } x = \log_c a, y = \log_c b.$$

$$\text{Ta có } \log_a(bc) = 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c a} = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = 2.$$

$$\log_b(ca) = 3 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b a = 3 \Leftrightarrow \frac{\log_c a}{\log_c b} + \frac{1}{\log_c b} = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 3.$$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} \frac{y+1}{x} = 2 \\ \frac{x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Thay vào } S = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{7}{5}.$$

Câu 7: Chọn B

Đặt $2\log_2 \sqrt{a} = t \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow a = 2^t$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$3\log_3 \left(1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} \right) > t \Leftrightarrow 1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} > 3^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t > 1 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t, t \in \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \right)^t \ln \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Nhận thấy $f(12) = 1$ nên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow f(t) > f(12) \Leftrightarrow t < 12 \Rightarrow 2\log_2 \sqrt{a} < 12 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 2^6 \Leftrightarrow a < 2^{12}.$$

Do đó số a nguyên dương lớn nhất là $2^{12} - 1$.

Suy ra $P = \log_2 [2018(2^{12} - 1)] \approx 22,9783$. Vậy phần nguyên của P là 22.

Câu 8: Chọn A

$$\text{Ta có } \log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b x = a^k \\ \log_a x = b^k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^{a^k} \\ x = a^{b^k} \end{cases} \Rightarrow b^{a^k} = a^{b^k} = a^k \log_a b \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} \right)^k = \log_a b \Leftrightarrow k = \log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) \Rightarrow \log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$$

Câu 9: Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \ln x = \ln t^a \Leftrightarrow x = t^a \\ \ln y = \ln t^b \Leftrightarrow y = t^b \\ \ln z = \ln t^c \Leftrightarrow z = t^c \end{cases}$$

$$\text{Do đó } xy = z^2 t^2 \Leftrightarrow t^a t^b = (t^c t)^2 \Leftrightarrow t^{a+b} = t^{2(c+1)} \Leftrightarrow a+b = 2(c+1) \Rightarrow S = 2$$

Câu 10: Chọn A

$$\begin{aligned} \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \dots + n^3 \log_a 2019 &= 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\ \Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 &= 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = 1008^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = 1008^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow n = 2016$$

Câu 11: Chọn C

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) \right) &= 0 \Leftrightarrow \log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) \right) = 1 \Leftrightarrow \log_{2^b} \left(2^{a+b} \right) = 2^a \Leftrightarrow 2^{a+b} = \left(2^b \right)^{2^a} \\ \Leftrightarrow 2^{a+b} &= 2^{b \cdot 2^a} \Leftrightarrow a+b = b \cdot 2^a. \text{ Do đó :} \\ \log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) &\in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{a+b}{ab} \right) \in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{b \cdot 2^a}{ab} \right) \in [2016; 2017] \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{b \cdot 2^a}{ab} \right) &\in [2016; 2017] \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2^a}{a} \right) \in [2016; 2017] \end{aligned}$$

Câu 12: Chọn B

$$\text{Ta có: } 4z \geq y^2 \Leftrightarrow z \geq \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^3 y^3 + x^2 z \geq x^3 y^3 + \frac{x^2 y^2}{4} \geq 2 \sqrt{x^3 y^3 \cdot \frac{x^2 y^2}{4}} = (xy)^{\frac{5}{2}}.$$

$$\text{Do đó } S \geq \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^{\frac{5}{2}} \geq \log_a^2(xy) + \frac{5}{2} \log_a(xy) = \left(\log_a(xy) + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 4z = y^2 \\ x^3 y^3 = \frac{x^2 y^2}{4} \\ \log_a(xy) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = y^2 \\ xy = \frac{1}{4} \\ \log_a\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó với } \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = \frac{1}{8} \\ a = 4^{\frac{4}{5}} \end{cases} \text{ thì } S = -\frac{25}{16}. \text{ Vậy } \min S = -\frac{25}{16}.$$

Câu 13: Chọn C

$$\text{Ta có } \ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 14: Chọn B

$$\ln(5a) + \ln\left(\frac{3}{a}\right) = \ln\left(5a \cdot \frac{3}{a}\right) = \ln 15.$$

Câu 15: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ abc = b^3 \\ ab + bc + ca = b(a+c) + ca = b(64-b) + b^2 = 64b \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } P = 3 \log_2(64b) - \log_2 b^3 = 3 \log_2 64 = 3 \cdot 6 = 18.$$

Câu 16: Chọn A

Do 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra

$$2017 + \log_2 a + 2019 + \log_4 a = 2(2018 + \log_3 a)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 a = 2 \log_3 a \Leftrightarrow 3 \log_2 a = 4 \log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a (3 - 4 \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy công sai $d = \log_3 a - \log_2 a + 1 = 1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có: $xyz = (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b)$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2$$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$.

Câu 18: Chọn C

Ta có $\log_x + \log_y \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow \log(xy) \geq \log(x + 2y^3) \Leftrightarrow xy \geq x + 2y^3$

$$\Leftrightarrow x(y-1) \geq 2y^3 > 0 \Rightarrow y-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{2y^3}{y-1} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{2y^2}{y-1} - 2y + 2 + \frac{2}{y-1} - 2(y-1) + \frac{2}{y-1} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{2(y-1) \cdot \frac{2}{y-1}} + 4 = 8 \Rightarrow \log_2 x - \log_2 y = \log_2 \frac{x}{y} \geq \log_2 8 = 3.$$

Câu 19: Chọn D

$$\log_3(3^{a+1} - 1) = 2a + \log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{a+1} - 1) = 2a \Leftrightarrow 2(3^{a+1} - 1) = 3^{2a} \Leftrightarrow 3^{2a} - 6 \cdot 3^a + 2 = 0.$$

Tương tự: $3^{2b} - 6 \cdot 3^b + 2 = 0$.

Suy ra 3^a và 3^b là hai nghiệm phân biệt (vì a, b phân biệt) của phương trình: $X^2 - 6X + 2 = 0$.

Khi đó $S = 27^a + 27^b = X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)^3 - 3X_1X_2(X_1 + X_2)$, với $X_1 + X_2 = 6$, $X_1 \cdot X_2 = 2$.

Vậy $S = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$.

Câu 20: Chọn A

Do $0 < x \neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \log_x(3 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 3^n) = \log_x 3^{1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \log_x 3$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n = 15$$

Câu 21: Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$$\lceil \log(2^{2017}) \rceil + 1 = \lceil 2017 \times \log 2 \rceil + 1 = \lceil 2017 \times 0,30103 \rceil + 1 = \lceil 607,17751 \rceil + 1 = 608.$$

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \log_m^2(nx)}$ ($m > 1, n > 0$) xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log_m^2(nx) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log_m(nx) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{m} \leq nx \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{mn} \leq x \leq \frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{mn} \leq x \leq \frac{m}{n}.$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{m^2 - 1}{mn} = \frac{1}{2016}$$

Do đó $\log_{2016} \frac{m^2 - 1}{mn} = \log_{2016} \frac{1}{2016} = -1.$

Câu 23: Chọn A

Ta có

$$2\log_x(2y) = 2\log_{2x}(4z) = \log_{2x^4}(8yz) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ 4z = 2x \\ 8yz = 4x^8 \end{cases} \Rightarrow 4x^8 = 2x^2 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{6}} \Rightarrow y = z = 2^{\frac{7}{6}}$$

Ta được: $xy^5z = 2^{\frac{43}{6}} \Rightarrow \begin{cases} p = 43 \\ q = 6 \end{cases}$. Vậy $p + q = 49$.

Câu 24: Chọn A

Đặt $t = \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}, t \geq 0$.

Thế vào phương trình $\log u_5 - 2\log u_2 = 2(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1})$ ta có

$$t^2 - 1 = 2(t + 1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3 (t \geq 0).$$

Do $t = 3$ nên $\sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \log \frac{10u_5}{u_2^2} = 9 \Leftrightarrow \frac{10u_1 \cdot 3^4}{u_1^2 \cdot 3^2} = 10^9 \Leftrightarrow u_1 = \frac{9}{10^8}.$

$$u_n < 10^{100} \Leftrightarrow \frac{9}{10^8} \cdot 3^{n-1} < 10^{100} \Leftrightarrow 3^{n+1} < 10^{108} \Leftrightarrow n < 108 \log_3 10 - 1 \approx 225,357.$$

Câu 25: Chọn C

Dựa vào việc khảo sát hàm số $f(t) = e^{t-1} - t, t \in \mathbb{R}$. Ta thấy $e^{t-1} \geq t, t \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$. Do đó $e^{x+y-1} \leq x + y \Leftrightarrow e^{x+y-1} = x + y \Leftrightarrow x + y = 1$.

Khi đó $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow f(x) + f(1-x) = 1 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 9^x \left(\frac{m^4}{4} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{3} \Rightarrow S\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$$

Câu 26: Chọn D.

$$\log_2 \left[\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) \right] = \log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y) \right] = \log_5 \left[\log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z) \right] = p > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) = 2^a \\ \log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y) = 3^a \\ \log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z) = 5^a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2^{-2a} \\ \log y = 3^{-3a} \\ \log_5 z = 5^{-5a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{2^{-2a}} \\ y = 3^{3^{-3a}} \\ z = 5^{5^{-5a}} \end{cases}$$

Với $x \geq 2, a > 1$, xét hàm số $y = x^{x^{-x^a}} \Rightarrow \ln y = x^{-x^a} \ln x \Rightarrow \ln(\ln y) = \ln(\ln x) - x^a \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\ln y} &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - x^{a-1} - ax^{a-1} \ln x = \frac{1}{x \ln x} - x^{a-1} (1 + a \ln x) < \frac{1}{x \ln x} - 1 - \ln x \\ &= \frac{1 - x \ln x - x (\ln x)^2}{x \ln x} < 0, \forall x > 2, a > 1 \Rightarrow y' < 0, \forall x > 2, a > 1. \end{aligned}$$

Do đó $y(2) > y(3) > y(5) \Rightarrow x > y > z$.

Câu 27: Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \log_{10} x \\ b = \log_{10} y \\ c = \log_{10} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^a \\ y = 10^b \\ z = 10^c \end{cases} \Rightarrow xyz = 10^{a+b+c}.$$

$$\text{Theo bài ta có: } \begin{cases} xyz = 10^{81} \\ (\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y)(\log_{10} z) = 468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 81 \\ ab + ac + bc = 468 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Vậy thay (1) vào ta có } S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)} = \sqrt{81^2 - 2 \cdot 468} = 75.$$

Câu 28: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \neq 1 \\ x > y > 0 \end{cases}$. Ta có:

$$\log_x y = \log_y x \Leftrightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \text{ (L)} \\ \log_x y = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow y = x^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ta có: } \log_x (x - y) = \log_y (x + y) \Leftrightarrow \log_x \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\log_x \left(x + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow \log_x \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0. \text{ Vậy } S = x^4 - x^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Câu 29: Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} = 7.$$

Từ điều kiện thứ hai suy ra

$$x^2 y^4 + 2x y^2 z^4 + z^8 = 4 + x^2 y^4 - 2x y^2 z^4 + z^8 \Leftrightarrow x y^2 z^4 = 1.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM- GM cho 7 số thực dương ta có

$$\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} \geq 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{y^2})^2 \cdot (\sqrt[3]{z^2})^4} = 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2 y^4 z^8}} = 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{(x y^2 z^4)^2}} = 7.$$

$$\text{Do đó dấu bằng phải xảy ra, tức } \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} \\ x y^2 z^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y, z \in \{-1; 1\}.$$

Vậy có tất cả 4 bộ số thỏa mãn.

Câu 30: Chọn D

Ta có $a > 0; b > 0$, suy ra

$$4a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab + 1 \Rightarrow \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1)$$

$$\Rightarrow 2 = \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) \geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1)$$

$$\text{Mà } \log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = \log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \frac{1}{\log_{2a+2b+1}(4ab+1)} \geq 2$$

$$\text{Khi đó: } \log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2a+2b+1}(4ab+1) = 1 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+1 = 4ab+1 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a+2b = \frac{15}{4}.$$

Câu 31: Chọn A

$$\log_a b + 6\log_b a = 5 \Leftrightarrow \log_a b + \frac{6}{\log_a b} = 5 \Leftrightarrow \log_a^2 b - 5\log_a b + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 2 \\ \log_a b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ b = a^3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $b = a^2$

$$2 \leq b \leq 2005 \Leftrightarrow 2 \leq a^2 \leq 2005 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2005}$$

Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{2; 3; 4; \dots; 44\}$. Do đó có 43 cặp số $(a; b)$.**Trường hợp 2:** $b = a^3$

$$2 \leq b \leq 2005 \Leftrightarrow 2 \leq a^3 \leq 2005 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \leq a \leq \sqrt[3]{2005}$$

Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{2; 3; 4; \dots; 12\}$. Do đó có 11 cặp số $(a; b)$.Vậy có 54 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Câu 32: Chọn D**

$$\text{Đặt } 3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(9z) = \log_{3x^4}(27yz) = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = x^{\frac{t}{3}} \\ 9z = (3x)^{\frac{t}{3}} = 3^{\frac{t}{3}} \cdot x^{\frac{t}{3}} \\ 27yz = (3x^4)^t = 3^t \cdot x^{4t} \end{cases} \Rightarrow 3y \cdot 9z \cdot 27yz = 3^{\frac{4t}{3}} \cdot x^{\frac{14t}{3}} \Leftrightarrow (yz)^2 = 3^{\frac{4t-18}{3}} \cdot x^{\frac{14t}{3}} \Leftrightarrow yz = 3^{\frac{2t-9}{3}} \cdot x^{\frac{7t}{3}} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } xy^3 = x \cdot 3^{-3} \cdot x^t = 3^{-3} \cdot x^{t+1} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } xy^4z = x^{\frac{10t+3}{3}} \cdot 3^{\frac{2t-18}{3}}$$

$$\text{Vì } xy^4z = 3^{\frac{a}{b}} \text{ nên } \frac{10t+3}{3} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{10} \text{ nên } \frac{2t-18}{3} = -\frac{31}{5}. \text{ Vậy } \frac{a}{b} = \frac{31}{5} \Rightarrow a+b = 36$$

Câu 33: Chọn C

$$\text{Đặt } \log x = a \neq 0, \log y = b, \log z = c$$

Khi đó

$$\log_{\sqrt{x}}(2y) = \log_{\sqrt{2x}}(4z) = \log_{2x^4}(8yz)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{\log 2 + b}{a} = 2 \cdot \frac{2\log 2 + c}{\log 2 + a} \\ 2 \cdot \frac{\log 2 + b}{a} = \frac{3\log 2 + b + c}{\log 2 + 4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2 2 + (a+b)\log 2 + ab = 2a\log 2 + ac & (1) \\ 2\log^2 2 + (8a+2b)\log 2 + 8ab = 3a\log 2 + ab + ac & (2) \end{cases}$$

(2) - 2.(1) ta được:

$$6a\log 2 + 6ab = -a\log 2 + ab - ac \Leftrightarrow 7a\log 2 = -5ab - ac$$

$$\Leftrightarrow 5b + c = -7\log 2 \Leftrightarrow 5\log y + \log z = -7\log 2$$

(2) – (1) ta được:

$$\log^2 2 + (6a + b)\log 2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log 2 = -6a \\ \log 2 = -b \end{cases}. \text{ Do đó } \log x = a = -\frac{1}{6}\log 2$$

$$\text{Vậy } \log x + 5\log y + \log z = -\frac{1}{6}\log 2 - 7\log 2 = -\frac{43\log 2}{6}.$$

Câu 34: Chọn B

$$\text{Với } 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \text{ suy ra } \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \right\rceil \geq 0; \left\lceil \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \right\rceil \geq 0.$$

Khi đó

$$\left\lceil \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \right\rceil = 2k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2k \leq \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2k + 1 \Leftrightarrow 2^{2k} \leq \frac{1}{x} < 2^{2k+1} \Leftrightarrow 2^{-2k-1} < x \leq 2^{-2k}$$

Vậy $x \in (2^{-2k-1}; 2^{-2k}]$, $k = 0, 1, \dots$ độ dài của tập này bằng

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (2^{-2k} - 2^{-2k-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \left\lceil \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \right\rceil = 2k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2k \leq \log_5\left(\frac{1}{y}\right) \leq 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^{2k} \leq \frac{1}{y} < 5^{2k+1} \Leftrightarrow 5^{-2k-1} < y \leq 5^{-2k}$$

Vậy $y \in (5^{-2k-1}; 5^{-2k}]$, $k = 0, 1, \dots$ độ dài của tập này bằng $\sum_{k=0}^{+\infty} (5^{-2k} - 5^{-2k-1})$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 4 \cdot 5^{-2k-1} = 4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \dots \right) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{6}. \text{ Vậy xác suất cần tìm bằng } \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$

Câu 35: Chọn A

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(\log^2 a + 2(2\sin b + 1)\log a + (2\sin b + 1)^2) + (4\sin b + 5 - (2\sin b + 1)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log a + 2\sin b + 1)^2 + 4(1 - \sin^2 b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log a + 2\sin b + 1)^2 + 4\cos^2 b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log a + 2\sin b + 1 = 0 \\ \cos b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin b = 1 \\ \log a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1000} \\ b = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow (a+b)_{\min} = \frac{1}{1000} + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \sin b = -1 \\ \log a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 36: Chọn D

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + \left(4\sin b + 5 - (2\sin b + 1)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + 4(1 - \sin^2 b) = 0$$

$$\left(4^a - (2\sin b + 1)\right)^2 + 4\cos^2 b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos b = 0 \\ 4^a - 2\sin b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^a - 3 = 0 \\ \sin b = 1 \\ 4^a + 1 = 0 \\ \sin b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \log_4 3 \\ b = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \cdot \text{Vậy } (a+b)_{\min} = \log_4 3 + \frac{\pi}{2}$$

Câu 37: Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$. Đặt $\begin{cases} X = \log_{225} x \\ Y = \log_{64} y \end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} X + Y = 4 \\ \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{X} - \frac{1}{4-X} = 1 \Leftrightarrow 4 - 2X = X(4-X) \Leftrightarrow X^2 - 6X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 - \sqrt{5} \\ X = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \\ Y = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 225^{3+\sqrt{5}} \\ y_1 = 64^{1-\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{Với } \begin{cases} X = 3 - \sqrt{5} \\ Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 225^{3-\sqrt{5}} \\ y_2 = 64^{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2) = \log_{30}(225^6 \cdot 64^2) = 12$$

Câu 38: Chọn A

Có $u_n = b^{n-1} u_1 = b^{n-1} a$, vậy ta có:

$$\begin{aligned} \log_8 u_1 + \log_8 u_2 + \dots + \log_8 u_{12} &= \log_8(a) + \log_8(ab) + \dots + \log_8(ab^{11}) \\ &= \log_8(a \cdot ab \cdot ab^2 \dots ab^{11}) = \log_8(a^{12} b^{66}). \end{aligned}$$

$$\text{Và } \log_8(a^{12} b^{66}) = 2006 \Leftrightarrow a^{12} b^{66} = 8^{2006} \Leftrightarrow (a^2 b^{11})^6 = (2^{1003})^6 \Leftrightarrow a^2 b^{11} = 2^{1003}.$$

Vì vậy: $a = 2^x$, $b = 2^y$ ($x, y \in \mathbb{Z}^+$) và

$$2^{2x} b^{11y} = 2^{1003} \Leftrightarrow 2x + 11y = 1003 \Leftrightarrow y = \frac{1003 - 2x}{11} = 91 - \frac{2(x-1)}{11}.$$

$$\text{Do đó: } x-1 = 11k \Leftrightarrow x = 11k+1 \Leftrightarrow y = 92-2k.$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $k \in \{0, \dots, 45\}$. Vậy có 46 cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn.

Câu 39: Chọn C

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 4y - 6 + m^2 = x^2 + y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad (1) \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = m^2 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; 2)$, bán kính $R_1 = 2$

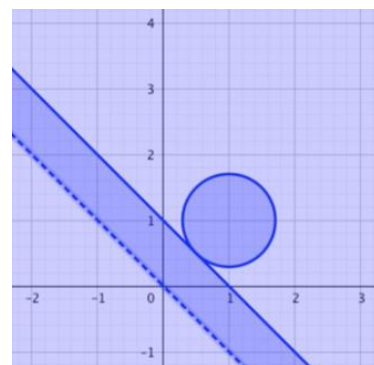
và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 2)$ và bán kính $R_2 = |m|$

Cặp số thực $(x; y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong

$$(R_1 = R_2) \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \\ R_1 \neq R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m| + 2 \\ 3 = ||m| - 2| \\ |m| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 5 \end{cases}$$

Câu 40: Chọn A

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_{2019}(x+y) \leq 0 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ \sqrt{2xy+m} \geq 1-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ 2xy+m \geq (1-(x+y))^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ x^2+y^2-2x-2y+1-m \leq 0 \end{cases} \\ & \text{Theo đề} \quad \begin{cases} x+y > 0 \\ x+y-1 \leq 0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq m+1 \end{cases} \\ & \text{YCBT} \Leftrightarrow d(I;d) = R \Leftrightarrow \frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$



Câu 41: Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \log_2 \frac{mx}{2-x} = \log_2 m + \log_2 \frac{x}{2-x}$$

$$\text{Do đó } f(a) + f(b) = f(a) + f(2-a) = \log_2 m + \log_2 \frac{a}{2-a} + \log_2 m + \log_2 \frac{2-a}{a} = 2\log_2 m$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } f(a) + f(b) = 3 \text{ nên } 2\log_2 m = 3 \Leftrightarrow m = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 42: Chọn A

$$\begin{aligned} & \text{Ta có: } \begin{cases} \log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2) \\ \log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+zy^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ \log_2(2x+y)^2 = \log_2(x^2+xy+7y^2) \\ \log_3(3x+y)^2 = \log_3(3x^2+4xy+zy^2) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ (2x+y)^2 = x^2+xy+7y^2 \\ (3x+y)^2 = 3x^2+4xy+zy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y > 0, 3x+y > 0 \\ 3x^2+3xy-6y^2 = 0 \\ z = \frac{6x^2+2xy+y^2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1; \frac{x}{y} = -2 \\ z = 9; z = 21 \end{cases} \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ 3: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT

LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định nghĩa

- Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là:

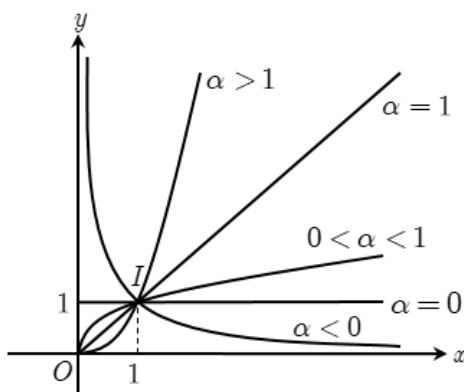
- $D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương
- $D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0
- $D = \mathbb{R}$ nếu α không nguyên

3. Đạo hàm của hàm lũy thừa

- Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- Đạo hàm của hàm hợp $[u^\alpha(x)]' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$

4. Tính chất và đồ thị của hàm lũy thừa

- Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ với $(\alpha < 0)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang, nhận Oy làm tiệm cận đứng. Khi $\alpha > 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.



- Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.
- Lưu ý:** Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.

II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

- Hàm số $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a

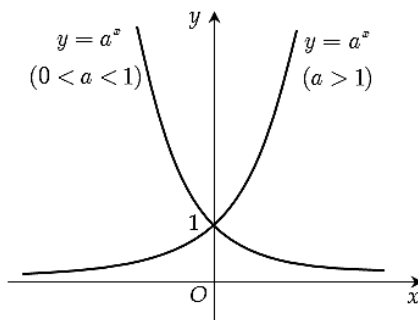
2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$

3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó ta có $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó ta có $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$



Đồ thị nhận Ox là tiệm cận ngang, luôn đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành ($y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

4. Đạo hàm

$$\begin{aligned} \oplus (a^x)' &= a^x \cdot \ln a & \oplus (a^u)' &= u' \cdot a^u \cdot \ln a \\ \oplus (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} & \oplus (e^x)' &= e^x & \oplus (e^u)' &= u \cdot e^u \end{aligned}$$

III. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

- Hàm số dạng $y = \log_a x$, ($a > 0; a \neq 1$) được gọi là hàm số logarit cơ số a .

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

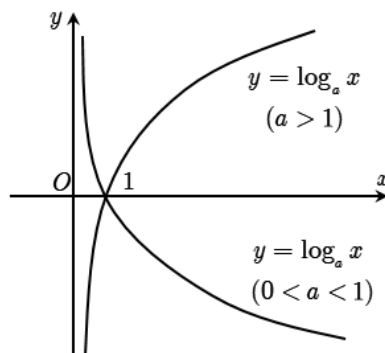
3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$



4. Đạo hàm

$$\oplus (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad \oplus (\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0) \Rightarrow (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Tìm tập hợp giá trị của m để hàm số $y = (m^2 - 3m + 1)^x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \setminus \{0; 3\}$.

C. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

D. $(0; 3)$.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 < m^2 - 3m + 1 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 > 0 \\ m^2 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} < m < 3 \\ 0 < m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = \frac{e^x}{\cos x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'' - 2y = 2y' \tan x$.

B. $y'' = -2y' \tan x$.

C. $y'' = 2y' \tan x$.

D. $y'' + 2y = 2y' \tan x$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $y' = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x} = y + y \tan x$

Đạo hàm cấp hai: $y'' = y' + y' \cdot \tan x + (1 + \tan^2 x) = 2 \frac{e^x}{\cos x} + 2 \frac{e^x}{\cos x} \tan x + 2 \frac{e^x}{\cos x} \tan^2 x$
 $= 2y + 2y \tan x + 2y \tan^2 x \Rightarrow y'' - 2y = 2(y + y \tan x) \tan x = 2y' \cdot \tan x$

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x-m) \ln(x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2)}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số xác định trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 12.

B. 18.

C. 11.

D. 8.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - m \neq 0 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} m \leq 2 \\ g(x) = x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \cdot (*)$

Xét $\Delta' = (3m-1)^2 - 9m^2 = 1 - 6m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m \leq 2$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1 = -\frac{1}{2} \notin (2; +\infty)$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$. Gọi $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$ là các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1. g(2) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{6} \\ 9m^2 - 12m + 8 \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$.

Kết hợp cả 3 trường hợp ta có các giá trị m thỏa (*) là $m \leq 2$.

Với $\begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \cdot (**)$

Ta có $g'(x) = 2x - 2(3m-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1$.

Nếu $2 \leq 3m - 1 \Leftrightarrow 1 \leq m$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	2	$3m - 1$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

$6m - 1$

Khi đó $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 < 6m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Nếu $2 > 3m - 1 \Leftrightarrow m < 1$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$3m - 1$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

$6m - 1$ $9m^2 - 12m + 8$

Khi đó $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1 \leq 9m^2 - 12m + 8 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.

Do đó $\begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 2$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9, -8, \dots, 2\} \\ m \leq 2 \end{cases} \text{ Suy ra có 12 giá trị nguyên của } m \text{ thỏa đề bài.}$$

VÍ DỤ 4: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Gọi $a \in S$, $b \in S$ lần lượt là số nguyên dương nhỏ nhất và số nguyên âm lớn nhất. Tính $P = 2a + 3b$.

A. $P = -10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 10$.

D. $P = -4$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Đề hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m = 0$ vô nghiệm với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Trường hợp 1: $m = 0$ thì phương trình trở thành $-2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ đặt $t = \ln x$, khi đó $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

Phương trình $m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m = 0$ trở thành $mt^2 - 2t + 3 + m = 0$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4m(3+m) < 0$

$$\Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 4 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Do đó $a = 1$; $b = -4 \Rightarrow P = 2a + 3b = 2 - 12 = -10$.

VÍ DỤ 5: Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm

cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{(a+1)} \frac{b}{2}$.

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $a, b > 0$ nên hàm số luôn có tập xác định $D = \left(-\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

$$\text{Mà } y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2} = \frac{a+bx-2}{(x-2)(\sqrt{a+bx} + \sqrt{2})}, \text{ đặt } f(x) = a+bx-2.$$

Để đồ thị hàm số trên có đúng một đường tiệm cận thì $f(2) = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 2$.

Đặt $a+1=x$, $\frac{b}{2}=y$ ta suy ra $x+4y=3 \Rightarrow P=\log_x y$, (do $a>0$ nên $x>1$).

Lại có $3=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+4y \geq 3\sqrt[3]{x^2y} \Leftrightarrow x^2y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x^2}$.

Vậy $P=\log_x y \leq \log_x \left(\frac{1}{x^2}\right) = -2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

DẠNG 3**Bài tập hàm số lũy thừa, mũ và logarit**

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{-4}$ là

- A. $[1; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $(1; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{2019}(4-x^2) + (2x-3)^{-2019}$.

- A. $D = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$. B. $D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
C. $D = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $D = (-2; 2)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2-x}$ là

- A. $(-1; 2]$. B. $(-1; 2)$. C. $(-\infty; 2]$ D. $[-1; 2]$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$. B. $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4-x^2)^{\frac{1}{5}}$.

- A. $D = [-2; 2]$. B. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. C. $D = (-2; 2)$. D. $D = (-\infty; +\infty)$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y = (3x-5)^{\frac{1}{3}}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. D. $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. 5. B. 4. C. 7. D. 9.

Câu 9: Cho biết phương trình $\log_9 x + \sqrt{\log_9 x + 4} = 26$ có nghiệm dạng $x = 3^n$, với n là số tự nhiên. Tổng tất cả các chữ số của n bằng

- A. 9. B. 5. C. 6. D. 3.

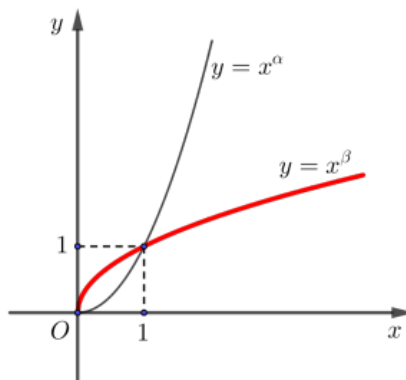
Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = (x+3)^{\frac{3}{2}} - \sqrt[4]{5-x}$ là

- A. $D = (-3; 5]$. B. $D = (-3; +\infty] \setminus \{5\}$.
C. $D = (-3; 5)$. D. $D = (-3; +\infty)$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{5}e^{4x}$ là

- A. $y' = -\frac{4}{5}e^{4x}$. B. $y' = \frac{1}{20}e^{4x}$. C. $y' = \frac{4}{5}e^{4x}$. D. $y' = -\frac{1}{20}e^{4x}$.

Câu 12: Cho các số thực α và β . Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = x^\beta$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $0 < \beta < \alpha < 1$. B. $\alpha < 0 < \beta < 1$. C. $0 < \beta < 1 < \alpha$. D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x) = \log_5(x^3 - x^2 - 2x)$ xác định?

- A. $x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. B. $x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$.
C. $x \in (0; 1)$. D. $x \in (1; +\infty)$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2(x - m + \sqrt{2x^2 + 1})$$

- A. 2020. B. 2021. C. 2018. D. 2019.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \ln(e^x + m)$. Có bao nhiêu số thực dương m để $f'(a) + f'(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a + b = 1$

- A. 1. B. 2. C. Vô số. D. 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \ln 2019 - \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(3) + \dots + f'(2019)$.

- A. $S = \frac{4035}{2019}$. B. $S = 2021$. C. $S = \frac{2019}{2021}$. D. $S = \frac{2020}{2021}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \ln(2x - 5)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 1$ là

- A. $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. C. $(3; +\infty)$. D. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup (3; +\infty)$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + x \cdot e^{-x}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 3)$.

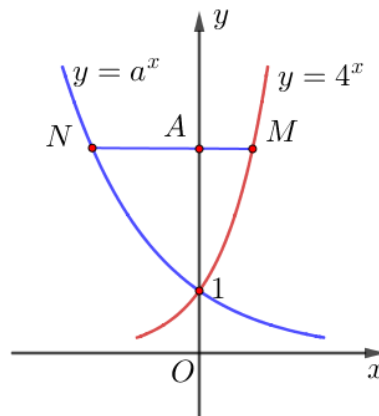
Câu 19: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; -1)$. C. $[-1; 1]$. D. $(-1; 1)$.

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq \frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{4} \leq m < 4$.

Câu 21: Cho số thực a dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đồ thị $y = 4^x$ và $y = a^x$, trục tung lần lượt tại M , N , A thì $AN = 2AM$. Giá trị của a bằng



- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.A	4.A	5.D	6.C	7.C	8.C	9..C	10.A
11.C	12.C	13.A	14.D	15.A	16.D	17.A	18.A	19.A	20.A
21.A									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn D**Điều kiện xác định: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.**Câu 2: Chọn B**Điều kiện có nghĩa của hàm số là $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ **Câu 3: Chọn A**Hàm số xác định khi $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 > 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2$.Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-1; 2]$ **Câu 4: Chọn A**Vì $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định của hàm số là $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.Vậy tập xác định của hàm số là $(1; +\infty)$.**Câu 5: Chọn D**Hàm số xác định khi $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 4 \end{cases}$.Vậy tập xác định D của hàm số là: $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.**Câu 6: Chọn C**Điều kiện xác định của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{5}}$ là: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2)$.**Câu 7: Chọn C**Vì hàm số $y = (3x - 5)^{\frac{1}{3}}$ có số mũ không nguyên nên hàm số xác định khi $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$.Vậy tập xác định của hàm số $y = (3x - 5)^{\frac{1}{3}}$ là $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.**Câu 8: Chọn C**Hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$. Vì m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có tất cả 7 giá trị m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\log_9 x + \sqrt{\log_9 x + 4} = 26$ (1)

Đặt $t = \sqrt{\log_9 x + 4}$ với $t \geq 0$. Ta có $\log_9 x = t^2 - 4$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4 + t = 26 \Leftrightarrow t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & (\text{TM}) \\ t = -6 & (\text{L}) \end{cases}$.

Với $t = 5 \Rightarrow \log_9 x = 21 \Leftrightarrow x = 9^{21} \Leftrightarrow x = 3^{42} \Rightarrow n = 42$.

Vậy tổng tất cả các chữ số của n là $4 + 2 = 6$.

Câu 10: Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq 5$.

Câu 11: Chọn C

Ta có $y = \frac{1}{5}e^{4x} \Rightarrow y' = \frac{1}{5}(e^{4x})' = \frac{1}{5}(4x)'e^{4x} = \frac{4}{5}e^{4x}$. Vậy $y' = \frac{4}{5}e^{4x}$.

Câu 12: Chọn C

Theo đặc điểm đồ thị hàm số lũy thừa.

Câu 13: Chọn A

Biểu thức $f(x) = \log_5(x^3 - x^2 - 2x)$ xác định $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 14: Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 \geq 0 \\ x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi

Tập các định: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 = [x + (m+1)]^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ với $x \in \mathbb{R}$ có $f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2018, -2017, -2016, \dots, -1, 0\}$.

Câu 15: Chọn A

Với $m > 0$ thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + m}$

$$\Rightarrow f'(a) + f'(b) = \frac{e^a}{e^a + m} + \frac{e^b}{e^b + m} = \frac{2e^{a+b} + m(e^a + e^b)}{e^{a+b} + m(e^a + e^b) + m^2} = \frac{2e + m(e^a + e^b)}{e + m(e^a + e^b) + m^2}.$$

$$\text{Mà } f'(a) + f'(b) = 1 \Leftrightarrow \frac{2e + m(e^a + e^b)}{e + m(e^a + e^b) + m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = e \Leftrightarrow m = \sqrt{e}.$$

Câu 16: Chọn D

Ta có: $f(x) = \ln 2019 - [\ln(x+2) - \ln x] = \ln x - \ln(x+2) + \ln 2019 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

Xét $S = f'(1) + f'(3) + \dots + f'(2019)$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+2} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2017+2} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2019+2} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}.$$

Câu 17: Chọn A

Xét hàm số $f'(x) = \frac{2}{2x-5}, \forall x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$

$$f'(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{2x-5} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right). \text{ Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm bất phương trình là } \left(\frac{7}{2}; +\infty\right).$$

Câu 18: Chọn A

Ta có: $g(x) = f(1-x) + x.e^{-x}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Cho $g'(x) = -f'(1-x) + (1-x)e^{-x}$.

Ta thấy với $x \in (-2; -1)$ thì $f'(1-x) < 0$ và $1-x > 0$. Suy ra $g'(x) > 0; \forall x \in (-2; -1)$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2; -1)$.

Câu 19: Chọn A

Hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{2x}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 2}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		0	-1	1	0	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $m \leq -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $m \geq \frac{1}{4}$.

B. $m \geq 4$.

C. $m \leq \frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{4} \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - mx + 3$ có tập xác định $D = (-\infty; +\infty)$. Ta có $y' = \frac{x}{x^2 + 4} - m$.

Khi đó hàm số $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 4} - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 4} \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \text{ với } f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ ta có: $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(2) = \frac{1}{4}$. Suy ra các giá trị của tham số m cần tìm là:

$$m \geq \frac{1}{4}.$$

Câu 21: Chọn A

Vì $AN = 2AM$ nên $M(x_1; 4^{x_1}), N(-2x_1; a^{-2x_1})$.

Ta có $4^{x_1} = a^{-2x_1} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

➤ Cách giải:

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ($0 < a \neq 1$).

3. Phương pháp đặt ẩn phụ: với $0 < a \neq 1$, $f[a^{g(x)}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

- **Dạng 1:** Phương trình có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$ (1)
 - Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ đưa phương trình (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p = 0$.
 - Giải phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$.
 - Sau đó thế vào phương trình $t = a^{f(x)}$ tìm nghiệm x .
- **Dạng 2:** $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- **Dạng 3:** $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Phương pháp logarit hóa.

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.

5. Phương pháp hàm số

❖ Định nghĩa

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

❖ Định lý, tính chất

- **Định lý.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$.

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

- **Tính chất 2.** Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(a; b)$.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- **Tính chất 4.** Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và hàm số g liên tục, nghịch biến (hoặc hàm hằng) trên khoảng $(a; b)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

❖ Nhận xét

- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x) = 0$, ta có thể chứng minh $f(x)$ đơn điệu bằng cách khảo sát hàm số, sau đó tìm nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.
- Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng $f(u) = f(v)$ (trong đó $u = u(x), v = v(x)$) hoặc $f(x) = g(x)$ và sử dụng các tính chất đã nêu trên.
- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x) = m$ thì số nghiệm của phương trình sẽ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

6. Phương pháp đánh giá

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - **Bước 1:** Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
 - **Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.
 - Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.
- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \leq m, \forall x \in D \\ g(x) \geq m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq m \leq g(x), \forall x \in D$.
 - Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.
 - Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x) \geq g(x)$.
- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.
 - Ta có: $\sin x \in [-1; 1]; \cos x \in [-1; 1]$.
 - Điều kiện để hàm số lượng giác $a \cos x + b \sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.
 - Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.
- **Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ...

VÍ DỤ MINH HỌA**VÍ DỤ 1.** Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5} = 9.$

b) $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}.$

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|} = 16^{x^2-1}.$

d) $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot (10^5)^{1-x}.$

e) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}.$

f) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20.$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x^2-4x+5} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$. Vậy $S = \{1; 3\}.$

b) Ta có: $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8} = 3^{4x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 8 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$
Vậy $S = \{2; 5\}.$

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|} = 16^{x^2-1} \Leftrightarrow \left|\frac{28}{3}x+4\right| = 4(x^2-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 7x+3 = 3x^2-3 \\ 7x+3 = -3x^2+3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x=3 \vee x=-\frac{2}{3} \\ x=0 \vee x=-\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{-\frac{7}{3}; 3\right\}.$$

d) $(2.5)^{8-x^2} = 10^{-3} \cdot 10^{5-5x} \Leftrightarrow 10^{8-x^2} = 10^{2-5x} \Leftrightarrow 8-x^2 = 2-5x \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=6 \end{cases}$. Vậy $S = \{-1; 6\}.$

e) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. Vậy $S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}\right\}.$

f) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x (5^x + 4) - 5(5^x + 4) = 0$
 $\Leftrightarrow (5^x + 4)(3^{x+1} - 5) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3 5 - 1$. Vậy $S = \{\log_3 5 - 1\}.$

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau

a) $3^{x^2-4x+5} = 9.$

b) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0.$

c) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0.$

d) $9^{\frac{x}{2}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 = 0.$

e) $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0.$

f) $(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6.$

Lời giảia) Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ tương đương với

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_3 2 \\ x=1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{\log_3 2; 1\}.$$

b) Đặt $t = 2^x, t > 0$ khi đó phương trình $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$ tương đương với

$$4t^2 - 18t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{2; -1\}.$$

$$\text{c) } 9^x - 5.3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3^x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{1}{3}\right)^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành } 3t = 2 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta được } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2$$

$$\text{Vậy } S = \{-\log_3 2; 0\}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 9^{\frac{x}{2}} + 9.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 &= 0 \Leftrightarrow 3^x + 9.\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x + 3.\frac{1}{3^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = 3, \text{ ta được } 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = 0, x = 1.$$

e) Đặt $t = 3^{x^2+x-1} (t > 0)$, khi đó phương trình $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$ tương đương với

$$3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2+x-1} = 3 \\ 3^{x^2+x-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-1; 1; 0; 2\}.$$

f) Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x, t > 0$. Khi đó phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 6$ tương đương với

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{(2+\sqrt{3})} 2$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \log_{(2+\sqrt{3})} 2 \right\}.$$

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

b) $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$.

c) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$.

d) $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$.

Lời giải

$$\text{a) } 6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow 6 \left(\frac{3}{2} \right)^{2x} - 13 \left(\frac{3}{2} \right)^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } 3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10$$

$$\Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} \right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = 10^3 \quad (1). \text{ Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } y = 3^x > 0. \text{ Khi đó } (2) \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \quad (N) \\ y = \frac{1}{3} \quad (N) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1; \text{ Với } y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1. \text{ Vậy } S = \{-1; 1\}.$$

$$\text{c) } 9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6 \Leftrightarrow 9^{1-\cos^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6 \Leftrightarrow \frac{9}{9^{\cos^2 x}} + 9^{\cos^2 x} - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 9^{\cos^2 x}, (1 \leq t \leq 9). \text{ Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \frac{9}{t} + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow 9^{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow 3^{2\cos^2 x} = 3^1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d) } 2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x^2+1} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{4 \cdot 2^{2(x^2+1)} - 4 \cdot 2^{x^2+1}} + 1$$

$$\text{Đặt } t = 2^{x^2+1} (t \geq 2), \text{ phương trình trên tương đương với}$$

$$8t = t^2 + \sqrt{4t^2 - 4t + 1} \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 + \sqrt{10} \quad (\text{vì } t \geq 2).$$

$$\text{Từ đó suy ra } 2^{x^2+1} = 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \end{cases}$$

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

a) $3^{5^x} = 5^{3^x}$

b) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

c) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

d) $2^{x^2-4} = 7^{x-2}$

Lời giải

a) $3^{5^x} = 5^{3^x} \Leftrightarrow \log_3(3^{5^x}) = \log_3(5^{3^x}) \Leftrightarrow 5^x = 3^x \log_3 5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = \log_{\left(\frac{5}{3}\right)}(\log_3 5)$

Phương trình có một nghiệm $x = \log_{\left(\frac{5}{3}\right)}(\log_3 5)$.

b) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow \log_2(3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 3^x + \log_2 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \log_2 3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(\log_2 3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm: $x = 0$, $x = -\log_2 3$.

c) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x-1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 5^{x-3} + \log_2 2^{\frac{x-3}{x}} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\log_2 5 + \frac{x-3}{x} \log_2 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\log_5 2 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm: $x = 3$, $x = -\log_5 2$.

d) $2^{x^2-4} = 7^{x-2} \Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-4} = \log_2 7^{x-2} \Leftrightarrow (x^2-4)\log_2 2 = (x-2)\log_2 7$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_2 7 - 2 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm: $x = 2$, $x = \log_2 7 - 2$.

VÍ DỤ 5. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$.

b) Gọi S là tập hợp mọi nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4$. Số phần tử của S là.

c) Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $6^x + (3-m) \cdot 2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Lời giải

a) $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (1)$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên tập số thực

Mà $f(2) = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

$$\text{b) } 2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4 \quad (1) \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} + x^2 - 3x + 2 = 2^{x^2-x-2} + x^2 - x - 2$$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$

Ta có: $f'(u) = 2^u \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 - 3x + 2) = f(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy S có 1 phần tử.

$$\text{c) } 6^x + (3-m) \cdot 2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}, \forall x \in (0;1) \text{ có } f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in (0;1)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	0	1
y'	+	
y	2	4

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $2 < m < 4$. Vậy $m \in (2;4)$.

VÍ DỤ 6. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^{x+1} + 4^{x+1} = 3^{2x+1} - 4^{2x+1}$.

b) Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$.

c) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a > 0$ và $a \neq 1$, biết phương trình $a^x - \frac{1}{a^x} = 2 \cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình:

$$a^{2x} - 2a^x (\cos bx + 2) + 1 = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) } 3^{x+1} + 4^{x+1} = 3^{2x+1} + 4^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} = 4^{2x+1} - 4^{x+1} \quad (1)$$

Nhận xét $x = 0$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có: } x+1 < 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} < 0 \\ 4^{x+1} < 4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1} - 4^{x+1} > 0 \end{cases} \text{ do đó VT} < 0 < \text{VP nên}$$

phương trình (1) vô nghiệm

$$\text{Với } x < 0, \text{ ta có: } x+1 > 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1} > 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} > 0 \\ 4^{x+1} > 4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1} - 4^{x+1} < 0 \end{cases} \text{ do đó VT} > 0 > \text{VP nên}$$

phương trình (1) vô nghiệm. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện xác định: $x \geq 0$

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} \geq 2 \text{ hay VT} \geq 2$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} \leq 2 \text{ hay VP} \leq 2$$

$$\text{Suy ra VT} \geq 2 \geq \text{VP}, \text{ do đó phương trình có nghiệm khi } \begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+1} = 2 \\ 2 - \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

$$\text{c) Ta có } a^{2x} - 2a^x (\cos bx + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow a^x - 2 + \frac{1}{a^x} = 2 \left(\cos 2 \frac{bx}{2} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{bx}{2} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{bx}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} = 2 \cos \frac{bx}{2} & (1) \\ a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} = -2 \cos \frac{bx}{2} & (2) \end{cases}$$

Nếu phương trình (1) và phương trình (2) có nghiệm chung là x_0 thì $2 \cos \frac{bx_0}{2} = -2 \cos \frac{bx_0}{2}$

$$\Rightarrow \cos \frac{bx_0}{2} = 0 \Rightarrow a^{\frac{x_0}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x_0}{2}}} = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{bx_0}{2} = 1 \text{ (Vô lí)}$$

Do đó phương trình (1) và phương trình (2) không có nghiệm chung

Mặt khác theo giả thiết phương trình (1) và phương trình (2) đều có 7 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

LÝ THUYẾT

1. Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

- Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)} \quad (\text{mũ hóa}).$$

3. Phương pháp đặt ẩn phụ:

- Phương trình có dạng $P(\log_a f(x)) = 0$ với $0 < a \neq 1$

$$P(\log_a f(x)) = 0 \xrightarrow{\text{Đặt } t = \log_a f(x)} P(t) = 0$$

4. Phương pháp đánh giá

- Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

- Bước 1:** Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.

- Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

- Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

- Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \leq m, \forall x \in D \\ g(x) \geq m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq m \leq g(x), \forall x \in D$.

- Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.

- Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x) \geq g(x)$.

- Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.

- Ta có: $\sin x \in [-1; 1]; \cos x \in [-1; 1]$.

- Điều kiện để hàm số lượng giác $a \cos x + b \sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

- Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.

- Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ...

❖ Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng phương pháp hàm số như dạng bài tập phương trình mũ. Việc sử dụng linh hoạt các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hơn trong việc giải toán.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x^2 - 1) = \ln x$

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

c) $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8.$

d) $\log_2(x^2 - 1) = 1 + \log_2 x.$

e) $\log_2 x^2 = 2 \log_2(3x + 4).$

f) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3.$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Với $x > 1$: $\ln(x^2 - 1) = \ln x \Leftrightarrow \ln \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$

b) Điều kiện: $x > 0.$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64.$$

c) Điều kiện: $x > 0.$

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8 \Leftrightarrow 2 \log_3 x \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \log_3 x = 8 \Leftrightarrow (\log_3 x)^3 = 8 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9.$$

d) Điều kiện: $0 < x < 1.$

$$\log_2(x^2 - 1) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 2x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$

e) Điều kiện: $x > -\frac{4}{3}, x \neq 0.$

$$\log_2 x^2 = 2 \log_2(3x + 4) \Leftrightarrow x^2 = (3x + 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x + 4 \\ x = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta có phương trình có một nghiệm $x = -1.$

f) Điều kiện: $x > 1.$

Ta có: $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3.$

Vậy $S = \{3\}.$

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$

b) $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7.$

c) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5.$

d) Tìm tất cả các giá trị của tham m để phương trình $\log_2^2(2x) - 2m\log_2(x) + m - 1 = 0$ có tích hai nghiệm của phương trình bằng 16.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\log_3 x = t, (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = 3^t$

$$\text{Phương trình } \log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0 \text{ trở thành } t^2 - 2t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - 2\sqrt{2} \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3^{1-2\sqrt{2}}$$

$$\text{Với } t = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3^{1+2\sqrt{2}}$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Đặt $\log_2 x = t, t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } 2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \text{ trở thành: } 2t + 3 \cdot \frac{1}{t} = 7 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

c) Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow (1 + \log_2(2x))^2 - 2\log_2(2x) - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ 2; \frac{1}{8} \right\}.$$

d) Điều kiện xác định: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành $(1+t)^2 - 2mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2(1-m)t + m = 0 \quad (1)$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1; x_2$ khi phương trình (1) có 2 nghiệm $t_1; t_2$.

$$\text{Khi đó } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Theo

giả

thiết

$$x_1 x_2 = 16 \Rightarrow \log_2 x_1 x_2 = \log_2 16 \Rightarrow t_1 + t_2 = 4 \Rightarrow -\frac{2(1-m)}{1} = 4 \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

- a) Giải phương trình $\log_3 x + \log_4 (x+1) = 2$.
- b) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3 (9 - \sqrt{x-1}) = \log_2 (x^2 - 2x + 5)$.
- c) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \leq \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right)$.
- d) Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện
- $$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

Lời giải

a) Nhận xét $x = 3$ là nghiệm của phương trình

Với $x > 3$, ta có $\begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_4 (x+1) > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3 x + \log_4 (x+1) > 2$ hay VT > VP nên phương trình vô nghiệm

Với $x < 3$, ta có $\begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_4 (x+1) < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3 x + \log_4 (x+1) < 2$ hay VT < VP nên phương trình vô nghiệm. Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9-\sqrt{x-1} > 0 \\ x^2-2x+5 > 0 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 82 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 82$

$$\text{VT} = \log_3 (9 - \sqrt{x-1}) \leq \log_3 9 = 2$$

$$\text{VP} = \log_2 (x^2 - 2x + 5) = \log_2 [(x-1)^2 + 4] \geq \log_2 4 = 2$$

Suy ra $\text{VT} \leq 2 \leq \text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$. $\text{VT} = \log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2 (4) = 2$

$$\text{Ta có } x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

$$\text{VP} = \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right) \leq \log_3 9 = 2$$

Suy ra $\text{VT} \geq 2 \geq \text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

d) Ta có:
$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} & (1) \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \leq 8 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3}$

Do $|x^2-2x-3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3^{|x^2-2x-3|} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5^{-y-3} \geq 1 \Leftrightarrow -y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -3$

Với $y \leq -3$, ta có bất phương trình (2) $\Leftrightarrow -4y+y-1+(y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2+3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$

$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow |x^2-2x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn $(3; -3), (-1; -3)$.

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

- e) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3(9-\sqrt{x-1}) = \log_2(x^2-2x+5)$. Biết phương trình $\log_5 x = \log_7(x+2)$ có nghiệm duy nhất $x = a$, tính giá trị $\log_5(7a^2)$.
- f) Tìm số nghiệm của phương trình biểu thức $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$.
- g) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^3 - 3x + 2 + \log_3 m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- h) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$.
- i)

Lời giải

a) $\log_5 x = \log_7(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = t \\ \log_7(x+2) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t \\ x+2 = 7^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t & (1) \\ 5^t + 2 = 7^t & (2) \end{cases}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t = 1$. Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t, \forall t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t \ln \frac{5}{7} + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t \ln \frac{1}{7} < 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(t) = 1 \Leftrightarrow f(t) = f(1)$ nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2)

Từ (1) ta có $x = 5$

Do đó $\log_5(7a^2) = \log_5 7 + \log_5 a^2 = \log_5 7 + 2\log_5 a = \log_5 7 + 2\log_5 5 = 2 + \log_5 7$.

b) Điều kiện xác định: $x > 0$

Ta có: $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 - x$. Xét hàm số $f(x) = 2 \cdot 3^{\log_2 x}, \forall x \in (0; +\infty)$

$f'(x) = \frac{2}{x} \cdot 3^{\log_2 x} \cdot \log_2 3 > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ (1)

Xét hàm số $g(x) = 3 - x, \forall x \in (0; +\infty)$

$g'(x) = -1 < 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm

Mà $f(1) = g(1)$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $m > 0$

Ta có: $x^3 - 3x + 2 + \log_3 m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x - 2 = \log_3 m$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ có $f'(x) = -3x^2 + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-4	0		$-\infty$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì hai đồ thị $y = -x^3 + 3x + 2$ và $y = \log_3 m$ phải cắt nhau tại 2 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} \log_3 m = -4 \\ \log_3 m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3^{-4} \\ m = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{81} \\ m = 1 \end{cases}$. Vậy $m \in \left\{ \frac{1}{81}; 1 \right\}$.

d) Đặt $\log_2 x = t$ vì $x \geq 32 \Rightarrow t \geq 5$

Ta có phương trình: $\sqrt{t^2 - t - 3} = m(t - 3) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}, \forall t \in [5; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-5t + 9}{2(t - 3)^2 \sqrt{t^2 - t - 3}} < 0, \forall t \in [5; +\infty)$

Ta có bảng biến thiên:

t	5	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	$\sqrt{3}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $1 < m \leq \sqrt{3}$.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

LÝ THUYẾT

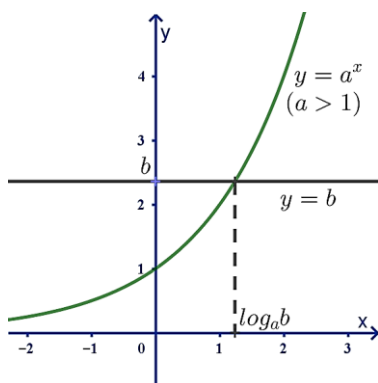
1. Định nghĩa:

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

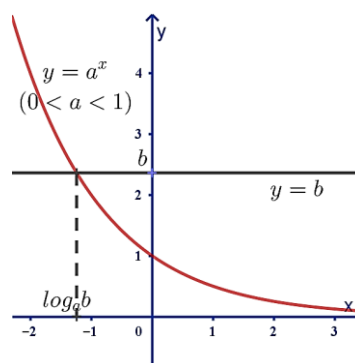
2. Định lí, quy tắc:

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
 - Với $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$ (Hình 1).
 - Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$ (Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho bởi bảng sau:

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:
 - Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
 - Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0, (1)$.
 - Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p > 0$.
 - Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$ sau đó tìm nghiệm x .
 - $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
 - $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

5. Phương pháp hàm số, đánh giá

- **Định nghĩa**

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

- **Định lý, quy tắc:**

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

- **Nhận xét**

- Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m \geq f(x)$ (hoặc $m \leq f(x)$) **có nghiệm đúng** với mọi $x \in D$ thì $m \geq \max_D f(x)$ (hoặc $m \leq \min_D f(x)$) .
- Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m \geq f(x)$ (hoặc $m \leq f(x)$) **có nghiệm** với mọi $x \in D$ thì $m \leq \max_D f(x)$ (hoặc $m \geq \min_D f(x)$) .

VÍ DỤ MINH HỌA**VÍ DỤ 1.** Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32.$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}.$

c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}.$

d) $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}.$

e) $\frac{3^x}{3^x-2} < 3.$

f) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x.$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5).$ b) Điều kiện: $x \neq -1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}} &\Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 0).$

c) Ta có: $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2).$

d) Ta có: $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x \leq \frac{4}{3} \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty).$

e) $\frac{3^x}{3^x-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{3^x-3}{3^x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \log_3 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_3 2) \cup (1; +\infty).$

$$\begin{aligned} \text{f) Ta có: } 11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x \quad 11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x &\Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x+6 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+6 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 0 \\ x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-6; 3].$

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $16^x - 4^x - 6 \leq 0$.

b) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$

c) $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

d) $2^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 10^x$.

e) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1$

f) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình: $9^x + (m-1) \cdot 3^x + m > 0$ nghiệm đúng $\forall x > 1$.

Lời giải

a) Đặt $t = 4^x$ ($t > 0$), khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_4 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_4 3]$.

b) Ta có: $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 2 \\ 2^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

c) Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1 > 0 \\ 3t-1 \leq t+5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \leq 3 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 1]$.

d) Ta có: $2^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 10^x \Leftrightarrow 2^x - 10^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 0 \Leftrightarrow 2^x(1 - 5^x) - 4(1 - 5^x) < 0$

$$\Leftrightarrow (1 - 5^x)(2^x - 4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 5^x < 0 \\ 2^x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > 1 \\ 2^x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 5^x > 0 \\ 2^x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 1 \\ 2^x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \geq 0$

Ta có: $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} - \frac{2}{2^{\sqrt{x}}} < 1$ (2). Đặt $t = 2^{\sqrt{x}}$. Do $x \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t - \frac{2}{t} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^2 - t - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t < 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 1)$.

f) Đặt $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$ bất phương trình

đã cho thành: $t^2 + (m-1)t + m > 0$ nghiệm đúng $\forall t \geq 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m$ nghiệm đúng $\forall t > 3$

Xét hàm số $g(t) = t - 2 + \frac{2}{t+1}$, $\forall t > 3$, $g'(t) = 1 - \frac{2}{(t+1)^2} > 0$, $\forall t > 3$.

Hàm số đồng biến trên $[3; +\infty)$ và $g(3) = \frac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$.

VÍ DỤ 3.

- Giải bất phương trình $3.2^x + 7.5^x > 49.10^x - 2$
- Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Cho bất phương trình $4^x - 2018m.2^{x-1} + 3 - 1009m \leq 0$. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm là?

Lời giải

a) Ta có $3.2^x + 7.5^x > 49.10^x - 2 \Leftrightarrow \frac{3.2^x + 7.5^x + 2}{10^x} > 49 \Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x > 49$

Xét hàm số $f(x) = 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $f'(x) = 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2.\left(\frac{1}{10}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1) = 49 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Leftrightarrow x < -1$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -1$.

b) Ta có: $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4.2^x + 1}{4^x + 4.2^x + 1} \quad (1)$

Đặt $2^x = t, t > 0 \Rightarrow$ Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}, \forall t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-4t^2 - 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	1	0

Từ đó ta có $0 < f(t) < 1, \forall t \in (0; +\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập $\mathbb{R}$ thì $m \geq 1$.

c) Đặt $t = 2^x (t > 0)$

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 - 1009mt + 3 - 1009m \leq 0 \Leftrightarrow 1009m \geq \frac{t^2 + 3}{t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}, \forall t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}$,

Giải phương trình: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 < 0 \text{ (L)} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		–	
$f(t)$	3	2	$+\infty$

Bất phương trình có nghiệm khi $1009m \geq \min_{(0; +\infty)} f(t) = 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{1009}$

Vậy $m = 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

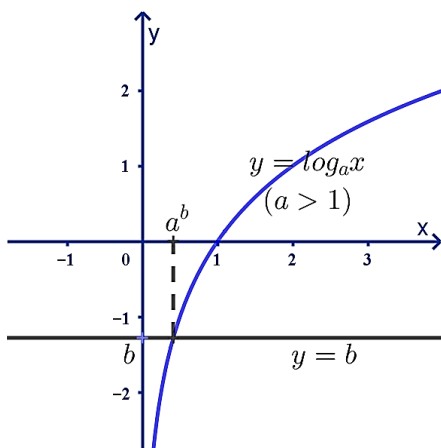
LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

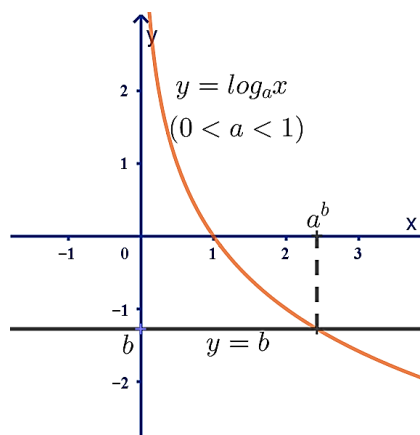
- Bất phương trình lôgarit đơn giản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

2. Định lí, quy tắc:

- Ta xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$.
 - Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình 1).
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$ được cho bởi bảng sau:

$\log_a x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
	$x > a^b$	$0 < x < a^b$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ thì xét hai trường hợp:
 - Trường hợp 1.** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$.
 - Trường hợp 2.** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Nếu gặp bất phương trình $m \cdot \log_a^2 f(x) + n \log_a f(x) + p > 0, (1)$
 - Đặt $t = \log_a f(x)$, đưa (1) về dạng $mt^2 + nt + p > 0$; giải tìm t từ đó tìm nghiệm x .

- Ngoài ra, chúng ta còn có thể sử dụng linh hoạt các quy tắc về hàm số, phương pháp đánh giá đã nêu ở bài phương trình mũ, phương trình lôgarit và bất phương trình mũ. Việc sử dụng đa dạng các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hóa các bài toán trở nên đơn giản và dễ dàng hơn.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,4}(5x+2) > \log_{0,4}(3x+6).$

b) $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2).$

c) $2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2).$

d) $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1.$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0.$

Lời giải

a) Điều kiện: $x > -\frac{2}{5}.$

Ta có: $\log_{0,4}(5x+2) > \log_{0,4}(3x+6) \Leftrightarrow 5x+2 < 3x+6. \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(-\frac{2}{5}; 2\right).$

b) Ta có: $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 3x + 2) - \log_2(x-2) < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) < 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (2; 3).$

c) Ta có: $2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \log_2(x+1) + \log_2(x-2) \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x+1)(x-2) \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (2; 3].$

d) Điều kiện : $x > 2$

$\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \log_2[(x^2 - x - 2)(x-1)] \geq 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x-1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [1 - \sqrt{2}; 0] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty).$

e) Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > \log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x-1) < 1 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(1; \frac{3}{2}\right).$

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

b) $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$.

c) $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$.

Lời giảia) Điều kiện: $x > 0$

$$\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6 \Leftrightarrow 2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} < x < \frac{1}{25}$$

b) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1; x \neq 3$

$$\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

c) Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

$$\text{Bất phương trình đã cho trở thành } 2^{u^2} - 10(2^u)^{-u} + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{u^2} - \frac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^{u^2}, t \geq 1. \quad (1) \Rightarrow t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -5 \\ t > 2 \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u > 1 \\ u < -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$$

$$\text{Với } u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$ hoặc $0 < x < \frac{1}{2}$.**VÍ DỤ 3.**

a) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8\right)$.

b) Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

c) Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình

$$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100).$$

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{VT} = \log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2(4) = 2.$$

$$\text{Ta có } x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

$$VP = \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right) \leq \log_3 9 = 2$$

Suy ra $VT \geq 2 \geq VP$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

$$\text{b) } \begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} & (1) \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3}$

$$\text{Do } |x^2-2x-3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3^{|x^2-2x-3|} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5^{-y-3} \geq 1 \Leftrightarrow -y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -3$$

$$\text{Với } y \leq -3, \text{ ta có bất phương trình (2)} \Leftrightarrow -4y + y - 1 + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow |x^2-2x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn $(3; -3), (-1; -3)$.

$$\text{c) } (10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \geq \frac{11}{10}\log x$$

$$\Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11\log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0$$

$$\text{Do } x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2) \quad 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \log x, t \in (0; 2). \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}, \forall t \in (0; 2)$$

$$\text{Đạo hàm: } f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2) \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Do đó } f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$$

$$\text{Để } 10m \geq \frac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100) \text{ thì } 10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}$$

$$\text{Do đó } m \in \left[\frac{8}{15}; 2018 \right] \text{ hay có 2018 số thỏa mãn.}$$

DẠNG 4**Bài tập về phương trình Mũ – Logarit số 01**

Câu 1: Cho a, b là các số dương. Tìm x biết $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$.

- A. $x = a^4 b^7$. B. $x = a^7 b^4$. C. $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$. D. $x = a^4 b^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 3: Bất phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^{x^2-3} < (3 - 2\sqrt{2})^{-2x}$ có nghiệm là:

- A. $-1 < x < 3$. B. $-3 < x < 1$. C. $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$.

Câu 4: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$.

- A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là:

- A. $x = 2$ B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = -3$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm S của phương trình: $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

- A. $S = \{3\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{4\}$.

Câu 8: Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 9: Tìm số nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x^2+1}} = 3^{2-4x}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 10: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a; b]$ ta có $a + b$ bằng:

- A. $a + b = 11$. B. $a + b = 9$. C. $a + b = 12$. D. $a + b = 10$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 12: Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng của $a + b$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{22}{3}$. D. 7.

- Câu 13:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2$ biết $x_1 < x_2$.
- A. $P = 0$. B. $P = \frac{8}{3}$. C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = 1$.
- Câu 14:** Cho số dương a thỏa mãn đẳng thức $\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a$, số các giá trị của a là
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 15:** Biết rằng phương trình $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$.
- A. $S = 252$. B. $S = 9$. C. $S = 180$. D. $S = 45$.
- Câu 16:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_9(x-1)^8 = \log_3(4x)$ là
- A. 3. B. -3. C. $2\sqrt{3}$. D. 2.
- Câu 17:** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ là:
- A. 630. B. $\frac{1}{125}$. C. $\frac{630}{625}$. D. $\frac{7}{125}$.
- Câu 18:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:
- A. Vô số. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 19:** Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $\log \sin x + \log \cos x = -1$ và $\log(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log n - 1)$. Giá trị của n là
- A. 11. B. 12. C. 10. D. 15.
- Câu 20:** Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
- A. 6. B. 12. C. 2. D. 4.
- Câu 21:** Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi
- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.
- Câu 22:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 23:** Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị của biểu thức $|x_1 - x_2|$ là
- A. 3. B. 8. C. 2. D. 4.
- Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0; 2019]$ của tham số m để phương trình $4^x - (m+2018)2^x + (2019+3m) = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016

B. 2019.

C. 2013

D. 2018.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x - (m+3).2^{x+1} + m+9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 26: Cho phương trình $4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 27: Giả sử phương trình $\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0$ có một nghiệm dạng $x = 2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $b < 20$. Tính tổng $a + b + c^2$.

A. 10.

B. 11.

C. 18.

D. 27.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x| - m\log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (\sqrt{2}; 2)$.B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.C. $m \in (-\sqrt{2}; 2)$.D. $m \in (-2; \sqrt{2})$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m^*$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình có nghiệm?

A. 2021.

B. 2019.

C. 4038.

D. 2020.

Câu 30: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 31: Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9; +\infty)$.B. $(3; 9)$.C. $(-2; 0)$.D. $(1; 3)$.

Câu 32: Cho phương trình $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$.B. $S = 5$.C. $S = 6$.D. $S = 8$.

Câu 33: Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14.

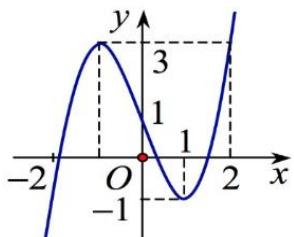
B. 15.

C. 13.

D. 16.

Câu 34: Phương trình $(1+\sqrt{2})^x + (1-2a)(\sqrt{2}-1)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.B. $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.C. $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.D. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

- Câu 35:** Trên đoạn $[0; 2019]$ có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9^x - 2(m+2) \cdot 3^x + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?
A. 2010. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 4.
- Câu 36:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. **B.** $m \in (-\infty; 0]$. **C.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$
- Câu 37:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.
- Câu 38:** Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.
- Câu 39:** Cho phương trình $4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $m \in (1; 3)$. **B.** $m \in (-5; -3)$. **C.** $m \in (-3; 0)$. **D.** $m \in (0; 1)$.
- Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt là
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.
- 
- Câu 41:** Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a) \cdot (2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng
A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 42:** Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} - (m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - 2m = 0$ có nghiệm là $[-a + 2\sqrt{b}; 0]$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $b - a$.
A. 1. **B.** -11. **C.** -1. **D.** 11.
- Câu 43:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$ (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.D	5.B	6.C	7.D	8.D	9.B	10.A
11.A	12.D	13.A	14.D	15.C	16.C	17.B	18.D	19.B	20.A
21.A	22.C	23.C	24.B	25.A	26.A	27.A	28.C	29.A	30.B
31.D	32.D	33.D	34.B	35.D	36.D	37.C	38.C	39.D	40.A
41.D	42.A	43.C							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Ta có $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7$.

Câu 2: Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{4} \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy tích $x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Câu 3: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Nhận xét: } (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}.$$

$$\text{Phương trình: } (3 + 2\sqrt{2})^{x^2 - 3} < (3 - 2\sqrt{2})^{-2x} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{x^2 - 3} < (3 + 2\sqrt{2})^{2x}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Câu 4: Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2(x+1) + \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

So điều kiện nhận $x = 1$. Vậy tổng tất cả các nghiệm là 1.

Câu 5: Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình là $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_3(2x+1)(x-3) = 2 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện của phương trình, suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 4$.

Câu 6: Chọn C

$$\text{Ta có: } 2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{3(2x-1)} \Leftrightarrow 7x-1 = 3(2x-1) \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$.

Câu 7: Chọn D

$$\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3 \frac{2x+1}{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2x+1}{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 8: Chọn D

Do các số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự là cấp số nhân nên

$$\begin{aligned} (a + \log_4 3)^2 &= (a + \log_2 3)(a + \log_8 3) \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a \log_4 3 + \log_4^2 3 &= a^2 + a \log_2 3 + a \log_8 3 + \log_2 3 \cdot \log_8 3 \\ \Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2^2 3 &= \frac{4}{3} a \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2^2 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} a = -\frac{1}{12} \log_2 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3. \end{aligned}$$

Suy ra công bội của cấp số nhân là: $\frac{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_4 3}{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_2 3} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{3}.$

Câu 9: Chọn B

$$\begin{aligned} 9^{\sqrt{x^2+1}} &= 3^{2-4x} \Leftrightarrow 9^{\sqrt{x^2+1}} = 9^{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x^2+1 = 1-4x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 10: Chọn A

Điều kiện: $x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -6$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} &\geq \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+5x-6 \leq x^2+4x+4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 10] \end{aligned}$$

Vậy $a + b = 11$

Câu 11: Chọn A Điều kiện: $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}.$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2((x+2)|x-5|) = 3.$$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-5) = 8 \\ x > 5 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+2)(x-5) = -8 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 12: Chọn D

$$\text{Phương trình } \ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ m = \frac{x^2 - x + 4}{x} (*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ với $1 < x < 3$.

$$\text{Khi đó } f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ trên khoảng $(1; 3)$

x	1	2	3
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	4	3	$\frac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên khoảng $(1; 3)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (*) có nghiệm trên khoảng $(1; 3)$ khi và chỉ khi $3 \leq m < 4$ hay $m \in [3; 4)$. Do đó $a = 3$, $b = 4$.

Vậy $a + b = 7$.

Câu 13: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x + 2\log_3 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27 \end{cases}$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_2 = 27$.

$$\text{Vậy } P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2 = \log_3 \frac{1}{3} + \log_{27} 27 = 0.$$

Câu 14: Chọn D

$$\begin{aligned} \log_2 a + \log_3 a + \log_5 a &= \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a \\ \Leftrightarrow \log_2 a (1 + \log_3 2 + \log_5 2) &= (\log_2 a)^3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 a \left[1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 2 \cdot \log_5 2 (\log_2 a)^2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 0 \\ (\log_2 a)^2 = \frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 2 \cdot \log_5 2} \left(\alpha = \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 2 \cdot \log_5 2}} \text{ do } \log_3 2 > 0, \log_5 2 > 0 \right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (TM)} \\ a = 2^\alpha \text{ (TM)} \\ a = 2^{-\alpha} \text{ (TM)} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 15: Chọn C

Điều kiện xác định: $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_3 (3^{x+1} - 1) = 2x - \log_3 2$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3^{x+1} - 1) + \log_3 2 = 2x \Leftrightarrow 2(3^{x+1} - 1) = 3^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 = 0 \quad (1)$$

Do x_1, x_2 cũng là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo Viet, ta có: $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 \\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 2 \end{cases}$.

Ta có: $S = 27^{x_1} + 27^{x_2} = (3^{x_1} + 3^{x_2})^3 - 3 \cdot 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot (3^{x_1} + 3^{x_2}) = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$.

Câu 16: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} (x+3) + \frac{1}{4} \log_9 (x-1)^8 = \log_3 (4x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+3) + \log_3 |x-1| = \log_3 (4x) \Leftrightarrow \log_3 [(x+3) \cdot |x-1|] = \log_3 (4x)$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot |x-1| = 4x \quad (1).$$

Nếu $0 < x < 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (1-x) = 4x \Leftrightarrow -x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2\sqrt{3} (tm) \\ x = -3 - 2\sqrt{3} (l) \end{cases}.$$

Nếu $x > 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (x-1) = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (tm) \\ x = -1 (l) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3 + 2\sqrt{3}; 3\}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $2\sqrt{3}$.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta có:

$$\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x)(\log_{5^2} x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_5 x} + 1\right) \cdot \frac{1}{4} \log_5^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2 x + \frac{3}{4} \log_5 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (tmdk)} \\ x = 5^{-4} = \frac{1}{625} \text{ (tmdk)} \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm là: $5 \cdot \frac{1}{625} = \frac{1}{125}$.

Câu 18: Chọn D

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-8 > 0 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \frac{x^2-2x+9}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $y = \frac{x^2-2x+9}{x}$ trên $(1; +\infty)$, ta có $y' = \frac{x^2-9}{x^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Bảng biến thiên

x	1	3	$+\infty$
y'	-	0	+
y	8	4	$+\infty$

Để thỏa mãn yêu cầu thì $4 < m < 8$ nên các giá trị nguyên của tham số m là 5, 6, 7.

Câu 19: Chọn B

Ta có $\log \sin x + \log \cos x = -1 \Leftrightarrow \log(\sin x \cos x) = -1 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{10}$.

Ta có $\log(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log n - 1)$

$$\Leftrightarrow 2\log(\sin x + \cos x) = \log n - \log 10 \Leftrightarrow \log(\sin x + \cos x)^2 = \log \frac{n}{10}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(1 + 2\sin x \cos x\right) = \log \frac{n}{10} \Leftrightarrow n = 10\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n = 12.$$

Câu 20: Chọn A

Điều kiện: $a, b > 0$ và $a - 4b > 0$

$$\text{Đặt } \log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 100^t \\ b = 40^t \\ a - 4b = 12 \cdot 16^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 100^t - 4 \cdot 40^t - 12 \cdot 16^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^t = -2 \text{ (l)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6.$$

Câu 21: Chọn A

Ta có phương trình: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$

Đặt: $2^x = t > 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 2mt + 2m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm thì phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn:

$$t_1 \cdot t_2 = 2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2m \Leftrightarrow 8 = 2m \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Ta

có

$$9 \cdot 3^{2x} - m \left(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3 \right) \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} - \frac{m}{3} \left(4\sqrt{x+1} + 3m + 3 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x+1, \text{ phương trình thành } 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{m}{3} \left(4\sqrt{t} + 3m + 3 \right) = 0 \quad (2).$$

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t = 0$.

$$\text{Với } t = 0 \text{ thay vào phương trình ta có } -m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Thử lại:

$$\text{Với } m = -2 \text{ phương trình thành } 3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) = 0$$

$$\text{Ta có } 3^t + \frac{1}{3^t} \geq 2, \forall t \in \mathbb{R} \text{ và } \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) \geq -2, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra } 3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3} \left(4\sqrt{t} - 3 \right) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên loại $m = -2$.

$$\text{Với } m = 1 \text{ phương trình (2) thành } 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) = 0 \quad (3)$$

Để thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Trên tập } [0; +\infty), (3) \Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) = 0.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3} \left(4\sqrt{t} + 6 \right) \text{ trên } [0; +\infty).$$

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 3^{-t} \cdot \ln 3 - \frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 3^{-t} \cdot \ln^2 3 + \frac{1}{3(\sqrt{t})^3} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm $t > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Suy ra trên $[0; +\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t = 0, t = 1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vậy chọn $m = 1$.

Câu 23: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2 - (m+2)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^m \end{cases}$.

Do $x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2^m = 6 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $|x_1 - x_2| = |4 - 2^1| = 2$.

Câu 24: Chọn B

Ta có $4^x + (m-1)2^x + (4+3m) = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + (m-1)t + 4+3m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2013$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 2019]$ suy ra $m \in \{0; 1; 2; \dots; 2012\}$

Câu 25: Chọn A

Đặt: $t = 2^x (x > 0 \Rightarrow t > 1)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 (*) \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases}$$

Phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 \cdot t_2 = m+9 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào hệ } (*) \text{ ta được } \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m+4 > 0 \\ m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 0 \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn A

$$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + m - 2 = 0(1). \text{ Đặt } t = 2^x (t > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0(2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^0 \leq 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \leq t_1 < t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \leq t_1 - 1 < t_2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m - 2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \geq 5 \end{cases}. \text{ Vậy } m = 5 \text{ thỏa yêu cầu.}$$

Câu 27: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Ta có:

$$\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \\ x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } a = 1; b = 5; c = 2 \Rightarrow a + b + c^2 = 10.$$

Câu 28: Chọn C

$$\text{Ta có: } \log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 |\cos x| - 2m \log |\cos x| - m^2 + 4 = 0$$

Đặt $\log |\cos x| = t$. Điều kiện: $t \leq 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0, t \leq 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) < 0 \\ m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) \geq 0 \\ \frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{-m^2 + 4}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4 < 0 \\ 2m^2 - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ -m^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2$$

Câu 29: Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = (2\sqrt{m + \log_2 x} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 \end{cases} (1)$

Đặt: $t = \log_2 x (t \leq 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m (2)$

Đặt: $g(t) = t^2 - t (t \in (-\infty; 0])$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

Ta có: $g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \leq 0$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0
$g'(t)$		-
$g(t)$	$+\infty$	0

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$ thì $m \geq 0$

Trường hợp 2: $\sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 \end{cases} (3)$$

Đặt: $t = \log_2 x (t \geq 1)$, phương trình (3) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 (4)$

Đặt: $g(t) = t^2 - 3t + 1, t \in [1; +\infty)$. Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \in [1; +\infty)$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$

Ta có bảng biến thiên:

t	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	-1	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$ thì $m \geq -\frac{5}{4}$

Kết hợp và, $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 30: Chọn B

$$16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - \frac{m}{4} \cdot 4^x + 5m^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4^x)^2 - m \cdot 4^x + 20m^2 - 176 = 0, (1).$$

Đặt $t = 4^x$ điều kiện $t > 0$ từ (1) ta có $4t^2 - m \cdot t + 20m^2 - 176 = 0, (*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1; x_2$ thì $x_1 + x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 1$. Nhưng vì phương trình (*) có

$$\frac{c}{a} = -\frac{176}{4} = -44 < 0 \text{ nên không có giá trị nào của } m \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 31: Chọn D

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m-1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m-1$ thì $3^{x_1} = 4m-1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1; 3)$.

Câu 32: Chọn D

Ta có $(m-5) \cdot 3^x + (2m-2) \cdot 2^x \cdot \sqrt{3^x} + (1-m) \cdot 4^x = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (m-5) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + (2m-2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + 1-m = 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x, \text{ điều kiện } t > 0.$$

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2 + (2m-2)t + 1-m = 0, (2).$

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > 3 \\ m < 1 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 \Leftrightarrow m \in (3; 5).$$

Vậy $a = 3, b = 5$ nên $a + b = 8$.

Câu 33: Chọn D

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2 \cdot 3^{x^2+1} \Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$; (1) $\Leftrightarrow t + m \cdot \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0$ (2)

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

(2) $\Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = -2t + 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	5	9	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10; 10)$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 34: Chọn B

Vì $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 1$. Đặt $t = (1 + \sqrt{2})^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0$ (1).

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2 .

$$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}.$$

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})^{x_1 - x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Chọn D

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2(m+2)t + 3m - 2 = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm số số nguyên $m \in [0; 2019]$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Hay phương trình (1) có:
$$\begin{cases} \Delta' = (m+2)^2 - 3m + 2 > 0 \\ S = 2(m+2) > 0 \\ P = 3m - 2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 6 > 0 \\ m > -2 \\ m > \frac{2}{3} \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ 3m - 2 - 2(m+2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m < 5 \end{cases}.$$
 Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 36: Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$.

Cách 1: Ta có: $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow m = -\log_2^2 x - \log_2 x$.

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $m = -t^2 - t(**)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t < 0$.

Xét $f(t) = -t^2 - t$ với $t < 0$. Ta có $f'(t) = -2t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Vậy để phương trình (**) có nghiệm $t < 0$ thì $m \leq \frac{1}{4}$ hay $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

Cách 2: Ta có:

$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $t^2 + t + m = 0(**)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t < 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Vì khi $\Delta \geq 0$ phương trình (**) có nghiệm $t_1; t_2$ thì theo Định lí Viet $t_1 + t_2 = -1$ nên luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Vậy $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ thì phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 37: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \quad (i).$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là

$$t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2. \text{ Vì } x_1 < x_2 \text{ nên } t_1 < t_2.$$

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m - 3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \quad (ii).$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 38: Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \quad (i).$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là

$$t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2. \text{ Vì } x_1 < x_2 \text{ nên } t_1 < t_2.$$

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m - 3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \quad (ii).$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 39: Chọn D

$$4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình (*) trở thành

$$4t^2 - (8m+5)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = 2m+1. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2m+1 \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{3}{8}. \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Lại có } x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_2 (2m+1) = -1 \Leftrightarrow \log_2 (2m+1) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Câu 40: Chọn A

Đặt $t = e^x$ ($t > 0$).

Phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ trở thành $8f(t) = m^2 - 1$ hay $f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}$.

Nhận thấy với mỗi giá trị $t > 0$ cho một giá trị $x = \ln t$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

Khi đó $-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 41: Chọn D

Đặt $(2 + \sqrt{3})^x = t$, $t > 0$ khi đó $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$.

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $(2 + \sqrt{3})^{x_1} = t_1$, $(2 + \sqrt{3})^{x_2} = t_2$ nên từ $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có

$$(2 + \sqrt{3})^{x_1 - x_2} = 3 \text{ hay } \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2.$$

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình $t + (1 - 2a) \cdot \frac{1}{t} - 4 = 0$ (*) có

hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: (*) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (1 - 2a) > 0 \\ 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{-3}{2} \\ a < \frac{1}{2} \end{cases} (**).$

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1 - 2a = 3 \Leftrightarrow a = -1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases}$.

Phương trình (*) có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_2 = 3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 3t_2) \cdot (t_2 - 3t_1) = 0 \Leftrightarrow -3(t_1^2 + t_2^2) + 10t_1 t_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(t_1 + t_2)^2 + 6t_1 t_2 + 10t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow -48 + 16(1 - 2a) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện } (**).$$

Giá trị này của a thuộc đáp án **D**.

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu a thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án **D**. Vậy chọn đáp **D**.

Câu 42: Chọn A

Xét phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} - (m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} - 2m = 0$ (1).

Đặt $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = t$, vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \leq 1 \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình (1) trở thành $t^2 - (m+1)t - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - t}{t + 2}$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in (0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t}{t + 2}$, $t \in (0; 1]$.

$$f'(t) = \frac{t^2 + 4t - 2}{(t + 2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{6} \notin (0; 1] \\ t = -2 + \sqrt{6} \in (0; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$-2 + \sqrt{6}$	1
$f'(t)$		0	+
$f(t)$	0	$-5 + 2\sqrt{6}$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in [-5 + 2\sqrt{6}; 0]$

Suy ra $-a + 2\sqrt{b} = -5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow a = 5, b = 6$. Vậy $b - a = 6 - 5 = 1$.

Câu 43: Chọn C

Đặt $3^{4-x^2} = v > 0$, $3^{6-3x} = u > 0$ phương trình trở thành $m\frac{u}{v} + v = u + m \Leftrightarrow m\left(\frac{u-v}{v}\right) = (u-v)$

$$\Leftrightarrow (u-v)(m-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} & (I) \\ 3^{4-x^2} = m & (II) \end{cases}$$

$$\text{Giải (I): } 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 1$ và một nghiệm $x \neq 2$. Với $x = 1$ ta có $m = 3^{4-1^2} = 27$. Khi đó $3^{4-x^2} = 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \neq 2 \end{cases}$.

Vậy $m = 27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 2$ và một nghiệm $x \neq 1$. Với $x = 2$ ta có $m = 3^{4-2^2} = 1$. Khi đó $3^{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \neq 1 \end{cases}$.

Vậy $m = 1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác 1; 2

Từ $3^{4-x^2} = m \Leftrightarrow x^2 = 4 - \log_3 m \geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x = 0 \Rightarrow 4 - \log_3 m = 0$

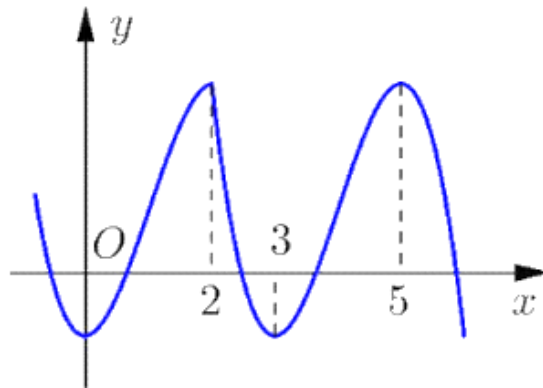
$\Leftrightarrow m = 81$, đồng thời $x = 0$ thỏa mãn khác 1;2 nên $m = 81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m = 1$; $m = 27$; $m = 81$ thỏa mãn bài toán.

DẠNG 5**Bài tập phương trình Mũ – Logarit số 02**

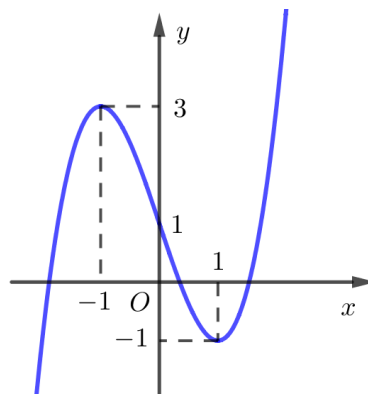
- Câu 1:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng
 A. $2 - \log_5 2$. B. $-2 + \log_5 2$. C. $2 + \log_5 2$. D. $2 - \log_2 5$.
- Câu 2:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2} = 5^{x+1}$ là
 A. 1. B. $2 - \log_3 5$. C. $P = -\log_3 45$. D. $P = \log_3 5$.
- Câu 3:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2} = 5^{x+1}$ là
 A. 1. B. $2 - \log_3 5$. C. $P = -\log_3 45$. D. $P = \log_3 5$.
- Câu 4:** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$.
 A. $-3\log_2 3$. B. $-\log_2 54$. C. -1. D. $1 - \log_2 3$.
- Câu 5:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x$ bằng
 A. 2. B. 1. C. 7. D. 3.
- Câu 6:** Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\log_3(7 - 3^a) = 2 - a$ và $\log_3(7 - 3^b) = 2 - b$. Giá trị biểu thức $9^a + 9^b$ bằng
 A. 67. B. 18. C. 31. D. 82.
- Câu 7:** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(17 \cdot 2^x - 8) = 2x$ bằng
 A. 1. B. 2. C. -2. D. 3.
- Câu 8:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1$ bằng
 A. $\frac{1 - \log_3 5}{\log_3 5}$. B. $\frac{1 + \log_3 5}{\log_3 5}$. C. 8. D. $\frac{1 + \log_5 3}{\log_5 3}$.
- Câu 9:** Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b - a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
 A. $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}$. B. $\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}$. C. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}$.
- Câu 10:** Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5(25 - 5^x) + x - 3 = 0$.
 A. $T = 1$. B. $T = 3$. C. $T = 25$. D. $T = 2$.
- Câu 11:** Số nghiệm của phương trình $2^{x^3+2x^2-3x} \cdot 3^{x-1} = 1$ là:
 A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 12:** Xác định m để phương trình $2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$ có nghiệm
 A. $m < 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Câu 13: Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f(2^x + 2^{-x}) = m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



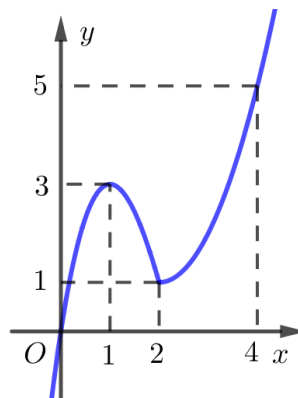
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $[-1; 3)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 3)$. D. $[-1; 1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f[4(\sin^6 x + \cos^6 x)] = m$ có nghiệm.



- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 16: Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a - 2b$?

- A. 5. B. -1. C. 1. D. 9.

Câu 17: Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $(a; \sqrt{b})$. Tính $S = 2a + 3b$

- A. $S = 29$. B. $S = 28$. C. $S = 32$. D. $S = 36$.

Câu 18: Phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có nghiệm các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

- A. 31 B. -31. C. 1 D. -1.

Câu 19: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình có nghiệm.

- A. 15. B. 14. C. 19. D. 17.

Câu 20: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x} \right)} = 5$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

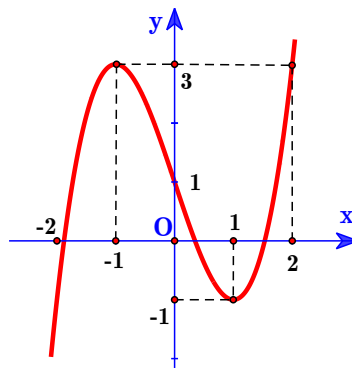
Câu 21: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

- A. $6 \leq m \leq 9$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $2 \leq m \leq 6$. D. $3 \leq m \leq 6$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 27. B. 25. C. 23. D. 24.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. 5. B. 4. C. 7. D. 6.

Câu 24: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 20. B. 21. C. 9. D. 19.

- Câu 25:** Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?
A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.
- Câu 26:** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.
- Câu 27:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.
- Câu 28:** Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$. Giá trị của b là
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 29:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.
- Câu 30:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.
A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.
- Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$. Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.
- Câu 32:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.
A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 33:** Nghiệm dương của phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$ có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). Giá trị của $a+b+c$ bằng:
A. 20. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 42.
- Câu 34:** Cho a, b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$, với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$.
A. 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.
- Câu 35:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2019^{\frac{2x+y}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y - x$ bằng
A. $P_{\min} = \frac{1}{4}$. **B.** $P_{\min} = \frac{1}{2}$. **C.** $P_{\min} = \frac{7}{8}$. **D.** $P_{\min} = \frac{15}{8}$.

Câu 36: Tìm số nghiệm của phương trình $(|x|-1)^2 e^{|x|-1} - \log 2 = 0$.

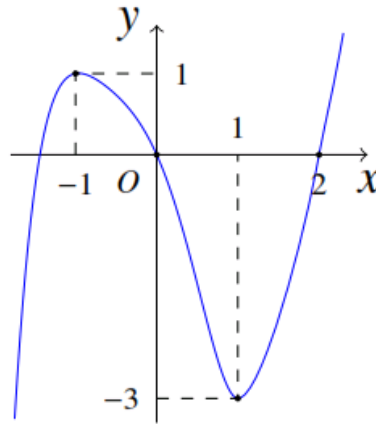
A. 3.

B. 4

C. 0

D. 2

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 38: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a \neq 1, \log_3 a + b = 0, \log_a b = \frac{1}{c}, \ln \frac{b}{c} = c - b$. Tổng $S = a + b + c$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.B. $\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$.C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.D. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 39: Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.B. $-5 \leq m \leq 5$.C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$.D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$.

Câu 40: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$.B. $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$.C. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$.D. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:
 $1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$.

A. 0.

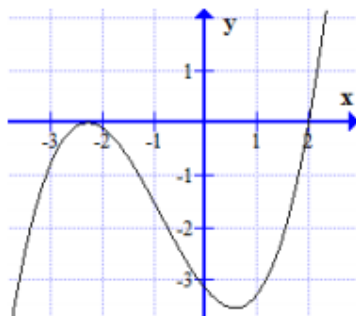
B. 2.

C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $(3, 8; 3, 9)$.B. $(3, 6; 3, 7)$.C. $(3, 7; 3, 8)$.D. $(3, 5; 3, 6)$.

- Câu 43:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng
- A. 45. B. 38. C. 34. D. 27.
- Câu 44:** Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- A. 4036. B. 4034. C. 4038. D. 4040.
- Câu 45:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.
- A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.
- Câu 46:** Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$. Giá trị của b là
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 47:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng
- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.
- Câu 48:** Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 49:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.
- Câu 50:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 \right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.

Câu 52: Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 9. B. 10. C. 12. D. 11.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$\frac{15}{13}$	
			1			$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

- A. e^5 . B. $e^{\frac{15}{13}}$. C. e^3 . D. e^4 .

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 56: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

- A. 1. B. 0. C. -2. D. 4.

Câu 57: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}\log_2 \frac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1} + x^2 = 2(x+|x-m|)$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 58: Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình $\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2+4}) = (2m-9)x - 1 + (1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm?

- A. 12. B. 23. C. 25. D. 10.

Câu 59: Cho hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 17$. B. $S = 7$. C. $S = 19$. D. $S = 3$.

- Câu 60:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là
A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 61:** Biết rằng phương trình $\log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3(m+4x-4x^2-1)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;6)$. **D.** $m \in (6;9)$.
- Câu 62:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (-2;0)$. **C.** $m \in (-1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;0)$.
- Câu 63:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x - 2 + \sqrt{m-3}\cos x} + (\cos^3 x + 6\sin^2 x + 9\cos x + m - 6)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng
A. 28. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 4.
- Câu 64:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8 - 2m} + 2018 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$. Số phần tử của S là
A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.
- Câu 65:** Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.
A. $P = 11$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 9$.
- Câu 66:** Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là
A. 2. **B.** 2022. **C.** 1. **D.** 2021.
- Câu 67:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là
A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.
- Câu 68:** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x}$?
A. 10. **B.** $\frac{71}{7}$. **C.** $\frac{72}{7}$. **D.** $\frac{73}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.AA	2.C	3.C	4.B	5.A	6.C	7.D	8.B	9.D	10.B
11.D	12.B	13.B	14.D	15.D	16.B	17.D	18.C	19.C	20.D
21.C	22.B	23.A	24.D	25.D	26.B	27.A	28.D	29.A	30.B
31.C	32.B	33.C	34.A	35.D	36.B	37.B	38.B	39.C	40.D
41.C	42.C	43.D	44.C	45.A	46.D	47.B	48.D	49.D	50.C
51.D	52.D	53.D	54.D	55.C	56.B	57.B	58.B	59.D	60.D
61.D	62.C	63.A	64.A	65.D	66.B	67.C	68.C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

$$2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow \log_5 (2^x \cdot 5^{x^2-2x}) = 0 \Leftrightarrow x \log_5 2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\log_5 2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 - \log_5 2 \end{cases}$$

Câu 2: Chọn C

$$3^{x^2-2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2 = (x+1) \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 5 - 2 - \log_3 5 = 0.$$

Ta có $\Delta = \log_3^2 5 + 4 \log_3 5 + 8 = (\log_3 5 + 2)^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1 x_2 = -2 - \log_3 5 = -\log_3 3^2 - \log_3 5 = -\log_3 45$.

Câu 3: Chọn C

$$3^{x^2-2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2 = (x+1) \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 5 - 2 - \log_3 5 = 0.$$

Ta có $\Delta = \log_3^2 5 + 4 \log_3 5 + 8 = (\log_3 5 + 2)^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1 x_2 = -2 - \log_3 5 = -\log_3 3^2 - \log_3 5 = -\log_3 45$.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \log_2 3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = (2x+3) \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \log_2 3 + 3 \log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \log_2 3 - 1 - 3 \log_2 3 = 0 (*)$$

Phương trình có hệ số $a = 1, c = -(1 + 3 \log_2 3) < 0 \Rightarrow a.c < 0$, do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo vi-et: $x_1 x_2 = -1 - 3 \log_2 3 = -\log_2 2 - \log_2 3^3 = -\log_2 54$.

Câu 5: Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3 (7 - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \frac{9}{3^x}.$$

$$\text{Đặt } t = 3^x (t > 0). \text{ Phương trình trở thành } 7 - t = \frac{9}{t} \Leftrightarrow -t^2 + 7t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} (tm) \\ t = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} (tm) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \\ 3^x = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2} \right) \\ x = \log_3 \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2} \right) \end{cases}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3 \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2} \right) + \log_3 \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2} \right) = 2$.

Câu 6: Chọn C

Từ giả thiết ta có a, b là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$$\log_3(7-3^x) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 9 = 0$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} 3^a + 3^b = 7 \\ 3^a \cdot 3^b = 9 \end{cases}$.

Do đó: $9^a + 9^b = (3^a + 3^b)^2 - 2 \cdot 3^a \cdot 3^b = 7^2 - 2 \cdot 9 = 31$.

Câu 7: Chọn D

ĐKXD: $17 \cdot 2^x - 8 > 0$.

Khi đó $\log_2(17 \cdot 2^x - 8) = 2x \Leftrightarrow 17 \cdot 2^x - 8 = 2^{2x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Đặt $2^x = t$ ($t > 0$). Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 17t + 8 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8 \Rightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Câu 8: Chọn B

$$\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1 \Leftrightarrow 25^x - 3 \cdot 5^x + 15 = 5^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3 \\ 5^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $1 + \log_5 3 = \frac{1 + \log_3 5}{\log_3 5}$.

Câu 9: Chọn D

$$\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2} = t. \text{ Khi đó } \begin{cases} a = 9^t \\ b = 16^t \\ \frac{5b-a}{2} = 12^t \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2t}.$$

Ta có: $5 \cdot 16^t - 9^t = 2 \cdot 12^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{9}{16} \right)^t = 2 \cdot \left(\frac{12}{16} \right)^t \Leftrightarrow -\left(\frac{3}{4} \right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^t + 5 = 0$.

Suy ra $\left(\frac{3}{4} \right)^t = -1 + \sqrt{6} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2t} = 7 - 2\sqrt{6}$.

Câu 10: Chọn B

Ta có: $\log_5(25 - 5^x) + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_5(25 - 5^x) = 3 - x$

$$\Leftrightarrow 25 - 5^x = 5^{3-x} \Leftrightarrow 25 - 5^x = \frac{5^3}{5^x} \Leftrightarrow 25 \cdot 5^x - 5^{2x} = 125. \quad (1)$$

Đặt $5^x = t$ với $t > 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$25t - t^2 = 125 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 125 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (2) có $\begin{cases} \Delta = 25^2 - 4 \cdot 125 = 125 > 0 \\ S = 25 > 0, P = 125 > 0 \end{cases}$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

t_1, t_2 dương thỏa mãn $t_1 + t_2 = 25$ và $t_1 \cdot t_2 = 125$.

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $5^{x_1} = t_1, 5^{x_2} = t_2$.

Ta có $5^{x_1+x_2} = 5^{x_1} \cdot 5^{x_2} = t_1 \cdot t_2 = 125 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Vậy $T = 3$.

Câu 11: Chọn D

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm pt.

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(2^{(x-1)(x^2+3x)} \cdot 3^{x-1} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x) + (x-1)\log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x + \log_2 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1 vì $\begin{cases} \Delta = 9 - 4\log_2 3 > 0 \\ 4 + \log_2 3 \neq 0 \end{cases}$.

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm pt.

Câu 12: Chọn B

Ta có $0 < m^2 + 2 \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } 2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_{(m^2+2)}(x-1)^2 = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 - \frac{2}{x} \text{ với } x \in (1; +\infty).$$

Yêu cầu bài toán trở thành định m để phương trình $m = 1 - \frac{2}{x}$ có nghiệm trên khoảng $(1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $-1 < m < 1$.

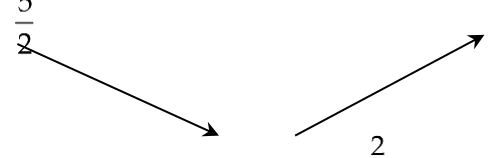
Câu 13: Chọn B

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm số $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ có $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$ và $t'(x) = 0$
 $\Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\frac{5}{2}$		$\frac{17}{4}$



Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên với mỗi $t \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$

và với mỗi $t \in \left\{2\right\} \cup \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có: $t_1 \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ và $t_2 \in \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$.

Vậy phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Câu 14: Chọn D

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0; \pi)$ nên $t \in (0; 1]$.

Khi đó phương trình trở thành: $f(t) = m, t \in (0; 1]$. Đồ thị $f(t)$ trên $(0; 1]$ như hình vẽ.

Từ đồ thị ta có: Phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên nửa khoảng $(0; 1] \Leftrightarrow m \in [-1; 1)$.

Câu 15: Chọn D

Đặt $t = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 4 - 3\sin^2 2x \Rightarrow t \in [1; 4]$.

Do đó phương trình $f\left[4(\sin^6 x + \cos^6 x)\right] = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t) = m$ có nghiệm t với $t \in [1; 4] \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 5$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ với $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2-1} \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f(0) = \log_3 2 - \frac{9}{5} < 0$

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Xét $t = 1$ ta có $\log_3(1+2) + 5^{1^2-1} - 2 = 0$

Suy ra $t = 1$ là nghiệm duy nhất.

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{5}).$$

Suy ra $a = 9, b = 5$. Vậy $a - 2b = -1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} \Leftrightarrow m = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}}$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 - 3 \cdot 2^x) \cdot 2^x \ln 2}{(4^x + 1)\sqrt{4^x + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3	$\sqrt{10}$	1

Từ bản biến thiên suy ra $m \in (3; \sqrt{10})$. Do đó $\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 36$.

Câu 18: Chọn C

Ta có: $3x^2 - 5x + 8 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên đk của phương trình là: $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 2) - \log_2(3x^2 - 5x + 8) = \frac{1}{2}[(3x^2 - 5x + 8) - (x^2 + 3x + 2)].$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2) = \log_2(3x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{2}(3x^2 - 5x + 8).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall t > 0.$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0; +\infty)$.

Mà phương trình có dạng: $f(x^2 + 3x + 2) = f(3x^2 - 5x + 8).$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2 - 5x + 8) = (x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} (t/m).$$

Vậy $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 1.$

Câu 19: Chọn C

Đặt $5^x + m = \log_5(x - m) = t.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5^x + m = t \\ \log_5(x - m) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ x - m = 5^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ 5^t + m = x \end{cases}.$

Trừ hai vế ta được: $5^x - 5^t = t - x \Leftrightarrow 5^x + x = 5^t + t \Leftrightarrow f(x) = f(t).$

Với $f(x) = 5^x + x \Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = t.$

Với $x = t$ ta có $5^x + m = x \Leftrightarrow 5^x - x = -m.$ Xét hàm số $g(x) = 5^x - x.$

$$g'(x) = 5^x \cdot \ln 5 - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

x	$-\infty$	$\log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$

$$\Rightarrow \text{với } -m > \frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\ln 5} + \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

Do m là số nguyên và $m \in (-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}.$

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 20: Chọn D

Điều kiện $x > 0.$ Đặt $t = x + \frac{1}{2x}, (t \geq \sqrt{2}).$

Phương trình trở thành: $\log_2 t + 2^t = 5$ (1). Xét $f(t) = \log_2 t + 2^t$ với $t \geq \sqrt{2}.$

Ta có $f(2) = 5$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt{2} \Rightarrow f(t) \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (\sqrt{2}; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = 5$ nhiều nhất tại 1 điểm.

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

$$\text{Với } t = 2: x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (2).$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và tích tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{1}{2}$.

Câu 21: Chọn C

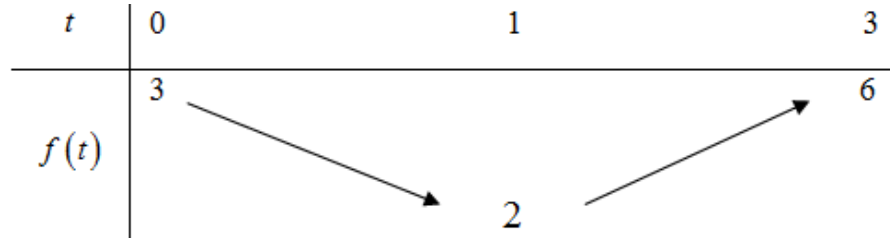
$$\text{Ta có: } \log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]. \text{ Phương trình (1) trở thành } t^2 - 2t + 3 = m \quad (2).$$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [1; 8]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 3]$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - 2t + 3 \text{ với } t \in [0; 3].$$

Ta có bảng biến thiên:



$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm } x \in [1; 8] \Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6.$$

Câu 22: Chọn B

$$\text{ĐKXĐ: } x \in [0; 4]. \text{ Đặt } t = \sqrt{4x - x^2} \text{ với } x \in [0; 4] \text{ thì } t \in [0; 2]$$

$$\text{Đặt } u = 3^t \text{ với } t \in [0; 2] \text{ thì } u \in [1; 9]$$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 9]$.

$$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1, \text{ với } u \in [1; 9]. \text{ Xét hàm số } f(u) = -u^2 + 4u + 1.$$

$$f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2. \text{ Ta có, } f(1) = 4, f(2) = 5, f(9) = -44.$$

$$\text{Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } -44 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -22 \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Vậy có 25 số nguyên của tham số m .

Câu 23: Chọn A

Để phương trình $\pi^x = k$ có 1 nghiệm thì $k > 0$.

Do đó để $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(\pi^x) = \frac{m^2 - 1}{8}$ có 2 nghiệm thì đường thẳng $y = \frac{m^2 - 1}{8}$ phải cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0.

Dựa vào đồ thị ta thấy $-1 < \frac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow 0 \leq m^2 < 9 \Leftrightarrow m \in (-3; 3)$.

Mà $m < 5; m \in \mathbb{Z}$. Vậy $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Có tất cả 5 giá trị.

Câu 24: Chọn D

Ta có $5^x + m = \log_5(x-m)$ (*). Đặt $t = 5^x + m$.

Suy ra (*) $\Leftrightarrow t = \log_5(x-m) \Leftrightarrow x-m = 5^t \Leftrightarrow x = 5^t + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t = 5^x + m \\ x = 5^t + m \end{cases} \Rightarrow t-x = 5^x - 5^t \Leftrightarrow x+5^x = t+5^t$.

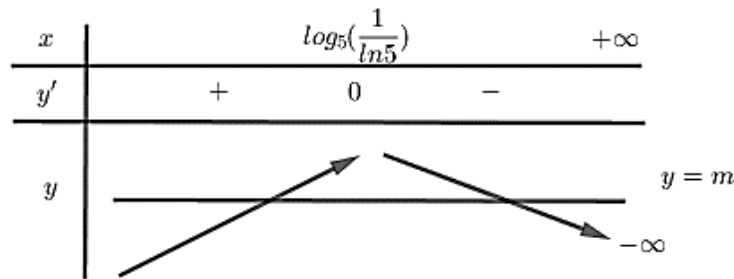
Xét hàm số $f(u) = u + 5^u$ có $f'(u) = 1 + 5^u \ln 5 > 0, \forall u$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow x = t$. Khi đó ta được $x = 5^x + m \Leftrightarrow x - 5^x = m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 5^x$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng trục hoành.

Xét $y = x - 5^x$ có $y' = 1 - 5^x \ln 5$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq f\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right) \in (-1; 0)$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20; 20) \end{cases}$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 25: Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y}$ (1). Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y}$

$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 26: Chọn B

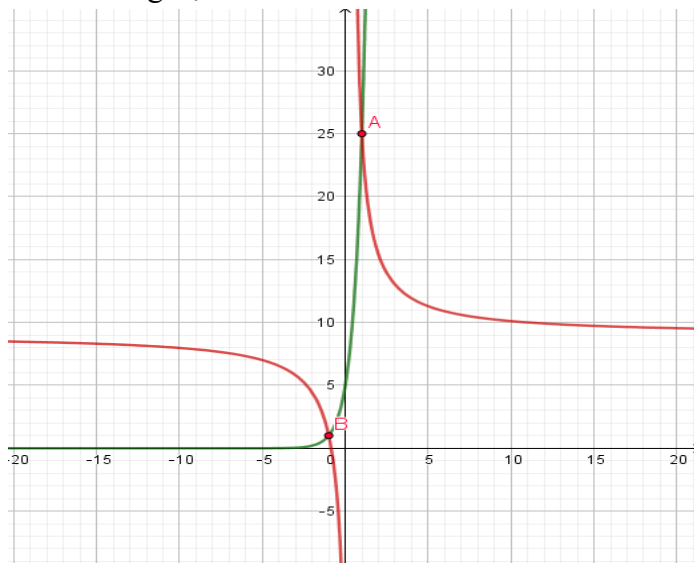
Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$$15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x+23}{3x-1}$$

Xét hai hàm số $f(x) = 5^{x+1}$ và $g(x) = \frac{27x+23}{3x-1}$ trên tập $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Ta có $f'(x) = 5^{x+1} \cdot \ln 5 > 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$ và $g'(x) = \frac{-96}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm.



Nhận thấy $x = \pm 1$ là hai nghiệm của phương trình trên.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 27: Chọn A

Ta có $x+3 = me^x \Leftrightarrow me^x - x - 3 = 0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt. Ta có $y' = me^x - 1$.

Nếu $m \leq 0$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ không thể cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\ln m$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\ln m - 2$	$+\infty$

Suy ra $\ln m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < e^2$. Vậy $0 < m < e^2$. Do đó các giá trị nguyên của m là 1, 2, ..., 7.

Nhận xét: Những bài toán về số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào tham số m ta thường tìm cách cô lập m rồi khảo sát hàm số, tuy nhiên với bài toán này, nếu làm vậy thì gặp khó khăn

trong việc khảo sát hàm số nhận được. Do đó ta xét vị trí tương đối của đồ thị một hàm khác với trục hoành. Bài toán này cần đến các kỹ năng khảo sát hàm số, giải phương trình mũ và bất phương trình logarit.

Câu 28: Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_3(t) + t \text{ với } t > 0 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 29: Chọn A

$$\text{Ta có: } x+3 = me^x \Leftrightarrow me^x - x - 3 = 0. \text{ Đặt } f(x) = me^x - x - 3 \Rightarrow f'(x) = me^x - 1.$$

Nếu $m \leq 0$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Ta xét với $m > 0$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\ln m$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln m - 2$	$+\infty$

Để phương trình $x+3 = me^x$ có 2 nghiệm phân biệt $\ln m - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < e^2$.

Từ đó suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Câu 30: Chọn B

Vì $e^x + e^{x+a} > 0, \forall x$ nên $\ln(1+x) > \ln(1+x+a) \Leftrightarrow 1+x > 1+x+a \Leftrightarrow a < 0$.

$$\text{Điều kiện của phương trình là } \begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x+a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1-a, \forall a < 0.$$

Phương trình tương đương với: $e^x + e^{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = e^x + e^{x+a} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1)$.

Ta có

$$f'(x) = e^x + e^{x+a} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+a+1} = e^x + e^{x+a} - \frac{a}{(x+1)(x+a+1)} > 0 \quad \forall a < 0, \forall x > -a-1.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1-a; +\infty)$ với $\forall a < 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -(a+1)^+} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-1-a$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a < 0$.

Vì $a \in (-200; 200)$ nên có 199 số a nguyên thỏa mãn.

Câu 31: Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = -m. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2}.$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 2019^x \ln 2019 + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có 3 nghiệm thực phân biệt thì $-m > 2 \Rightarrow m < -2$.

Mà $m \in [-2019; 2019]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 32: Chọn B

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x+5y-10 = e^{x+3y-9} + x+3y-9. \text{ Xét hàm số } f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$$3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x.$$

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$$\log_5^2(3x + 2y + 4) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x + 5) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0 \quad (1).$$

Đặt $\log_5(x + 5) = t$ ($t \in \mathbb{R}, x > -5$). Khi đó phương trình trở thành $t^2 - (m + 6)t + m^2 + 9 = 0$.

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình có nghiệm, tức là:

$$\Delta = (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

$$\text{Điều kiện: } 2x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) + 2^{2x^2-3x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) = 2 - 2^{2x^2-3x-1} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x}; t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành: $\log_2(t + 1) = 2 - 2^{t^2-1} \quad (1)$.

Nhận thấy rằng phương trình là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \log_2(t + 1)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $y = 2 - 2^{t^2-1}$ luôn nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

$$\text{Từ đó ta có phương trình: } \sqrt{2x^2 - 3x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}.$$

Vậy $a = 3; b = 17; c = 4$. $a + b + c = 24$.

Câu 34: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } 5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0 \Leftrightarrow 5\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} - 4\frac{\ln x}{\ln a} - 3\frac{\ln x}{\ln b} - 2019 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x. \text{ Ta được phương trình: } \frac{5t^2}{\ln a \cdot \ln b} - \left(\frac{3\ln a + 4\ln b}{\ln a \cdot \ln b}\right)t - 2019 = 0$$

Do $a, b > 1 \Rightarrow \ln a \cdot \ln b > 0$. Vậy luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 . Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Mặt khác ta có: $t_1 + t_2 = \frac{3\ln a + 4\ln b}{5} = \frac{3\ln a + 4\ln(2019-a)}{5}$.

$$\Rightarrow \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = t_1 + t_2 = \frac{3\ln a + 4\ln(2019-a)}{5}$$

Vì $a > 1$, $b > 1$ và $a + b = 2019$ nên $a \in (1; 2018)$.

Xét hàm số $f(u) = \frac{3\ln u + 4\ln(2019-u)}{5}$ trên $(1; 2018)$.

Ta có $f'(u) = \frac{6057-7u}{5u(2019-u)} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{6057}{7}$

Bảng biến thiên:

u	1	$\frac{6057}{7}$	2018
$f'(u)$	+	0	-
$f(u)$	$\frac{3}{5} \ln \frac{6057}{7} + \frac{4}{5} \ln \frac{8076}{7}$		

Vậy giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5} \ln \frac{6057}{7} + \frac{4}{5} \ln \frac{8076}{7}$.

Do đó $m = 6075$, $n = 8076$ hay $S = m + 2n = 22209$.

Câu 35: Chọn D

Ta có: $2019^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x^2+1)} = (2x+y) \cdot 2019^{2y}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2-4x} = (2x+y) \cdot 2019^{2y} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2} = (2x+y) \cdot 2019^{2(2x+y)}.$$

Đặt $u = (x+1)^2$, $v = 2x+y$, ($u > 0, v > 0$), khi đó trở thành $u \cdot 2019^{2u} = v \cdot 2019^{2v}$.

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2019^{2t}$, ($t > 0$), ta có

$$f'(t) = 2019^{2t} + 2t \cdot 2019^{2t} \cdot \ln 2019 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{Hàm } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Vậy $P = 2y - x = 2x^2 - x + 2$. Do P là hàm bậc hai có hệ số $a = 2 > 0$ nên

$$\min P = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}.$$

Câu 36: Chọn B

$$(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} = \log 2, (1)$$

Đặt $t = |x| - 1$, điều kiện $t \geq -1$ khi đó phương trình trở thành $t^2 e^t = \log 2, (2)$

Đặt $f(t) = t^2 e^t$, $f'(t) = (t^2)' e^t + t^2 (e^t)' = (t^2 + 2t)e^t$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$, ($t = -2$ loại vì $t \geq -1$).

Giải phương trình: $f'(t) > 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t > 0 \Leftrightarrow t \in (0; +\infty)$,

Mà $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^t = +\infty$

Từ đó thu được bảng biến thiên của hàm số $y = f(t) = t^2 e^t$ trên $[-1; +\infty)$ như sau:

t	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_1 < t_2$. Ứng với mỗi nghiệm này cho ta được hai nghiệm x nên phương trình (1) có 4 nghiệm.

Câu 37: Chọn B

Ta có: $f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$

$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1 (VN) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1 \\ e^x = d < 0 \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Câu 38: Chọn B

Ta có $\ln \frac{b}{c} = c - b \Leftrightarrow \ln b + b = \ln c + c (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Phương trình có dạng $f(b) = f(c)$

Do đó ta được $b = c$. Lại có $\log_3 a + b = 0 \Leftrightarrow a = 3^{-b}$.

Thay vào $\log_a b = \frac{1}{c}$ ta được: $\log_{3^{-b}} b = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \log_3 b = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$.

Vậy $b = c = \frac{1}{3}, a = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$. Suy ra $S = a + b + c = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{2}{3} \in \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 39: Chọn C

Ta có:

$$3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} (|m| + 5) \Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} = \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5)$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$ có $f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = f(|m| + 5) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 = |m| + 5 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 = |m|$$

$$\text{Mà } -\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$

Câu 40: Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t, t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{2}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}, \text{ Khi đó } P = \frac{3a-b+3}{2a+6} \text{ và (2) là: } 3(a-1)^2 + b^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3}(a-1) = \cos t, \\ b = \sin t, \end{cases} (t \in [0; 2\pi]), \text{ khi đó}$$

$$P = \frac{3\cos t - \sqrt{3}\sin t + 6\sqrt{3}}{2\cos t + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3) \cdot \cos t + \sqrt{3}\sin t = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P$$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$$(2P-3)^2 + 3 \geq (6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P)^2 \Leftrightarrow 47P^2 - 69P + 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{69 - \sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69 + \sqrt{249}}{94}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Chọn C

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - mx - 1) + (x^2 - m^2x - 1)] \cdot 2^{-(x^2-mx-1)} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{(x^2-m^2x-1)-(x^2-mx-1)} + (x^2 - m^2x - 1).$$

Đặt $a = (x^2 - mx - 1)$, $b = (x^2 - m^2x - 1)$ thì phương trình trên trở thành

$$(a+b) \cdot 2^{-a} = a \cdot 2^{b-a} + b \Leftrightarrow a+b = a \cdot 2^b + b \cdot 2^a \Leftrightarrow a(2^b - 1) + b(2^a - 1) = 0.$$

Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì phương trình thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình tương đương $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} = 0$.

Nhận xét:

Với $a > 0$ thì $2^a > 1$, tức là $2^a - 1 > 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Với $a < 0$ thì $2^a < 1$, tức là $2^a - 1 < 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Suy ra $\frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0$.

Tương tự: $\frac{2^b - 1}{b} > 0, \forall b \neq 0$.

Nên $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0, b \neq 0$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Do đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Tức là phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x^2 - mx - 1 = 0 \\ x^2 - m^2x - 1 = 0 \end{cases}$.

Hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Nếu $m = 0$ thì hai phương trình đều là $x^2 - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1 = 0$.

Nếu $m = 1$ thì hai phương trình đều là $x^2 - x - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2 = 1$.

Khi $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2 - mx - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1 + x_2 = m$.

Phương trình bậc hai $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3 + x_4 = m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là

$$T_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

$$T_3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ nên } \min T_3 = -\frac{1}{4}.$$

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{1}{4}$ và đạt tại $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 42: Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Vì $x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow [m \ln(x+1) - x - 2][\ln(x+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ln(x+1) = x + 2 \\ \ln(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, (2) \\ x = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}.$$

Do nghiệm $x = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0, (3).$$

Xét hàm số $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$ có $h'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$ nên $h(x)$ đồng biến

trên $(0; +\infty)$ do đó phương trình $f'(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2) \cdot f'(4) < 0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2; 4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

khi và chỉ khi $m > \frac{6}{\ln 5} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty\right)$. Vậy $a = \frac{6}{\ln 5} \in (3,7; 3,8)$.

Câu 43: Chọn D

Phương trình tương đương với

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$						

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Câu 44: Chọn C

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.

Hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ } (1) \Leftrightarrow f((x-1)^2) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ 2m = x^2 + 1 & (2) \end{cases} (*).$$

Xét phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$				

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình

$2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để (*) có 2 nghiệm phân biệt. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Trường hợp 3: (1) có nghiệm $x = 2$ và (2) có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ ta có $m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right]$.

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

Câu 45: Chọn A

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXD: $x > 0; 0 < y < 1$.

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = \frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y) \cdot 3^{3-3y} = (3xy+x) \cdot 3^{3xy+x} (*)$$

Xét $f(t) = t \cdot 3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t \cdot 3^t \cdot \ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy+x > 0$ nên

$$3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3(x+1)}.$$

$$\text{Ta có } P = x + y = x + \frac{3-x}{3(x+1)} = (x+1) + \left(\frac{3-x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3}$$

$$P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{3(x+1)} \\ y = \frac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}.$$

Câu 46: Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_3(t) + t \text{ với } t > 0 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 47: Chọn B

Điều kiện xác định: $\frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 > 0$.

Khi đó:

$$\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) - \log_3 3(x^2 + x + 1) \geq -2(2x^2 + x + m + 1) + 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) + 2(2x^2 + x + m + 1) \geq \log_3 3(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 2t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó tương đương với $f(2x^2 + x + m + 1) \geq f(3(x^2 + x + 1)) \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 \geq 3(x^2 + x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq m.$$

Bất phương trình $x^2 + 2x + 2 \leq m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min g(x)$ với $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x) = 1$. Do đó $m \geq 1$.

Vì $m \in [-10; 10]$ nên tập $S = \{1; 2; \dots; 10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Câu 48: Chọn D

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2 + 1} - x) + e^{-x} - e^x = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^{-x} - e^x$$

$$= -(\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}) = -f(x) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ.}$$

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x$.

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) + e^{-x} - e^x = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + e^{-x} - e^x$
 $= -\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mà $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x$.

Xét hàm số $g(x) = 3^x$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $h(x) = 1-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ có nhiều nhất một điểm chung. Vì $g(0) = h(0)$ suy ra phương trình $3^x = 1-2x$ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 49: Chọn D

Ta có $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} = x+a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x = a$

Điều kiện xác định $\begin{cases} \ln(x+5) \neq 0 \\ x+5 > 0 \\ 3^x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x > -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Đặt hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x$ có TXĐ $D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$

Suy ra $f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x-1)^2} - 1 < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác

định

Tính: $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5}-1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}$; $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	-5	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$		$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$
		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$. Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Câu 50: Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)} - 1 = 0$ có một nghiệm đơn $x = 2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 = 0 \text{ phải có một nghiệm } x = 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Thử lại với $m = 1$ ta có:

$$\left[x(1 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} - 2 \right] (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(1 - 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)} \leq 1 \Leftrightarrow f(\sin x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2 \text{ luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1 \text{ thỏa mãn ycbt.}$$

Thử lại với $m = -3$ ta có:

$$\left[x(-3 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + 6 \right] (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 2)(3 + 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{f(\sin x)} \leq 0 \Rightarrow m = -3 \text{ không thỏa mãn ycbt.}$$

Vậy $S = \{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\emptyset$.

Câu 51: Chọn D

$$\text{Phương trình } \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x = a$$

$$\text{Đặt hàm số } f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x \text{ có tập xác định } D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} - 1 < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên các khoảng của tập xác định

$$\text{Các giới hạn: } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5} - 1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}; \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

x	-5	-4	0	$+\infty$	
$f'(x)$	-		-		+
$f(x)$	$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$. Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Câu 52: Chọn D

Phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x \Leftrightarrow 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x$

$$f'(x) = 50^x \ln 50 + 2^{x+5} \ln 2 - 3 \cdot 7^x \ln 7$$

$$f''(x) = 50^x (\ln 50)^2 + 2^{x+5} (\ln 2)^2 - 3 \cdot 7^x (\ln 7)^2$$

$$\text{Khi } x \geq 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^x (\ln 50)^2 - 3 (\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2$$

$$f''(x) \geq 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^0 (\ln 50)^2 - 3 (\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2 > 0$$

$$\text{Khi } x < 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^x 32 (\ln 2)^2 - 3 (\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2$$

$$f''(x) > 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^0 32 (\ln 2)^2 - 3 (\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2 > 0$$

Suy ra $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

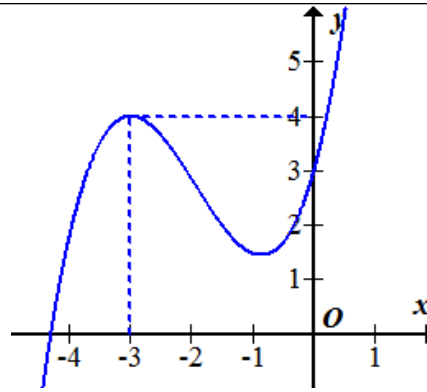
Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 53: Chọn D



Điều kiện $x \in [-1; 1]$.

$$\text{Khi đó } f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0 \Leftrightarrow f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} \leq f(m).$$

Đặt $g(x) = f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}$. Ta có bảng sau:

x	-1	0	1
$\sqrt{1-x^2}$	0	1	0
$f(\sqrt{1-x^2})$	3	$f(1)$	3
$\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$
$g(x)$	4	$g(1)$	$\frac{16}{3}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $f(m) \geq 4$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ nên $m \in \{-3; 1; 2; \dots; 10\}$. Do đó S có 11 phần tử.

Câu 54: Chọn D

$$\text{Ta có: } e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2} = \ln m.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}.$$

$$g'(x) = f'(x)[6f^2(x) - 13f(x) + 7].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 3 \\ x = 1; x = a > 3 \\ x = b < 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2]$:

x	$-\infty$	b	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	0	$-$	0
$g(x)$				4			

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là: $\ln m = 4 \Leftrightarrow m = e^4$.

Câu 55: Chọn C

Ta có

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + (3x+5y-10) = e^{x+3y-9} + (x+3y-9) \quad (1)$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 3x+5y-10 = x+3y-9 \Leftrightarrow 2x+2y=1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0, \text{ đặt } t = \log_5(x+5), t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta = (m+6)^2 - 4(m^2+9) = -3m^2 + 12m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Câu 56: Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1) \Leftrightarrow 2^{x^2+4x+6-(m^2+1)} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x^2 + 4x + 6 \\ b = m^2 + 1 \end{cases}, \text{ ta có } a \geq 2; b \geq 1, \text{ phương trình đã cho trở thành } 2^{a-b} = \log_a b.$$

$$\text{Nếu } a > b \text{ thì } \begin{cases} 2^{a-b} > 1 \\ \log_a b < 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

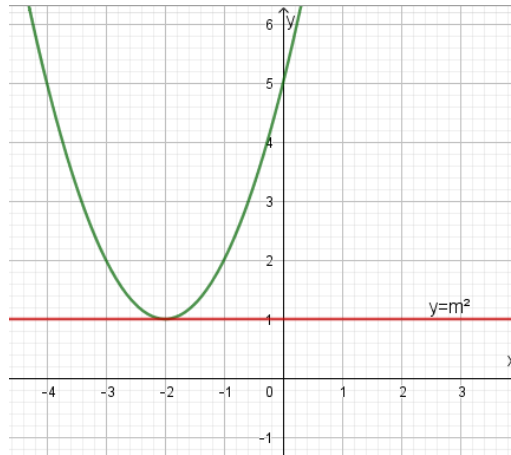
Nếu $a < b$ thì $\begin{cases} 2^{a-b} < 1 \\ \log_a b > 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a = b$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 4x + 6 = m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của parabol $y = x^2 + 4x + 5$ và đường thẳng $y = m^2$

Ta có hình ảnh minh họa sau



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 57: Chọn B

Điều kiện: $\frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình: $\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|) \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + 2x^2 = 4(x + |x - m|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) - \log_2 (|x - m| + 1) + 2x^2 - 4x = 4|x - m|$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (|x - m| + 1) + 2 + (4|x - m| + 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (4|x - m| + 4) + (4|x - m| + 4) \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

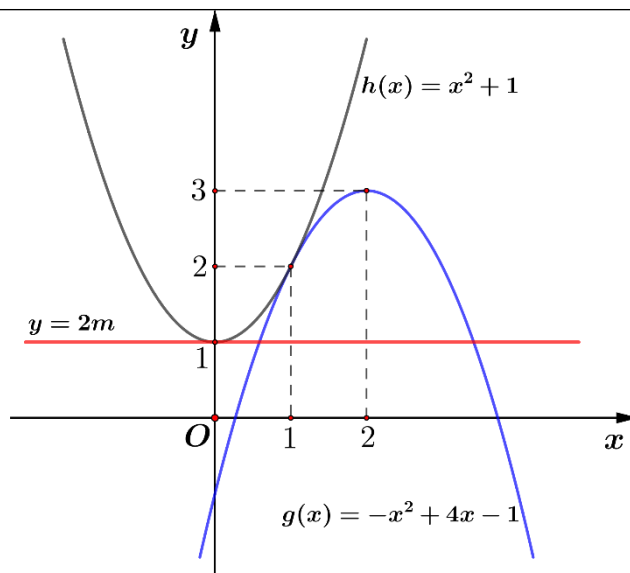
Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 6) = f(4|x - m| + 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4|x - m| + 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x - m| = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 2m = -(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $h(x) = x^2 + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy



Để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} . \text{ Vậy tổng tất cả các giá trị của } m \text{ bằng } 3.$$

Câu 58: Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$, $\forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số luôn đồng biến trên TXĐ.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x$

$$\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2+4}-x) = (\sqrt{x^2+4}-x)-8x \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2+4}-x} \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2+4}+x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2+4}+x) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+4}+x^2 = \frac{1-2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2+4}+x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4}+x)^2}{\sqrt{x^2+4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\sqrt{x^2+4}+x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-2	$+\infty$

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1-2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}.$

Do m nguyên thuộc $[-20; 20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 59: Chọn D

Với hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$

Ta có $(y+2)\log_2(4x+y+2xy+2) = 8 - (2x-2)(y+2)$

$$\Leftrightarrow (y+2)\log_2(2x+1)(y+2) = 8 - (2x+1)(y+2) + 3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + \log_2(y+2) = \frac{8}{y+2} - (2x+1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + (2x+1) = \log_2\left(\frac{8}{y+2}\right) + \frac{8}{y+2}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$f(2x+1) = f\left(\frac{8}{y+2}\right) \Rightarrow 2x+1 = \frac{8}{y+2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2x+1} - 2.$$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{8}{2x+1} - 2 = (2x+1) + \left(\frac{8}{2x+1}\right) - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } 2x+1 = \frac{8}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 3.$$

Câu 60: Chọn D

Cách 1.

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Đặt } f(t) = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6} \Rightarrow f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{561}}{10}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{561}}{10}$	0	1	$\frac{1 + \sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		-	0	+
$f(x)$			$-\frac{5}{6}$			

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Cách 2:

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0$.

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -1 \\ m < -1 \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Câu 61: Chọn D

Ta có:

$$\log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m+4x-4x^2-1)] \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m-(2x-1)^2)].$$

Nếu $2x_0 - 1$ là nghiệm của phương trình thì $-(2x_0 - 1)$ cũng là nghiệm của phương trình.

$$\text{Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì } 2x_0 - 1 = -(2x_0 - 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Với $x_0 = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta có: $\log_2 m = \log_3 3m = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2^t \\ 3m = 3^t \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \Rightarrow m = 2^{\log_{\frac{3}{2}} 3} \approx 6,54.$$

Câu 62: Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Nhận thấy với $x = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0 = 1$, nên $x = 0$ không là nghiệm của phương trình với mọi m .

Xét $-1 < x \neq 0$ ta có:

$$x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}] \Leftrightarrow \log_3(x+1)^x = \log_3[3(x+1)^m]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{x-m} = 3 \Leftrightarrow x-m = \frac{\ln 3}{\ln(x+1)} \Leftrightarrow m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)} \quad \text{với } -1 < x \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\ln 3}{(x+1)\ln^2(x+1)} > 0, \quad \forall x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}.$$

Ta lập được bảng biến thiên:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $m \in (-1; +\infty)$.

Câu 63: Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + (\cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + m)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + 8 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 1.$$

Đặt $\cos x - 2 = a$ và $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = b$.

Ta có phương trình: $2^{a+b} + (a^3 + b^3)2^a = 1$ (1).

Nhận thấy $a + b = 0$ thỏa mãn phương trình (1).

Nếu $a + b > 0$ thì $2^{a+b} > 2^0 = 1$ và $(a^3 + b^3)2^a > 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $a + b < 0$ thì $2^{a+b} < 1$ và $(a^3 + b^3)2^a < 0$ nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Vậy $a + b = 0$ suy ra $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x \Leftrightarrow -\cos^3 x + 6\cos^2 x - 9\cos x + 8 = m$.

Đặt $\cos x = t$ với điều kiện $t \in [-1; 1]$, suy ra $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8 = m$.

Dễ thấy $\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 4$ và $\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [4; 24]$. Suy ra $S = \{4; 5; \dots; 24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28.

Cách khác: Ta có $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 1$.

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left(\sqrt[3]{m - 3\cos x} \right)^3 = 2^{2 - \cos x} + (2 - \cos x)^3.$$

Xét hàm số đặc trưng $f(u) = 2^u + u^3$, đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta cũng suy ra được $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x$.

Câu 64: Chọn A

Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có: $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} + 2018 = 2m$.

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1; 2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1]$.

$\Rightarrow f(t) = 4t^2 + 2t + 1009 = m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$

$$f'(t) = 8t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$			+	
$f(t)$		1009	1015	

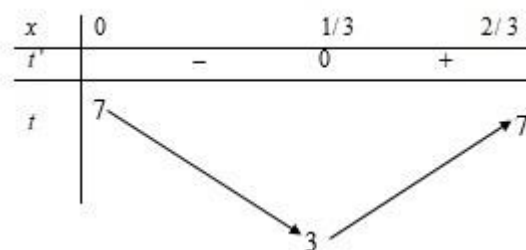
$$\Rightarrow 1009 \leq m \leq 1015 \Rightarrow S = \{1009; 1010; 1011; 1012; 1013; 1014; 1015\}.$$

Số phần tử của S là: 7.

Câu 65: Chọn D

Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$ (1) thì $f(t) = 1 - 2m(2)$.

$$t' = \frac{-4(6-18x)}{2\sqrt{6x-9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$



Từ bảng biến thiên suy ra nếu $t \in (3; 7]$ thì phương trình có 2 nghiệm x .

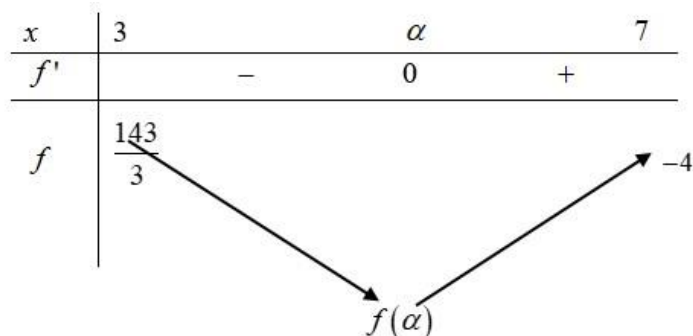
Xét hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$

$$f'(x) = 3^{x-4} \ln 3 + 2^{7-x} - (x+1)2^{7-x} \ln 2 - 6$$

$$f''(x) = 3^{x-4} \ln^2 3 + (2^{7-x} \ln 2) [(x+1) \ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3; 7]$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3; 7]$. Mặt khác, $f'(6) \cdot f'(7) < 0$ nên phương trình

$f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6; 7)$.



Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$$f(\alpha) < 1 - 2m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < \frac{1-f(\alpha)}{2}. \text{ Kết luận, GTNN của } m \text{ là } \frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2.$$

Câu 66: Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{-1}{4}$.

Trường hợp 1: $m = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1) [\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2$ là hàm đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{4}; +\infty\right)$.

Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có: $f(0) = -2$; $f(1) > 0$, suy ra $f(0)f(1) < 0$.

Theo hệ quả của định lý trung gian, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do vậy: $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$$

Xét hàm số $g(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1}$, có tập xác định: $D = \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

$$\text{Đạo hàm: } g'(x) = \frac{4}{(4x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$; $x_2 \in (1; +\infty)$ với mọi $m < 2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 67: Chọn C

Ta có

$$3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2+2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+3) \cdot 3^{x^2+2x+3} = \ln(2|x-m|+2) \cdot 3^{2|x-m|+2}$$

$$\text{Xét } f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 2 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 2$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(x^2+2x+3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1-2m & (1) \\ x^2+4x = -1+2m & (2) \end{cases}$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là:

Trường hợp 1: (1) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-1}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-3}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 3: (1) và (2) có nghiệm chung $\Rightarrow x = m$. Thế (1) vào ta có $m = -1$

Ta có $\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} + (-1) = -3$

Câu 68: Chọn C

Ta có $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y \Leftrightarrow \log(x+3y) - \log(xy) = xy - (x+3y)$.

$\Leftrightarrow \log(x+3y) + (x+3y) = \log(xy) + xy \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log t + t, t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) tương đương $f(x+3y) = f(xy) \Leftrightarrow x+3y = xy$.

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{(3y)^2}{1+x} \geq \frac{(x+3y)^2}{2+(x+3y)} \quad (2)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có

$xy = x+3y \geq 2\sqrt{x \cdot 3y} \Leftrightarrow (xy)^2 - 12xy \geq 0 \Leftrightarrow xy(xy-12) \geq 0$.

Vì $xy > 0$ nên $xy \geq 12 \Rightarrow x+3y \geq 12$. Đặt $u = x+3y \Rightarrow u \geq 12$.

Từ (2) ta có $P \geq f(u) = \frac{u^2}{u+2}, u \geq 12$

$f'(u) = \frac{u^2 + 4u}{(u+2)^2} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{Min } f(u) = f(12) = \frac{72}{7}$.

Vậy $P \geq \frac{72}{7} \Rightarrow \text{Min } P = \frac{72}{7}$ khi

$u = 12 \Rightarrow \begin{cases} x+3y=12 \\ \frac{x}{1+3y} = \frac{3y}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y+12 \\ (-3y+12)^2 - 3y+12 = 3y+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$.

DẠNG 6**Phương trình Mũ – Logarit chứa tham số 01**

- Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x + (4m-1)2^x + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$
A. $m = -1$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.
- Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$
A. $m = 4$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 3$.
- Câu 3:** Cho phương trình $(m+1)\log_2^2 x + 2\log_2 x + (m-2) = 0$. Tìm tập hợp các giá trị m để phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2$
A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(-1; 2)$. **D.** $(-\infty; -1)$.
- Câu 4:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2018; 2018)$ để phương trình $4^x - 2(m+1)2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?
A. 2025. **B.** 2008. **C.** 2005. **D.** 6.
- Câu 5:** Tìm tất cả các tham số thực m là để bất phương trình $\log_2(4^x + 2^{x+1}) \leq m + x$ có nghiệm
A. $m \geq 4$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m \geq 2\ln 2$. **D.** $m \leq 4$.
- Câu 6:** Cho phương trình $(m-1)\log_3^2 x + (2016-m)\log_3 x^2 + m - 2017 = 0$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2$?
A. 2013. **B.** 2018. **C.** 2014. **D.** 2015
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 6^x - 9^x = m(3^x \cdot 2^{x+1} - 9^x)$ có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > \frac{\log 5}{\log 2 - \log 3}$?
A. $m > 6$. **B.** $1 < m < 5$. **C.** $-\frac{1}{2} < m < 6$. **D.** $1 < m < 6$
- Câu 8:** Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + (m+1)\log_2 x - 8 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2^2 = 1$. Tính tổng các phần tử của S .
A. -2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -3.
- Câu 9:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$.
A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 10:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.
A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-\frac{3}{4}; 0)$. **C.** $(-\frac{3}{4}; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.
- Câu 11:** Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm.
A. $m < 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 0$ **D.** $m < \frac{2}{3}$.

- Câu 12:** Biết phương trình $a\log^2 x + b\log x + 5 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 10^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.
A. $b = -2018a$. **B.** $a = 2018b$. **C.** $b = 2018a$ **D.** $a = -2018b$.
- Câu 13:** Xét các số nguyên dương a và b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $6\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.
A. 33. **B.** 30. **C.** 24. **D.** 35.
- Câu 14:** Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + 2\log_2 x + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 4 < x_2$.
A. $m < 0$. **B.** $m < -4$. **C.** $m < -8$. **D.** $-8 < m < -4$.
- Câu 15:** Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0$ có hai nghiệm thực $0 < x_1 < 10 < x_2$
A. $m > -1$. **B.** $m < -3$. **C.** $m > \frac{3}{2}$. **D.** $m > 3$.
- Câu 16:** Xét các số nguyên dương a và b sao cho phương trình $a \cdot 100^x - b \cdot 10^x + 5 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 và phương trình $e^{2x} - be^x + 5a = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > 10(x_1 + x_2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$.
A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 13.
- Câu 17:** Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.
A. $m = -4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 44$. **D.** $m = 9$.
- Câu 18:** Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = \frac{1}{9}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $1 < m < 2$. **B.** $-3 < m < -1$. **C.** $2 < m < 3$. **D.** $-1 < m < 1$.
- Câu 19:** Cho phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m^2 - 2m + 3 = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 68$. Tính tổng các phần tử của S .
A. -1. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 20:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)16^x - (2m-3)2^{2x+1} + 6m+5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
A. $-\frac{3}{2} < m < -1$. **B.** $-4 < m < -1$. **C.** $-\frac{6}{5} < m < -1$. **D.** $-1 < m < \frac{3}{2}$.
- Câu 21:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3^{x-2} + m \cdot 3^{-x+2} - 18 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 6$:
A. 70. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 71.
- Câu 22:** Cho phương trình $(3 + \sqrt{5})^x + m(3 - \sqrt{5})^x = 3 \cdot 2^x$. Gọi S là tập hợp giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $S \subset (0; 3)$. **B.** $S = (0; 2)$. **C.** $S = (0; 3)$. **D.** $S \subset (0; 2)$.

- Câu 23:** Cho hai số nguyên dương a, b và phương trình $9^x - b(3e)^x + a.e^{2x} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$
A. 5 **B.** 7 **C.** 16 **D.** 12
- Câu 24:** Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$
A. $m = \sqrt{17}$. **B.** $m = \frac{17}{15}$. **C.** $m = \frac{5}{3}$. **D.** $m = \frac{9}{7}$.
- Câu 25:** Cho phương trình $\log_a^2(x-1) - 4\log_a(x-1) - 4(2+m^2) = 0$ với $0 < a \neq 1, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị thực của a để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2 = x_1 + x_2 + 15$.
A. $a = 2$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \sqrt[4]{15}$. **D.** $a = \sqrt[4]{17}$.
- Câu 26:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $6^{2x+1} - 5.6^x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.
A. $0 < m < \frac{25}{4}$. **B.** $0 < m < \frac{25}{24}$. **C.** $0 < m < \frac{5}{6}$. **D.** $0 < m < \frac{5}{4}$.
- Câu 27:** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 10 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 và phương trình $10 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$
A. 55. **B.** 46. **C.** 43. **D.** 53.
- Câu 28:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $e^{2x} - 10e^x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
A. 10. **B.** 24. **C.** 8. **D.** 23.
- Câu 29:** Cho phương trình $8^x - 3m.4^x + 3(m^2 - 1)2^x + 3m - 29 = 0$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + 3b$.
A. $S = 30$. **B.** $S = 3 + 3\sqrt[3]{31}$ **C.** $S = 10$. **D.** $S = 9 + \sqrt[3]{31}$.
- Câu 30:** Cho phương trình $\log^2(x+1) + (2m-9)\log(x+1) - m^2 - 1 = 0$. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 999$.
A. $m = 0$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 12$.
- Câu 31:** Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $27^x - m3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.
A. $S = 2$. **B.** $S = 1 + \sqrt{3}$. **C.** $S = 2 + \sqrt{2}$. **D.** $S = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- Câu 32:** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $8^x - m2^{2x+1} + (2m^2 - 1)2^x + m - m^3 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = ab$.
A. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = \frac{4}{3}$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.
- Câu 33:** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. $(2; +\infty)$. **B.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 34: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $(7-3\sqrt{5})^{x^2} + m(7+3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{16}\right)$.
 B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{0; \frac{1}{16}\right\}$.
 C. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right]$.
 D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{1}{16}\right\}$.

Câu 35: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} = mx$ có nghiệm dương.

- A. $(0; 3)$.
 B. $(-\infty; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 0)$.
 D. $(3; +\infty)$.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên dương của m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2)9^x = 0$ có nghiệm dương

- A. 1.
 B. 2.
 C. 4.
 D. 3.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $9^x + 3^x + 6 = m(3^x + 1)$ có nghiệm thực phân biệt

- A. 2.
 B. 4.
 C. 3.
 D. 1.

Câu 38: Với m, n là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn phương trình $\ln^2 x - (m+1)\ln x + n = 0$ có nghiệm x_1 . Phương trình $\ln^2 x - (n+1)\ln x + m = 0$ có nghiệm x_2 . Giá trị nhỏ nhất của $2x_1 + x_2^2$ bằng.

- A. 3.
 B. $2e+1$.
 C. $2e+e^2$.
 D. e^2+1 .

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x + 2^x + 27 = 3^m(2^x + 1)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. 0.
 B. 2.
 C. 1.
 D. 3.

Câu 40: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$ vô nghiệm là

- A. $(-\sqrt{2}; \sqrt{6}-1)$.
 B. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
 C. $(-\sqrt{2}; 2)$.
 D. $(-\sqrt{2}; \sqrt{6}+1)$.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. 1.
 B. 5.
 C. 2.
 D. 4.

Câu 42: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$$
 có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$
 B. $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}; +\infty\right)$
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$
 D. $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}; \frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)$

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình

$$m \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)6^{x^2-2x+1} + m \cdot 4^{2x^2-4x+2} = 0$$
 có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

- A. 2012
 B. 2013
 C. 2010
 D. 2011

- Câu 44:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm thực trái dấu.
A. $(-\infty; 2)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(0; 2)$.
- Câu 45:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?
A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 19.
- Câu 46:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2m \cdot 6^x + m \cdot 4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$
A. $\left\{\frac{9}{4}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\left\{\frac{9}{8}\right\}$.
- Câu 47:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $25^x - m \cdot 5^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
A. $(0; 2)$. **B.** $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2}; 5\right]$. **D.** $\left(\frac{5}{2}; 4\right]$.
- Câu 48:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^{1-x} + 2(m-1)3^{1-x} + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
A. $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(1; 2)$.
- Câu 49:** Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $16^x - m \cdot 4^x + 25 - m^2$ có hai nghiệm thực phân biệt là.
A. $(0; 5)$. **B.** $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right)$. **C.** $(2\sqrt{5}; 5)$. **D.** $(-5; 0)$.
- Câu 50:** Với m, n là các số nguyên dương sao cho phương trình $\ln^2 x - (m+1)\ln x + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ; phương trình $\ln^2 x - (n+1)\ln x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2m + 3n$ bằng
A. 51. **B.** 46. **C.** 48. **D.** 53.
- Câu 51:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln^2 x - m \ln x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 x_2 < 81$.
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.
- Câu 52:** Với m, n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $2018 \log_m x \cdot \log_n x = 2017 \log_m x + 2018 \log_n x + 2019$. Khi P nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất thì
A. $m \cdot n = 2^{2020}$. **B.** $m \cdot n = 2^{2017}$. **C.** $m \cdot n = 2^{2019}$. **D.** $m \cdot n = 2^{2018}$.
- Câu 53:** Biết rằng $a \cdot \log_2^2 x + b \log_2 x + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ bằng
A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 54:** Gọi $(a; b)$ là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng
A. 2. **B.** 4. **C.** -6. **D.** -14.

- Câu 55:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\log_{25}^2 x - m\log_5 \frac{x}{5} - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 - 50\sqrt{x_1 x_2} + 625 \leq 0$?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2020]$ sao cho với mỗi giá trị a luôn tồn tại số thực x để 3 số $5^{x+1} + 5^{1-x}, \frac{a}{2}$ và $25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng?
A. 2007. **B.** 2009. **C.** 2010. **D.** 2008.
- Câu 57:** Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng
A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 58:** Cho phương trình $m\ln^2(x+1) - (x+2-m)\ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó, a thuộc khoảng:
A. $(3, 8; 3, 9)$ **B.** $(3, 7; 3, 8)$. **C.** $(3, 6; 3, 7)$. **D.** $(3, 5; 3, 6)$.
- Câu 59:** Cho các số thực a, b, c thay đổi sao cho phương trình $\ln^4 x + a\ln^3 x + b\ln^2 x + c\ln x + 4 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $20a^2 + 20b^2 + 5c^2$ bằng:
A. 64 **B.** 48. **C.** 32. **D.** 24.
- Câu 60:** Bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [2; 4)$ khi và chỉ khi
A. $m \in [0; 1)$. **B.** $m \in [-2; 0)$. **C.** $m \in (0; 1]$. **D.** $m \in (-2; 0]$.
- Câu 61:** Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $e^x + (m^2 - m)e^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log e}$.
A. $T = 28$. **B.** $T = 20$. **C.** $T = 21$. **D.** $T = 27$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.A	5.B	6.D	7.D	8.A	9.B	10.C
11.A	12.A	13.A	14.C	15.C	16.B	17.B	18.B	19.B	20.B
21.D	22.A	23.B	24.B	25.A	26.B	27.A	28.C	29.B	30.C
31.D	32.A	33.B	34.B	35.B	36.B	37.A	38.A	39.A	40.C
41.A	42.A	43.B	44.C	45.B	46.A	47.B	48.C	49.C	50.A
51.C	52.C	53.C	54.D	55.B	56.B	57.D	58.B	59.A	60.B
61.D									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

Đặt $2^x = t, t > 0$.

Để phương trình $4^x + (4m-1)2^x + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$ thì phương trình $t^2 + (4m-1)t + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 dương thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 5 > 0 \\ 4m - 1 > 0 \\ 3m^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 2: Chọn A

Đặt $\log_3 x = t$, để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$ thì phương trình $t^2 - mt + 1 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thực thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \geq 0 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

Câu 3: Chọn C

Đặt $\log_2 x = t$, Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2$ thì phương trình $(m+1)t^2 + 2t + (m-2) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thực thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$$

Câu 4: Chọn A

Đặt $2^x = t$. Để phương trình $4^x - 2(m+1)2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 trái dấu thì phương trình $g(t) = t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow ag(1) < 0 \Leftrightarrow m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 9$$

Do số nguyên $m \in (-2018; 2018)$ và $m < 9$ nên có 2025 số nguyên thỏa mãn.

Câu 5: Chọn B

$$\text{Bất phương trình } \log_2(4^x + 2^{x+1}) \leq m + x \Leftrightarrow 4^x + 2^{x+1} \leq 2^{m+x} \Leftrightarrow 4^x - 2^x(2^m - 2) \leq 0 \quad (2)$$

Đặt $t = 2^x$

Để bất phương trình $\log_2(4^x + 2^{x+1}) \leq m + x \quad (1)$ có nghiệm thì bất phương trình $t^2 - (2^m - 2)t \leq 0$ có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 6: Chọn D

Ta có $(m-1)\log_3^2 x + (2016-m)\log_3 x^2 + m - 2017 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_3^2 x + 2(2016-m)\log_3 x + m - 2017 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình (1) thành: $(m-1)t^2 + 2(2016-m)t + m - 2017 = 0 \quad (2)$.

Có $0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \log_3 x_1 < \log_3 1 < \log_3 x_2 \Rightarrow t_1 < 0 < t_2$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2$ thì (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow \frac{m-2017}{m-1} < 0 \Rightarrow 1 < m < 2017$. Mà m nguyên nên $m \in \{2; 3; \dots; 2016\}$. Vậy có tất cả 2015 giá trị m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn D

Ta có $4^x - 6^x - 9^x = m(3^x \cdot 2^{x+1} - 9^x)(1) \Leftrightarrow 4^x - (1+2m)6^x + (m-1)9^x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - (1+2m)\left(\frac{2}{3}\right)^x + (m-1) = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ phương trình (1) thành: $t^2 - (1+2m)t + (m-1) = 0 \quad (2)$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thì phương trình (2) có 2 nghiệm t dương

điều kiện là
$$\begin{cases} \Delta = (1+2m)^2 - 4(m-1) > 0 \\ (1+2m) > 0 \\ (m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}, t_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$.

Theo Viet $t_1 \cdot t_2 = m - 1$.

Mà phải có $t_1 \cdot t_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1+x_2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\log 5}{\log 2 - \log 3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 5} = 5 \Rightarrow m - 1 < 5 \Rightarrow m < 6$

Kết hợp điều kiện có $1 < m < 6$.

Câu 8: Chọn A

Xét $\log_2^2 x + (m+1)\log_2 x - 8 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình trở thành: $t^2 + (m+1)t - 8 = 0 \quad (2)$

Để (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + 2t_2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2t_2$.

Vì phương trình (2) có $P = -8 < 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm t_1, t_2 trái dấu

Khi đó, áp dụng định lý Viet cho (2) thì: $t_1 \cdot t_2 = -8 \Leftrightarrow -2t_2 \cdot t_2 = -8 \Leftrightarrow t_2^2 = 4 \Leftrightarrow t_2 = \pm 2$

Trường hợp 1: Xét $t_2 = 2$ là nghiệm của (2) $\Rightarrow 4 + 2(m+1) - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Trường hợp 2: Xét $t_2 = -2$ là nghiệm của (2) $\Rightarrow 4 - 2(m+1) - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là -2 .

Câu 9: Chọn B

Ta có: $4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ (1)

$$\Leftrightarrow 4^{x+1} + 4^{1-x} = m(2^{2+x} - 2^{2-x} - 8) + 2^{2+x} - 2^{2-x} + 16$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4^{x+1} + 4^{1-x} - 2^{2+x} + 2^{2-x} - 16}{2^{2+x} - 2^{2-x} - 8} = \frac{4^x + 4^{-x} - 2^x + 2^{-x} - 4}{2^x - 2^{-x} - 2}$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow m = \frac{t^2 + 2 - t - 4}{t - 2} \Leftrightarrow m = f(t) = t + 1$$

Ta có: $t' = 2^x \cdot \ln 2 + 2^{-x} \cdot \ln 2$

Vì $t'(x) > 0$ nên t là hàm đồng biến nghĩa là: $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t) \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

Để phương trình (1) có nghiệm $x \in [0; 1]$ thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị $y = f(t)$

$$\Leftrightarrow m \in \left[1; \frac{5}{2}\right]. \text{ Vì } m \text{ là số nguyên nên có 2 giá trị của } m \text{ là: } m \in \{1; 2\}.$$

Câu 10: Chọn C

Ta có: $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2m\log_2 x - 1 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$ thì $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\text{Khi đó: (1) trở thành } t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{t^2 - 1}{2t} \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} > 0 \forall t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Nên $f(t)$ là hàm đồng biến khi $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, khi đó $f(t) \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$

$$\text{Để (1) có nghiệm } x \in (\sqrt{2}; +\infty) \text{ thì (2) có nghiệm } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

Câu 11: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Bất phương trình trở thành $t^2 - 2t - 2 < -3m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t - 2$. Để bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\min f(t) < -3m$

$$\Leftrightarrow -3 < -3m \Leftrightarrow m < 1$$

Câu 12: Chọn A

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log x$. Phương trình trở thành $at^2 + bt + 5 = 0$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \log x_1 + \log x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \log(x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 10^{-\frac{b}{a}}.$$

$$10^{2018} = 10^{-\frac{b}{a}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = 2018 \Leftrightarrow b = -2018a.$$

Câu 13: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \ln x$; $u = \log x$, khi đó

$$a \ln^2 x + b \ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + 6 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad 6 \log^2 x + b \log x + a = 0 \Leftrightarrow 6u^2 + bu + a = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thì $b^2 - 24a > 0 \Leftrightarrow b^2 > 24a \quad (*)$

Khi đó giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 ; phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt u_1, u_2 , ta có $x_1 \cdot x_2 = e^{t_1+t_2}$ và $x_3 \cdot x_4 = 10^{u_1+u_2}$

Theo giả thiết ta có $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{t_1+t_2} > 10^{u_1+u_2} \Rightarrow t_1 + t_2 > (u_1 + u_2) \ln 10$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{6} \ln 10 \Rightarrow a > \frac{6}{\ln 10} \Rightarrow a \geq 3.$$

Kết hợp với (*) suy ra $b^2 > 72 \Rightarrow b \geq 9$ (do b nguyên dương)

Do đó $S = 2a + 3b \geq 33$. Vậy $\min S = 33$.

Câu 14: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, PT $\Leftrightarrow g(t) = t^2 + 2t + m = 0 \quad (2)$

Phương trình $\log_2^2 x + 2 \log_2 x + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 4 < x_2$ khi

Phương trình (2) hai nghiệm thực t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 2 < t_2$

$$\Leftrightarrow g(2) < 0 \Leftrightarrow 8 + m < 0 \Leftrightarrow m < -8.$$

Câu 15: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, PT $\Leftrightarrow g(t) = t^2 - 2(m+1)t + 4 = 0 \quad (2)$

Phương trình $\log^2 x - 2(m+1) \log x + 4 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$ khi phương trình (2) hai nghiệm thực t_1, t_2 thỏa mãn

$$t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow g(1) < 0 \Leftrightarrow 3 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Câu 16: Chọn B

Phương trình $a \cdot 100^x - b \cdot 10^x + 5 = 0 \Leftrightarrow at^2 - bt + 5 = 0 \quad (t = 10^x > 0) \quad (1)$

$$e^{2x} - be^x + 5a = 0 \Leftrightarrow s^2 - bs + 5a = 0 \quad (s = e^x > 0) \quad (2)$$

$$\text{Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = b^2 - 20a > 0 \\ \frac{b}{a} > 0; \frac{5}{a} > 0 \\ \Delta_2 = b^2 - 20a > 0 \\ b > 0; 5a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 20a > 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Điều kiện $x_3 + x_4 > 10(x_1 + x_2) \Leftrightarrow e^{x_3+x_4} > e^{10(x_1+x_2)} \Leftrightarrow e^{x_3} \cdot e^{x_4} > 10^{10(x_1+x_2) \cdot \log e}$

$$\Leftrightarrow e^{x_3} \cdot e^{x_4} > [10^{x_1} \cdot 10^{x_2}]^{10 \log e} \Leftrightarrow 5a > \left(\frac{5}{a}\right)^{10 \log e}$$

$$\Leftrightarrow a^{10 \log e + 1} > 5^{10 \log e - 1} \Leftrightarrow (10 \log e + 1) \log_5 a > 10 \log e - 1 \Leftrightarrow \log_5 a > \frac{10 \log e - 1}{10 \log e + 1} \Leftrightarrow a > 5^{\frac{10 \log e - 1}{10 \log e + 1}}.$$

Giá trị a nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là: $a = 3$.

Với $a = 3$, ta có $b^2 > 20a = 60$. Số nguyên dương b nhỏ nhất thỏa mãn là: $b = 8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a + b$ là 11.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành: $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$ (1).

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = 81 \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 4$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(2m - 7) > 0 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 18: Chọn B

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - m\log_3 x + \frac{1}{6} \cdot (-2)\log_3 x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - \left(m + \frac{1}{3}\right)\log_3 x + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right)t + m - 3 = 0 \text{ (1). Ta có: } x_1 x_2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = -2$$

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $x_1 x_2 = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left(m + \frac{1}{3}\right)^2 - 4(m - 3) > 0 \\ m + \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{7}{3} \in (-3; -1).$$

Câu 19: Chọn B

Điều kiện xác định $x > 0$.

$$\text{Đặt } \log_2 x = t, \text{ ta có phương trình } t^2 - 4t + (1 - m)(m + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - m \\ t = m + 3 \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $1 - m \neq m + 3 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Ta có $\log_2 x_1 = 1 - m \Leftrightarrow x_1 = 2^{1-m}$ và $\log_2 x_2 = m + 3 \Leftrightarrow x_2 = 2^{m+3}$.

$$\text{Từ đó } x_1^2 + x_2^2 = 68 \Leftrightarrow (2^{1-m})^2 + (2^{m+3})^2 = 68 \Leftrightarrow \frac{4}{4^m} + 64 \cdot 4^m = 68$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot (4^m)^2 - 17 \cdot 4^m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^m = 1 \\ 4^m = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Như vậy $S = \{-2; 0\}$. Tổng các các phần tử của S bằng -2 .

Câu 20: Chọn B

$$\text{Ta có } (m+1)16^x - (2m-3)2^{2x+1} + 6m+5 = 0 \Leftrightarrow (m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m+5 = 0$$

$$\text{Đặt } 4^x = t > 0 \text{ ta có phương trình } (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (*)$$

Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 4^{x_1} < 1 < 4^{x_2}$. Khi đó, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$.

Đặt $f(t) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$.

Điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$ là

$$\begin{aligned} \begin{cases} (m+1)f(0) > 0 \\ (m+1)f(1) < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)[(m+1).0^2 - 2(2m-3).0 + 6m+5] > 0 \\ (m+1)[(m+1).1^2 - 2(2m-3).1 + 6m+5] < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(6m+5) > 0 \\ (m+1)(3m+12) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(6m+5) > 0 \\ (m+1)(3m+12) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1. \end{aligned}$$

Câu 21: Chọn D

Ta có $3^{x-2} + m.3^{-x+2} - 18 = 0 \Leftrightarrow 3^{x-2} + \frac{m}{3^{x-2}} - 18 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} - 18.3^{x-2} + m = 0$ (1)

Đặt $t = 3^{x-2}$, $t > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 18t + m = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 6$ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1.t_2 > 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - m > 0 \\ S = 18 > 0 \\ m > 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < m < 81$$

$m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{10, 11, 12, \dots, 80\} \Rightarrow$ có 71 số nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 22: Chọn A

Ta có $(3 + \sqrt{5})^x + m(3 - \sqrt{5})^x = 3.2^x \Leftrightarrow (3 + \sqrt{5})^{2x} - 3.(3 + \sqrt{5})^x 2^x + m2^{2x} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2x} - 3.\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + m = 0$$
 (1)

Đặt $t = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x$, $t > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 3t + m = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ S = 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4} \Rightarrow S = \left(0; \frac{9}{4}\right) \Rightarrow S \subset (0; 3)$$

Câu 23: Chọn B

Ta có $9^x - b(3e)^x + a.e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - b3^x.e^x + a.e^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{e}\right)^{2x} - b\left(\frac{3}{e}\right)^x + a = 0$ (1)

Đặt $t = \left(\frac{3}{e}\right)^x$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - bt + a = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq 10$ khi phương trình

(2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2 \geq \left(\frac{3}{e}\right)^{10}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a > 0 \\ b > 0 \\ a \geq \left(\frac{3}{e}\right)^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 2\left(\frac{3}{e}\right)^5 \\ a \geq \left(\frac{3}{e}\right)^{10} \end{cases}. \text{ Vì } a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ nên } \begin{cases} a \geq 3 \\ b \geq 4 \end{cases} \Rightarrow S = a + b \geq 7$$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$ là 7

Câu 24: Chọn B

Ta có $4^x - m.2^{x+1} + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m.2^x + m^2 - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x, t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2m.t + m^2 - 1 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 = 16t_2$.

$$\text{Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt } t_1; t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 = 16t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17t_2 = 2m \\ t_1 = 16t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = \frac{2m}{17} \\ t_1 = \frac{32m}{17} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t_1.t_2 = m^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{64m^2}{289} = m^2 - 1 \Leftrightarrow 225m^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{17}{15}(n) \\ m = -\frac{17}{15}(l) \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{17}{15}$$

Câu 25: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 1 \neq a > 0 \end{cases}$. Ta có $\log_a^2(x-1) - 4\log_a(x-1) - 4(2+m^2) = 0$ (1)

Đặt $t = \log_a(x-1)$. Ta được phương trình $t^2 - 4t - 4(2+m^2) = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2 = x_1 + x_2 + 15$ khi phương trình

(2) có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 + t_2 = \log_a 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = \log_a 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4(m^2 + 3) > 0 \forall m \\ \log_a 16 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

Câu 26: Chọn B

Ta có: $6^{2x+1} - 5.6^x + m = 0 \Leftrightarrow 6.6^{2x} - 5.6^x + m = 0$.

Đặt $t = 6^x$, phương trình trở thành $6t^2 - 5.6t + m = 0$ (1).

Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt thỏa $0 < t_1 < t_2 < 1$. Để ý tổng hai nghiệm của phương trình (1) nếu có là $t_1 + t_2 = \frac{5}{6} < 1$. Suy ra điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa điều kiện bài toán là:

$$\begin{cases} \Delta = 25 - 24m > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{25}{24} \\ \frac{m}{6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{25}{24}$$

Câu 27: Chọn A

Điều kiện để mỗi phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là $b^2 > 40a$

Khi đó $-\frac{b}{a} = \ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2) \rightarrow x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}}$

Và $-\frac{b}{10} = \log x_3 + \log x_4 = \log(x_3 x_4) \Rightarrow x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{10}}$

Do đó ta có bpt $e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{10}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{10} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{10}{\ln 10} \approx 4,342$.

Suy ra $a \geq 5 \rightarrow b^2 > 200 \Rightarrow S \geq 10 + 45 = 55$

Vậy phương trình có 6 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{11\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 28: Chọn C

Đặt $t = e^x$ ($t > 0$), phương trình trở thành $t^2 - 10t + m = 0$ (1).

Với $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow t_1 < 1 < t_2$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa điều kiện đó thì:

$$\begin{cases} af(0) > 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9$$

Câu 29: Chọn B

Đặt $t = 2^x$, phương trình trở thành $t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t + 3m - 29 = 0$

Xét hàm số $y = t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t + 3m - 29$, $y' = 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m - 1 \\ t = m + 1 \end{cases}$$

Để $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt ta phải có điều kiện sau:

$$\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(m-1)y(m+1) < 0 \\ m-1 > 0 \\ 3m-29 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < \frac{29}{3} \\ (m^3 - 27)(m^3 - 31) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < m < \sqrt[3]{31}$$

$$\text{Vậy } S = 3 + \sqrt[3]{31}$$

Câu 30: Chọn C

Ta có: $9 - 2m = \log(x_1 + 1) + \log(x_2 + 1) = \log(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1) = \log 1000 = 3$

Suy ra $m = 3$.

Thay vào phương trình thử lại ta được:

$$\log^2(x+1) - 3\log(x+1) - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x+1) = 5 \\ \log(x+1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 99999 \\ x = -\frac{99}{100} \end{cases} \text{ thoả điều kiện bài toán.}$$

Câu 31: Chọn D

$$27^x - m3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 3^{3x} - 3m3^{2x} + 3(m^2 - 1)3^x - (m^2 - 1) = 0(*)$$

Đặt $3^x = t (t > 0)$.

Phương trình (*) có dạng $\Leftrightarrow t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - (m^2 - 1) = 0(**)$.

Phương trình (*) có ba nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (**) có ba nghiệm thực phân biệt lớn hơn 0.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - (m^2 - 1)$, $f'(t) = 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1)$.

Ta có $f'(t) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $t_1 = m - 1, t_2 = m + 1$ là hai nghiệm của phương trình.

$$\text{Yêu cầu của bài toán tương đương với } \begin{cases} f(t_1) > 0 \\ f(t_2) < 0 \\ t_1 > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 3)(m - 1) > 0 \\ (m^2 - 2m - 1)(m + 1) < 0 \\ m - 1 > 0 \\ -m^2 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy

Câu 32: Chọn A

$$8^x - m2^{2x+1} + (2m^2 - 1)2^x + m - m^3 = 0 \Leftrightarrow 8^x - 2m2^{2x} + (2m^2 - 1)2^x + m - m^3 = 0(*)$$

Đặt $2^x = t (t > 0)$.

Phương trình (*) có dạng $\Leftrightarrow t^3 - 2mt^2 + (2m^2 - 1)t + m - m^3 = 0(**)$.

Phương trình (*) có ba nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (**) có ba nghiệm thực phân biệt lớn hơn 0.

$$t^3 - 2mt^2 + (2m^2 - 1)t + m - m^3 = 0 \Leftrightarrow (t - m)(t^2 - mt + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m(1) \\ t^2 - mt + m^2 - 1 = 0(2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với: $m > 0$ và phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác m .

$$\text{Hay } \begin{cases} m^2 - m^2 + m^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \\ m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt thì $m \in \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 33: Chọn B

$$\text{Đặt } t = (2 + \sqrt{3})^x \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t} \text{ (Điều kiện: } t > 0).$$

Ta được phương trình: $t + \frac{1}{t} = 2m - 1$ (1). Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t > 0$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhân)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m - 1 > 2 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Câu 34: Chọn B

Ta có: $(7 - 3\sqrt{5})^{x^2} + m(7 + 3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2 - 1} \Leftrightarrow \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}$.

Đặt: $t = \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$ ($t \geq 1$) phương trình trở thành:

$$\frac{1}{t} + mt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow mt^2 - \frac{1}{2}t + 1 = 0 \quad (1)$$

Với $t = 1$ có duy nhất $x = 0$; với $t > 1$ có hai giá trị của x .

Yêu cầu bài toán tương đương với (1):

$$m = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Phương trình có nghiệm kép lớn hơn 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4m = 0 \\ t_0 = \frac{1}{4m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{16}$.

Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn

$$t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow af(1) < 0 \Leftrightarrow 1\left(m - \frac{1}{2} + 1\right) < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$$

Câu 35: Chọn B

Với $x > 0$ thì $x = 3^{\log_3 x}$. Khi đó:

$$(\sqrt{10} + 1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10} - 1)^{\log_3 x} = mx \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{\log_3 x} - \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right)^{\log_3 x} = m$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{\log_3 x} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right)^{\log_3 x} = \frac{1}{t}$ (Điều kiện: $t > 0$). Ta được phương trình:

$$t - \frac{1}{t} = m \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = t - \frac{1}{t}$ với $t > 0$.

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t > 0.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ với $t > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có nghiệm $t > 0$ với mọi $m \Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có nghiệm dương với mọi m .

Câu 36: Chọn B

$$16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2)9^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x + m-2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, x > 0 \Rightarrow t > 1$$

$$\text{Xét hàm số } y = t^2 - 2t + m - 2, t > 1 \Rightarrow y' = 2t - 2 > 0.$$

$$\text{Hàm số luôn đồng biến nên } y > y(1) \Rightarrow y > m - 3.$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm dương } 0 > m - 3 \Leftrightarrow m < 3 \Rightarrow m = 1 \vee m = 2$$

Câu 37: Chọn A

$$9^x + 3^x + 6 = m(3^x + 1) \Leftrightarrow \frac{9^x + 3^x + 6}{(3^x + 1)} = m. \text{ Xét hàm số } y = \frac{t^2 + t + 6}{t + 1}, t = 3^x > 0$$

Phương trình $9^x + 3^x + 6 = m(3^x + 1)$ có nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$\frac{t^2 + t + 6}{t + 1} = m \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt}$$

$$y' = \frac{t^2 + 2t - 5}{(t + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + \sqrt{6} \\ t = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

x	0			$-1+\sqrt{6}$	$+\infty$	
$f'(x)$				-	0	+
$f(x)$	6				$-1+2\sqrt{6}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $9^x + 3^x + 6 = m(3^x + 1)$ có nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-1 + 2\sqrt{6} < m < 6$. Vậy $m = 4 \vee m = 5$

Câu 38: Chọn A

Điều kiện để hai phương trình có nghiệm là $\Delta_1 = (m+1)^2 - 4n \geq 0; \Delta_2 = (n+1)^2 - 4m \geq 0$. Khi đó theo công thức nghiệm phương trình bậc hai ta có:

$$\begin{cases} \ln x_1 = \frac{m+1 \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4n}}{2} \geq \frac{m+1 - \sqrt{(m+1)^2 - 4n}}{2} \geq \frac{m+1 - \sqrt{(m+1)^2}}{2} = 0 \\ \ln x_2 = \frac{n+1 \pm \sqrt{(n+1)^2 - 4m}}{2} \geq \frac{n+1 - \sqrt{(n+1)^2 - 4m}}{2} \geq \frac{m+1 - \sqrt{(m+1)^2}}{2} = 0 \end{cases}, \forall m, n \geq 0$$

Do đó $2x_1 + x_2^2 \geq 2e^0 + (e^0)^2 = 3$. Dấu bằng đạt $m = 1 = 0$ và $x_1 = x_2 = 1$.

Câu 39: Chọn A

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$t^2 + t + 27 = 3^m(t + 1) \Leftrightarrow t^2 + (1 - 3^m)t + 27 - 3^m = 0$$

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình cuối có hai nghiệm

$$\text{dương, tức là } \begin{cases} \Delta = (1 - 3^m)^2 - 4(27 - 3^m) > 0 \\ S = 3^m - 1 > 0 \\ P = 27 - 3^m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} - 1 < 3^m < 27 \Leftrightarrow \log_3(6\sqrt{3} - 1) < m < 3.$$

Câu 40: Chọn C

Ta có: $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 |\cos x| - 2m \log |\cos x| - m^2 + 4 = 0$ (1).

Đặt $t = \log |\cos x| \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$ (1) trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0$ (2)

Phương trình (1) vô nghiệm khi phương trình (2) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: phương trình (2) vô nghiệm, tức là $\Delta' = 2m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ (3)

Trường hợp 2: phương trình (2) có 2 nghiệm $0 < t_1 \leq t_2$ tức là:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ a.f(0) > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{2} \\ m \leq -\sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m < 2 \quad (4)$$

Kết hợp (3); (4) ta được $m \in (-\sqrt{2}; 2)$

Câu 41: Chọn A

Ta có: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ (1). Đặt $t = 2^x \Rightarrow t > 0$

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < t_2$ tức là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(0) > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5 > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{\sqrt{10}}{2} \\ m < \frac{-\sqrt{10}}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = 2.$$

Câu 42: Chọn A

Phương trình đã cho tương đương: $3^{2(x^2-2x+1)} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2(x^2-2x+1)} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x^2-2x+1)} - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2x+1} + 4m-2 = 0 \quad (1). \text{ Đặt } t = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2x+1}, 0 < t \leq 1.$$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (2m+1)t + 4m-2 = 0 \quad (2)$

Ứng với một giá trị $t, 0 < t < 1$ ta tìm được hai giá trị của x .

Ta cần tìm m để (2) có một nghiệm $t, 0 < t < 1$.

Ta có $\Delta = (2m-3)^2 \Rightarrow \Delta \geq 0$

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, khi đó phương trình (2) có nghiệm $t = 2(L)$.

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$, khi đó để phương trình (2) có nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$ thì:

$$\begin{cases} af(0) > 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-2 > 0 \\ 2m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Câu 43: Chọn B

Phương trình đã cho tương đương: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2-2x)} - (2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x} + m = 0 \quad (1).$

Vì x thuộc khoảng $(0;2)$ nên: $-1 \leq x^2 - 2x < 0$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x} \left(\frac{2}{3} \leq t < 1\right)$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (2m+1)t + m = 0 \quad (2).$

Phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ khi phương trình (2) có nghiệm thuộc $t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Vì $t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$ nên $(2) \Leftrightarrow m(t^2 - 2t + 1) - t = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t}{(t-1)^2}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} \quad t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} \cdot \frac{2t+1}{t-1} > 0, \forall t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Suy ra hàm số $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}$ đồng biến trên $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow f(t) \geq 6$.

Từ đó suy ra $m \geq 6$. Vậy có 2013 giá trị của tham số.

Câu 44: Chọn C

Xét phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0 \quad (1)$. Đặt $2^x = t$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình theo t có dạng $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0 \quad (2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm thực trái dấu thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ (t_1-1)(t_2-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m - 3 - 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1; 2)$$

Vậy $m \in (1; 2)$.

Câu 45: Chọn B

Xét phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ (1)

Đặt $3^x = t$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình theo t có dạng $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0$ (2)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 4(3m^2 - 75) > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 300 > 0 \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -5 \\ m > 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-10; 10) \\ m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (5; 10)$$

Do m nguyên và $m \in (5; 10)$ nên $S = \{6; 7; 8; 9\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 46: Chọn A

Ta có: $9^x - 2m \cdot 6^x + m \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + m = 0$ (1).

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = m \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = m$

Theo đề bài ta có: $x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$

Thử lại ta được $m = \frac{9}{4}$ thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

Đặt $5^x = t > 0$, phương trình trở thành $t^2 - m \cdot t + 2m - 5 = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 < 0 \\ 2m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4. \text{ Vậy } m \in \left(\frac{5}{2}; 4\right).$$

Câu 48: Chọn C

$9^{1-x} + 2(m-1)3^{1-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 + 6(m-1) \cdot 3^x + 9^x = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(m-1)^2 - 9 > 0 \\ -6(m-1) > 0 \\ 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Câu 49: Chọn C

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(25 - m^2) > 0 \\ S = m > 0 \\ P = 25 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 100 > 0 \\ m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{5} \\ m > 2\sqrt{5} \\ m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < m < 5$$

Câu 50: Chọn A

Ta có phương trình $\ln^2 x - (m+1)\ln x + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4n > 0 \quad (1)$$

phương trình $\ln^2 x - (n+1)\ln x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0 \Leftrightarrow (n+1)^2 - 4m > 0 \quad (2)$

Khi đó $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2 \Leftrightarrow \ln x_1 + \ln x_2 = 2(\ln x_3 + \ln x_4) \Leftrightarrow m+1 = 2(n+1) \Leftrightarrow m = 2n+1$ nên $P = 2m+3n = 7n+2$

$$\text{Từ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + n + 1 > 0 \\ n^2 - 6n - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 3 + 2\sqrt{3} \\ n < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{n > 0, n \in \mathbb{Z}} n \geq 7$$

Do đó $P \geq 51$. Vậy $P_{\min} = 51$

Câu 51: Chọn C

Ta có phương trình $\ln^2 x - m\ln x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 56 = (m-4)^2 + 40 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Khi đó $1 < x_1 x_2 < 81 \Leftrightarrow 0 < \ln(x_1 x_2) < \ln 81 \Leftrightarrow 0 < \ln x_1 + \ln x_2 < \ln 81 \Leftrightarrow 0 < m < \ln 81 \approx 4,4$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 4 giá trị cần tìm

Câu 52: Chọn C

Ta có: $2018 \log_m x \cdot \log_n x = 2017 \log_m x + 2018 \log_n x + 2019$

$$\Leftrightarrow 2018 \log_m x \cdot \log_n m \cdot \log_m x = 2017 \log_m x + 2018 \cdot \log_n m \cdot \log_m x + 2019$$

$$\Leftrightarrow 2018 \cdot \log_n m \cdot (\log_m x)^2 - (2017 + 2018 \cdot \log_n m) \cdot \log_m x + 2019 = 0$$

Gọi $x_1; x_2$ lần lượt là 2 nghiệm của phương trình ta có:

$$\log_m x_1 + \log_m x_2 = \frac{2017 + 2018 \cdot \log_n m}{2018 \log_n m} \Leftrightarrow \log_m (x_1 \cdot x_2) = \frac{2017}{2018 \cdot \log_n m} + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_m (x_1 \cdot x_2) = \frac{2017}{2018} \cdot \log_m n + \log_m m \Leftrightarrow \log_m (x_1 \cdot x_2) = \log_m \left(n^{\frac{2017}{2018}} \cdot m \right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = n^{\frac{2017}{2018}} \cdot m$$

Để x_1, x_2 nguyên và nhỏ nhất và m, n nguyên nhỏ nhất khác 1 $\Rightarrow n^{\frac{2017}{2018}}; m$ nguyên và nhỏ nhất khác 1 $\Rightarrow n = 2^{2018}$ và $m = 2 \Rightarrow m.n = 2^{2019}$

Câu 53: Chọn C

Đặt $t = \log_2 x, x \in [1; 2] \rightarrow t \in [0; 1]$

Phương trình đã cho trở thành: $a.t^2 + bt + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 1]$ nếu:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(0) \geq 0 \\ a.f(1) \leq 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \\ ac \geq 0 \\ a(a+b+c) \geq 0 \\ 0 \leq -\frac{b}{a} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \\ \frac{c}{a} \geq 0 \\ 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq 0 \\ -2 \leq \frac{b}{a} \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{c}{a} \geq 0 \\ 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} \geq -1 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2)} \Rightarrow -1 \leq \frac{b}{a} \leq 0$$

$$\text{Mà } P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} \leq \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{b}{a} \rightarrow u \in [-1; 0] \Rightarrow P \leq \frac{(1-u)(2-u)}{1-u} = 2-u \Rightarrow P \leq 3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} u = -1 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -1 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \end{cases}$$

Câu 54: Chọn D

Xét phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0, (1)$. Đặt $t = e^x, x \in (0; \ln 5) \Rightarrow t \in (1; 5)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 8t - m = 0 \Leftrightarrow m = 2t^2 - 8t, (2)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t, t \in (1; 5)$.

Ta có $f'(t) = 4t - 8; f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	1	2	5
f'(t)	-	0	+
f(t)	-6	-8	10

Phương trình (1) có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thuộc khoảng $(1; 5)$. Dựa vào BBT ta thấy $m \in (-8; -6)$.

Câu 55: Chọn B

Xét phương trình $4\log_{25}^2 x - m\log_5 \frac{x}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\log_{25}^2 x - m\log_5 x + m - 1, (x > 0)$. Đặt

$$t = \log_5 x$$

Phương trình đã cho trở thành $4t^2 - mt + m - 1 = 0, (*)$. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khi và chỉ khi } \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16(m - 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m + 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 - 4\sqrt{3} \\ m > 8 + 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có $t_1 = \log_5 x_1 \Rightarrow x_1 = 5^{t_1}; t_2 = \log_5 x_2 \Rightarrow x_2 = 5^{t_2}$. Khi đó $x_1 \cdot x_2 = 5^{t_1+t_2} = 5^{\frac{m}{4}}$.

Theo đề ra ta có

$$x_1 x_2 - 50\sqrt{x_1 x_2} + 625 \leq 0 \Leftrightarrow 5^{\frac{m}{4}} - 50\sqrt{5^{\frac{m}{4}}} + 625 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{5^{\frac{m}{4}}} = 25 \Leftrightarrow 5^{\frac{m}{4}} = 5^4 \Leftrightarrow m = 16(TM)$$

Câu 56: Chọn B

Vì 3 số $5^{x+1} + 5^{1-x}, \frac{a}{2}$ và $25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng nên:

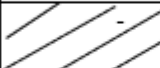
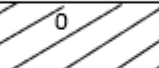
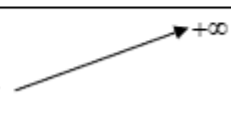
$$\Rightarrow \frac{5^{x+1} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}}{2} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 5 \cdot 5^x + \frac{5}{5^x} + 5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} = a \Leftrightarrow 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) + \left(5^x + \frac{1}{5^x}\right)^2 - 2 = a(*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Đặt $t = 5^x + \frac{1}{5^x}, t \geq 2$, phương trình $(*)$ trở thành: $t^2 + 5t - 2 = a$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 5t - 2$ với $t \geq 2$ có $f'(t) = 2t + 5, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		$+$
$f(x)$			12	

Dựa vào bảng xét dấu phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq 12$. Mà $a \in [0; 2020]$ nên $a \in [12; 2020]$ Vậy số giá trị nguyên của a là $2020 - 12 + 1 = 2009$.

Câu 57: Chọn D

$$\text{Ta có: } (2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a) \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} - 4 = 0 (*)$$

$$\text{Và } x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x_1-x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{(2+\sqrt{3})^{x_1}}{(2+\sqrt{3})^{x_2}} = 3 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x_1} = 3(2+\sqrt{3})^{x_2}.$$

$$\text{Đặt } t = (2+\sqrt{3})^x, t \geq 0.$$

$$\text{Phương trình (*) trở thành: } t + (1-2a)\frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + (1-2a) = 0, t > 0 \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có: } \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x_1} = 3(2+\sqrt{3})^{x_2} \Rightarrow t_1 = 3t_2.$$

YCBT trở thành Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1 = 3t_2$.

$$\text{Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-2a) > 0 \\ 4 > 0 \\ 1-2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < \frac{1}{2}. (*)$$

$$\text{Áp dụng hệ thức vi-et cho (1) ta được: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1-2a \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ 1.3 = 1-2a \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

Ta thấy $a = -1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Câu 58: Chọn B

Với điều kiện $x > -1$, ta biến đổi phương trình (1) tương đương với:

$$[\ln(x+1)+1] \cdot [m\ln(x+1)-(x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+1)+1=0 \\ m\ln(x+1)-(x+2)=0 \end{cases} \quad (a) \quad (b)$$

$$\text{Phương trình (a)} \Leftrightarrow \ln(x+1) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} - 1 < 0 \text{ (loại).}$$

Phương trình (b) $\Leftrightarrow m\ln(x+1) = x+2$. Vì $m = 0$ không thỏa mãn phương trình nên:

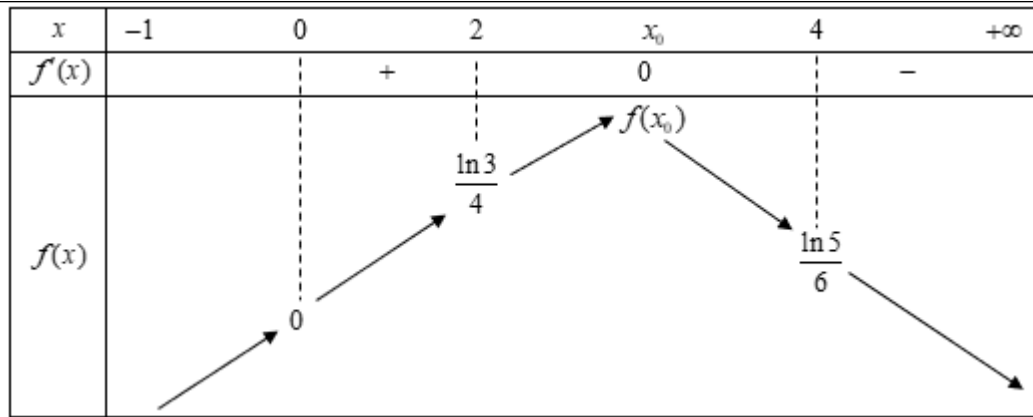
$$(b) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+2} = \frac{1}{m} \quad (*)$$

Khi đó, YCBT trở thành phương trình (*) có **hai nghiệm phân biệt thỏa mãn** $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+2}, x > -1. \text{ Khi đó: } f'(x) = \frac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = \ln(x+1)$$

Vì vế trái là hàm nghịch biến và vế phải là hàm đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác, $f'(2) > 0, f'(3) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (2; 3)$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2 \text{ khi và chỉ khi } f(0) < \frac{1}{m} < f(4) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{m} < \frac{\ln 5}{6} \Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5} \approx 3,72.$$

Vậy $a \approx 3,72 \in (3,7; 3,8)$.

Câu 59: Chọn A

Với điều kiện $x > 0$ và đặt ẩn phụ $\ln x = t, t \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho trở thành:

$$t^4 + at^3 + bt^2 + ct + 4 = 0 \quad (*)$$

Vì phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm thực nên phương trình (*) cũng có ít nhất một nghiệm thực. Giả sử t_0 là một nghiệm của phương trình (*). Khi đó:

$$t_0^4 + at_0^3 + bt_0^2 + ct_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow at_0^3 + bt_0^2 + ct_0 = -(t_0^4 + 4)$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopski, ta được:

$$(4a^2 + 4b^2 + c^2) \left(\frac{t_0^6}{4} + \frac{t_0^4}{4} + t_0^2 \right) \geq (at_0^3 + bt_0^2 + ct_0)^2 = (t_0^4 + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + c^2 \geq \frac{(t_0^4 + 4)^2}{\frac{t_0^6}{4} + \frac{t_0^4}{4} + t_0^2} = \frac{4(t_0^4 + 4)^2}{t_0^6 + t_0^4 + 4t_0^2}$$

$$\text{Do đó: } P = 20a^2 + 20b^2 + 5c^2 = 5(4a^2 + 4b^2 + c^2) \geq \frac{20(t_0^4 + 4)^2}{t_0^6 + t_0^4 + 4t_0^2}$$

$$\text{Đặt } t_0^2 = u, u > 0 \text{ thì } P \geq 20 \cdot \frac{(u^2 + 4)^2}{u^3 + u^2 + 4u} = 20 \cdot f(u)$$

$$\text{Ta có: } f'(u) = \frac{4u(u^2 + 4)(u^3 + u^2 + 4u) - (u^2 + 4)^2(3u^2 + 2u + 4)}{(u^3 + u^2 + 4u)^2} = \frac{(u^2 + 2u + 4)(u^2 + 4)(u - 2)}{(u^3 + u^2 + 4u)^2}$$

$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2$. Bảng biến thiên:

u	0	2	$+\infty$
$f'(u)$		0	+
$f(u)$	$+\infty$	$\frac{16}{5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(u) \geq \frac{16}{5}$. Vậy $P \geq 20 \cdot f(u) \geq 20 \cdot \frac{16}{5} = 64$.

Câu 60: Chọn B

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, x \in [2; 4) \Leftrightarrow t \in [1; 2)$$

$$\text{Bất phương trình đã cho trở thành } t^2 - (2m+5)t + m^2 + 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow m+1 < t < m+4 \quad (1)$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [2; 4)$ khi và chỉ khi (1) nghiệm đúng với mọi $t \in [1; 2) \Leftrightarrow m+1 < 1 < 2 \leq m+4 \Leftrightarrow m \in [-2; 0)$.

Câu 61: Chọn D

$$\text{Đặt } t = e^x, x < \frac{1}{\log e} \Leftrightarrow 0 < t < 10$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } f(t) = t^2 - 2mt + m^2 - m = 0 \quad (1)$$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log e}$ khi và chỉ khi phương trình

(1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 10)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ 1. f(0) = m^2 - m > 0 \\ 1. f(10) = m^2 - 21m + 100 > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} = m < 10 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(1; \frac{21 - \sqrt{41}}{2}\right).$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Vậy $T = 27$.

DẠNG 7**Phương trình Mũ – Logarit chứa tham số 02**

- Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9^x - 8 \cdot 3^x + m - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 14.
- Câu 2:** Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $m_0 \in \left(-5; -\frac{5}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in (4;6)$.
- Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x + (1-3m) \cdot 3^x - 2 - 6m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
A. $m < \frac{1}{3}$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $m \neq 2$. **D.** $m \leq -\frac{1}{3}$.
- Câu 4:** Cho phương trình $\log_5^3 x - (3m-3)\log_5^2 x + (9m-16)\log_5 x - 6m + 12 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị $m = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{151}{5}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(3;5)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(7;10)$. **D.** $(5;7)$.
- Câu 5:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các giá trị của S bằng
A. 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.
- Câu 6:** Biết m_0 là giá trị duy nhất của tham số m để phương trình $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
A. $m_0 \in (-7;-2)$. **B.** $m_0 \in (-2;5)$. **C.** $m_0 \in (6;7)$. **D.** $m_0 \in (5;6)$.
- Câu 7:** Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi:
A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.
- Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.
A. $m > \frac{9}{4}$. **B.** $0 < m < \frac{1}{4}$. **C.** $0 < m < \frac{9}{4}$. **D.** $m > -\frac{9}{4}$.
- Câu 9:** Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 3 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ là

- A. $(-1;1)$. B. $[-1;1]$. C. $[-1;1)$. D. $(1;+\infty)$.
- Câu 10:** Cho phương trình $4\log_2^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1;8]$?
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 11:** Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.
- A. $m > 9$. B. $m < 2$. C. $0 < m < 1$. D. $m \geq 1$.
- Câu 12:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 < 2$.
- A. $m < 9$. B. $0 < m < 4$. C. $0 < m < 2$. D. $m > 0$.
- Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[-2020; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3}$.
- A. 2019. B. 2020. C. 2021. D. 2022.
- Câu 14:** Cho phương trình $m16^{\log_2 x} - 2(m-1)x^{\log_2 4} - 2 = 0$ (1). Tập hợp các giá trị của tham số m thuộc đoạn $[-1; 2]$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- A. $(-1; 2)$. B. $[-1; 0)$. C. $[1; 2)$. D. $[-1; 0]$.
- Câu 15:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}(x^2 + mx + m - 1) + \log_{2-\sqrt{3}} x = 0$ có nghiệm duy nhất.
- A. $m > -5$. B. $m < -2$. C. $m > -3$. D. $m < 1$.
- Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1} - m \cdot 2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1; 2]$.
- A. $m \in (2; 3]$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in [2; 4]$. D. $m \in [2; 3)$.
- Câu 17:** Với giá trị nào của tham số m để phương trình $9^x - 2m \cdot 3^x + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 3 = 0$
- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 12$. C. $m = 0$. D. $m = \frac{13}{2}$.
- Câu 18:** Biết phương trình $\ln^2 x - (m+2)\ln x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, với m là tham số. Khi đó tổng các nghiệm của phương trình bằng:
- A. $e^2 + m$. B. $2 + m$. C. $e + e^m$. D. $e^2 + e^m$.
- Câu 19:** Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 - 2m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 8]$
- A. $2 \leq m \leq 3$. B. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $2 \leq m \leq 6$. D. $1 \leq m \leq 3$.

- Câu 20:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình $4^x + 2^x - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$
- A. 17. B. 0. C. 21. D. 5.
- Câu 21:** Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1).3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(3; 9)$. B. $(9; +\infty)$. C. $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$
- Câu 22:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 33. B. 24. C. 15. D. 5.
- Câu 23:** Cho phương trình $m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 24:** Cho phương trình $e^{m.\sin x - \cos x} - e^{2(1-\cos x)} = 2 - \cos x - m.\sin x$ với m là tham số thực. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2019; 2020]$ để phương trình có nghiệm.
- A. 0. B. 3. C. 2019. D. 4037.
- Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt?
- A. $0 < |m| < 1$. B. $|m| < 1$. C. $m > -1$. D. $m < 0$.
- Câu 26:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để phương trình $\frac{1}{2}x^2 - \ln x - m = 0$ có nghiệm?
- A. 18. B. 9. C. 10. D. 12.
- Câu 27:** Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+2} + 5 + m = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0; 2]$.
- A. -13. B. -15. C. -12. D. -14.
- Câu 28:** Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2(x-1) - m.\log_3(x-1)^2 + 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2; +\infty)$.
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.
- Câu 29:** Cho phương trình $\log_3^2 x + (3m-1)\log_{\frac{1}{3}} x - 6m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$ là
- A. $(-1; 0)$. B. $[-1; 0]$. C. $(-1; 0]$. D. $(0; +\infty)$.

- Câu 30:** Cho phương trình $e^{3x} - (m-3)e^{2x} - 2e^x + 2m - 6 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; \ln 3]$ là
- A. $(4; 6) \setminus \{3 + \sqrt{2}\}$. B. $[4; 6] \setminus \{3 + \sqrt{2}\}$. C. $[4; 6]$. D. $(6; +\infty)$.
- Câu 31:** Cho phương trình $\log_3^2 x - (m+5)\log_3 x + 2m + 6 = 0$ (với m là tham số). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 81]$:
- A. 81. B. 80. C. 5. D. 4.
- Câu 32:** Cho phương trình $4^x - (2m-5).2^x + m^2 - 5m = 0$ (1) (với m là tham số). Tổng tất cả các giá trị nguyên của m thuộc $[-19; 19]$ để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 4]$ là
- A. 121. B. 9. C. 175. D. 4.
- Câu 33:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $25^x - (m+1).5^x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4$ bằng
- A. $\frac{626}{25}$. B. 0. C. $\frac{26}{25}$. D. $\frac{26}{5}$.
- Câu 34:** Với giá trị nào của m thì phương trình: $\log_3^2 x - (m+2).\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 27$?
- A. $m = 1$. B. $m = \frac{28}{3}$. C. $m = \frac{4}{3}$. D. $m = 25$.
- Câu 35:** Số các giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 1]$ là
- A. 5. B. 4. C. 2. D. vô số.
- Câu 36:** Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x+1)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x+1} + 4m - 4 = 0$ (1). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên âm để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$?
- A. 6. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 37:** Cho phương trình $9^x - (m+2)3^x + 2m + 9 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là
- A. $\left[\frac{72}{7}; 12\right]$. B. $\left(8; \frac{72}{7}\right]$. C. $(8; +\infty)$. D. $(8; 12]$.
- Câu 38:** Cho phương trình $3\log_{\frac{1}{2}}^2(2x) - (4+m)\log_2 x + 4 + m = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{32}; 1\right]$ là
- A. $[-7; -4)$. B. $(-7; -4]$. C. $(-\infty; -4)$. D. $[-12; -4]$.

- Câu 39:** Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (*), (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{15}}]$.
- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.
- Câu 40:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{2x} + (-2m-1) \cdot 3^x + 6m - 6 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1; 3]$.
- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.
- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = -9$.
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 42:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$ có nghiệm?
- A. 19. B. 18. C. 20. D. 17.
- Câu 43:** Cho phương trình $\log_2^2 x - (m+1)\log_2 x + m = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 8]$ là
- A. $(0; 3)$. B. $[0; 3]$. C. $[0; 3] \setminus \{1\}$. D. $[0; 3] \setminus \{2\}$.
- Câu 44:** Cho phương trình $\log_3^2 x - (2m+3)\log_3 x + m^2 + 3m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 9]$ là
- A. $(-1; 1)$. B. $[-1; 1]$. C. $[-2; 2]$. D. $(-2; 2)$.
- Câu 45:** Cho bất phương trình $25^x + 15^x - 2 \cdot 9^x \leq m \cdot 3^x (5^x - 3^x)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0; 1]$ là
- A. $m \leq \frac{11}{2}$. B. $m > \frac{11}{2}$. C. $m < \frac{11}{3}$. D. $m \geq \frac{11}{3}$.
- Câu 46:** Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4) - (2m+1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4) + m + 2 = 0$ (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thuộc khoảng $(4; 6)$
- A. $m \leq \frac{1}{2}$. B. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases}$. C. $m < \frac{1}{3}$. D. $m \geq \frac{11}{3}$.
- Câu 47:** Cho phương trình $4\log_9^2(3x) + (m-1)\log_3(9x) - m + 2 = 0$ (m tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$.
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- Câu 48:** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x - \log_3 x^2 - m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 27]$.

- A. $m \in (1; 2]$. B. $m \in [1; 2]$. C. $m \in (1; 2)$. D. $m \in (1; +\infty)$.

Câu 49: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

- A. $2 \leq m \leq 6$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $3 \leq m \leq 6$. D. $6 \leq m \leq 9$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 1$. D. $m \geq 1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1C	2A	3D	4C	5B	6A	7A	8C	9B	10C
11D	12B	13C	14B	15D	16A	17B	18D	19D	20A
21C	22B	23C	24D	25A	26B	27B	28C	29C	30B
31D	32A	33A	34A	35C	36D	37B	38A	39C	40A
41D	42A	43C	44B	45D	46B	47B	48A	49A	50C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

Xét phương trình $9^x - 8 \cdot 3^x + m - 4 = 0$ (1)

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành: $t^2 - 8t + m - 4 = 0 \Leftrightarrow -m = t^2 - 8t - 4$ (2)

Ứng với mỗi $t > 0$ sẽ có 1 giá trị x .

Phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 2t - 8$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Bảng biến thiên:

t	0	4	$+\infty$		
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	-4		-20		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -20 < -m < -4 \Leftrightarrow 4 < m < 20, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; \dots; 19\}$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Chọn A

Xét phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ (1)

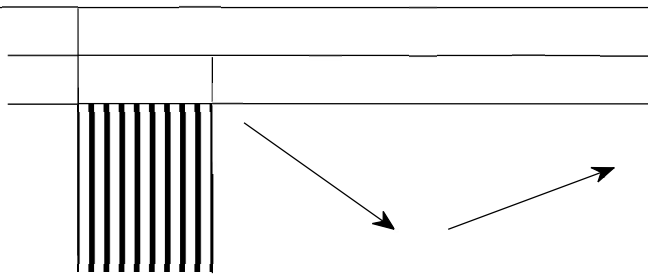
Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, do $2 < x < 4 \Rightarrow 0 < x-2 < 2 \Rightarrow t > -1$.

Phương trình trở thành $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ (2)

Phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4) \Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $(-1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $t > -1$. Ta có: $f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$

$$\Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{7}{3}. \text{ Suy ra } m_0 = -3 \in \left(-5; -\frac{5}{2}\right).$$

Câu 3: Chọn C

$$\text{Ta có } 9^x + (1-3m).3^x - 2 - 6m > 0 \Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x - 3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 3^x - 3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3^x - 1}{3},$$

vì $3^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{3^x - 1}{3}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{3^x \ln 3}{3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số } g(x) \text{ luôn đồng biến trên } \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{1}{3}$$

Do đó $9^x + (1-3m).3^x - 2 - 6m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow m < \frac{3^x - 1}{3}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{3}$$

Câu 4: Chọn C

Ta có: $\log_5^3 x - (3m-3)\log_5^2 x + (9m-16)\log_5 x - 6m + 12 = 0$ (*). Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow (\log_5 x - 1)(\log_5 x - 2)(\log_5 x - 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = 3m - 6 \end{cases}.$$

Ta có $\log_5 x = 1 \Leftrightarrow x = 5$; $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 25$.

Do đó (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{151}{5}$.

$$\Leftrightarrow \log_5 x = 3m - 6 \text{ có nghiệm } x = \frac{151}{5} - 5 - 25 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{3m-6} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3m - 6 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Suy ra $a = 5$; $b = 3 \Rightarrow a + b = 8 \in (7; 10)$.

Câu 5: Chọn B

Điều kiện: $4x + 4y - 4 > 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } (x; y)$$

.

Với $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2;2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Với $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1;1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$ với $m > 0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 24$.

Câu 6: Chọn A

Ta có $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} \cdot 3^{mx-2} = 1$

Lấy logarit cơ số 2 của hai vế của phương trình ta có:

$$x^2 - 1 + (mx - 2)\log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + m\log_2 3 \cdot x - 2\log_2 3 - 1 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \cdot \log_2^2 3 + 8\log_2 3 + 4 > 0 \\ -m\log_2 3 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4. \text{ Vậy } m_0 \in (-7; -2).$$

Câu 7: Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (1)

Để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình (1) phải có hai

$$\text{nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Ta có: $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot t_2 = 3 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 8: Chọn C

Ta có: $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + 1)^2 + \log_3 x + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + 2\log_3 x + 1 + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x + m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 x$ với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$

Phương trình (1) trở thành $t^2 + 3t + m = 0$ (2). Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$ thì phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ -\frac{3}{2} < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$

Câu 9: Chọn B

Ta có: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 3 = 0$ (1). Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} (t \geq 1)$

Ta có $t^2 - 1 + t - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2m - 4 = 0$ (2)

Với $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \leq t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \leq 2$.

Để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ khi và chỉ khi $t^2 + t - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 4$ (2) có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

Xét $f(t) = t^2 + t$ với $\forall t \in [1; 2]$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$

Ta có $f(1) = 2, f(2) = 6$. Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) \leq 2m+4 \\ f(2) \geq 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 2m+4 \\ 6 \geq 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$$

Vậy với $-1 \leq m \leq 1$ thì phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Câu 10: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } 4\log_2^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + (m-3)\log_2 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \log_2 x = 2 - m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1; 8]$ khi và chỉ khi (1) có một nghiệm thuộc đoạn $[1; 8] \setminus \{2\}$ tức $\begin{cases} 0 \leq 2 - m \leq 3 \\ 2 - m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Điều kiện tham số m : $m > 0$

$$\text{Ta có: } \log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \log_2(3^x + 1), \forall x \in (-\infty; 0) \text{ có } f'(x) = \frac{3^x \cdot \ln 3}{(3^x + 1)\ln 2} > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

Bảng biến thiên $f(x)$

x	$-\infty$	0
f'		+
f	0	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$.

Câu 12: Chọn B

Đặt $t = 2^x$, ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 - 6t + m = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 dương thỏa mãn

$$\log_2 t_1 + \log_2 t_2 < 2 \Leftrightarrow t_1 t_2 < 4. \text{ Ta được } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ P < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Câu 13: Chọn C

$$\text{Bất phương trình } \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{3^x} > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$$

Vì x nguyên và thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ nên $x \in \{-2020; -2019; \dots; -1; 0\}$.

Vậy có tất cả 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 14: Chọn B

Điều kiện: $x > 0$

Với $x > 0$ ta có $x^{\log_2 4} = 4^{\log_2 x}$ do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình $m \cdot 16^{\log_2 x} - 2(m-1)4^{\log_2 x} - 2 = 0$.

Đặt $t = 4^{\log_2 x}$ ($t > 0$)

Khi đó phương trình (1) trở thành $mt^2 - 2(m-1)t - 2 = 0$ (*).

Phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm $t > 0$ phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 1 > 0, \forall m \\ \frac{2(m-1)}{m} > 0 \\ \frac{-2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \\ m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Mà m thuộc $[-1; 2]$ do đó các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán thuộc $[-1; 0)$.

Câu 15: Chọn D

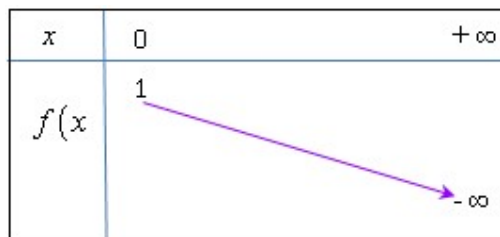
$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + mx + m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+m-1)(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m \geq 1 \\ x > 1-m \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\text{Có: } \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 + mx + m - 1) + \log_{2-\sqrt{3}} x = 0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 + mx + m - 1) + \log_{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + mx + m - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1+x-x^2}{x+1}. \text{ Đặt } f(x) = \frac{1+x-x^2}{x+1}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} < 0 \text{ với } x > 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Trường hợp 1: $x > 0$ ($m \geq 1$)



Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì: $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < f(0) = 1 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2: $x > 1-m$ ($m < 1$)

x	$1 - m$	$+\infty$
$f(x)$	$f(1-m)$	$-\infty$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì:

$$\begin{cases} m < 1 \\ m < f(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < \frac{m^2 - m - 1}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \frac{1-m}{m-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy tất cả các giá trị thực của tham số m cần tìm là: $m < 1$.

Câu 16: Chọn A

$$2^{2x-1} - m \cdot 2^x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m \cdot 2^x + 4m - 4 = 0.$$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2mt + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2m-2 \end{cases} \quad (**).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2; 4]$

$$\Leftrightarrow 2 < 2m-2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Câu 17: Chọn B

$$\text{Ta có: } 9^x - 2m \cdot 3^x + 2m + 3 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2m \cdot t + 2m + 3 = 0$ (2) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

$$\text{Theo định lý Viet ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 \cdot t_2 = 2m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3^x \text{ ta có: } \begin{cases} t_1 = 3^{x_1} \\ t_2 = 3^{x_2} \end{cases} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} \Leftrightarrow 2m + 3 = 3^{x_1+x_2} \Leftrightarrow 27 = 2m + 3 \Leftrightarrow m = 12 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Câu 18: Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Đặt } t = \ln x, \text{ phương trình đã cho trở thành: } t^2 - (m+2)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m, (m \neq 2) \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2.$$

Với $t = m \Rightarrow \ln x = m \Rightarrow x = e^m$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $e^2 + e^m$.

Câu 19: Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 - 2\log_2 x + 3 = 2m \quad (1)$$

Đặt $\log_2 x = t, x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t + 3 = 2m \text{ với } t \in [0; 3]. \text{ Xét } f(t) = t^2 - 2t + 3 \text{ có } f'(t) = 2t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	3
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	3	2	6

Để phương trình có nghiệm $x \in [1; 8]$ thì $2 \leq 2m \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Câu 20: Chọn A

Đặt $2^x = t, t > 0$. Bất phương trình trở thành: $t^2 + t - m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + t \geq m$ ($1 \leq x \leq 2 \Rightarrow t \in [2; 4]$)

. Xét $f(t) = t^2 + t$ với $t \in [2; 4]$.

$$f'(t) = 2t + 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \notin [2; 4].$$

$$f(2) = 6; f(4) = 20 \Rightarrow \min_{[2; 4]}(f) = 6.$$

$$(1) \Leftrightarrow m \leq f(t), \text{ với } t \in [2; 4].$$

$$\text{Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi } x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq \min_{[2; 4]} f(t) \Leftrightarrow m \leq 6.$$

Vì $m \in [-10; 10] \Rightarrow$ có 17 giá trị cần tìm.

Câu 21: Chọn C

$$\text{Xét phương trình } 9^x - 2(2m+1) \cdot 3^x + 3(4m-1) = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 3^x, t > 0$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thực thì phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 3(4m-1) > 0 \\ t_1 + t_2 = \frac{2(2m+1)}{2} > 0 \\ t_1 t_2 = \frac{3(4m-1)}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4} (*) \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có 2 nghiệm } \begin{cases} t_1 = 2m+1+2(m-1) = 4m-1 \\ t_2 = 2m+1-2(m-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3(4m-1) \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow [\log_3(4m-1) + 2] \cdot 3 = 12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow 4m-1 = 9 \Leftrightarrow 4m = 10 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} (tm). \text{ Vậy } m = \frac{5}{2}$$

Câu 22: Chọn B

Điều kiện: $x + y - 1 > 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \end{cases} (*)$$

Trường hợp 1: $m \leq 0$. Khi đó (*) vô nghiệm.

Trường hợp 2: $m > 0$

Trong mặt phẳng Oxy , xét hai đường tròn có phương trình:

$(C_1): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, (C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = m (m > 0)$

(C_1) có tâm $I_1(2;2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ có bán kính $R = \sqrt{m}$

(*) có nghiệm duy nhất khi (C_1) tiếp xúc với (C_2) , xảy ra khi

$$\begin{cases} I_1I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10} = \sqrt{2} + \sqrt{m} \\ \sqrt{10} = \sqrt{2} - \sqrt{m} \\ \sqrt{10} = \sqrt{m} - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = \sqrt{10} - \sqrt{2} \\ \sqrt{m} = \sqrt{10} + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 - 4\sqrt{5} \\ m = 12 + 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng I_1I_2 là: $x - 3y + 4 = 0$.

Tọa độ giao điểm của I_1I_2 và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10+3\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{10+\sqrt{5}}{5} \\ x = \frac{10-3\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{10-\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{10+3\sqrt{5}}{5}; \frac{10+\sqrt{5}}{5}\right); M_2\left(\frac{10-3\sqrt{5}}{5}; \frac{10-\sqrt{5}}{5}\right)$$

Với $m = 12 + 4\sqrt{5}$, ta có $M_1 = (C_1) \cap (C_2)$. Tọa độ của M_1 thỏa mãn điều kiện $x + y - 1 > 0$

Với $m = 12 - 4\sqrt{5}$, ta có $M_2 = (C_1) \cap (C_2)$. Tọa độ của M_2 thỏa mãn điều kiện $x + y - 1 > 0$

Vậy $m = 12 + 4\sqrt{5}$ hoặc $m = 12 - 4\sqrt{5}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 23: Chọn C

Ta có $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m \Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + m$

$\Leftrightarrow m(2^{x^2-5x+6} - 1) + 2^{1-x^2}(1 - 2^{x^2-5x+6}) = 0 \Leftrightarrow (2^{x^2-5x+6} - 1)(m - 2^{1-x^2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} - 1 = 0 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} (*)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: Phương trình (*) có nghiệm duy nhất ($x = 0$), suy ra $m = 2$.

Trường hợp 2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm là 2 và nghiệm còn lại khác 3, khi đó $m = 2^{-3}$.

Trường hợp 3: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm là 3 và nghiệm còn lại khác 2, khi đó $m = 2^{-8}$. Vậy có tất cả ba giá trị m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow e^{m \sin x - \cos x} + m \sin x - \cos x = e^{2 - 2 \cos x} + 2 - 2 \cos x. (*)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } f(m \sin x - \cos x) = f(2 - 2 \cos x)$$

$$\Leftrightarrow m \sin x - \cos x = 2 - 2 \cos x \Leftrightarrow m \sin x + \cos x = 2$$

$$\text{Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi } m^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{cases}.$$

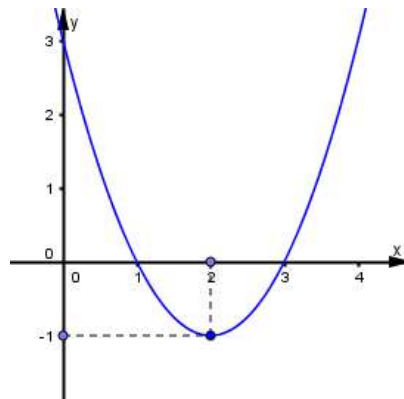
Vậy có 4037 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 25: Chọn A

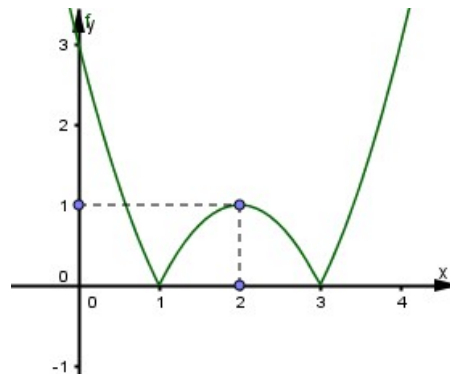
Vì $m^4 - m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình tương đương với

$$|x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) \quad (1)$$

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < |m| < 1.$$

Câu 26: Chọn B

Điều kiện xác định $x > 0$

Ta có: $\frac{1}{2}x^2 - \ln x - m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \ln x = m$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x, x > 0$ có $f'(x) = x - \frac{1}{x}$

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ($x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi $m \geq \frac{1}{2}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$. Có 9 giá trị của m

Câu 27: Chọn B

Xét phương trình $4^x - 2^{x+2} + 5 + m = 0, x \in (0; 2]$. Đặt $t = 2^x > 0$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 5 + m = 0, t \in (1; 4] \Leftrightarrow -t^2 + 4t - 5 = m, t \in (1; 4] \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 4t - 5$ với $t \in (1; 4] \Rightarrow f'(t) = -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có bảng biến thiên:

t	1	2	4
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	-2	-1	-5

Dựa vào bảng biến thiên và $(*)$, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow m \in [-5; -2] \cup \{-1\}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$. Vậy tổng: $S = -15$.

Câu 28: Chọn C

Xét trên khoảng $(2; +\infty)$ có:

$\log_{\sqrt{3}}^2(x-1) - m \cdot \log_3(x-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\log_3^2(x-1) - 2m \cdot \log_3(x-1) + 1 = 0 \quad (*)$

Với $x \in (2; +\infty) \Rightarrow \log_3(x-1) \in (0; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có hai nghiệm $\log_3(x-1)$ dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ S = \frac{m}{2} > 0 \\ P = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2. \text{ Vậy } m \in (2; +\infty).$$

Câu 29: Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x + (3m-1)\log_{\frac{1}{3}} x - 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - (3m-1)\log_3 x - 6m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - (3m+1)\log_3 x + 2\log_3 x - 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -2 \\ \log_3 x = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x \in \left[\frac{1}{9}; 3\right] \Leftrightarrow \log_3 x \in [-2; 1].$$

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$ khi và chỉ khi

$$-2 < 3m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 0.$$

Câu 30: Chọn B

$$\text{Ta có } e^{3x} - (m-3)e^{2x} - 2e^x + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow (e^{3x} - 2e^x) - [(m-3)e^{2x} - 2(m-3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{2x} - 2)(e^x - m + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} = 2 \\ e^x - m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln 2 \\ e^x = m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x \in [0; \ln 3] \Leftrightarrow e^x \in [1; 3].$$

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; \ln 3]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 \leq m - 3 \leq 3 \\ m - 3 \neq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq m \leq 6 \\ m \neq 3 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Câu 31: Chọn D

Đặt $\log_3 x = t$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - (m+5)t + 2m + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - (2 + (m+3))t + 2(m+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9 \in [1; 81].$$

Nhận thấy $x \in [1; 81] \setminus \{9\} \Leftrightarrow \log_3 x \in [0; 4] \setminus \{2\}$, nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 81]$ khi và chỉ khi

$$m + 3 \in [0; 4] \setminus \{2\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m + 3 \leq 4 \\ m + 3 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z}, \text{ suy ra } m \in \{-3; -2; 0; 1\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$.

Câu 32: Chọn A

Đặt $2^x = t, t > 0$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - (2m-5)t + m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow t^2 - [m + (m-5)]t + m(m-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t = m - 5 \end{cases} \quad (2)$$

Nhận xét, với mỗi $t > 0$ sẽ cho 1 giá trị x và ngược lại mỗi giá trị x cho 1 giá trị $t > 0$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 4] \Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm

$$t \in (2^{-2}; 2^4] \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 > \frac{1}{4} \\ m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow 5,25 < m \leq 16; \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \cap [-19; 19] \text{ nên suy ra}$$

$$m \in \{6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}. \text{ Tổng các giá trị là } \sum_{x=6}^{16} X = 121.$$

Câu 33: Chọn A

$$\text{Ta có } 25^x - (m+1).5^x + m = 0 \text{ (1). } \Leftrightarrow (5^x - 1).(5^x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = m \end{cases}.$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $m > 0$ và $m \neq 1$.

$$\text{Khi đó hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ của (1) là: } \begin{cases} 5^{x_1} = 1 \\ 5^{x_2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \log_5 m \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow 0^2 + (\log_5 m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 m = 2 \\ \log_5 m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 \\ m = \frac{1}{25} \end{cases}.$$

$$\text{Tổng tất cả các giá trị của tham số } m \text{ là: } 25 + \frac{1}{25} = \frac{626}{25}.$$

Câu 34: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$\text{Theo Viet, ta có: } \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = m + 2 \Leftrightarrow \log_3 (x_1 \cdot x_2) = m + 2 \Leftrightarrow \log_3 27 = m + 2 \\ \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Thử lại với } m = 1 \text{ ta có: } \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 35: Chọn C

$$\text{Ta có } 4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$$

$$\Leftrightarrow 4^x + \frac{1}{4^x} = (m+1)\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 4 - 2m.$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{1}{2^x}, t \in \left[0; \frac{3}{2}\right], t^2 = 4^x + \frac{1}{4^x} - 2.$$

Phương trình viết lại:

$$t^2 + 2 = (m+1)t + 4 - 2m \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = mt - 2m \Leftrightarrow (t-2)(t+1-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin \left[0; \frac{3}{2}\right] \\ t = m-1 \end{cases}.$$

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in [0; 1]$ thì $m-1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow m \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$, có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 36: Chọn D

Trên đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ thì phương trình luôn xác định.

Với m nguyên âm ta có $m \neq 1$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + m - 1 = 0$$

Đặt $t = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$, với $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ thì $-1 \leq t \leq 1$.

Ta có phương trình: $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $-1 \leq t \leq 1$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{7}{3}, \quad f(1) = -3$$

Do đó $\min_{[-1;1]} f(t) = -3$ và $\max_{[-1;1]} f(t) = \frac{7}{3}$.

Phương trình đã cho có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có

$$\text{nghiệm } t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \min_{[-1;1]} f(t) \leq m \leq \max_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}.$$

Như vậy, các giá trị nguyên âm m để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ là $\{-3; -2; -1\}$.

Câu 37: Chọn B

Đặt $t = 3^x$. Do $x \in [1; 2] \Rightarrow t \in [3; 9]$

$$\text{Phương trình trên trở thành } t^2 - (m+2)t + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 9}{t - 2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 - 2t + 9}{t - 2} \text{ có } f'(t) = \frac{t^2 - 4t - 5}{(t - 2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	3	5	9
f'(t)	-	0	+
f(t)	12	8	$\frac{72}{7}$

Yêu cầu bài toán nghĩa là tìm m để phương trình $m = \frac{t^2 - 2t + 9}{t - 2}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[3; 9]$. Từ bảng biến thiên ta có $m \in \left(8; \frac{72}{7}\right]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38: Chọn A

$$\text{Phương trình } 3\log_{\frac{1}{2}}^2(2x) - (4+m)\log_2 x + 4 + m = 0 \Leftrightarrow 3\log_2^2 x + (2-m)\log_2 x + 7 + m = 0$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x. \text{ Do } x \in \left[\frac{1}{32}; 1\right] \Rightarrow t \in [-5; 0]$$

$$\text{Phương trình trên trở thành } 3t^2 + (2-m)t + m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3t^2 + 2t + 7}{t - 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{3t^2 + 2t + 7}{t - 1} \text{ có } f'(t) = \frac{3t^2 - 6t - 9}{(t - 1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	-5	-1	0
f'(t)	+	0	-
f(t)	-12	-4	-7

Yêu cầu bài toán nghĩa là tìm m để phương trình $m = \frac{3t^2 + 2t + 7}{t - 1}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-5; 0]$. Từ bảng biến thiên ta có $m \in [-7; 4)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Chọn C

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 (*)$$

$$\text{Điều kiện: } x > 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1,$$

$$\text{ta có } t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2 \quad (1) \text{ với } x \in [1; 3^{\sqrt{15}}] \Rightarrow t \in [1; 4]$$

$$\text{Vậy phương trình } (*) \text{ có nghiệm thuộc } [1; 3^{\sqrt{15}}] \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm thuộc } [1; 4].$$

$$\text{Đặt } f(t) = t^2 + t.$$

Ta có bảng biến thiên sau

t	1	4
f'(t)	+	
f(t)	2	20

$$\text{Phương trình } (1) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } 2 \leq 2m + 2 \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 9$$

$$\text{Vậy } m \in \{1; 2; \dots; 8; 9\}$$

Câu 40: Chọn A

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$, với $x \in [1; 3] \Rightarrow t \in [3; 27]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + (-2m-1)t + 6m-6 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-2m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2m-2 \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán ta có

$$\Leftrightarrow 3 < 2m-2 \leq 27 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \leq \frac{29}{2}. \text{ Vậy } m \in \{3; 4; \dots; 13; 14\}$$

Câu 41: Chọn D

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện: } x > 0$$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$ thì phương trình tương đương $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 \quad (2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 9 - 4(2m-7) > 0 \Leftrightarrow 8m < 37 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}.$$

Giả sử (2) có 2 nghiệm $t_1 = \log_3 x_1, t_2 = \log_3 x_2$ khi đó $x_1 x_2 = 3^{(t_1+t_2)} = 27$.

$$\text{Suy ra } (x_1 - 3)(x_2 - 3) = -9 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) = -9 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12.$$

Vậy x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = 3$

$$\text{Với } x = 9 \text{ suy ra } \log_3^2 9 - 3\log_3 9 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (thỏa).}$$

$$\text{Với } x = 3 \text{ suy ra } \log_3^2 3 - 3\log_3 3 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (thỏa).}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{9}{2}.$$

Câu 42: Chọn A

Điều kiện: $x + 2m > 0$. Ta có $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x+2m) \text{ ta có } \begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có (1) $\Leftrightarrow t = x$.

Khi đó $2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x$ (thỏa điều kiện).

Xét hàm số $g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$+\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{g(-\log_2(\ln 2))}{2} \approx 0,457. \text{ Vậy } m \in \{1; 2; \dots; 19\}.$$

Câu 43: Chọn C

$$\text{Phương trình: } \log_2^2 x - (m+1)\log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m \end{cases}.$$

Ta có: $\log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \in [0; 3] \end{cases} \text{ (do } x \in [1; 8] \Rightarrow m = \log_2 x \in [0; 3])$$

Câu 44: Chọn B

Phương trình:

$$\log_3^2 x - (2m+3)\log_3 x + m^2 + 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - m - 1)(\log_3 x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = m + 1 \\ \log_3 x = m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Do } x \in [1; 9] \Rightarrow \log_3 x \in [0; 2] \text{ nên yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq m + 2 \\ m + 1 \in [0; 3] \\ m + 2 \in [0; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 2] \\ m \in [-2; 1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in [-1; 1]$$

Câu 45: Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{2x} (3^x > 0)$, ta được $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + (1-m)\left(\frac{5}{3}\right)^x + m - 2 \leq 0$

$$\text{Đặt } \left(\frac{5}{3}\right)^x = t.$$

Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$

$$t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] (*)$$

$$\text{Vì } t-1 \geq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right], \text{ nên } (*) \Leftrightarrow t+2-m \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow \frac{5}{3} + 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{11}{3}$$

Câu 46: Chọn B

$$\text{Đặt: } t = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

$$\text{Điều kiện: } 4 < x < 6 \Leftrightarrow 0 < x-4 < 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

$$(1) \Leftrightarrow f(t) = (m-1).t^2 - (2m+1).t + m + 2 = 0 (2)$$

$$(1) \text{ có 2 nghiệm thỏa mãn: } 4 < x_1 < x_2 < 6 \Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa } -1 < t_1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 > 0 \\ (m-1)(4m+2) > 0 \\ \frac{4m-1}{2m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \vee m > 1 \\ m < \frac{1}{4} \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2} \vee m > 1$$

Vậy: $m < -\frac{1}{2} \vee m > 1$

Câu 47: Chọn B

$$4\log_3^2(3x) + (m-1)\log_3(9x) - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + 1)^2 + (m-1)(\log_3 x + 2) - m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + 2\log_3 x + 1 + m\log_3 x - \log_3 x + 2m - 2 - m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + m\log_3 x + \log_3 x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + 1)(\log_3 x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \\ \log_3 x = -m \end{cases}$$

Với $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (tm)

Với $\log_3 x = -m \Leftrightarrow x = 3^{-m}$ (*)

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$ thì pt (*) có 1 nghiệm thuộc $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$

và khác $\frac{1}{3}$ hay $\frac{1}{3} < 3^{-m} \leq 9 \Leftrightarrow 3^{-1} < 3^{-m} \leq 3^2 \Leftrightarrow -2 \leq m < 1$ do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0\}$

Câu 48: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_3^2 x - \log_3 x^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - m + 2 = 0$ (1)

Đặt: $\log_3 x = t$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t = m - 2$ (2)

Phương trình $m \in [0; 2018]$ có $m + e^{\frac{x}{2}} \geq \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ nghiệm phân biệt $x \in \mathbb{R}$ 2016 pt 2017 có

2018 nghiệm phân biệt 2019 đồ thị hàm số $D = \mathbb{R}$ và $\Leftrightarrow m \geq \sqrt[4]{e^{2x} + 1} - e^{\frac{x}{2}}$ có $x \in \mathbb{R}$ giao điểm phân biệt với $e^{\frac{x}{2}} = t > 0$.

Xét hàm số $m \geq \sqrt[4]{t^4 + 1} - t = f(t)$ trên $t > 0$

Có $\Leftrightarrow m \geq \max_{[0; +\infty)} f(t); (*)$.

Bảng biến thiên

t	0	1	3	
y'		-	0	+
y				

Dựa vào BBT, ycbt $f'(t) = \frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4 + 1)^3}} - 1$.

Câu 49: Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m$

Đặt $\log_2 x = t$ ($x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]$). Phương trình trở thành: $t^2 - 2t + 3 = m$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$, với $t \in [0; 3]$.

$f'(t) = 2t - 2$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		3	2	6	

Để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$ thì phương trình: $t^2 - 2t + 3 = m$ có nghiệm $t \in [0; 3]$. Do đó đồ thị hàm số $y = f(t)$ phải cắt đường thẳng $y = m$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $2 \leq m \leq 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Chọn C

Ta có $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0 \Leftrightarrow (2^{x+1})^2 - 2 \cdot 2^{x+1} + m = 0$. (1)

Đặt $2^{x+1} = t > 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t + m = 0$. (2)

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t > 0$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $\begin{cases} 0 < t_1 \leq t_2 \\ t_1 \leq 0 < t_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0, P > 0, S > 0 \\ P \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$.

DẠNG 8**Biện luận nghiệm phương trình Mũ - Logarit**

- Câu 1:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log(x^2 + mx + 1) = \log(x + m)$ có hai nghiệm thực phân biệt
A. 18. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 16.
- Câu 2:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $1 + \log_6(x^2 + 1) = \log_6(mx^2 + 2x + m)$ có nghiệm thực
A. 0. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.
- Câu 3:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2$ có hai nghiệm thực phân biệt
A. 22. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 23.
- Câu 4:** Có bao nhiêu số nguyên không âm m để phương trình $\ln(2x^2 + mx + m) = 2\ln(x + 2)$ có hai nghiệm phân biệt là
A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.
- Câu 5:** Tập tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x + m + 1) = \log_2(m^2 - 4x + 4mx)$ có đúng một nghiệm thực là
A. $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **B.** $\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \{4 \pm 2\sqrt{2}\}$
C. $\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \{4 \pm 2\sqrt{2}\}$ **D.** $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \{4 \pm 2\sqrt{2}\}$
- Câu 6:** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m nằm trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x + 1)$ có nghiệm duy nhất.
A. 2017 **B.** 4014 **C.** 2018 **D.** 4015
- Câu 7:** Cho phương trình $2\log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2 + mx - 2m^2} = 0$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$.
A. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **B.** $(-1; 0) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(0; \frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
- Câu 8:** Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_2(64x + m) - 6 = \log_3(x)$ có nghiệm thực.
A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.
- Câu 9:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_5(5x + m) = \log_3(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. 23. **B.** Vô số. **C.** 21. **D.** 22.

- Câu 10:** Có bao nhiêu số nguyên $m < 2018$ để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm thực?
A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2020.
- Câu 11:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log(m - x) = 3\log(4 - \sqrt{2x - 3})$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.
- Câu 12:** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm thực duy nhất. Tìm số phần tử của S .
A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.
- Câu 13:** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{1+\sqrt{2}}(x + m - 1) + \log_{\sqrt{2}-1}(x^2 - mx + 2m - 1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. **B.** $(0; +\infty) \setminus \{1\}$. **C.** $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. **D.** $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.
- Câu 14:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2018; 2018)$ để phương trình $\log_2(mx) = 3\log_2(x + 1)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?
A. 2011. **B.** 2012. **C.** 4028. **D.** 2017.
- Câu 15:** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{3+2\sqrt{2}}(x + m - 1) + \log_{3-2\sqrt{2}}(x^2 - mx + 2m - 1) = 0$ có nghiệm duy nhất là
A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. **B.** $(0; +\infty) \setminus \{1\}$. **C.** $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. **D.** $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.
- Câu 16:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2\log_{mx-1}(x^2 + 1) = \log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2 - 3x + 3)$ có nghiệm duy nhất.
A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.
- Câu 17:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $2\log_{mx-1}(x^2 + 1) = \log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2 - 3x + 3)$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. 18. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 16.
- Câu 18:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{\ln(mx-8)}{\ln(x-1)} = 2$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. 7. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.
- Câu 19:** Có bao nhiêu số m nguyên để phương trình $\log_5(6x + m) = \log_2(x + 1)$ có hai nghiệm thực phân biệt?
A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.
- Câu 20:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(x + 2) = \ln(x^3 - 2x + m)$ có ba nghiệm thực phân biệt?
A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

- Câu 21:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có nghiệm duy nhất
- A. 18 B. Vô số C. 23 D. 22
- Câu 22:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(mx - 6)$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.
- Câu 23:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_2(x) = \log_3(x^2 + m)$ có nghiệm thực duy nhất.
- A. 18. B. 20. C. 1. D. 19.
- Câu 24:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_2(mx) = \log_2(x^3 + 8)$ có nghiệm thực duy nhất.
- A. 18. B. 20. C. 12. D. 19.
- Câu 25:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_2(mx) = \log_2(x^3 + 8)$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A. 18 B. 20 C. 12 D. 19
- Câu 26:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_3|x^2 + mx| = \log_5 x^2 + mx + 2$ có bốn nghiệm thực phân biệt.
- A. 5 B. 7 C. 32 D. 34
- Câu 27:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_3|x^2 + mx| = \log_5 x^2 + mx + 2$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A. 5 B. 7 C. 3 D. 9
- Câu 28:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2(mx) = \log_2(x^3 + 3x + 2)$ có nghiệm thuộc $(0; +\infty)$.
- A. $(3 + 2\sqrt{2}; +\infty)$. B. $[6; +\infty)$. C. $(6; +\infty)$. D. $[3 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.
- Câu 29:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_{3+2\sqrt{2}}(x + m - 1) + \log_{3-2\sqrt{2}}(mx + x^2) = 0$ có nghiệm duy nhất.
- A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.
- Câu 30:** Biết rằng phương trình $\log_2(|2x - 1| + m) = 1 + \log_3(m + 4x - 4x^2)$ có nghiệm duy nhất. Mệnh đề nào đúng?
- A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in (1; 3)$. C. $m \in (3; 6)$. D. $m \in (6; 9)$.
- Câu 31:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_2 x + \log_3(m - x) = 2$ có nghiệm thực
- A. 24. B. 14. C. 23. D. 15.

- Câu 42:** Cho phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.
- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. B. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$. C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$.
- Câu 43:** Cho phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Tập tất cả các giá trị thực của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có dạng $(a; b)$. Tổng $a + 2b$ bằng
- A. 1. B. 0. C. -2 D. 2.
- Câu 44:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.
- A. 399. B. 199. C. 200. D. 398.
- Câu 45:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
- A. 3. B. 6. C. 2. D. 4.
- Câu 46:** Phương trình $5^{2x+\sqrt{1-2x}} - m \cdot 5^{1-\sqrt{1-2x}} = 4 \cdot 5^x$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [a; b]$. Giá trị biểu thức $b - a$ bằng
- A. $\frac{9}{5}$. B. 9. C. $\frac{1}{5}$. D. 1.
- Câu 47:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt
- A. 9704 B. 9702. C. 9698. D. 9700.
- Câu 48:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có ba nghiệm thực phân biệt: $(mx+9) \cdot \log_3 \left[(x^2+1) \cdot (mx+9) \right] = 9 - (x^2-1)(mx+9)$?
- A. 8 B. 10. C. 9. D. 7.
- Câu 49:** Có bao nhiêu số nguyên $m \in -20; 20$ để phương trình $\frac{2}{3^x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?
- A. 19. B. 20. C. 21. D. 18.
- Câu 50:** Biết rằng có duy nhất một số thực x thỏa mãn bất phương trình $\log_a 11 + \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_a (x^2 + ax + 12) \geq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a \in (6; 9)$. B. $a \in (0; 3)$. C. $a \in (3; 6)$. D. $a \in (9; +\infty)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Ta có: $\log(x^2 + mx + 1) = \log(x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} x + m > 0 \\ x^2 + mx + 1 = x + m (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow m(x - 1) = -x^2 + x - 1$. Với $x = 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Với $x \neq 1, (*) \Leftrightarrow m = -x - \frac{1}{x-1}$

Xét $f(x) = -x - \frac{1}{x-1}; f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+		+	0	-	
y							-3		

Để phương trình $\log(x^2 + mx + 1) = \log(x + m)$ có hai nghiệm thực phân biệt thì

$$\begin{cases} x > -m \\ m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > x + \frac{1}{x-1} \\ m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy có 18 giá trị của $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log(x^2 + mx + 1) = \log(x + m)$ có hai nghiệm thực phân biệt

Câu 2: Chọn B

Ta có: $1 + \log_6(x^2 + 1) = \log_6(mx^2 + 2x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ 6(x^2 + 1) = mx^2 + 2x + m (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow (6 - m)x^2 - 2x + 6 - m = 0$

Với $m = 6 \Rightarrow x = 0$

Với $m \neq 6 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $\Delta = 1 - (6 - m)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 7$

Vậy có 3 giá trị của m

Câu 3: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ mx > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Ta có: $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2 \Rightarrow mx = x^2 + 2x + 1 (*)$

Với $x = 0 \Rightarrow$ phương trình $(*)$ vô nghiệm

Với $x \neq 0 \Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1	$+\infty$	
y'			-	0	+
y	0	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

Để phương trình $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2$ có hai nghiệm thực phân biệt thì $m > 4$

Vậy có 15 số nguyên $m \in (-20; 20)$.

Câu 4: Chọn D.

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \ln(2x^2 + mx + m) = \ln(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ f(x) = x^2 + (m-4)x + (m-4) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình (2) đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-2) > 0 \\ S > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)^2 - 4(m-4) > 0 \\ 4 - (m-4) > 0 \\ -(m-4) > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4. \text{ Vì } \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Câu 5: Chọn C.

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x+m+1) = \log_2(m^2 - 4x + 4mx) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -m-1 \\ (x+m+1)^2 = m^2 - 4x + 4mx \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -m-1 \\ g(x) = x^2 - (2m-6)x + 1 + 2m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình (2) đã cho có một nghiệm thực lớn hơn $-m-1$ khi và chỉ

Trường hợp 1: Phương trình (2) có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq -m-1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-m-1) = 0 \\ S = 2m-6 > 2(-m-1) \\ f(-m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 4 < 0 \\ 3m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \\ m > 1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: Phương trình (2) nghiệm kép thỏa $x_{1,2} > -m-1$

$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 32m + 32 = 0 \\ m-3 > -m-1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4 + 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } m \in \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \{4 + 2\sqrt{2}\}$$

Câu 6: Chọn C.

Ta có: $\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ f(x) = x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$

Để phương trình (2) đã cho có một nghiệm thực lớn hơn -1 khi và chỉ

$$(2) \text{ có hai nghiệm thỏa } x_1 \leq -1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ S = m - 2 > -2 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ nghiệm kép thỏa } x_{1,2} > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m = 0 \\ \frac{m-2}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m \in [-2017; -1] \cup \{4\}$, có 2018 số nguyên thỏa.

Câu 7: Chọn A.

$$\text{Ta có } 2\log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2 + mx - 2m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{(\sqrt{5}+2)^2}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{x^2 + mx - 2m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) = \log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + mx - 2m^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 4m^2 + 2m = x^2 + mx - 2m^2 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x - 2m^2 + 2m = 0.$$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(-2m^2 + 2m) > 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow (3m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}. \text{ Theo Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 2m^2 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 1 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(2m - 2m^2) > 1 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 8: Chọn A.

$$\text{Ta có } \log_2(64x + m) - 6 = \log_3(x) \Leftrightarrow \log_2(64x + m) = \log_3(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow \log_2(64x + m) = \log_3(729x) = t \Rightarrow \begin{cases} 64x + m = 2^t & (1) \\ 729x = 3^t & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) ta có } x = \frac{3^t}{729} = 3^{t-6} \text{ thay vào (1) ta được: } 64 \cdot 3^{t-6} + m = 2^t \Leftrightarrow 2^t - 64 \cdot 3^{t-6} = m$$

Khảo sát hàm số $f(t) = 2^t - 64 \cdot 3^{t-6}$ ta suy ra điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$0 \leq m \leq \frac{32}{3} = 10, (6) \Rightarrow m = \{1; 2; \dots; 10\} \text{ (do m nguyên dương)}$$

Suy ra có 10 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9: Chọn D.

$$\text{Ta có } \log_5(5x + m) = \log_3(x) = t \Rightarrow \begin{cases} 5x + m = 5^t & (1) \\ x = 3^t & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 5 \cdot 3^t + m = 5^t \Leftrightarrow 5^t - 5 \cdot 3^t = m$$

Khảo sát hàm số $f(t) = 5^t - 5 \cdot 3^t$ ta được BBT:

t	$-\infty$		$\log_{\frac{5}{3}}(5\log_{\frac{3}{5}})$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	0				0
			$-22,2$		

suy ra điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là : $-22,2 \leq m < 0$

Suy ra có 22 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 10: Chọn D

$$\text{Có } \log_6(2018x + m) = \log_4(1009x) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 1009x = 4^t \\ 2018x + m = 6^t \end{cases} \Rightarrow m + 2 \cdot 4^t = 6^t.$$

$$\text{Khi đó } m = -2 \cdot 4^t + 6^t \geq \min_{\mathbb{R}} f(t) = f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\ln 4}{\ln 6}\right)\right) \approx -2,0136.$$

Vậy $m \in \{-2; -1; \dots; 2017\}$ có tất cả 2020 số nguyên thỏa mãn.

Câu 11: Chọn B

$$\text{Phương trình tương đương với } \begin{cases} 4 - \sqrt{2x-3} > 0 \\ m - x = (4 - \sqrt{2x-3})^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x < \frac{19}{2} \\ m = x + (4 - \sqrt{2x-3})^3 (*) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = 4 - \sqrt{2x-3}, (0 < t \leq 4) \Rightarrow x = \frac{t^2 - 8t + 19}{2}. \text{ Khi đó } (*) \text{ thành } m = \frac{2t^3 + t^2 - 8t + 19}{2}$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{2t^3 + t^2 - 8t + 19}{2} \text{ với } 0 < t \leq 4 \text{ có } f'(t) = 3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	4
y'	-	0	+
y	$\frac{19}{2}$	7	$\frac{131}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy (*) có hai nghiệm khi $7 < m < \frac{19}{2}$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{8; 9\}$.

Vậy có hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12: Chọn A

Ta có:

$$2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6) \Leftrightarrow \log_{\sqrt{mx-5}}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 10mx - 50 \neq 10 \\ \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 10m \cdot 2 - 50 \leq 0 \\ 10m \cdot 2 - 50 = 10 \\ 0 < 10m \cdot 5 - 50 \neq 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 10m \leq 25 \\ 10m = 30 \\ 10 < 10m \neq 12 \end{bmatrix} \end{cases} \text{ . Suy ra } 10m \in \{11; 13; 14; \dots; 25; 30\} \text{ .}$$

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 10m \cdot 5 - 50 \leq 0 \\ 10m \cdot 5 - 50 = 10 \\ 0 < 10m \cdot 2 - 50 \neq 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 10m \leq 10 \\ 10m = 12 \\ 25 < 10m \neq 30 \end{bmatrix} \end{cases} \text{ . Suy ra không có } m \text{ .}$$

Vậy tập S có 15 phần tử.

Câu 13: Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + m - 1 > 0 \\ x^2 - mx + 2m - 1 > 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\log_{1+\sqrt{2}}(x + m - 1) = \log_{\sqrt{2}+1}(x^2 - mx + 2m - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + m - 1 > 0 \\ x + m - 1 = x^2 - mx + 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ x^2 - mx - x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ (x - m)(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ \begin{bmatrix} x = m \\ x = 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì } \begin{cases} m \neq 1 \\ m + m - 1 > 0 \\ 1 + m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Câu 14: Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} mx > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

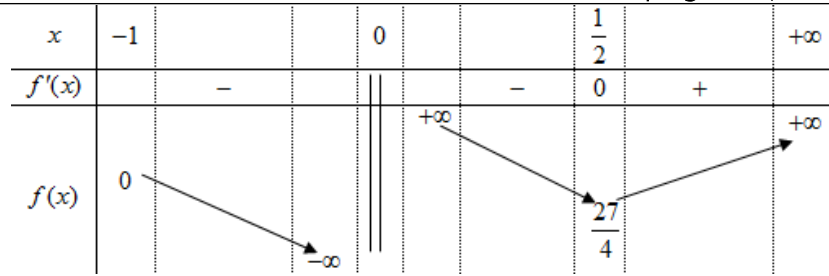
$$\text{Phương trình } \log_2(mx) = 3\log_2(x + 1) \Leftrightarrow \log_2(mx) = \log_2(x + 1)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ mx = (x + 1)^3 \end{cases} (*)$$

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, x \neq 0 \\ m = x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x}$ trên $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x + 1)^2(2x - 1)}{x^2}$$

Bảng biến thiên:



Để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thì $m > \frac{27}{4}$

Vì m nguyên nên $m \geq 7$. Mà $m \in (-2018; 2018)$ nên $7 \leq m < 2018$

$\Rightarrow$ có 2011 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Chọn C.

Điều kiện:
$$\begin{cases} x + m - 1 > 0 \\ x^2 - mx + 2m - 1 > 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\log_{3+3\sqrt{2}}(x + m - 1) = \log_{3+2\sqrt{2}}(x^2 - mx + 2m - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + m - 1 > 0 \\ x + m - 1 = x^2 - mx + 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ x^2 - mx - x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ (x - m)(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - m \\ x = m \\ x = 1 \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì:

Khả năng 1: $m = 1$. Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Khả năng 2:
$$\begin{cases} m > 1 - m \\ 1 \leq 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

Khả năng 3:
$$\begin{cases} 1 > 1 - m \\ m \leq 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

Vậy với $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $2 \log_{mx-1}(x^2 + 1) = \log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2 - 3x + 3)$ (*)

$$\Leftrightarrow 2 \log_{mx-1}(x^2 + 1) = 2 \log_{mx-1}(2x^2 - 3x + 3) \Leftrightarrow \log_{mx-1}(x^2 + 1) = \log_{mx-1}(2x^2 - 3x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 3 = x^2 + 1 \\ mx - 1 > 0 \\ mx - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ mx - 1 > 0 \\ mx - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - 1 \neq 1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ mx - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - 1 > 0 \\ mx - 1 \neq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ mx - 1 > 0 \\ mx - 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (*) có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 \neq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \leq 0 \\ 2m-1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \leq 0 \\ 2m-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m-1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được: } \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy: Có 1 giá trị m nguyên là $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Chọn B

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $2 \log_{mx-1}(x^2+1) = \log_{\sqrt{mx-1}}(2x^2-3x+3)$ (**)

$$\Leftrightarrow 2 \log_{mx-1}(x^2+1) = 2 \log_{mx-1}(2x^2-3x+3) \Leftrightarrow \log_{mx-1}(x^2+1) = \log_{mx-1}(2x^2-3x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+3 = x^2+1 \\ mx-1 > 0 \\ mx-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ mx-1 > 0 \\ mx-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx-1 \neq 1 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \\ mx-1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ mx-1 > 0 \\ mx-1 \neq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ mx-1 > 0 \\ mx-1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 \neq 1 \\ 2m-1 > 0 \\ 2m-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \\ m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Từ đó: Tập hợp các giá trị nguyên $m \in (-20; 20)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$.

Câu 18: Chọn B

$$\text{Ta có: } \frac{\ln(mx-8)}{\ln(x-1)} = 2 \text{ (***)}. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-8 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx-8 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Với điều kiện đó:

$$\text{Phương trình (***)} \Leftrightarrow \ln(mx-8) = 2 \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(mx-8) = \ln(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = mx-8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 9 = 0 \quad (3).$$

Phương trình (***) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (3) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 2 thỏa $1 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 4.9 > 0 \\ 1-m-2+9 > 0 \\ \frac{m+2}{2} > 1 \\ 4-2m-4+9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -8 \\ m < 8 \\ m > 0 \\ m \neq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 8 \\ m \neq \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy: Tập hợp giá trị nguyên m thỏa mãn ycbt là: $\{5; 6; 7\}$.

Câu 19: Chọn C

Ta có: $\log_5(6x+m) = \log_2(x+1) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+m = 5^t \\ x+1 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 5^t - 6.2^t = m-6 \quad (1)$

Để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt hay đồ thị hàm số $y = 5^t - 6.2^t$ cắt đường thẳng $y = m-6$ tại hai điểm phân biệt

Xét hàm số $y = 5^t - 6.2^t$ có $y' = 5^t \ln 5 - 6.2^t \ln 2 = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{6 \ln 2}{\ln 5} \right) = t_0$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
y'	-	0	+
y		0	$+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (5^t - 6.2^t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5^t \left(1 - 6 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^t \right) = +\infty; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (5^t - 6.2^t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t \left(\left(\frac{5}{2} \right)^t - 6 \right) = 0$$

Như vậy để phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi $y(t_0) < m-6 < 0$

Câu 20: Chọn A

Ta có: $\ln(x+2) = \ln(x^3 - 2x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^3 - 3x - 2 = -m (*) \end{cases}$

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x - 2$, $x \in (-2; +\infty) \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		0		-4	$+\infty$

Từ bảng biến thiên: phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-m \in (-4; 0)$ hay $m \in (0; 4)$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Chọn B

$$\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{14}; 2\right) \\ \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} = m (*) \end{cases}$$

Xét hàm số: $y = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x}$ trên $\left(\frac{1}{14}; 2\right)$

$$\text{Ta có: } y' = 12x - 14 + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	1	2		
y'		+	0	-	0	+
y	$\frac{3}{98}$	$\frac{39}{2}$	19	24		

Từ bảng biến thiên: Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $m \in \left(\frac{3}{98}; 19\right) \cup \left(\frac{39}{2}; 24\right)$

Vậy có 22 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

$$\text{Ta có } \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(mx - 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} > 0 \\ x - \frac{1}{x} = mx - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty) \\ m = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x}$ trên tập $D = (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^2}. \text{ Do đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Lập bảng biến thiên suy ra $1 < m < 10$.

Câu 23: Chọn B

Giả sử $\log_2(x) = \log_3(x^2 + m) = t$. Khi đó $\begin{cases} x = 2^t \\ x^2 + m = 3^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + m = 3^t \Rightarrow 3^t - 4^t = m$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 4^t$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 4^t \ln 4$.

Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3^t \ln 3 - 4^t \ln 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{\ln 4}{\ln 3} \Leftrightarrow t = t_0 = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)$.

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq f(t_0)$.

Do $m \in (-20; 20)$ nên có 20 số nguyên thỏa bài toán.

Câu 24: Chọn D

Ta có $\log_2(mx) = \log_2(x^3 + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8 > 0 \\ x^3 + 8 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \\ x^2 + \frac{8}{x} = m \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$ trên tập $D = (-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2}$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng biến thiên suy ra $m < 0$.

Do $m \in (-20; 20)$ nên có 19 số nguyên thỏa bài toán.

Câu 25: Chọn A

Điều kiện: $x > -2$. Phương trình đã cho trở thành: $mx = x^3 + 8$ (*)

Trường hợp 1. Nếu $x = 0$ thì (*) trở thành $0 = 8$ (vô lí).

Trường hợp 2. Nếu $x \neq 0$ thì (*) trở thành $m = x^2 + \frac{8}{x}$.

Xét hàm số $y = x^2 + \frac{8}{x}, x \in (-2; +\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 2x - \frac{8}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

Bảng biến thiên

x	-2	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
y'			0	
	+		-	+
y	0	$+\infty$	$\sqrt[3]{16} + \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên và $m \in (-20; 20)$, ta suy ra $m \in \left(\sqrt[3]{16} + \frac{8}{\sqrt[3]{4}}; 20 \right)$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{8; 9; 10; \dots; 19\}$.

Câu 26: Chọn A

Ta đặt $\log_3 |x^2 + mx| = \log_5 x^2 + mx + 2 = t$. Suy ra $\begin{cases} |x^2 + mx| = 3^t & (1) \\ x^2 + mx + 2 = 5^t & (2) \end{cases}$. Thay (2) vào (1)

ta được: $|5^t - 2| = 3^t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 & (3) \\ x^2 + mx - 3 = 0 & (4) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt, (4) có hai nghiệm phân biệt và không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. Kết hợp $m \in (-20; 20)$ và m là số nguyên nên ta có 34 giá trị m .

Câu 27: Chọn B

Ta đặt $\log_3 |x^2 + mx| = \log_5 x^2 + mx + 2 = t$. Suy ra $\begin{cases} |x^2 + mx| = 3^t & (1) \\ x^2 + mx + 2 = 5^t & (2) \end{cases}$. Thay (2) vào (1)

ta được: $|5^t - 2| = 3^t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 & (3) \\ x^2 + mx - 3 = 0 & (4) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) vô nghiệm (do phương trình (4) luôn có hai nghiệm phân biệt) $\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2; 2)$. Kết hợp $m \in (-20; 20)$ và m là số nguyên nên ta có 3 giá trị m .

Câu 28: Chọn B.

Xét trên $(0; +\infty)$, ta có

$$\log_2(mx) = \log_2(x^3 + 3x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 3x + 2 > 0 \\ mx = x^3 + 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = \frac{x^3 + 3x + 2}{x} \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{x}$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có nghiệm trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $m > 6$.

Câu 29: Chọn A.

$$\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1) + \log_{3-2\sqrt{2}}(mx+x^2) = 0 \Leftrightarrow \log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1) - \log_{3+2\sqrt{2}}(mx+x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1) = \log_{3+2\sqrt{2}}(mx+x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1 > 0 \\ x+m-1 = mx+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+m-1 > 0 \\ x^2 + (m-1)x + 1-m = 0 \end{cases} (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi một trong các trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: (1) nghiệm kép x_0 thỏa $x_0 > 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > 1-m \\ \Delta = (m-1)(m+3) = 0 : \text{Không tồn tại } m \\ x_0 = -\frac{m-1}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$x_1 \leq 1-m < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+3) > 0 \\ \frac{1-m-\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \leq 1-m < \frac{1-m+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ \frac{1-m-\sqrt{(1-m)(-m-3)}}{2} \leq 1-m < \frac{1-m+\sqrt{(1-m)(-m-3)}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \frac{-(m-1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \leq -(m-1) < \frac{-(m-1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ \sqrt{1-m}-\sqrt{-m-3} \leq 2\sqrt{1-m} < \sqrt{1-m}+\sqrt{-m-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ -\sqrt{-m-3} \leq \sqrt{1-m} < \sqrt{-m-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -\sqrt{m-1}-\sqrt{m+3} \leq -2\sqrt{m-1} < -\sqrt{m-1}+\sqrt{m+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -\sqrt{m+3} \leq -\sqrt{m-1} < \sqrt{m+3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 1 \text{ nên } \begin{cases} m > 1 \\ m \in (-20; 20) \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 20. \text{ Vậy có 18 giá trị của } m \text{ thỏa đề bài.}$$

Câu 30: Chọn D.

$$\log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3(m+4x-4x^2) \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3[(m+1)-|2x-1|^2] \quad (1)$$

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình (1) có nghiệm duy nhất x_0 thì do $1-x_0$ cũng là nghiệm của

$$(1) \text{ nên suy ra } 1-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay } x_0 = \frac{1}{2} \text{ vào (1) ta được } \log_2 m = 1 + \log_3(m+1) \Leftrightarrow \log_2 m - \log_3(m+1) = 1 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(m) = \log_2 m - \log_3(m+1)$ với $m > 0$.

$$f'(m) = \frac{1}{m \ln 2} - \frac{1}{(m+1) \ln 3} > 0, \forall m > 0 \Rightarrow \text{Hàm số } f(m) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

Mặt khác, $m = 8$ thỏa (2) nên đây là nghiệm duy nhất của (2).

Điều kiện đủ:

Thay $m = 8$ vào phương trình đã cho ta được $\log_2(|2x-1|+8) = 1 + \log_3(9 - |2x-1|^2)$ (3)

Đặt $t = \log_2(|2x-1|+8) \Leftrightarrow |2x-1|+8 = 2^t \Leftrightarrow |2x-1| = 2^t - 8$. Điều kiện $t \geq \log_2 8 = 3$.

Phương trình (3) trở thành

$$t = 1 + \log_3 \left[9 - (2^t - 8)^2 \right] \Leftrightarrow 3^{t-1} = 9 - (2^t - 8)^2 \Leftrightarrow 3^{t-1} + (2^t - 8)^2 = 9 \quad (4)$$

Ta thấy $t = 3$ thỏa (4)

Hàm số $g(t) = 3^{t-1} + (2^t - 8)^2$ đồng biến trên $[3; +\infty)$.

Suy ra $t = 3$ là nghiệm duy nhất của (4).

Do đó, (3) $\Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+8) = 3 \Leftrightarrow |2x-1|+8 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy $m = 8$ thỏa đề bài.

Câu 31: Chọn D

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành: $t + \log_3(m - 2^t) = 2 \Leftrightarrow m - 2^t = 3^{2-t} \Leftrightarrow m = 2^t + 3^{2-t}$.

Xét hàm số: $f(t) = 2^t + 3^{2-t}$ có: $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 3^{2-t} \cdot \ln 3$.

Nên $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 3^{2-t} \cdot \ln 3 = 0 \Leftrightarrow 2^t \cdot \ln 2 = 3^{2-t} \cdot \ln 3 \Leftrightarrow 6^t = \frac{9 \ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow t = t_0 = \log_6 \left(\frac{9 \ln 3}{\ln 2} \right)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$ f'(t) $	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$f(t_0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(t) = 2^t + 3^{2-t}$ suy ra phương trình $m = 2^t + 3^{2-t}$ có nghiệm khi và chỉ $m \geq f(t_0)$.

Mà m nguyên, $m \in (-20; 20)$ nên $5 \leq m \leq 19 \Leftrightarrow m \in \{5; 6; 7; \dots; 19\}$.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $\log_2 x + \log_3(m - x^3) = 2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 12.

B. 20.

C. 13.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành: $t + \log_3(m - 2^{3t}) = 2 \Leftrightarrow m - 8^t = 3^{2-t} \Leftrightarrow m = 8^t + 3^{2-t}$.

Xét hàm số: $f(t) = 8^t + 3^{2-t}$ có: $f'(t) = 8^t \ln 8 - 3^{2-t} \ln 3$.

Nên $f'(t) = 8^t \ln 8 - 3^{2-t} \ln 3 = 0 \Leftrightarrow 8^t \ln 8 = 3^{2-t} \ln 3 \Leftrightarrow 24^t = \frac{9 \ln 3}{\ln 8} \Leftrightarrow t = t_0 = \log_{24} \left(\frac{3 \ln 3}{\ln 2} \right)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$f(t_0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(t) = 8^t + 3^{2-t}$ suy ra phương trình $m = 8^t + 3^{2-t}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ $m > f(t_0)$.

Mà m nguyên, $m \in (-20; 20)$ nên $1 \leq m \leq 19 \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 19\}$.

Câu 33: Chọn A

Ta có: $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} [x^2 - x + 1 - 3m] = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] - \log_3 [x^2 - x + 1 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] = \log_3 [x^2 - x + 1 - 3m]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (m+3)x + 1 - m = x^2 - x + 1 - 3m \\ x^2 - x + 1 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m = 0 \\ x^2 - x + 1 - 3m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = m \\ x^2 - x + 1 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = m \\ 4^2 - 2 + 1 - 3m > 0 \\ m^2 - m + 1 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = m \\ m < 5 \\ m > 2 + \sqrt{3} \\ m < 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = m \\ 2 + \sqrt{3} < m < 5 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - x_2| < 15 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 2| < 15 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 < m - 2 < 15 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 < m < 17 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có: } \begin{cases} -13 < m < 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} < m < 5 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-12; \dots; 0; 4\}$.

Câu 34: Chọn D

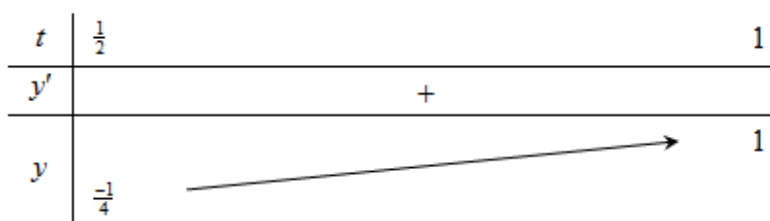
Ta có: $\log_2(2\sin x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \log_2(2\sin x - 1) - \log_2(\cos 2x + m) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2(2\sin x - 1) = \log_2(\cos 2x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = \cos 2x + m \\ 2\sin x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x - 1 = \frac{m}{2} \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $\sin x = t \in [-1; 1]$, hệ trên trở thành $\begin{cases} t^2 + t - 1 = \frac{m}{2} \\ t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) phải có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$

Xét hàm $y = t^2 + t - 1, t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$



Từ đây ta suy ra $\frac{-1}{4} < \frac{m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m \leq 2$.

Câu 35: Chọn A

Đặt $u = 3^{x-m+1}; v = 3^{x^2-3x}$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{9v}{u} + u = 3(v+1) \Leftrightarrow 9v - 3uv + u^2 - 3u = 0 \Leftrightarrow (u-3)(u-3v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = 3v \end{cases}$$

Nếu $u = 3$ thì $3^{x-m+1} = 3 \Leftrightarrow x = m$

Nếu $u = 3v$ thì $3^{x-m+1} = 3^{x^2-3x+1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m^2 < 27 \\ m^2 - 4m + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m^2 < 27 \\ m \neq 0, m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{3} < m < 4 \\ m \neq 0, m \neq 3 \end{cases}. \text{ Vậy có 7 giá trị}$$

nguyên của m .

Câu 36: Chọn A

$$\log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{mx-5}} \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{mx-5}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 12 = x + 2 \\ mx - 5 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ mx - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ mx - 5 > 0 \\ x > -2 \\ mx - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ mx - 5 > 0 \\ mx - 5 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = 5$ nhận, $x = 2$ loại khi:

$$\begin{cases} 5m - 5 > 0 \\ 5m - 5 \neq 1 \\ 2m - 5 \leq 0 \\ 2m - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{2; 3\}$$

Trường hợp 2: $x = 5$ loại, $x = 2$ nhận khi:

$$\begin{cases} 5m - 5 \leq 0 \\ 5m - 5 = 1 \\ 2m - 5 > 0 \\ 2m - 5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m > \frac{5}{2} \\ 2m - 5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m .

Câu 37: Chọn C

$$\text{Ta có } 2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4} \Leftrightarrow 2^{2x} = m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4 \quad (1).$$

Giả sử phương trình có nghiệm x_0 , khi đó $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Để phương trình có đúng một nghiệm thì

Điều kiện cần: $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ thay vào (1) ta được $m = -4$.

Điều kiện đủ: với $m = -4$, phương trình trở thành:

$$2^x = \sqrt{(-4) \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4} \Leftrightarrow 2^{2x} = (-4) \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4$$

$$\Leftrightarrow 2^x + \frac{4}{2^x} = -4 \cdot \cos(\pi x) \quad (2). \text{ Ta có } 2^x + \frac{4}{2^x} \geq 2 \cdot 2 = 4, -4 \cdot \cos(\pi x) \leq 4.$$

Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 1$. Vậy $m = -4$ thỏa mãn.

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9.3^x + \frac{1}{3^x} = m \left(4\sqrt[4]{(x+1)^2} + 3m + 3 \right) (*).$$

Điều kiện cần:

Ta thấy giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình (*) thì $-x_0 - 2$ cũng là nghiệm.

Do đó số nghiệm của phương trình (*) là số chẵn nếu $x_0 \neq -x_0 - 2$.

Để phương trình (*) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt thì $x_0 = -x_0 - 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Thay vào (*) ta có: $3m^2 + 3m = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Điều kiện đủ:

Trường hợp 1: $m = 1$, phương trình (*) trở thành $9.3^x + \frac{1}{3^x} = 4\sqrt[4]{(x+1)^2} + 6$

$$\Leftrightarrow 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 6 = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 6 = \begin{cases} 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt{x+1} - 6, x \geq -1 \\ 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt{-x-1} - 6, x < -1 \end{cases}.$$

Nếu $x < -1$ thì $f(x) = 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt{-x-1} - 6 = 0 \Rightarrow f'(x) = 9.3^x \ln 3 - \frac{1}{3^x} \ln 3 + \frac{4}{\sqrt{-x-1}}$.

Và $f''(x) = 9.3^x (\ln 3)^2 + \frac{1}{3^x} (\ln 3)^2 + \frac{4}{\sqrt{(-x-1)^3}} > 0, \forall x \in (-\infty; -1)$.

$\Rightarrow f'(x)$ có tối đa 1 nghiệm và $f(x)$ có tối đa hai nghiệm trên $(-\infty; -1)$.

Mà $f(-2) = f(-1) = 0$ suy ra $x = -2; x = -1(L)$ hay $x = -2$ nghiệm của phương trình.

Nếu $x \geq -1$ thì $f(x) = 9.3^x + \frac{1}{3^x} - 4\sqrt{x+1} - 6$, có: $f'(x) = 9.3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ và

$$f''(x) = 9.3^x (\ln 3)^2 + 3^{-x} (\ln 3)^2 + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} > 0, \forall x \in [-1; +\infty) \Rightarrow f'(x) \text{ có tối đa 1 nghiệm và}$$

$f(x)$ có tối đa hai nghiệm trên $[-1; +\infty)$.

Mà $f(0) = f(-1) = 0$ suy ra $x = 0; x = -1$ là hai nghiệm của phương trình.

Do đó với $m = 1$ phương trình đã cho chỉ có 3 nghiệm là $x = 0; x = -1; x = -2$.

Trường hợp 2: $m = -2$, phương trình (*) trở thành $9.3^x + \frac{1}{3^x} = -8\sqrt[4]{(x+1)^2} + 6$

$$\Leftrightarrow 9.3^x + \frac{1}{3^x} + 8\sqrt[4]{(x+1)^2} = 6.$$

Do đó phương trình có đúng 1 nghiệm $x = -1 \Rightarrow m = -2$ không thỏa mãn.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: Chọn D

Ta có, $3^x > 0, \forall x$. Chia 2 vế cho 3^x , ta được phương trình: $3^x + 3^{2-x} = a \cos(\pi x) (*)$.

Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (*) thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*). Suy ra $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Thay $x_0 = 1$ vào phương trình, ta được $6 = a \cos(\pi) \Leftrightarrow a = -6$.

Điều kiện đủ:

Thử lại, với $a = -6$, ta có phương trình $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$.

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$. Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{2-x} \ln 3$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lại có $f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 3^{2-x} \ln^2 3 > 0, \forall x$. Nên $x = 1$ là cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Suy ra $\min f(x) = f(1) = 6$.

Xét hàm số $g(x) = -6 \cos(\pi x)$

Ta có $-6 \leq g(x) \leq 6$. Suy ra, $\max g(x) = 6$.

Vì $\min f(x) = 6$ và $\max g(x) = 6$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $f(x) = g(x) = 6 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó phương trình $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy để phương trình $3^x + 3^{2-x} = a \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất thì $a = -6$.

Câu 40: Chọn C

Ta có: $10^x + 10^{2-x} + 2 = a \cos(\pi x)$ (*).

Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (*) thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*). Suy ra $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Thay $x_0 = 1$ vào phương trình, ta được $22 = a \cos(\pi) \Leftrightarrow a = -22$.

Điều kiện đủ:

Thử lại, với $a = -22$, ta có phương trình $10^x + 10^{2-x} + 2 = -22 \cdot \cos(\pi x)$.

Xét hàm số $f(x) = 10^x + 10^{2-x} + 2$. Ta có $f'(x) = 10^x \ln 10 - 10^{2-x} \ln 10$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lại có $f''(x) = 10^x \ln^2 10 + 10^{2-x} \ln^2 10 > 0, \forall x$. Nên $x = 1$ là cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Suy ra $\min f(x) = f(1) = 22$.

Xét hàm số $g(x) = -22 \cos(\pi x)$

Ta có $-22 \leq g(x) \leq 22$. Suy ra, $\max g(x) = 22$.

Vì $\min f(x) = 22$ và $\max g(x) = 22$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $f(x) = g(x) = 22 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó phương trình $10^x + 10^{2-x} + 2 = -22 \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy để phương trình $10^x + 10^{2-x} = a \cos(\pi x) - 2$ có nghiệm duy nhất thì $a = -22$.

Câu 41: Chọn D

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x + 5y - 10 = e^{x+3y-9} + x + 3y - 9$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 1 - 2x = 2y$.

$$\text{Thế vào phương trình: } \log_5^2(3x + 2y + 4) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \log_5^2(x + 5) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow m \in [0; 4].$$

Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ (có bốn giá trị).

Câu 42: Chọn D

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } e^{3m} + e^m &= 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2}) = (x + \sqrt{1-x^2})(2 + 2x\sqrt{1-x^2}) \\ &= (x + \sqrt{1-x^2})[(x + \sqrt{1-x^2})^2 + 1] = (x + \sqrt{1-x^2})^3 + (x + \sqrt{1-x^2}) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm $h(t) = t^3 + t \rightarrow h'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên từ phương trình (*) ta được:

$$h(x + \sqrt{1-x^2}) = h(e^m) \rightarrow x + \sqrt{1-x^2} = e^m \quad (**)$$

$$\text{Xét } f(x) = x + \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1] \text{ ta có } f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1].$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < e^m \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 43: Chọn D

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m} + (x^3 + x^2 - 2x + m) = 2^{x^2+x} + (x^2 + x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình (1) có dạng } f(x^3 + x^2 - 2x + m) = f(x^2 + x)$$

$$\text{Suy ra } x^3 + x^2 - 2x + m = x^2 + x \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x \quad (2)$$

Bài toán trở thành tìm tập các giá trị của m để phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^3 + 3x$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$			-2		2	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in (-2; 2)$ hay $a = -2; b = 2$. Vậy $a + 2b = 2$.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399.

B. 199.

C. 200.

D. 398.

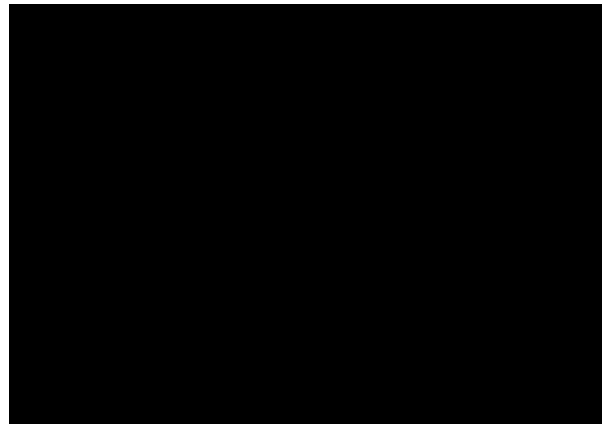
Lời giải**Chọn B**Xét $f(x) = e^x + e^{x+a} \Rightarrow f'(x) = e^x + e^{x+a} > 0, \forall x$.

$$g(x) = \ln(1+x) - \ln(1+x+a) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a+1} = \frac{a}{(x+1)(x+a+1)}.$$

Nếu $a \geq 0$ thì $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}$ nên $f(x) = g(x)$ vô nghiệm.

Nếu $a < 0$ thì $f'(x) > 0$ và $g'(x) < 0$

Ta có bảng biến thiên:

Dựa vào BBT, phương trình $f(x) = g(x)$ luôn có nghiệm duy nhất.Do $a \in (-200; 0)$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{-199; -198; \dots; -1\}$.Vậy có 199 số a .**Câu 45: Chọn C**Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$

$$\text{Ta có: } \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 [2(2x^2 - x + 1)] + 2(2x^2 - x + 1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t, t > 0$ ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Do đó ta có: } 3x^2 + 3x + m + 1 = 2(2x^2 - x + 1) \Leftrightarrow m = x^2 - 5x + 1.$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 5x + 1$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{21}{4}$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4\}$.

Câu 46: Chọn A

Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$.

Ta có: $5^{2x+\sqrt{1-2x}} - m \cdot 5^{1-\sqrt{1-2x}} = 4 \cdot 5^x \Leftrightarrow 5^{x+\sqrt{1-2x}} - m \cdot 5^{1-x-\sqrt{1-2x}} = 4$
 $\Leftrightarrow 5^{x+\sqrt{1-2x}} - m \cdot \frac{5}{5^{x+\sqrt{1-2x}}} = 4 (*)$. Đặt $t = 5^{x+\sqrt{1-2x}}, t \in (0; 5]$

Phương trình (*) trở thành: $t - \frac{5m}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 5m, t \in (0; 5]$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t, t \in (0; 5]$. Ta có: $f'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	0	2	5
$f'(t)$		$-$	$+$
$f(t)$	0	-4	5

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(t)$, ta có yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow -4 \leq 5m \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} \leq m \leq 1 \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{4}{5}; 1\right] \Rightarrow b - a = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5}.$$

Câu 47: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có: $\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} = 0$

Để hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{a^x} \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{b^x} \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ có 1 nghiệm

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^x} \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{b^x} \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} = \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b \Leftrightarrow x = \log_{\left(\frac{b}{a}\right)} [\log_a b]$$

$$\text{Để } x \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a \neq 1 \\ a > 0 \\ \log_a b > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \\ \frac{b}{a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ b > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \\ b \neq a \end{cases}$$

Vậy về cơ bản $a; b$ được chọn từ $\{2; 3; \dots; 100\}$.

Vậy số cặp $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $A_{99}^2 = 9702$

Câu 48: Chọn A

Điều kiện xác định: $mx + 9 > 0$

Ta có: $(mx + 9) \cdot \log_3 \left[(x^2 + 1) \cdot (mx + 9) \right] = 9 - (x^2 - 1)(mx + 9)$

Đặt: $u = mx + 9$. Điều kiện: $u > 0$

Ta có: $u \cdot \log_3 \left[(x^2 + 1)u \right] = 9 - (x^2 - 1)u$

Vì $u > 0$ nên chia hai vế cho u , ta được: $\log_3 \left[(x^2 + 1)u \right] = \frac{9}{u} - (x^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)u = 3^{\frac{9}{u} - (x^2 - 1)} \Leftrightarrow (x^2 + 1)u = \frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{x^2 - 1}} \Leftrightarrow (x^2 + 1)u = \frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{(x^2 + 1) - 2}} \Leftrightarrow (x^2 + 1)u = \frac{3^{\frac{9}{u}}}{3^{(x^2 + 1)} \cdot 3^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)u = \frac{9 \cdot 3^{\frac{9}{u}}}{3^{(x^2 + 1)}} \Leftrightarrow (x^2 + 1)3^{(x^2 + 1)} = \frac{9}{u} \cdot 3^{\frac{9}{u}}$$

Ta có: $f(a) = a \cdot 3^a \Rightarrow f'(a) = 3^a + a \cdot 3^a \ln 3 = 3^a(1 + a \ln 3) > 0 \forall a > 0$ do $a = x^2 + 1 = \frac{9}{u}$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{9}{u} = \frac{9}{mx + 9} \Leftrightarrow (x^2 + 1)(mx + 9) = 9 \Leftrightarrow mx^3 + 9x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = mx^2 + 9x + m = 0 \end{cases}$$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\text{Vậy ta có: } \begin{cases} \Delta = 81 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{2} < m < \frac{9}{2} \\ g(0) = m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy các giá trị nguyên m cần tìm là $\{-4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\}$

Câu 49: Chọn A

Điều kiện: $x \neq 1; x \neq 2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{3^x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

$$f'(x) = -\frac{2 \ln 3}{3^x} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $m > 0 \xrightarrow{m \in [-20; 20]} m \in (0; 20) \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 19\}$.

Vậy, có 19 giá trị thỏa mãn.

Câu 50: Chọn B

Xét phương trình: $\log_a 11 + \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_a (x^2 + ax + 12) \geq 0 \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ x^2 + ax + 10 \geq 0 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có phương trình (1) tương đương:

$$\frac{\log_a 11 \cdot \log_a 7 - \log_a \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_a (x^2 + ax + 12)}{\log_a 7} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 11 \cdot \ln 7 - \ln \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \ln (x^2 + ax + 12)}{\ln a \cdot \ln a \cdot \log_a 7} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(3+4) \cdot \ln(3^2+2) - \ln \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \ln \left(\left(\sqrt{x^2 + ax + 10} \right)^2 + 2 \right)}{\ln a \cdot \ln 7} \geq 0 \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \ln(t+4) \cdot \ln(t^2+2) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t+4} \ln(t^2+2) + \ln(t+4) \cdot \frac{2t}{t^2+2} > 0, \forall t > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Trường hợp 1: Nếu $a > 1$ thì $\ln a > 0$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \ln(3+4) \cdot \ln(3^2+2) - \ln \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \ln \left(\left(\sqrt{x^2 + ax + 10} \right)^2 + 2 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(3) \geq f \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} \right) \Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{x^2 + ax + 10} \Leftrightarrow 9 \geq x^2 + ax + 10 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 \leq 0$$

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (vì $a > 1$)

Trường hợp 2: Nếu $0 < a < 1$ thì $\ln a < 0$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \ln(3+4) \cdot \ln(3^2+2) - \ln \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} + 4 \right) \cdot \ln \left(\left(\sqrt{x^2 + ax + 10} \right)^2 + 2 \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(3) \leq f \left(\sqrt{x^2 + ax + 10} \right) \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{x^2 + ax + 10} \Leftrightarrow 9 \leq x^2 + ax + 10 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 \geq 0$$

Khi đó bất phương trình không thể có nghiệm duy nhất. Vậy $a = 2$.

DẠNG 9**GTNN-GTLN của hàm Mũ - Logarit**

- Câu 1:** Cho $a > 1, b > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt{ab}$, khi biểu thức $P = \log_a^2 b + 8 \log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $S = 6\sqrt{2}$. B. $S = \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{2}$. C. $S = \sqrt[3]{4}$. D. $S = 2(1 + \sqrt[3]{4})$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S .
- A. 81. B. -3. C. 3. D. -9.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tính tích các phần tử của S .
- A. 27. B. $3\sqrt{3}$. C. $-3\sqrt{3}$. D. -27.
- Câu 4:** Cho hai số thực $b > a > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt[3]{ab}$, khi biểu thức $P = \frac{\log_a b}{\log_a^2 \left(\frac{a}{b}\right)} + \log_a \sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $S = 4$. B. $S = \frac{11}{4}$. C. $S = \frac{4}{3}$. D. $S = 3$.
- Câu 5:** Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $P = 2m + 3n$.
- A. $P = 30$. B. $P = 42$. C. $P = 24$. D. $P = 35$.
- Câu 6:** Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $S = 2a + 3b$.
- A. $S = 13$. B. $S = 42$. C. $S = 54$. D. $S = 71$.
- Câu 7:** Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(1+x) \geq x - ax^2$ luôn đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$, với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $T = 2m + 3n$.
- A. $T = 5$. B. $T = 8$. C. $T = 7$. D. $T = 11$.
- Câu 8:** Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0 < 4^{\frac{x}{3}} + 4^{\frac{y}{3}} + 4^{\frac{z}{3}} - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $S = 2a + 3b$.
- A. $S = 13$. B. $S = 42$. C. $S = 54$. D. $S = 71$.

Câu 9: Cho các số thực $a; b; c$ thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$ khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot (\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $S = 5$. B. $S = 3 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. C. $S = 6$. D. $S = 4$.

Câu 10: Cho các số thực $a, b \in (1; 2]$ thỏa mãn $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + n$.

- A. $S = 9$. B. $S = 18$. C. $S = 54$. D. $S = 15$.

Câu 11: Xét các số thực a, b thỏa mãn $b > a > 1$, biết $P = \log_{\frac{a}{b}}^2 b^4 + \log_b \sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b = a^m$. Tính $T = M + m$.

- A. $T = \frac{7}{2}$. B. $T = \frac{37}{10}$. C. $T = \frac{17}{2}$. D. $T = \frac{35}{2}$.

Câu 12: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b = a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < k < \frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2} < k < 1$. C. $-1 < k < -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} < k < 0$.

Câu 13: Xét hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $b > a > 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a^3 \left(\frac{a^2}{b^2} \right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}} \left(\frac{b}{a} \right)$.

- A. $\frac{23 + 16\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{23 - 16\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23 + 8\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{23 - 8\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho các số thực $a; b; c$ thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot (\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$

- A. 3. B. 6. C. $3\sqrt[3]{4}$. D. 5.

Câu 15: Cho hàm số $f(t) = \frac{4^t}{4^t + m}$ (với $m > 0$ là tham số thực). Biết $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực dương $x; y$ thỏa mãn $(x + y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot (x + y) + \frac{1}{2}$. Tìm GTNN của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$

- A. $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} f(t) = \frac{3}{4}$. B. $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} f(t) = \frac{1}{2}$. C. $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} f(t) = \frac{1}{4}$. D. $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1 \right]} f(t) = \frac{5}{4}$.

Câu 16: Cho hai số thực x, y phân biệt thỏa mãn $x, y \in (0; 2018)$. Đặt

$$S = \frac{1}{y - x} \left(\ln \frac{y}{2018 - y} - \ln \frac{x}{2018 - x} \right).$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S \geq \frac{2}{1009}$. B. $S \leq \frac{2}{1009}$. C. $S \geq \frac{4}{1009}$. D. $S \leq \frac{4}{1009}$.

Câu 17: Cho a, b, c, d là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2d^2).$$

- A. 2. B. $4\ln\frac{17}{16}$. C. $\left(\frac{17}{16}\right)^4$. D. $\ln\frac{17}{16}$.

Câu 18: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2(a+1) + \log_2 b$.

- A. $\frac{3}{2}\log_2 3 + 2$. B. $\frac{2}{3}\log_2 3 + 2$. C. $\frac{3}{2}\log_2 3 - 2$. D. $2\log_2 3 - 2$.

Câu 19: Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1) \leq x - \frac{x}{2} + ax^3$ đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $S = 2m + 3n$.

- A. $S = 8$. B. $S = 20$. C. $S = 11$. D. $S = 34$.

Câu 20: Cho các số thực $x, y, z \in [1; 2]$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^x + 3^y + 3^z - \frac{3}{5}(x + y + z)^2$.

- A. 5. B. 15. C. 8. D. 6.

Câu 21: Cho hàm số $f(t) = \frac{16^t}{16^t + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 22: Cho hai số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $P = M + m$.

- A. $P = \frac{81}{16}$. B. $P = \frac{23}{8}$. C. $P = \frac{19}{8}$. D. $P = \frac{49}{16}$.

Câu 23: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}.$$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 24: Xét các số thực $a, b, c \in (1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \log_{bc} (2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca} (4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab} (c^2 + 4c - 4).$$

- A. $\log_3 \frac{289}{2} + \log_{\frac{9}{4}} 8$. B. $\frac{11}{2}$. C. 4. D. 6.

Câu 25: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2 (a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right).$$

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Câu 26: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{6} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = \frac{1}{8} \log_a^3 \left(\frac{6b-1}{9} \right) + 4 \log_{\frac{b}{a}}^3 a$$

- A. $m = 9$. B. $m = 12$. C. $m = \frac{23}{2}$. D. $m = \frac{25}{2}$.

Câu 27: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \frac{1}{2} [1 + \log_2(1-xy)]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{17}{2}$. C. 3. D. 7.

Câu 28: Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x \in [-1; 1]$ và $\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x; y) \in S$ đạt tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

- A. $x_0 \in (-1; 0)$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 1$. D. $x_0 \in [0; 1)$.

Câu 29: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 - 4y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2(x+2y) \cdot \log_2(2x-4y)$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{9}$.

Câu 30: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right)$.

- A. 5. B. $5 - \sqrt{6}$. C. $5 - 2\sqrt{6}$. D. $4 - \sqrt{6}$

Câu 31: Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $b < 4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4^a b^{2a}}{(4^a - b^a)^3} + \frac{7 \cdot 4^{a-2}}{b^a} \text{ là } \frac{m}{n} \text{ với } m, n \text{ là các số nguyên dương và } \frac{m}{n} \text{ tối giản. Tính } S = m + n.$$

- A. 43. B. 33. C. 23. D. 13

Câu 32: Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1 \right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4} \right).$$

- A. $2n$. B. n . C. 2. D. 4.

Câu 33: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^3 > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_{a^3} (ab) \cdot \log_b a}{3(\log_a b - 1)^2 + 8}$$

- A. $e^{\frac{1}{8}}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $e^{\frac{1}{4}}$. D. $\frac{1}{4}$.

- Câu 34:** Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}$.
- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.
- Câu 35:** Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < 1$. Biết biểu thức $P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $a = b^m$. Tính $T = M + m$
- A. $T = 15$. B. $T = 12$. C. $T = \frac{37}{3}$. D. $\frac{28}{3}$.
- Câu 36:** Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\sqrt{\frac{b}{a}}} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2$ là $m + \sqrt[n]{p}$ với m, n, p là các số nguyên. Tính $T = m + n + p$.
- A. $T = -1$. B. $T = 0$. C. $T = -14$. D. $T = 6$.
- Câu 37:** Cho các số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{a^2} (a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$.
- A. $1 - 2\sqrt{3}$. B. $1 - 2\sqrt{2}$. C. $1 + 2\sqrt{3}$. D. $1 + 2\sqrt{2}$.
- Câu 38:** Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_3 a + 2 \log_9 b + 3 \log_{27} c$.
- A. $\log_3 5$. B. 1. C. $\log_3 15$. D. $\log_3 5 - 1$.
- Câu 39:** Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}$
- A. $\sqrt{29}$. B. $\sqrt{23}$. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{27}$.
- Câu 40:** Cho hai số thực dương a, b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \left(\frac{4ab}{a+4b} \right) + \log_b (ab)$.
- A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 41:** Với các số thực dương x, y, z đôi một phân biệt thỏa mãn $x, y, z \neq 1$ và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \frac{y}{z} + \log_y \frac{z}{x} + \log_z \frac{x}{y} + 2 \left(\log_{\frac{x}{y}} z + \log_{\frac{y}{z}} x + \log_{\frac{z}{x}} y \right)$.
- A. $2\sqrt{2}$. B. 9. C. 6. D. $6\sqrt{2}$.
- Câu 42:** Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2} \log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4 \log_2 (4a^3 + b^3)$
- A. -4. B. $4 \log_2 6$.
C. $\frac{4}{\ln 2} - 4 \log_2 \left(\frac{4}{\ln 2} \right)$. D. $4(1 - \log_2 3)$.

- Câu 43:** Cho các số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng
- A. $3 + 3\sqrt{2}$. B. $9 + 2\sqrt{3}$. C. $3 + 9\sqrt{2}$. D. $2 + 9\sqrt{2}$.
- Câu 44:** Gọi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ là các số thực thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ và M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức
- $$P = \log_{\sqrt{a_1}} \left(a_2 - \frac{1}{4}\right)^3 + \log_{\sqrt{a_2}} \left(a_3 - \frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \log_{\sqrt{a_{19}}} \left(a_{20} - \frac{1}{4}\right)^3 + \log_{\sqrt{a_{20}}} \left(a_1 - \frac{1}{4}\right)^3.$$
- Vậy M thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $(235; 245)$. B. $(225; 235)$. C. $(245; 255)$. D. $(215; 225)$.
- Câu 45:** Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức
- $$P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4}\right)^2 + \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4}\right)^2 + \log_{\sqrt{c}} \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right)^2$$
- thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $(0; 10)$. B. $(10; 15)$. C. $(15; 30)$. D. $(30; 40)$.
- Câu 46:** Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
- $$S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}.$$
- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $1 - \log_4 3$
- Câu 47:** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức
- $$P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy.$$
- A. $P_{\max} = \frac{27}{2}$. B. $P_{\max} = 18$. C. $P_{\max} = 27$. D. $P_{\max} = 12$
- Câu 48:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + 16) + x - 3y - 8^y = -2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là cặp $(x; y)$ khi biểu thức $P = x^2 + 3x + 1 + 8^y$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_0^3 + 3y_0$ bằng
- A. 9. B. 7. C. -7. D. -9.
- Câu 49:** Cho hai số thực $a > 1, b > 1$ và biết phương trình $a^{x^2} \cdot b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a ab + \frac{4}{\log_a b}$ bằng
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 10.
- Câu 50:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $3(3^y + y) = x + \log_{\sqrt[3]{3}} x - 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 - \log_9 x$ bằng
- A. $-\frac{7}{16}$. B. $\frac{7}{16}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $-\frac{9}{16}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.C	4.C	5.A	6.C	7.B	8.D	9.D	10.D
11.B	12.B	13.B	14.D	15.B	16.A	17.C	18.C	19.C	20.D
21.B	22.A	23.C	24.D	25.D	26.B	27.A	28.A	29.D	30.C
31.A	32.A	33.B	34.B	35.D	36.C	37.A	38.B	39.C	40.C
41.D	42.D	43.C	44.A	45.D	46.C	47.B	48.C	49.A	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn B**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } P &= \log_a^2 b + 8 \log_b a = \log_a^2 b + \frac{8}{\log_a b} = \log_a^2 b + \frac{4}{\log_a b} + \frac{4}{\log_a b} \\
 &\geq 3 \sqrt[3]{\log_a^2 b \cdot \frac{4}{\log_a b} \cdot \frac{4}{\log_a b}} = 3 \sqrt[3]{16}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \log_a^2 b = \frac{4}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt[3]{4}. \\
 \Rightarrow S &= \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 2: Chọn D

$$\text{Ta có: } e^{a+b} \leq e^2(a+b-1) \Leftrightarrow e^{a+b-2} - (a+b-2) \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = e^t - t \Rightarrow f'(t) = e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0; f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 0 \Rightarrow \min f(t) = f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(0), \forall t \Leftrightarrow e^t - t \geq 1 \Leftrightarrow e^{a+b-2} - (a+b-2) \geq 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} e^{a+b-2} - (a+b-2) = 1 \\ a+b-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b = 2$$

$$\text{Ta có: } 1 = f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + m^2} + \frac{9^b}{9^b + m^2} = \frac{2 \cdot 9^{a+b} + m^2(9^a + 9^b)}{(9^a + m^2)(9^b + m^2)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 9^{a+b} + m^2(9^a + 9^b) = 9^{a+b} + m^2(9^a + 9^b) + m^4$$

$$\Leftrightarrow m^4 = 9^{a+b} \Leftrightarrow m^4 = 81 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

Do đó tích các phân tử của S bằng -9.

Câu 3: Chọn C

$$\text{Ta có: } e^{a+b} \leq e(a+b) \Leftrightarrow e^{a+b} - e(a+b) \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = e^t - et \Rightarrow f'(t) = e^t - e = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 1; f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 1 \Rightarrow \min f(t) = f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1), \forall t \Leftrightarrow e^t - t \geq 0 \Rightarrow e^{a+b} - (a+b) \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} e^{a+b} - (a+b) = 0 \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) = f(a) + f(1-a) = \log_3 \frac{m^2 a}{1-a} + \log_3 \frac{m^2 (1-a)}{1-(1-a)} = \log_3 m^4 \Leftrightarrow m^4 = 27 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt[4]{27}$$

Do đó tích các phân tử thuộc S là $-\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$.

Câu 4: Chọn C

Ta có $P = \frac{\log_a b}{(1 - \log_a b)^2} + \frac{1 + \log_a b}{2} = f(t) = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{1+t}{2}$. Với $t = \log_a b > 1, \forall b > a > 1$.

Do đó $f(t) \geq \min_{(1;+\infty)} f(t) = f(3) = \frac{11}{4}$. Dấu bằng đạt tại $\log_a b = 3 \Rightarrow S = \frac{1 + \log_a b}{3} = \frac{4}{3}$.

Câu 5: Chọn A

Ta có $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b} = (1 + \log_a b) + \frac{1}{4}(1 + \log_b a) = \frac{5}{4} + \left(\log_a b + \frac{1}{4}\log_b a\right)$
 $\geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{4}\log_b a} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$. Vậy $m = 9, n = 4 \Rightarrow P = 2.9 + 3.4 = 30$.

Câu 6: Chọn C

Từ giả thiết ta có $2 \geq 2x^2 \Rightarrow x \leq 1$; tương tự ta có $0 \leq z, y, x \leq 1$

Và $2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \leq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Ta có $x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln(x^4 + y^4 + z^4) \leq \ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$

Xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1$, ta có: $f'(t) = 4^t \ln 4 - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \frac{3}{\ln 4} \in [0; 1]$

Bảng biến thiên

t	0	$\log_4 \frac{3}{\ln 4}$	1	
$f'(t)$		-	0	+
$f(x)$	0			0

$f\left(\log_4 \frac{3}{\ln 4}\right)$

Suy ra $f(t) \leq \max_{[0;1]} \left\{ f(0); f(1); f\left(\log_4 \frac{3}{\ln 4}\right) \right\} = f(0) = f(1) = 0$

Vậy ta có $4^t \leq 3t + 1$

Áp dụng ta có $4^x + 4^y + 4^z \leq 3(x + y + z) + 3$.

Từ đó suy ra $P \leq 3(z + y + x) + 3 - \frac{3}{4}(x + y + z) \leq \frac{21}{4} \Rightarrow S = 2a + 3b = 54$. **Chọn C**

Câu 7: Chọn B

Từ điều kiện ta có $a \geq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, \forall x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$. Ta có $f'(x) = \frac{2\ln(1+x) - x - \frac{x}{1+x}}{x^3}$

Xét $g(x) = 2\ln(1+x) - x - \frac{x}{x+1}$, ta có $g'(x) = \frac{2}{x+1} - 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$

Do đó $g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0$. Suy ra $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} < 0, \forall x > 0$

Do đó lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có giá trị cần tìm là $a \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

Vậy $T = 2.1 + 3.2 = 8$.

Câu 8: Chọn D

Từ giả thiết ta có $2x^2 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 18 \Rightarrow x \in [0; 3]$.

Một cách tương tự ta có $y, z \in [0; 3]$. Do đó ta có $4^{\frac{x}{3}} \leq x+1, 4^{\frac{y}{3}} \leq y+1, 4^{\frac{z}{3}} \leq z+1, \forall x, y, z \in [0; 3]$

Vì vậy $P \leq x+y+z+3 - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Đặt $t = x+y+z \in [0; 9]$, ta có $P \leq f(t) = t+3 - \frac{1}{108}t^4 \leq \max_{[0;9]} f(t) = f(3) = \frac{21}{4}$.

Dấu bằng đạt tại $(x; y; z) = (3; 0; 0); (0; 3; 0); (0; 0; 3)$. Vậy $S = 2.21 + 3.4 = 54$.

Câu 9: Cho các số thực $a; b; c$ thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a+b+c$ khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $S = 5$. B. $S = 3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. C. $S = 6$. D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$
 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3(a \cdot \log_2 a + b \cdot \log_2 b + c \cdot \log_2 c)$.

Đặt $\begin{cases} \log_2 a = x \Rightarrow a = 2^x \\ \log_2 b = y \Rightarrow b = 2^y \\ \log_2 c = z \Rightarrow c = 2^z \end{cases} \Rightarrow P = (2^x)^3 + (2^y)^3 + (2^z)^3 - 3(x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z)$ và $x^3 + y^3 + z^3 \leq 1$.

Với $a; b; c \in [1; 2] \Rightarrow x; y; z \in [0; 1]$.

Để dàng chứng minh được $2^x \leq x+1, \forall x \in [0; 1]$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Ta có: $(2^x - x)^3 \leq 1 \Rightarrow (2^x)^3 \leq 3 \cdot (2^x)^2 \cdot x - 3 \cdot 2^x \cdot x^2 + x^3 + 1$

$\Rightarrow (2^x)^3 - 3x \cdot (2^x)^2 \leq 3x \cdot 2^x (2^x - x - 1) + x^3 + 1 \leq x^3 + 1$.

Từ đó suy ra: $P \leq (x^3 + 1) + (y^3 + 1) + (z^3 + 1) \leq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi trong 3 số $x; y; z$ có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

Giả sử $x=1; y=z=0$ thì $\begin{cases} a=2^1=2 \\ b=2^0=1 \\ c=2^0=1 \end{cases} \Rightarrow S = a+b+c = 2+1+1 = 4$.

Câu 10: Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{b}{a}}^2 a = \frac{1}{\log_a^2 \frac{b}{a}} = \frac{1}{(\log_a b - 1)^2}.$$

Với mọi $a, b \in (1; 2]$ ta có $b^2 + 4b - 4 \geq b^3$ vì tương đương với $(b-1)(b^2-4) \leq 0$.

Dấu bằng đạt tại $b = 2$.

Khi đó $\log_a(b^2 + 4b - 4) \geq \log_a b^3$.

$$\text{Đặt } x = \log_a b (x > 1), \text{ ta có: } P \geq 6x + \frac{1}{(x-1)^2} = 3(x-1) + 3(x-1) + \frac{1}{(x-1)^2} + 6.$$

$$\geq 6 + 3\sqrt[3]{3(x-1) \cdot 3(x-1) \cdot \frac{1}{(x-1)^2}} = 6 + 3\sqrt[3]{9}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } 3(x-1) = \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow \log_a b = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Do đó $m = 6, n = 9 \Rightarrow S = m + n = 15$.

Câu 11: Chọn B

$$\text{Ta có: } P = \left(\frac{4\log_a b}{1 - \log_a b} \right)^2 + \log_b \sqrt{a}. \text{ Đặt } x = \log_a b (0 < x < 1), \text{ ta có: } y = \frac{16x^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}x.$$

$$y' = \frac{-65x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{2(1-x)^3 x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow y_{\min} = y\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Do đó } M = \frac{7}{2}, m = \frac{1}{5} \Rightarrow T = M + m = \frac{37}{10}.$$

Câu 12: Chọn B

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a(ab) + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = -\left(\sqrt{1 - \log_a b} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \sqrt{1 - \log_a b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } \frac{1}{2} < k < 1.$$

Câu 13: Chọn B

$$\text{Ta có: } P = \log_a^3 \left(\frac{a^2}{b^2} \right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}} \left(\frac{b}{a} \right) = \left[2\log_a \left(\frac{a}{b} \right) \right]^3 + \frac{3}{2} \log_b \left(\frac{b}{a} \right) = 8(1 - \log_a b)^3 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\log_a b} \right).$$

$$\text{Đặt } x = \log_a b (x > 1), \text{ ta có: } P = f(x) = 8(1-x)^3 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right).$$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^2} - 24(1-x)^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-x^2)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \in (1; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } P_{\max} = \max_{(1; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{23-16\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 14: Chọn D

Ta có: $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$
 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3(a \cdot \log_2 a + b \cdot \log_2 b + c \cdot \log_2 c)$.

Đặt $\begin{cases} \log_2 a = x \Rightarrow a = 2^x \\ \log_2 b = y \Rightarrow b = 2^y \\ \log_2 c = z \Rightarrow c = 2^z \end{cases} \Rightarrow P = (2^x)^3 + (2^y)^3 + (2^z)^3 - 3(x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z)$ và $x^3 + y^3 + z^3 \leq 2$.

Với $a; b; c \in [1; 2] \Rightarrow x; y; z \in [0; 1]$.

Để dàng chứng minh được $2^x \leq x + 1, \forall x \in [0; 1]$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có: $(2^x - x)^3 \leq 1 \Rightarrow (2^x)^3 \leq 3 \cdot (2^x)^2 \cdot x - 3 \cdot 2^x \cdot x^2 + x^3 + 1$
 $\Rightarrow (2^x)^3 - 3x \cdot (2^x)^2 \leq 3x \cdot 2^x (2^x - x - 1) + x^3 + 1 \leq x^3 + 1$.

Từ đó suy ra: $P \leq (x^3 + 1) + (y^3 + 1) + (z^3 + 1) \Leftrightarrow P \leq (x^3 + y^3 + z^3) + 3 \Leftrightarrow P \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ bằng 5

khi trong 3 số $x; y; z$ có hai số bằng 1 và số còn lại bằng 0 $\Rightarrow$ hai trong 3 số $a; b; c$ bằng 2 và số còn lại bằng 1.

Câu 15: Chọn B

Từ điều kiện bài toán ta có: $(x + y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot (x + y) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = 1$.

Khi đó $1 = f(x) + f(1 - x) = \frac{4^x}{4^x + m} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + m} = \frac{8 + m(4^x + 4^{1-x})}{4 + m(4^x + 4^{1-x}) + m^2} \Leftrightarrow m = 2 > 0$.

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{1 + \frac{2}{4^t}} \Rightarrow \min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 16: Chọn A

Đặt $f(t) = \ln\left(\frac{t}{2018 - t}\right)$. Theo định lý Lagrange ta có

$S = \frac{1}{y - x} \left(\ln \frac{y}{2018 - y} - \ln \frac{x}{2018 - x} \right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(u) = \frac{2018}{u(2018 - u)}$
 $\geq \frac{2018}{\left(\frac{u + 2018 - u}{2}\right)} = \frac{2}{1009}$. Với u là số nằm giữa x và y .

Câu 17: Chọn C

Ta có

$P = (1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2 d^2) = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)$
 $\Rightarrow \ln P = \ln(1 + a^2) + \ln(1 + b^2) + \ln(1 + c^2) + \ln(1 + d^2)$.

Ta chứng minh được bất đẳng thức: $\ln(1 + t^2) \geq \frac{8}{17}t - \frac{2}{17} + \ln \frac{17}{16}, \forall t \in [0; 1] (*)$.

Áp dụng (*) ta có:

$$\ln(1+a^2) + \ln(1+b^2) + \ln(1+c^2) + \ln(1+d^2) \geq \frac{8}{17}(a+b+c+d) - \frac{8}{17} + 4\ln\frac{17}{16}$$

$$\Leftrightarrow \ln P \geq 4\ln\frac{17}{16} \Leftrightarrow P \geq \left(\frac{17}{16}\right)^4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c=d=\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \left(\frac{17}{16}\right)^4.$$

Câu 18: Chọn C

Từ điều kiện ta có $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1-a^2}$.

$$\text{Do đó } P = \log_2(a+1) + \log_2\sqrt{1-a^2} = \log_2((a+1)\sqrt{1-a^2}) < \log_2\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\log_2 3 - 2.$$

Câu 19: Chọn C

$$\text{Ta có } \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + ax^3, \forall x > 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}, \forall x > 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1} - 1 + x\right)x^3 - 3x^2\left(\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^6}$$

$$= \frac{-3\ln(x+1) + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{x+1}}{x^4}.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -3\ln(x+1) + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-3}{x+1} + 2 - x + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x^3}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0.$$

$$\Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^4} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow S = 2a + 3b = 2 \Rightarrow S = 2m + 3n = 2.1 + 3.3 = 11.$$

Câu 20: Chọn D

Ta có $3^x \leq 6x - 3, \forall x \in [1; 2]$, dấu bằng xảy ra khi $x \in \{1; 2\}$.

Ta có $3^x + 3^y + 3^z \leq 6(x+y+z) - 9$.

Do đó $S \leq 6(x+y+z) - 9 - \frac{3}{5}(x+y+z)^2 \leq 6$. Dấu bằng xảy ra tại $(x; y; z) = (2; 2; 1)$ và các hoán vị của nó.

Câu 21: Chọn B

$$\text{Ta có } e^{a+b} \leq e^2(a+b-1) \Leftrightarrow e^{a+b-2} - (a+b-2) \leq 1$$

Xét $f(t) = e^t - t$, ta chứng minh $f(t) = e^t - t \geq 1, \forall t$. Thật vậy, ta có $f'(t) = e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vì $f'(t) > 0, \forall t > 0$ và $f'(t) < 0, \forall t < 0$ nên $f(t) \geq f(0) = 1, \forall t$ hay $e^{a+b-2} - (a+b-2) \geq 1$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} e^{a+b-2} - (a+b-2) = 1 \\ a+b-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b = 2.$$

$$\text{Ta có } 1 = f(a) + f(b) = \frac{16^a}{16^a + m^2} + \frac{16^b}{16^b + m^2} = \frac{2 \cdot 16^{a+b} + m^2(16^a + 16^b)}{(16^a + m^2)(16^b + m^2)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 16^{a+b} + m^2(16^a + 16^b) = 16^{a+b} + m^2(16^a + 16^b) + m^4$$

$$\Leftrightarrow m^4 = 16^{a+b} \Leftrightarrow m^4 = 16^2 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Câu 22: Chọn A

$$\text{Ta có : } T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = 2 \log_a(ab) + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = 2 + 2 \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b, t \in (0; 1].$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2 + 2t + \sqrt{1-t}, t \in (0; 1] \Rightarrow f'(t) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{16} \in (0; 1].$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có : } \max_{(0;1]} f(t) = f\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{33}{8} \text{ khi } t = \frac{15}{16}.$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{33}{8}, m = t = \log_a b = \frac{15}{16}. \text{ Vậy } P = M + m = \frac{81}{16}.$$

Câu 23: Chọn C

$$\text{Ta có : } \log_a \sqrt{b} = \frac{1}{2} \frac{\log_a b}{1 - \log_a b}$$

$$\text{Và } \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2, \text{ do đó } \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b$$

Vì vậy đặt $x = \log_a b (x > 1)$ với mọi $0 < b < a < 1$ ta có

$$P \geq 2 \log_a b - \frac{1}{2} \frac{\log_a b}{1 - \log_a b} = f(x) = 2x - \frac{x}{2(1-x)}.$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 2 - \frac{1}{2(x-1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (1; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } \min_{(1;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{1}{4} = b^2 \\ \log_a b = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}.$$

Câu 24: Chọn D

Với mọi $x \in (1; 2]$, ta có $x^2 + 4x - 4 \geq x^3$ vì tương đương $(x-1)(x^2-4) \leq 0$.

Áp dụng, ta có:

$$P \geq \log_{bc} 2a^3 + \log_{ca} 4b^3 + \log_{ab} c^3 = \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 + 3(\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c).$$

$$\text{Mặt khác } \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 = \frac{1}{\log_2 bc} + \frac{1}{\log_4 ca} \geq \frac{1}{\log_2(2 \cdot 2)} + \frac{1}{\log_4(2 \cdot 2)} = \frac{3}{2}, \forall a, b, c \in (1; 2] \text{ và}$$

$$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c = \frac{\ln a}{\ln b + \ln c} + \frac{\ln b}{\ln a + \ln c} + \frac{\ln c}{\ln a + \ln b} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $P \geq \frac{3}{2} + 3\frac{3}{2} = 6$. Dấu bằng đạt tại $a = b = c = 2$.

Câu 25: Chọn D

$$\text{Ta có } P = \frac{4}{\left[\log_a \left(\frac{a}{b}\right)\right]^2} + 3(\log_b a - 1) = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2} + \frac{3}{\log_a b} - 3.$$

Đặt $x = \log_a b$ ($0 < x < 1$), khi đó:

$$P = f(x) = \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{3}{x} - 3 \text{ có } f'(x) = -\frac{3}{x^2} - \frac{8}{(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \in (0; 1).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

The graph shows a function $f(x)$ on the interval $[0, 1]$. The function has a minimum at $x = \frac{1}{3}$ with a value of 15. The function is decreasing on $[0, \frac{1}{3}]$ and increasing on $[\frac{1}{3}, 1]$.

Suy ra $P_{\min} = 15$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \log_a b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}$.

Câu 26: Chọn B

$$\text{Ta có: } 4\log_{\frac{b}{a}}^3 a = \frac{4}{\left(\log_a \frac{b}{a}\right)^3} = \frac{4}{(\log_a b - 1)^3}.$$

$$\begin{cases} (3b-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{6b-1}{9} \leq b^2 \Rightarrow \log_a^3 \left(\frac{6b-1}{9}\right) \geq \log_a^3 b^2 = 8\log_a^3 b. \\ 0 < b < a < 1 \end{cases}$$

Đặt $x = \log_a b$ ($x > 1$) ta có: $P \geq f(x) = x^3 + \frac{4}{(x-1)^3}$,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{12}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1; +\infty)$$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Suy ra $P_{\min} = 12$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Câu 27: Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x-y > 0 \\ 1-xy > 0 \end{cases}$.

Ta có $3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \frac{1}{2} [1 + \log_2(1-xy)]$

$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2[x^2+y^2-2+(2-2xy)] = \log_2(2-2xy) \Leftrightarrow x^2+y^2-2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=2$

Vì nếu $x^2+y^2 > 2 \Rightarrow VT > 3^0 \log_2(2-2xy) = VP$ và $x^2+y^2 < 2 \Rightarrow VT < 3^0 \log_2(2-2xy) = VP$.

Vậy có $(x+y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x+y < 2$.

Xét $P = 2(x+y)^3 - 6xy(x+y) - 3xy$.

Đặt $t = x+y \in (-2; 2)$ thì $P = f(t) = 2t^3 - 3(t^2 - 2)t - \frac{3(t^2 - 2)}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (-2; 2) \\ t = -2 \notin (-2; 2) \end{cases}$. Ta có $\max_{(-2; 2)} f(t) = f(1) = \frac{13}{2}$.

Dấu bằng xảy ra tại $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{-1}{2} \\ x-y>0 \\ 1-xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Câu 28: Chọn A

Điều kiện: $x-y > 0$. Ta có $\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$

$\Leftrightarrow (x-y)\ln(x-y) - 2017(x-y) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(x-y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0(1)$

Xét $f(t) = \ln t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t}$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow x-y = e^{2018} \Leftrightarrow y = x - e^{2018}$.

Do đó $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2 = g(x)$.

$g'(x) = e^{2018x}(2019 + 2018x - 2018 \cdot e^{2018}) - 4036x$

$g''(x) = 2018e^{2018x}(2019 + 2018x - 2018 \cdot e^{2018}) - 4036 < 0, \forall x \in [-1; 1]$

Suy ra $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$ mà $g'(-1) \cdot g'(0) < 0$

Nên ta có $\exists x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g'(x_0) = 0 \Rightarrow \max_{[-1; 1]} g(x) = g(x_0)$.

Câu 29: Chọn D

Theo giả thiết ta có $x^2 - 4y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 1 \Rightarrow x-2y = \frac{1}{x+2y}$.

Khi đó $P = \log_2(x+2y) \cdot \log_2 \frac{2}{x+2y} = \log_2(x+2y) \cdot [1 - \log_2(x+2y)]$

$= -\left[\log_2(x+2y) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \frac{1}{x+2y} \\ \log_2(x+2y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = \sqrt{2} \\ x-2y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Câu 30: Chọn C

Biến đổi và sử dụng AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} P &= 2\log_a\left(\frac{a}{b}\right) + 3\log_b\left(\frac{b}{a}\right) = 2(1 - \log_a b) + 3(1 - \log_b a) \\ &= 5 - (3\log_b a + 2\log_a b) \leq 5 - 2\sqrt{3\log_b a \cdot 2\log_a b} = 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow 3\log_a b = 2\log_b a \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Câu 31: Chọn A

$$\text{Biến đổi biểu thức và đặt } x = \left(\frac{4}{b}\right)^a \quad (x > 1).$$

Ta

có:

$$P = \frac{4^a b^{2a}}{(4^a - b^a)^3} + \frac{7 \cdot 4^{a-2}}{b^a} = \frac{\left(\frac{4}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{4}{b}\right)^a - 1\right)^3} + \frac{7}{16} \left(\frac{4}{b}\right)^a = f(x) = \frac{x}{(x-1)^3} + \frac{7}{16}x \geq \min_{(1;+\infty)} = f(3) = \frac{27}{16}$$

Câu 32: Chọn A

$$\text{Ta có: } \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x_k^2 \geq x_k - \frac{1}{4}, \forall x_k \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \text{ do đó với cơ số } 0 < x_k < 1 \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} P &\geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \dots + \log_{x_n} x_1^2 = 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1) \\ &\geq 2n\sqrt{\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \dots \log_{x_n} x_1} = 2n \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}.$$

Câu 33: Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{\log_a(ab)}{\log_a b \cdot \log_a \frac{a^3}{b} (3(\log_a b - 1)^2 + 8)} = \frac{\log_a b + 1}{\log_a b (3 - \log_a b) (3(\log_a b - 1)^2 + 8)}.$$

$$\text{Đặt } x = \log_a b, (0 < x < 3) \text{ ta có } P = f(x) = \frac{x+1}{x(3-x)(3x^2-6x+11)}$$

$$\text{Suy ra } \ln f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \ln(3-x) - \ln(3x^2-6x+11)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} - \frac{6(x-1)}{3x^2-6x+11} = \frac{(x-1)(9x^3-9x^2-25x+33)}{x(x+1)(3-x)(3x^2-6x+11)}$$

$$\text{Do đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x^3-9x^2-25x+33) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0;3).$$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = \min_{(0;3)} f(x) = f(1) = \frac{1}{8}.$$

Câu 34: Chọn B

$$\text{Ta có } S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b} \geq \log_a(ab) + \frac{1}{4} \log_b(ab)$$

$$= \frac{5}{4} + \log_a b + \frac{1}{4} \log_b a \geq \frac{5}{4} + 2 \sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{4} \log_b a} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \log_a b = \frac{1}{4} \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

Câu 35: Chọn D

$$\text{Ta có } (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3} \leq \frac{b^3}{a^3}.$$

$$\text{Đặt } x = \log_a b, (x > 1) \text{ với mọi } 0 < b < a < 1.$$

$$\begin{aligned} P &\geq \log_a \frac{b^3}{a^3} + 12 \left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}} \right)^2 = 3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = 3x - 3 + \frac{12}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{12}{(x-1)^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}(x-1) \cdot \frac{3}{2}(x-1) \cdot \frac{12}{(x-1)^2}} = 9. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{3}{2}(x-1) = \frac{12}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \log_a b = 3 \Leftrightarrow b = a^3 \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Vậy } M = 9; m = \frac{1}{3} \Rightarrow T = \frac{28}{3}$$

Câu 36: Chọn C

$$\text{Ta có biến đổi đưa về cơ sở là } a \text{ như sau: } \log_a b^2 = 2 \log_a b \text{ và}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{5}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{6}}{a}} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{\log_a \frac{b}{a}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\log_a b - 1}{2 \left(\frac{1}{2} \log_a b - 1 \right)} = \frac{\log_a b - 1}{\log_a b - 2}$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b (0 < t < 1) \text{ với mọi } a > b > 1$$

$$\text{Vậy } m = 2, n = 16, p = -32 \Rightarrow T = -14.$$

Câu 37: Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{2} \log_a (a^2 b) + 6 \log_b a = \frac{\log_a b + 2}{2} + \frac{6}{\log_a b} = 1 + \left(\frac{1}{2} \log_a b + \frac{6}{\log_a b} \right).$$

$$\text{Với } a > 1 > b > 0 \Rightarrow \log_a b < 0 \text{ do đó}$$

$$P = 1 - \left(\left(\frac{-1}{2} \log_a b \right) + \left(-\frac{6}{\log_a b} \right) \right) \leq 1 - 2 \sqrt{\left(\frac{-1}{2} \log_a b \right) \left(-\frac{6}{\log_a b} \right)} = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Câu 38: Chọn B

Ta có: $P = \log_3 a + 2\log_9 b + 3\log_{27} c = \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \log_3 (abc)$

Theo nguyên tắc Diricle ta có,

$$\begin{aligned} (a-1)(b-1) &\geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow abc \geq c(a+b-1) = ac+bc-c \\ &\geq a+c-1+b+c-1-c = a+b+c-2 = 3 \Rightarrow P = \log_3 (abc) \geq \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

Câu 39: Chọn C

Đề ý y, z đối xứng; sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{m^2+n^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &\geq \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log y + \log z)^2 + (2+2)^2} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2(yz) + 16} = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 \left(\frac{10}{x} \right) + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(1 - \log x)^2 + 16} \geq \sqrt{(\log x + 1 - \log x)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\log x}{1 - \log x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10}, y = z = \sqrt[5]{100}.$

Câu 40: Chọn C

Ta có: $\frac{4ab}{a+4b} \leq \frac{4ab}{2\sqrt{a \cdot 4b}} = \sqrt{ab}.$ Vì $0 < a < 1$ nên $\log_a \left(\frac{4ab}{a+4b} \right) \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1 + \log_a b}{2}.$

Khi đó: $P = \log_a \left(\frac{4ab}{a+4b} \right) + \log_b (ab) \geq \frac{1 + \log_a b}{2} + 1 + \log_b a \Rightarrow P \geq \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} \log_a b + \log_b a \right)$

Suy ra $P \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}.$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} a = 4b \\ \frac{1}{2} \log_a b = \log_b a \end{cases}.$

Câu 41: Chọn D

Ta có: $P = \log_x \frac{y}{z} + \log_y \frac{z}{x} + \log_z \frac{x}{y} + 2 \left(\log_{\frac{x}{y}} z + \log_{\frac{y}{z}} x + \log_{\frac{z}{x}} y \right)$

Suy ra $P = \log_x \frac{y}{z} + \log_y \frac{z}{x} + \log_z \frac{x}{y} + 2 \left(\frac{1}{\log_z \frac{x}{y}} + \frac{1}{\log_x \frac{y}{z}} + \frac{1}{\log_y \frac{z}{x}} \right).$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\log_x \frac{y}{z} + \frac{2}{\log_x \frac{y}{z}} \geq 2\sqrt{2}; \log_y \frac{z}{x} + \frac{2}{\log_y \frac{z}{x}} \geq 2\sqrt{2}; \log_z \frac{x}{y} + \frac{2}{\log_z \frac{x}{y}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $P \geq 6\sqrt{2}$. Vậy $P_{\min} = 6\sqrt{2}$.

Câu 42: Chọn D

Ta có: $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{a} = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow ab^2 = 4$.

Khi đó theo AM-GM ta có: $4a^3 + b^3 = 4a^3 + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq 3\sqrt[3]{4a^3 \cdot \frac{b^3}{2} \cdot \frac{b^3}{2}} = 3ab^2 = 12$.

Do đó đặt $t = 4a^3 + b^3$ có $P = f(t) = t - 4\log_2 t \geq \min_{[12; +\infty)} f(t) = f(12) = 4 - 4\log_2 3$.

Câu 43: Chọn C

Ta có $a^4 + 81 \geq 2\sqrt{a^4 \cdot 81} = 18a^2 \Rightarrow a^4 - 9a^2 + 81 \geq 9a^2$.

Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) &\geq \log_{3a} b + \log_b (9a^2) \\ &= \log_{3a} b + 2\log_b (3a) \geq 2\sqrt{\log_{3a} b \cdot 2\log_b (3a)} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a^4 = 81 \\ \log_{3a} b = 2\log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}} \end{cases}$ (nhận).

Câu 44: Chọn A

Ta có $P = 6 \left(\log_{a_1} \left(a_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{a_2} \left(a_3 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{a_{19}} \left(a_{20} - \frac{1}{4} \right) + \log_{a_{20}} \left(a_1 - \frac{1}{4} \right) \right)$.

Do $a_i \in \left(\frac{1}{4}; 1 \right), i = \overline{1, 20}$ suy ra hàm số $y = \log_{a_i} x$ nghịch biến.

Có $\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} \leq x^2$. Suy ra

$$P \geq 6 \left(\log_{a_1} a_2^2 + \log_{a_2} a_3^2 + \dots + \log_{a_{20}} a_1^2 \right) = 12 \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{20}} a_1 \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 20 số thì $\sqrt[20]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \dots \log_{a_{20}} a_1} = \sqrt[20]{\log_{a_1} a_1} = 1$.

Suy ra $P \geq 12 \cdot 20 = 240$.

Dấu “=” xảy ra khi $a_i = \frac{1}{2}, i = \overline{1, 20}$.

Mẹo trắc nghiệm: vì vai trò $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ như nhau nên P đạt min khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{20}$,

khi đó $P = 20 \log_{\sqrt{a_1}} \left(a_1 - \frac{1}{4} \right) = f(a_1) = 120 \log_{a_1} \left(a_1 - \frac{1}{4} \right) \geq \min_{\left(\frac{1}{4}; 1 \right)} f\left(\frac{1}{2} \right) = 240$.

Câu 45: Chọn D

Ta có $P = 4 \left(\log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \right) + \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \right) + \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \right) \right)$.

Với mọi số thực $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ta có $4x^3 \geq 3x - 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^2(x + 1) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Vậy với a, b, c thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ta có

$$\begin{cases} \log_a \left(\frac{3}{4}b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^3 = 3\log_a b \\ \log_b \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{4}\right) \geq \log_b c^3 = 3\log_b c \\ \log_c \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right) \geq \log_c a^3 = 3\log_c a \end{cases}$$

Nên $P \geq 12(\log_a b + \log_b c + \log_c a) \geq 12.3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 36$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Mẹo trắc nghiệm: biểu thức đối xứng 3 biến nên biểu thức sẽ đạt min khi $a = b = c$ khi đó

$$P = 3\log_{\sqrt{a}} \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right)^2 = f(a) = 12\log_a \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\right) \geq \min_{\left(\frac{1}{3}; 1\right)} f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 36.$$

Câu 46: Chọn C

Với $a, b, c \geq 1$ ta có $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1$.

Do đó $abc \geq (a + b - 1)c = ac + bc - c \geq (a + c - 1) + (b + c - 1) - c = a + b + c - 2$.

Áp dụng ta có: $2^x \cdot 4^y \cdot 8^z \geq 2^x + 4^y + 8^z - 2 = 2 \Rightarrow x + 2y + 3z \geq 1 \Rightarrow S = \frac{x + 2y + 3z}{6} \geq \frac{1}{6}$.

Câu 47: Chọn B

Ta

có

$$4 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^y} = 2.2^{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow 2 \leq 2^{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x + y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 2 - x \Rightarrow x \in (0; 2).$$

Khi đó $P \leq f(x) = (2x^2 + 2 - x)(2(2 - x)^2 + x) + 9x(2 - x)$.

Sử dụng máy tính chức năng mode 7 ta có: $\max_{(0; 2)} f(x) = f(1) = 18 \Rightarrow P_{\max} = 18$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Câu 48: Chọn C

Ta có $\log_2(4x + 16) + x - 3y - 8^y = -2 \Leftrightarrow \log_2(x + 4) + 2^{\log_2(x+4)} = 3y + 2^{3y} \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Ta có $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) $\Rightarrow 3y = \log_2(x + 4) \Leftrightarrow 8^y = x + 4$.

Thay $8^y = x + 4$ vào $P = x^2 + 3x + 1 + 8^y = x^2 + 3x + 1 + x + 4 = x^2 + 4x + 5$.

Khi đó $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{3}$. Ta có $x_0^3 + 3y_0 = -2^3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = -7$.

Câu 49: Chọn A

Từ giả thiết: $a^{x^2} \cdot b^{x+1} = 1 \Rightarrow \log_a a^{x^2} + \log_a b^{x+1} = 0 \Rightarrow x^2 + (x+1)\log_a b = 0$

$\Rightarrow x^2 + x \cdot \log_a b + \log_a b = 0$ (*); Đặt $t = \log_a b$

Phương trình (*) có nghiệm thực, nên: $t^2 - 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

Mặt khác: $b = a^t > 1 \Rightarrow t > 0$; Vậy: $t \in [4; +\infty)$

Xét $P = \log_a ab + \frac{4}{\log_a b} = 1 + \log_a b + \frac{4}{\log_a b} = 1 + t + \frac{4}{t}$

Xét $f(t) = 1 + t + \frac{4}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} > 0$ với $\forall t \in [4; +\infty)$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[4; +\infty)$; $\min_{[4; +\infty)} f(t) = f(4) = 6$ đạt tại $t = 4$

Câu 50: Chọn D

Ta có $3(3^y + y) = x + \log_{\sqrt[3]{3}} x - 3 \Leftrightarrow 3^{y+1} + 3(y+1) = 3^{\log_3 x} + 3\log_3 x$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) $\Rightarrow y+1 = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^{y+1}$.

Thay $x = 3^{y+1}$ vào biểu thức $P = y^2 - \log_9 x = y^2 - \log_9 3^{y+1} = y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

Khi đó $P_{\min} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

DẠNG 10**Bài toán liên quan đến hàm đặc trưng**

- Câu 1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$.
A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [5; 37]$ và $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$.
A. 32. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 33.
- Câu 3.** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2 \cdot 2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y}$.
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 4.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y$
A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.
- Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm thực?
A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.
- Câu 6.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 100$ và $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 - 19y^3 + 3x^2 - 3y = 0$.
A. 10. **B.** 100. **C.** 20. **D.** 21.
- Câu 7.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [3; 48]$ và $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}$ (1).
A. 46. **B.** 6. **C.** 45. **D.** 5.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$.
A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 9.** Cho số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2} - 2^y = y - x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$.
A. $P = \frac{1}{4}$. **B.** $P = \frac{3}{4}$. **C.** $P = \frac{1}{3}$. **D.** $P = \frac{1}{8}$.
- Câu 10.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.
A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.
- Câu 11.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$?
A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.
- Câu 12.** Cho $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$. Giá trị của m_0 là

A. $m_0 = 2018$. B. $m_0 = 2019$. C. $m_0 = 2020$. D. $m_0 = 2021$.

Câu 13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$.

A. $\frac{4\sqrt{6} + 36}{9}$. B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36 - 296\sqrt{15}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6} + 36}{9}$.

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$ (1).

Biết $y \leq 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. B. 1501300. C. 1501400. D. 1501500.

Câu 15. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn: $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$. Giá trị của biểu thức $P = |1 - 2(x+y)|$ bằng

A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.

Câu 16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$ (*). Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 17. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $2(2^{a^2+b^2+c^2} - 1) + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 4^{a+b+c}$. Đặt

$P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P . Số phần tử của tập S là

A. Vô số. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 18. Phương trình $\log x + 1 = 2$ có nghiệm là.

A. 11. B. 9. C. 101. D. 99.

Câu 19. Cho $2^a = 3$, $3^b = 4$, $4^c = 5$, $5^d = 6$. Tính 2^{abcd} .

A. $\log_2 6$. B. $\log_6 2$. C. 2. D. 6.

Câu 20. Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

A. -2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 21. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Câu 22. Cho x, y, a, b là các số dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $a^{x+1} = b^{2y} = \frac{a}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + y$ là

A. -2. B. $\frac{-13}{4}$. C. 4. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 23. Cho biết a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2018^a = 2019^b = 2020^c$. Hãy tính giá trị của biểu

$$\text{thức } P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}.$$

A. $\log_{2018} 2019$.

B. $\log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020$.

C. $\log_{2018} 2020$.

D. $\log_{2018} 2019 \cdot 2020$.

Câu 24. Cho x, y dương thỏa mãn: $\log_3(x^2 + 2y) = 1 + \log_3 4$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{xy}$ thuộc khoảng nào

A. $(-1; 1)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

C. $(5; 10)$.

D. $(-2; 0)$

Câu 25. Cho $a, b, c > 1$ và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2$.

A. -2 .

B. 3 .

C. -1 .

D. 1 .

Câu 26. Cho $x > 0; y > 0$ và $2020^{2019(x^2 - y + 4)} = \frac{4x + y}{(x + 2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y - 2x$?

A. $\min P = 4$.

B. $\min P = 2$.

C. $\min P = 1$.

D. $\min P = 3$.

Câu 27. Cho $x > y \geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 5y$ là

A. 2 .

B. $\frac{9}{5}$.

C. 4 .

D. $\frac{50 - 8\sqrt{5}}{4\sqrt{5} + 1}$.

Câu 28. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3.$$

A. $\min P = 13$.

B. $\min P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

C. $\min P = \sqrt[3]{2}$.

D. $\min P = 9$.

Câu 29. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(2; 4)$.

B. $(4; 6)$.

C. $(6; 8)$.

D. $(8; 10)$.

Câu 30. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ là $P_{\min} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $n \in \mathbb{N}$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m^2 + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 79 .

B. 25 .

C. 34 .

D. 85 .

Câu 31. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > -1, y > -3$ và $\log_2(y+3)(x+1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y + 10$ thuộc tập nào dưới đây:

A. $[1; 3)$.

B. $[3; 4)$.

C. $[4; 5)$.

D. $[5; 6)$.

Câu 32. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $1 > a > b > 0,25$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \text{ thuộc tập hợp nào dưới đây?}$$

- A. $(0; 1)$. B. $\left(4; \frac{11}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. D. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 33. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{6(2x + y)}{x} + \ln \frac{x + 2y}{y} \text{ là } a + \ln b. \text{ Giá trị của tích } a.b \text{ là}$$

- A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

Câu 34. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $1 < a \leq b \leq a^3$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[1; 2)$. B. $[2; 3)$. C. $[3; 4)$. D. $[4; 5)$.

Câu 35. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} \text{ bằng.}$$

- A. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$. B. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.
C. $\frac{1}{2} \log_2 3 + \log_3 2$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Câu 36. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25} \frac{2x - y}{3}$. Tính giá trị $T = \frac{y}{x}$.

- A. $T = \frac{2}{3}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = -\frac{2}{3}$. D. $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 37. Cho p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p + q)$. Tìm giá trị của $\frac{q}{p}$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ D. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Câu 38. Cho x, y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $\log_2 (x + y) = \log_3 (x - y)$. Hỏi tổng $x + y$ là bao nhiêu?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 7.

Câu 39. Cho số thực $1 \leq x \leq 8$. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_2 \frac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x \text{ lần lượt là } a, b. \text{ Tính } ab.$$

- A. $ab = 5$. B. $ab = 35$. C. $ab = -7$. D. $ab = 35$.

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y), x \leq 2020$ và thỏa mãn phương trình $\log_2 x + \log_2 (x - y) = 1 + 4 \log_4 y$

- A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 1011.

- Câu 41.** Biết $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2$ và $2x_1 - x_2 = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b})$, $(a, b \in \mathbb{N})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$
- A. $P = -4$. B. $P = 6$. C. $P = -6$. D. $P = 4$.
- Câu 42.** Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2020\pi)$
- A. 2020 B. 2019 C. 1009 D. 1010
- Câu 43.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x = \log_5(x + y) + y$. Biết rằng $|y| \leq 2020$.
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 7.
- Câu 44.** Cho bất phương trình $\log_{10}x + \log^2 x + 3 \geq m \log_{10}x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$.
- A. 1. B. 3. C. vô số. D. 2.
- Câu 45.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^3$ có chứa bao nhiêu giá trị nguyên.
- A. 4. B. 5. C. 9. D. Vô số.
- Câu 46.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x}$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 47.** Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$
- A. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in \{1\}$. D. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
- Câu 48.** Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2020\pi)$?
- A. 2020 nghiệm. B. 1010 nghiệm. C. 2018 nghiệm. D. 1009 nghiệm.
- Câu 49.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_4(x + y + 3) = \log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 50.** Cho x, y thỏa mãn $2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} - 5^{2x-y+1} = 5^{-2x+y+1} - 2^{-2x+y+1} - 3^{-2x+y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1$.
- A. 2. B. -2. C. 1. D. 3.
- Câu 51.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2)$.
- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 52.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \ln x = y + e^y$?
- A. 2021. B. 2020. C. 7. D. 6.

Câu 53. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x > \frac{1}{10}$ và $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left[\frac{5}{3}; 2\right)$. B. $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. C. $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. D. $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3D	4B	5A	6D	7B	8B	9D	10B	11D	12A	13B	14D	15C
16C	17D	18D	19D	20C	21A	22D	23B	24B	25C	26D	27A	28D	29A	30D
31B	32B	33B	34B	35B	36A	37D	38A	39B	40B	41B	42D	43A	44A	45A
46B	47D	48B	49B	50D	51B	52C	53B							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn D

Ta có: $x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + (3^y)^2$ (1). Xét hàm $f(t) = t + t^2$, ($t > 0$).

Ta có: $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết, $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 3^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 2. Chọn C

Ta có: $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = y^2 + 2y + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$. (2)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y^2 + 2y + 2) \Leftrightarrow x = y^2 + 2y + 2.$$

Do $x, y \in [5; 37]$ nên $5 \leq y^2 + 2y + 2 \leq 37 \Leftrightarrow 4 \leq (y+1)^2 \leq 36 \Leftrightarrow 2 \leq y+1 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [5; 37]$ nên $y = 5$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị $x = 37 \in [5; 37]$ thỏa đề bài.

Vậy có 1 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa bài toán.

Câu 3. Chọn D

Có $2 \cdot 2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1} + x + 1 = 2^{\cos^2 y} + \cos^2 x$ (3).

Đặt $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow x+1 = \cos^2 x \Leftrightarrow x = -\sin^2 x \Rightarrow x \leq 0$.

Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Câu 4. Chọn B

Ta có: $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y \Leftrightarrow f(x+1) = f(y)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y \Rightarrow x = y-1$

Vì $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y-1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 2021$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$m + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow (m+2^x) + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x} + 2^x \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{m+2^x} \geq 0, 2^x > 0$. Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$.

$$f'(t) = 2t + 1 \geq 0, \forall t \in [0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ do đó (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^x} = 2^x$

$$\Leftrightarrow m = 2^{2x} - 2^x.$$

Đặt $a = 2^x, a > 0$. Ta có $\Leftrightarrow m = g(a) = a^2 - a$.

a	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(a)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2017\}$. Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Chọn D

$$\text{Ta có } x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 - 19y^3 + 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 - 27y^3 + 3x^2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 + 3x^2 + 6y = 27y^3 + 9y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2y)^3 + 3(x^2 + 2y) = (3y)^3 + 3.3y \quad (2)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vì vậy, } (2) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y) = f(3y) \Leftrightarrow x^2 + 2y = 3y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

$$\text{Theo giả thiết: } 0 \leq y \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$$

Vì x nguyên nên $x \in \{-10; -9; -8; \dots; 0; \dots; 8; 9; 10\}$. Với mỗi x xác định duy nhất giá trị $y = x^2$.

Vậy có 21 cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Chọn B

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{(y+1)+1} = \sqrt{y+1}\sqrt{(x-2)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(y+1)+1}}{\sqrt{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}} = \sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}} < 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } (0; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow f(y+1) = f((x-2)^2) \Leftrightarrow y+1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1$$

$$\text{Do } x, y \in [3; 48] \text{ nên } 3 \leq (x-2)^2 - 1 \leq 48 \Leftrightarrow 4 \leq (x-2)^2 \leq 49 \Leftrightarrow 2 \leq x-2 \leq 7 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 9.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, với mỗi giá trị x cho ta 1 giá trị y thỏa mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 8. Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x - 1 = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cos^2 y + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cos^2 y + 2(\sin^2 y + \cos^2 y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} + 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \quad (2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến $(0; +\infty)$.

$$\text{Vì vậy } (2) \Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(2(\sin^4 y + \cos^4 y)) \Leftrightarrow x+1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)}.$$

$$\text{Ta có: } \sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ nên } 1 \leq 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \leq 2$$

$\Rightarrow 2 \leq x+1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$. Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn.

Câu 9. Chọn D

Ta có: $2^{x^2} - 2^y = y - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^y + y \Leftrightarrow f(x^2) = f(y)$, với $f(t) = 2^t + t$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x^2) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y$. $P = x - 2y = x - 2x^2 \leq \frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{16}$.

Câu 10. Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy} > 0; 1-xy \neq 0 \Rightarrow x+y > 0; 1-xy > 0$. Khi đó

$$\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy) \quad (1).$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + t, (t > 0)$ có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy phương trình (1) $\Leftrightarrow x+y = 1-xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1-x}{x+1}$ với $x \in [0; 1]$. Ta có $f'(x) = 2 + \frac{-2}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \text{ và } f(0)=1; f(1)=2 \Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = 1.$$

Câu 11. Chọn D

Ta có: $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^y + 6y = x + 3\log_3(x+1) - 2 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) = (x+1) + 3\log_3(x+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(2y+1) = f(\log_3(x+1)) \Leftrightarrow 2y+1 = \log_3(x+1) \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 1.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 2020 \text{ nên } 0 \leq 3^{2y+1} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\log_3 2021 - 1}{2}$$

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(2; 0); (26; 1); (242; 2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 12. Chọn A

Ta có $f(-x) = 2020^{-x} - 2020^x$.

$-f(x) = -(2020^x - 2020^{-x}) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ vậy nên.

$$f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0 \Leftrightarrow f(m+1) < f\left(-\frac{m}{2020} + 2020\right). \quad (*)$$

Lại có $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow m+1 < \frac{-m}{2020} + 2020 \Leftrightarrow m < \frac{2019 \cdot 2020}{2021}. \text{ Vậy } m_0 = 2018.$$

Câu 13. Chọn B

$$9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0 \Leftrightarrow 27x^3 + 6x - 3xy\sqrt{3xy-5} + 3\sqrt{3xy-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 + 2(3x) = (\sqrt{3xy-5})^3 + 2\sqrt{3xy-5} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do

$$\text{đó } (*) \Leftrightarrow f(3x) = f(\sqrt{3xy-5}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3xy-5} \Rightarrow x \geq 0 \text{ và } 9x^2 = 3xy - 5.$$

Với $x = 0$ không thỏa mãn.

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0 \text{ thì } P &= x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2) \\ &= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4 \\ &= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } x + y = x + \frac{9x^2 + 5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Đặt } t = x + y \text{ thì } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = t^3 - 2t + 4 \text{ với } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Khi đó } g'(t) = 3t^2 - 2 > 0, \forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } g(t) \geq g\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}. \text{ Vậy } \min P = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}.$$

Câu 14. Chọn D

$$\text{Ta có : } \log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{xy+y}{3y^2+y} \leq (9y^4 + 6y^3 + y^2) - (x^2y^2 + 2xy \cdot y + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) - \log(3y^2+y) \leq (3y^2+y)^2 - (xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) + (xy+y)^2 \leq \log(3y^2+y) + (3y^2+y)^2 \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0 \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } t \in (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy+y \leq 3y^2+y \Leftrightarrow x \leq 3y.$$

Vì $y \leq 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$$y=1 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$$

$$y = 2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

.....

$$y = 1000 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 3000\}$$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3 + 6 + 9 + \dots + 3000 = 1501500$.

Câu 15. Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2^{\frac{x+1}{x}} \geq 2^{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = 4, \forall x > 0$ (1)

Mặt khác ta có: $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (y+1)\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t = \sqrt{y+1} \geq 1$. Xét hàm: $f(t) = -t^3 + 3t + 14, t \geq 1$ có $f'(t) = -3t^2 + 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	16	$-\infty$

$$\Rightarrow f(t) \leq 16 \Rightarrow \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \leq \log_2 16 = 4 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ t = \sqrt{1+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy: $P = |1 - 2(x+y)| = 1$.

Câu 16. Chọn C

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) = 2^{3y} + 3y$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(3y) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y} - 1$

Với $0 \leq x \leq 2018 \Leftrightarrow 1 \leq 8^y \leq 2019 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_8 2019 \approx 3.7$.

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số x, y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Chọn D

Ta có: $2(2^{a^2+b^2+c^2} - 1) + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 4^{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1} + a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2^{2a+2b+2c} + (2a+2b+2c)$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$

Ta có, $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho có dạng $f(a^2+b^2+c^2+1) = f(2a+2b+2c)$.

$$\text{Suy ra: } 2a + 2b + 2c = a^2 + b^2 + c^2 + 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 2 (*)$$

$$\text{Ta lại có, } P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)a + (P-2)b + (P-1)c = 0 (**)$$

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ lấy $M(a; b; c)$.

Theo (*) ta có M thuộc mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Theo (**) thì M thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $(P-3)x + (P-2)y + (P-1)z = 0$.

Tồn tại bộ $(a; b; c)$ khi và chỉ khi tồn tại M (mặt cầu và mặt phẳng có điểm chung).

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } d(I; (\alpha)) \leq R \text{ hay } \frac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2}} &\leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (3P-6)^2 &\leq 2 \cdot [(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2] \\ \Leftrightarrow 3P^2 - 12P + 8 &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } S = \{1; 2; 3\}. \end{aligned}$$

Câu 18. Chọn D

$$\text{Điều kiện } x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

$$\text{Ta có } \log x+1 = 2 \Leftrightarrow x+1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = 99$.

Câu 19. Chọn D

$$\text{Ta có } 2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3.$$

$$\text{Tương tự } b = \log_3 4, c = \log_4 5, d = \log_5 6$$

$$\Rightarrow abcd = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 = \log_2 6 \Rightarrow P = 2^{\log_2 6} = 6$$

Câu 20. Chọn C

$$\text{Đặt } 2^x = 5^y = 10^{-z} = t \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = t^{\frac{1}{x}} \\ 5 = t^{\frac{1}{y}} \\ 10 = t^{\frac{-1}{z}} \end{cases} \Rightarrow t^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = t^{\frac{-1}{z}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Câu 21. Chọn A

$$\text{Đặt } \log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x+y = 9^t \end{cases}.$$

$$\text{Mà } 4^t \cdot 9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x+y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (l) \\ \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (t/m) \end{cases}.$$

Câu 22. Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^{x+1} = \frac{a}{b} \\ b^{2y} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\log_a b \\ y = \frac{1}{2}(-1 + \log_b a) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-x-1}{2x} \Rightarrow 2xy = -x-1.$$

$$\text{Khi đó } P = x^2 + y^2 + y = (x+y)^2 - 2xy + y = \left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x+y = -\frac{1}{2} \\ 2xy = -x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}.$$

Câu 23. Chọn B

$$\text{Đặt } 2018^a = 2019^b = 2020^c = k \Rightarrow \begin{cases} a = \log_{2018} k \\ b = \log_{2019} k \\ c = \log_{2020} k \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = \frac{\log_{2018} k}{\log_{2019} k} + \frac{\log_{2019} k}{\log_{2020} k} = \log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020.$$

Câu 24. Chọn B

$$\log_3(x^2 + 2y) = 1 + \log_3 4 = \log_3 3 + \log_3 4 = \log_3 12 \Rightarrow x^2 + 2y = 12$$

$$\text{Ta có: } 16 = x^2 + 4 + 2y \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4} + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{8} \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{xy} \leq \sqrt{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x^2 = 4, x > 0, y > 0 \\ 4x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } \text{Min} P = \sqrt{8}.$$

Câu 25. Chọn C

$$\text{Đặt } a^x = b^y = c^z = \sqrt{\frac{z}{2}} = \sqrt{abc} = t \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = t^{\frac{1}{x}} \\ b = t^{\frac{1}{y}} \\ c = t^{\frac{2}{z}} \\ abc = t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{2}{z}.$$

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2 = 2 - \frac{2}{z} - z^2 = 2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + z^2\right).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho ba số dương } \frac{1}{z}; \frac{1}{z}; z^2 \text{ ta có: } \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + z^2 \geq 3 \Rightarrow P \leq -1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{z} = z^2 \Leftrightarrow z = 1. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } -1.$$

Câu 26. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2020^{2019(x^2-y+4)} &= \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019[(x+2)^2-(4x+y)]} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \\ &\Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2} (x+2)^2 = 2020^{2019(4x+y)} (4x+y)(1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2020^{2019t}t$ với $t > 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2020^{2019t} + 2020^{2019t}t \ln 2020^{2019} > 0 \forall t > 0.$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 4.$$

$$\text{Nên } P = y - 2x = x^2 + 4 - 2x = (x-1)^2 + 3 \geq 3. \min P = 3 \text{ khi } \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}.$$

Câu 27. Chọn A

Điều kiện $1-xy > 0$.

$$\text{Ta có: } 3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow x+y+2xy-2 = \log_3 \frac{2(1-xy)}{x+y}.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2(1-xy)] + 2(1-xy) = \log_3 (x+y) + (x+y)(*).$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t + \log_3 t \text{ với } t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0.$$

$$(*) \Leftrightarrow f(2(1-xy)) = f(x+y) \Leftrightarrow 2(1-xy) = x+y \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2x+1}.$$

$$\text{Khi đó } 1-xy > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x+1} > 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Ta có } P = x + 5y = x + 5 \frac{2-x}{2x+1}. \text{ Đặt } f(x) = x + 5 \frac{2-x}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{25}{(2x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		2	

$$\text{Vậy } P_{\min} = 2 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Câu 28. Chọn D

$$\text{Ta có } (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \text{ và từ điều kiện bài toán suy ra } \log_a b > 1.$$

Từ đó suy ra

$$P \geq 3 \log_a b + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 = \frac{3 \log_a b \cdot (\log_a b - 3)^2}{(\log_a b - 1)^2} + 9 \geq 9$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 9.$$

Câu 29. Chọn A

Ta có: $a, b, c > 1$ và $x, y, z > 0$ nên $a^x; b^y; c^z; \sqrt[3]{abc} > 1$

$$\text{Do đó: } a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c) \\ y = \frac{1}{3}(\log_b a + 1 + \log_b c) \\ z = \frac{1}{3}(\log_c a + \log_c b + 1) \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} P &= x + y + z = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c + \log_b a + 1 + \log_b c + \log_c a + \log_c b + 1) \\ &= \frac{1}{3}(3 + \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + \log_c a + \log_c b) \\ &= \frac{1}{3}(3 + \log_a b + \log_b c + \log_c a + \log_a c + \log_c b + \log_b a) \end{aligned}$$

Mặt khác $a, b, c > 1$ nên $\log_a b, \log_b c, \log_c a, \log_a c, \log_c b, \log_b a > 0$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{1}{3}(3 + 3\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} + 3\sqrt{\log_a c \cdot \log_c b \cdot \log_b a}) = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \log_a b = \log_b c = \log_c a \\ \log_a c = \log_c b = \log_b a \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = \log_b c = \log_c a \\ \frac{1}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{\log_a b} \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ x = y = z = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 3 \in (2; 4)$.

Câu 30. Chọn D

$$\text{Theo bài ra ta có: } a^x = b^y = \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \\ b^y = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}} \\ b^{y-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_a b \\ y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_b a \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } P = x + 4y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_a b + 1 + \log_b a = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \log_a b + \log_b a.$$

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$. Suy ra: $t = \log_a b > 0$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}t \cdot \frac{1}{t}} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$ khi $\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = 2$ hay $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

$$\text{Suy ra: } a^x = a^{2y} = \sqrt[4]{a^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Khi đó: $m = 9, n = 4 \Rightarrow T = 85$.

Câu 31. Chọn B

Với điều kiện: $x > -1, y > -3 \Rightarrow x+1 > 0, y+3 > 0$. Ta có:

$$\log_2(y+3)(x+1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \log_2(y+3) + \log_2(x+1) + (y+3) - \frac{1}{x+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+3) + (y+3) = \log_2 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$ ($t > 0$), $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow y+3 = \frac{1}{x+1}$.

$$\text{Khi đó: } P = x + 3y + 10 = x + 3\left(\frac{1}{x+1} - 3\right) + 10 = x + 1 + \frac{3}{x+1} \geq 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x+1 + \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1, (\text{vì } x > -1).$$

$$\text{Vậy: } \min P = 2\sqrt{3}.$$

Câu 32. Chọn B

Đặt $\log_b a = t$.

Với điều kiện: $1 > a > b > \frac{1}{4}$ khi đó: $0 = \log_b 1 < \log_b a < \log_b b = 1 \Rightarrow t \in (0; 1)$

$$\text{Ta có: } b^2 - b + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2 \Rightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 \Rightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{2}{t}.$$

$$\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} = \frac{1}{2(\log_b a - 1)} = \frac{1}{2(t-1)}. \text{ Do đó } P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \geq \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)} \text{ với } t \in (0; 1) \text{ có } f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2}.$$

$$\text{Với } t \in (0; 1) \text{ ta có: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do: } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty; \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty.$$

Lập BBT của hàm số $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}$ với $t \in (0; 1)$ ta có:

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta tìm được $\min f(t) = \frac{9}{2}$ tại $t = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$.

Câu 33. Chọn B

$$\text{Ta có: } xy \leq 4y - 1 \Leftrightarrow 4y \geq xy + 1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y \geq 2\sqrt{xy} \text{ nên: } \sqrt{\frac{x}{y}} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq 4.$$

$$\text{Xét } P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y} = 12 + 6 \cdot \frac{y}{x} + \ln \left(\frac{x}{y} + 2 \right).$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, 0 < t \leq 4. \text{ Suy ra: } P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2 - 6t - 12}{t^2 \cdot (t+2)} = \frac{(t-3)^2 - 21}{t^2 \cdot (t+2)}.$$

$$\text{Với } 0 < t \leq 4 \text{ thì } -3 < t-3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (t-3)^2 < 9 \text{ nên } (t-3)^2 - 21 < 0, \forall t \in (0; 4].$$

$$\text{Do đó: } f'(t) < 0. \text{ Hàm số } f(t) \text{ nghịch biến trên } (0; 4].$$

$$\text{Suy ra: } f(t) \geq f(4), \forall t \in (0; 4]. \text{ Hay } P \geq f(4) = 12 + \frac{6}{4} + \ln 6 \Leftrightarrow P \geq \frac{27}{2} + \ln 6.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{27}{2} + \ln 6. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } a = \frac{27}{2}; b = 6 \text{ nên } ab = 81.$$

Câu 34. Chọn B

$$\text{Ta có } a^x = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1 + \log_a b), b^y = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(1 + \log_b a).$$

$$P = x + 3y = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) + 1 + \log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log_a b + \frac{1}{\log_a b}.$$

$$\text{Đặt } \log_a b = t, \text{ do } 1 < a \leq b \leq a^3 \Rightarrow 1 \leq \log_a b \leq 3 \Rightarrow t \in [1; 3] \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}; \text{ với } t \in [1; 3].$$

$$f'(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{cases}. \text{ Do } t \in [1; 3] \Rightarrow t = \sqrt{3}.$$

$$f(1) = f(3) = \frac{8}{3}; f(\sqrt{3}) = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \max_{[1;3]} f(t) = \frac{8}{3}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } \frac{8}{3}.$$

Câu 35. Chọn B

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - \log_2 a}{\log_3 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3} \cdot \sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = \log_2 3 \sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t \cdot \log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 + \log_2^2 3}.$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{1 + \log_2^2 3}\right) = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2} \Rightarrow \min P = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}.$$

Câu 36. Chọn A

$$\text{Đặt } \log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25} \frac{2x-y}{3} = t \ (t > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 16^t \\ y = 20^t \\ \frac{2x-y}{3} = 25^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 16^t - 20^t}{3} = 25^t \Leftrightarrow 2 \cdot 16^t - 20^t = 3 \cdot 25^t \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{4}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3} \ (N) \\ \left(\frac{5}{4}\right)^t = -1 \ (L) \end{cases}$$

Vậy $\frac{y}{x} = \left(\frac{20}{16}\right)^t = \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3}$.

Câu 37. Chọn D

$$\text{Đặt: } t = \log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q) \ (t > 0) \text{ ta có } \begin{cases} p = 9^t \\ q = 12^t \\ p+q = 16^t \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t}.$$

$$\text{Đặt } x = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{q}{p} > 0 \text{ phương trình trở thành: } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên suy ra } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } \frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 38. Chọn A

$$\text{Điều kiện: } x > y \geq 0. \text{ Đặt: } \log_2 (x+y) = \log_3 (x-y) = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 2^t \\ x-y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2^t + 3^t}{2} \\ y = \frac{2^t - 3^t}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y \geq 0 \Rightarrow \frac{2^t - 3^t}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^t \geq 3^t \Leftrightarrow t \leq 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 < 2^t \leq 1 \\ 0 < 3^t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2^t + 3^t \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{2^t + 3^t}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0. \text{ Vậy } x + y = 1.$$

Câu 39. Chọn B

$$P = \frac{\log_2 \frac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x - \log_2 128}{\log_2 x + 1} - 2 \log_2 x = \frac{\log_2 x - 7}{\log_2 x + 1} - 2 \log_2 x.$$

Đặt $t = \log_2 x$ ($0 \leq t \leq 3$). Ta có: $P = \frac{t-7}{t+1} - 2t$ trên $[0; 3]$.

$$P' = \frac{8}{(t+1)^2} - 2, P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	3	$+\infty$
P'		+	0	-
P			-5	
			-7	
				$-\infty$

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $b = -5$, Giá trị lớn nhất của biểu thức là $a = -7$. Khi đó $ab = 35$.

Câu 40. Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 (x - y) &= 1 + 2 \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x (x - y) = 1 + \log_2 y^2 \Leftrightarrow \log_2 x (x - y) = \log_2 2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - xy &= 2y^2 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y(L) \end{cases}. \end{aligned}$$

Xét $x = 2y$, mà $x \leq 2020 \Rightarrow 2y \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq 1010$, kết hợp điều kiện ta có $y \in \{1; 2; \dots; 1010\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y , tương ứng với có 1010 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 41. Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2 \Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x + 1) - \log_2 x = 6x - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) = \log_2 x + (2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = \log_2 (2x) + 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Do $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$

$$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3-3\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{4}(1-\sqrt{5})$$

Vậy $a=1, b=5 \Rightarrow P=a+b=6$.

Câu 42. Chọn D

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Đặt $u = 2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ ta có $\begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$

Vì $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$ nên suy ra $\frac{(2^u)^2}{1-(2^u)^2} = 3^u \Leftrightarrow (2^u)^2 = 3^u \cdot (1-(2^u)^2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1$ ta có: $f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Dễ thấy $f(-1) = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất $u = -1$

$$u = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Mà $x \in (0; 2020\pi)$ nên

$$-\frac{1}{6} < k < \frac{6059}{6} \text{ ta chọn } k \in \{0; 1; 2; \dots; 1009\}$$

Khi đó số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 2020\pi)$ là 1010.

Câu 43. Chọn A

Điều kiện $x+y > 0$. Đặt $\log_5(x+y) = t \Leftrightarrow x+y = 5^t$

Khi đó: $\begin{cases} 5^x = t+y \\ 5^t = x+y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall u \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(t) = f(x) \Rightarrow t = x$. Khi đó: $5^x = x+y \Leftrightarrow y = 5^x - x$

Đặt $g(x) = 5^x - x \Rightarrow g'(x) = 5^x \ln 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5)$

x	$-\infty$	$-\log_5(\ln 5)$	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$			

$\frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5)$

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5) \approx 0,917$

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 44. Chọn A

Tập xác định: $D = [1; +\infty)$.

$$\log 10x + \log^2 x + 3 \geq m \log 100x \Leftrightarrow m \leq \frac{\log 10x + \log^2 x + 3}{\log 100x} = \frac{\log x + \log^2 x + 4}{\log x + 2}.$$

Đặt $t = \log x$ $x \geq 1 \Rightarrow t \geq 0$, bất phương trình trở thành: $m \leq \frac{t^2 + t + 4}{t + 2}$ (2).

Để bất phương trình ban đầu có nghiệm $[1; +\infty)$ thì bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty)$.

Xét $f(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t + 2}$ trên $[0; +\infty)$.

Trên $[0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = \frac{t^2 + 4t - 2}{(t + 2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{6}(tm) \\ x = -2 - \sqrt{6}(l) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	0	$-2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(t)$		-	+	0	-
$f(t)$				$-3 + 2\sqrt{6}$	

-2 $-\infty$

Bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \max_{[0; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq -3 + 2\sqrt{6}$

Mà m nguyên nên $m = \{1\}$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Câu 45. Chọn A

Điều kiện $x + y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$.

Ta đặt: $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases}$ (1)

Vì $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2 \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85$.

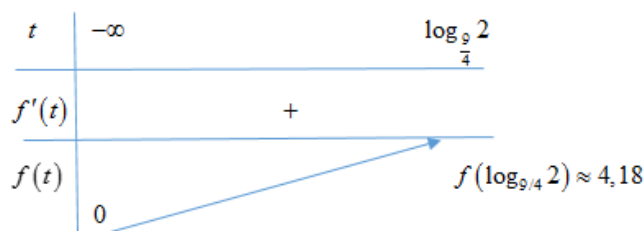
Ta có $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \Rightarrow xy = \frac{9^t - 4^t}{2}$.

Khi đó, $P = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 27^t - 3 \cdot \frac{9^t - 4^t}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t = f(t)$.

Xét $f(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t$ với $t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$, có $f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 + \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12$,

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 = \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{12}\right)^t = 3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{27}{12}} \left(3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27}\right) \approx 1,006(L)$.

Bảng biến thiên:



Gọi T là tập giá trị của P . Từ BBT ta có $\begin{cases} T = (0; 4] \\ P \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{1; 2; 3; 4\} \in T$ nên suy ra tập giá trị của

P có chứa 4 giá trị nguyên.

Câu 46. Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2} = 2 \cdot 2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1 (*)$

Cách1:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương

Xét hàm số $f(y) = y^2 - y$ trên $(0, +\infty)$

$f'(y) = 2y - 1; f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

y	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Cách2:

Yêu cầu của bài toán được thỏa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \vee y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \text{ ta chọn } x \in \{-1; 0\}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}; y > 0 \end{cases}, \text{ không tồn tại } x \in \mathbb{Z} \text{ để}$$

 $y > 0.$ Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.**Câu 47. Chọn D**Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$ nên $t \in [-1; 1]$

Ta có phương trình

$$4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} \Leftrightarrow m = f(t)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{-4(1-t^2)}{(t^2 - t + 1)^2} \leq 0 \quad \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên đoạn } [-1; 1]$$

Phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số

$$y = f(t) \text{ trên đoạn } [-1; 1] \Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(-1) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}$$

Câu 48. Chọn B

$$\text{Đk: } \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Với điều kiện trên ta có: $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x)$

$$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3(1 - \cos^2 x) = \log_2(\cos x)$$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \log_3 \frac{2^{2t}}{1-2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t$ hay $\left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$ có $f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{3} + 4^t \cdot \ln 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên

$\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1) = 1$ nên $t = -1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$.

$$\log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad (\text{loại do } \sin x > 0) \end{cases}.$$

$$x \in (0; 2020\pi) \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{6059}{6}.$$

Vậy trong khoảng $(0; 2020\pi)$ thì phương trình có 1010 nghiệm.

Câu 49. Chọn B

Cách 1:

Ta có

$$\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5) \Leftrightarrow \log_4[(x+1)+(y+2)] = \log_5[(x+1)^2+(y+2)^2]$$

Đặt $X = x+1; Y = y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$

$$\text{Đặt } t = \log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2). \text{ Suy ra ta có hệ phương trình } \begin{cases} X+Y = 4^t \\ X^2+Y^2 = 5^t \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có $(X+Y)^2 \leq 2(X^2+Y^2) \Leftrightarrow 16^t \leq 2.5^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{16}{5}} 2$.

$$\text{Mặt khác } X^2 = 5^t - Y^2 \leq 5^t \leq 5^{\frac{\log_{16} 2}{5}} \Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq X \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \text{ vì } X \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{Tương tự ta có } -5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}.$$

TH1: $X = 0$ ta có $\log_4 Y = \log_5 Y^2$ nghiệm là $Y = 1$. Do đó $x = y = -1$.

TH2: $X = -1$ ta có $\log_4(Y-1) = \log_5(1+Y^2)$

Xét hàm số $f(Y) = \log_4(Y-1) - \log_5(1+Y^2)$ với $-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}$, ta lấy đạo hàm và lập bảng biến thiên chứng minh được $\max_{\left(-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}\right)} f(Y) \approx -0,93 < 0$ nên không tồn tại Y .

TH3: $X = 1$ ta có $\log_4(Y+1) = \log_5(1+Y^2)$ ta lập bảng biến thiên và chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $Y = 0$ và một nghiệm còn lại thỏa

$$-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}.$$

Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\begin{cases} X=0 \\ X=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$

Cách 2: (Biểu diễn miền trên đồ thị)

Ta có

$$\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5) \Leftrightarrow \log_4[(x+1)+(y+2)] = \log_5[(x+1)^2+(y+2)^2]$$

Đặt $X = x+1$; $Y = y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$

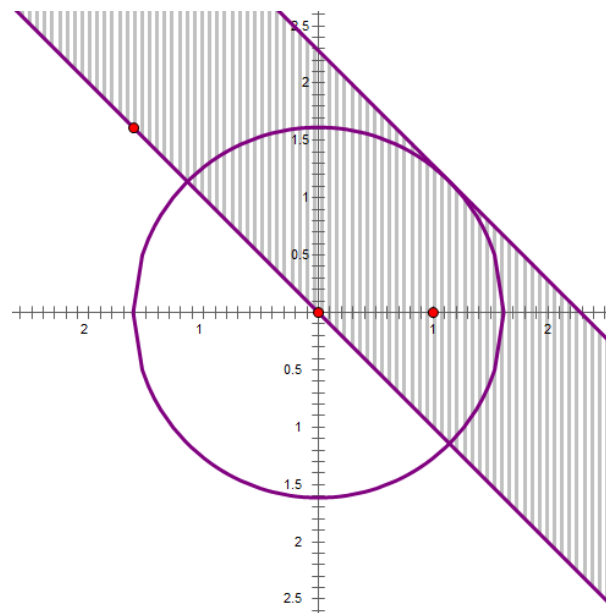
Đặt $t = \log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y = 4^t \\ X^2+Y^2 = 5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có $(X+Y)^2 \leq 2(X^2+Y^2) \Leftrightarrow 16^t \leq 2 \cdot 5^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{16}{5}} 2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 0 < X+Y = 4^t \leq 4^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \\ 0 < X^2+Y^2 = 5^t \leq 5^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \end{cases}$

Minh họa bằng hình vẽ:



Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\begin{cases} X=0 \\ X=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$.

Câu 50. Chọn D

Phương trình tương đương $2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1}$

Đặt $2x-y=a$, phương trình trở thành

$$2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x) = tx^{t-1}(1-x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1-x^{-2t} > 0$ suy ra hàm số này đồng biến trên $(1; +\infty)$

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}, \forall a \geq 0$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

$$\text{Suy ra } 2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

$$\text{Khi đó } P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 \leq 3$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x = 1$.

Câu 51. Chọn B

Điều kiện $x + \sqrt{2}y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2) = t$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 2^t \end{cases}$$

$$\text{Vì } (x + \sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow 9^t \leq 3 \cdot 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 3 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 3.$$

Như vậy $x^2 + y^2 = 2^t \Rightarrow x^2 \leq 2^t \leq 2^{\log_{\frac{9}{2}} 3} \approx 1,65$. Vì x nguyên nên $x^2 \in \{0; 1\}$.

$$\text{Với } x = 0 \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = \frac{3^t}{\sqrt{2}} \\ y^2 = 2^t \end{cases}. \text{ Suy ra } \frac{9^t}{2} = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{9}{2}} 2 \Rightarrow y = \frac{3^{\log_{\frac{9}{2}} 2}}{\sqrt{2}} \approx 1,17.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có phương trình } \log_3(1 + \sqrt{2}y) = \log_2(1 + y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \approx 0,7686 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có phương trình } \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2) = 0.$$

Xét hàm số $f(y) = \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2)$. Lập bảng biến thiên, ta chứng minh được $\max f(y) \approx f(1,369) \approx -1,583 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó ta chọn được $x \in \{0; 1\}$. Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52. Chọn C

Xét hàm số $f(t) = t + e^t \Rightarrow f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

$$x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow f(\ln x) = f(y) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

$$\text{Để } 1 \leq x \leq 2020 \text{ thì } 1 \leq e^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020.$$

Mà y nguyên và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có 1 giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1; 2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 53. Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Với điều kiện trên ta có: $\log(10xy) \geq \log(x+y) \Leftrightarrow 10xy \geq x+y$

$$\Leftrightarrow y(10x-1) \geq x > 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{10x-1} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right)$$

Do đó: $S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1}$; $f'(x) = 1 - \frac{3}{(10x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (10x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow 10x-1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{10} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right).$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5}$.

$$S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1} \geq \min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5} \in \left[0; \frac{4}{3}\right].$$

DẠNG 11**Bài toán tìm cặp số nguyên thỏa mãn**

- Câu 1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq y \leq 10$ và $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^y \cdot \log_2(2y + 2)$?
A. 9 . **B.** 3 . **C.** 6 . **D.** 4 .
- Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$.
A. 4 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 1 .
- Câu 3.** Gọi S là tập hợp các điểm $M(x; y)$, với $x; y$ là các số nguyên thỏa mãn $\begin{cases} 3 \leq x \leq 2020 \\ \log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1) \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm thuộc S ?
A. 165. **B.** 120. **C.** 220. **D.** 55.
- Câu 4.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $-20 \leq x \leq 20, -20 \leq y \leq 20$ và $2^{x+5} + 3x + 12 = 2^{y+1} + 3y$?
A. 41 . **B.** 40 . **C.** 37 . **D.** 32 .
- Câu 5.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x) + 5x = 10 \cdot 2^y + y + 2$?
A. 31 . **B.** 11 . **C.** 2020 . **D.** 21 .
- Câu 6.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 < x \leq 100$ và $\log \frac{10y^2 - 20y}{x-1} = x - y^2 + 2y$?
A. 19 . **B.** 17 . **C.** 20 . **D.** 18 .
- Câu 7.** Số giá trị x nguyên thỏa mãn $\log_2^3(y-1) - x^3 + \log_2(y-1)^3 = 3x$ và $2 \leq y \leq 17$ là:
A. 0 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 8 .
- Câu 8.** Cho các số x, y, a thỏa mãn $1 \leq x \leq 2048, y \geq 1, a \in \mathbb{N}$ và $x^2 + xy + \log_2(x+y-1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1$. Có bao nhiêu giá trị của $a \leq 100$ để luôn có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$?
A. 11. **B.** 10. **C.** 89. **D.** 90.
- Câu 9.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq y \leq 2018$ và $\log_5 \left(\frac{3^{x+1} - 1}{y + 1} \right) = y + 2 - 3^{x+1}$?
A. 10 . **B.** 8 . **C.** 5 . **D.** 6 .
- Câu 10.** Cho các số x, y, a thỏa mãn $1 \leq x \leq 8, y \geq 1, a \in \mathbb{N}$ và $\log_2(2^a + y + 1) + 2^a + y + 1 = x + 2^x$ (*). Có bao nhiêu giá trị của $a \in [0; 100]$ để không tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa (*)?
A. 0 . **B.** 8 . **C.** 1. **D.** 93 .
- Câu 11.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x + y > 0, -20 \leq x \leq 20$ và $\log_2(x + 2y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y = 0$?
A. 9 . **B.** 6 . **C.** 10 . **D.** 11 .

- Câu 12.** Gọi $(x; y)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn $1 < y < 2020$ và $\log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) = y^2 - 2y + 1 - 16^x$.
Gọi $y_{\min}$ và $y_{\max}$ lần lượt là nghiệm ứng với giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y . Tính giá trị của $T = y_{\min} + y_{\max}$.
A. $T = 103$. B. $T = 3010$. C. $T = 1030$. D. $T = 301$.
- Câu 13.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4^x + 2x = y + \log_2 y$ và $1 \leq y \leq 1024$?
A. 5. B. 6. C. 1024. D. 1023.
- Câu 14.** Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 \left(\frac{2a+5}{a+b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + 3b^2$
A. $\frac{5}{4}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{25}{4}$.
- Câu 15.** Cho tập hợp X là tập hợp các điểm $M(x; y)$ với $x; y$ là các số nguyên thỏa mãn $3 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có cả ba đỉnh là các điểm thuộc tập X ?
A. 120. B. 165. C. 220. D. 55.
- Câu 16.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_5(25x + 25) + x = 2y + 5^y$
A. 2019. B. 3. C. 2020. D. 4.
- Câu 17.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\sqrt{\log_2 x} + x = y + 2^{y^2}$ và $0 < x < 2020$. Số các giá trị nguyên dương của y là
A. 4. B. 3. C. 10. D. 9.
- Câu 18.** Có bao nhiêu cặp các số nguyên $(x; y)$ với $y < 8$ thỏa mãn $\log_2(x^2 - 6x + 9) - \log_2 y + x^2 + 8 = 6x + 2y$?
A. 6. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 19.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $20 \leq x \leq 2020$ và $\frac{19^{-x-3}}{x^2 + 2x + 2021} = \frac{361^{y-2}}{4y^2 - 4y + 2020}$?
A. 1009. B. 1000. C. 2000. D. 2001.
- Câu 20.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y), x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $1 \leq y \leq e^7$ và $e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1}$
A. 1. B. 2. C. 16. D. 15.
- Câu 21.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$?
A. 11. B. 2020. C. 10. D. 2019.
- Câu 22.** Cho x, y là các số nguyên dương thỏa $x \leq 10$ và $2x + \log_2(x-3) = 5 + y + 2^y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + y$.
A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.C	5.B	6.D	7.D	8.D	9.D	10.D
11.C	12.C	13.B	14.D	15.B	16.B	17.B	18.C	19.B	20.D
21.A	22.C								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1. Chọn D**

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^y \cdot \log_2(2y + 2)$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2y} \cdot \log_2(2y + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t + 2), t \geq 0$.

Vì $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t + 2) + \frac{2^t}{(t + 2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2y) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2y.$$

$$\text{Mà } 1 \leq y \leq 10 \Rightarrow 2 \leq (x-1)^2 \leq 20 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{20} \\ 1 - \sqrt{20} \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1; 3; 4; 5\}$. Vì $x-1$ phải chẵn nên x lẻ.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 2. Chọn D

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2 - 2x + 2)} + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2 \quad (1). \text{ Xét hàm số } f(t) = 10^t + t \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(t) = 10^t \cdot \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f[\log(x^2 - 2x + 2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2 - 2x + 2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^{y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}.$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 10^6 \text{ nên } 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log[(10^6 - 1)^2 + 1].$$

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

$$\text{Với } y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (ktm)} \\ x = 4 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

Với $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9998 = 0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Với $y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 999999998 = 0$ (không có x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Chọn A

Ta có $\log_2(2x-4) + 2x-4 = y+1 + 2^{y+1}$.

Đặt $\log_2(2x-4) = t \Rightarrow 2x-4 = 2^t$ khi đó ta có $t + 2^t = (y+1) + 2^{y+1} (1)$.

Hàm $y = f(t) = t + 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(1) \Leftrightarrow t = y+1 \Rightarrow y = \log_2(2x-4) - 1 \Leftrightarrow y = \log_2(x-2).$$

Hàm số $y = \log_2(x-2)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Suy ra với $3 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_2 2018 \Rightarrow$ có 11 số nguyên y thỏa mãn hay 11 điểm M .

Do các điểm này nằm trên đường cong $y = \log_2(x-2)$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 4. Chọn C

Ta có: $2^{x+5} + 3x + 12 = 2^{y+1} + 3y \Leftrightarrow 2^{x+5} + 3(x+5) = 2^{y+1} + 3(y+1)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t$, $f(t) = 2^t + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x+5 = y+1 \Leftrightarrow y = x+4$.

Kết hợp với điều kiện $-20 \leq x \leq 20$; $-20 \leq y \leq 20$ suy ra x nguyên thuộc $[-20; 16]$ thỏa đề.

Vậy có 37 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 5. Chọn B

Ta có: $\log_2(2x) + 5x = 10 \cdot 2^y + y + 2 \Leftrightarrow \log_2 x + 5x + 1 = \log_2 2^{y+1} + 5 \cdot 2^{y+1} + 1$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + 5t + 1$, $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra $x = 2^{y+1}$.

Từ $1 \leq x \leq 2020$ suy ra $1 \leq 2^{y+1} \leq 2020 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^y \leq 1010 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \log_2 1010 \approx 9,98$.

Có 11 giá trị nguyên của y thỏa đề. Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 6. Chọn D

Với $1 < x \leq 100$, ta có:

$$\log \frac{10y^2 - 20y}{x-1} = x - y^2 + 2y \Leftrightarrow \log(x-1) + x-1 = \log(y^2 - 2y) + y^2 - 2y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = \log u + u$, ta có $f'(u) = \frac{1}{u \ln 10} + 1 > 0, \forall u > 0$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 = y^2 - 2y \Leftrightarrow x = (y-1)^2$.

$$1 < x \leq 100 \Rightarrow 1 < (y-1)^2 \leq 100 \Leftrightarrow 1 < |y-1| \leq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq y < 0 \\ 2 < y \leq 11 \end{cases}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị của y và cũng có 18 giá trị của x .

Câu 7. Chọn D

Với $2 \leq y \leq 17$ ta có

$$\log_2^3(y-1) - x^3 + \log_2(y-1)^3 = 3x \Leftrightarrow \log_2^3(y-1) + 3\log_2(y-1) = x^3 + 3x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(y-1) = x \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Do $2 \leq y \leq 17 \Rightarrow 2 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 16$.

Vì x nhận các giá trị nguyên nên có 8 giá trị cần tìm là $S = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của x cần tìm.

Câu 8. Chọn D

Ta có: $x^2 + xy + \log_2(x+y-1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+y-1) + (x+1)\log_2(x+y-1) = (x+1)(2^a + a)$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x+y-1)} + \log_2(x+y-1) = 2^a + a$ (do $x+1 \geq 2, \forall x \geq 1$) $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ ($t \geq 0$).

Vì $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2(x+y-1) = a \Leftrightarrow x+y-1 = 2^a \Leftrightarrow x = 2^a - y + 1$.

Mà $1 \leq x \leq 2048$ nên suy ra: $1 \leq 2^a - y + 1 \leq 2048 \Leftrightarrow 2^a - 2047 \leq y \leq 2^a$.

Do $y \geq 1$, mỗi giá trị của y có một giá trị của x và $[2^a - 2047; 2^a]$ có 2048 số nguyên nên để có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn (1) thì $2^a - 2047 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 11$.

Mà $a \leq 100, a \in \mathbb{N}$ nên $a \in \{11; 12; \dots; 100\}$.

Vậy có 90 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2018 \\ \frac{3^{x+1} - 1}{y+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$.

Ta có $\log_5\left(\frac{3^{x+1} - 1}{y+1}\right) = y + 2 - 3^{x+1} \Leftrightarrow \log_5(3^{x+1} - 1) - \log_5(y+1) = y + 1 + 1 - 3^{x+1}$

$\Leftrightarrow \log_5(3^{x+1} - 1) + (3^{x+1} - 1) = \log_5(y+1) + (y+1) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0$ với mọi $t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t) = \log_5 t + t$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$. Từ (1) ta có $f(3^{x+1} - 1) = f(y+1) \Leftrightarrow 3^{x+1} - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = 3^{x+1} - 2$.

Vì $1 \leq y \leq 2018 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{x+1} - 2 \leq 2018 \Leftrightarrow 3 \leq 3^{x+1} \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq \log_3 2020$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_3 2020 - 1$.

Vì x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 6 cặp $(x; y)$ thỏa bài toán.

Câu 10. Chọn D

Có $(*) \Leftrightarrow y + 2^a + 1 + \log_2(y + 2^a + 1) = 2^x + \log_2(2^x)$.

Xét hàm số $f(x) = x + \log_2 x$ có $f'(x) = 1 + \frac{1}{x \ln 2} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $f(2^a + y + 1) = f(2^x) \Leftrightarrow 2^a + y + 1 = 2^x$.

Ta lại có $1 \leq x \leq 8 \Rightarrow 1 \leq 2^a + y + 1 \leq 256 \Rightarrow -2^a \leq y \leq 255 - 2^a$.

Với mỗi giá trị nguyên $y \geq 1$ ta có duy nhất một giá trị nguyên x .

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -2^a \leq y \leq 255 - 2^a$ không chứa giá trị nguyên $y \geq 1$.

Hay $255 - 2^a < 1 \Leftrightarrow a \geq 8$. Vậy có 93 giá trị nguyên của $a \in [0; 100]$ thỏa ycbt.

Câu 11. Chọn C

Điều kiện: $x + 2y > 0$. Do: $2x + y > 0$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \log_2(x + 2y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{(2x + y)(x + 2y)}{2x + y} + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2y^2 + 5xy) - \log_2(2x + y) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy - 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2y^2 + 5xy) + 2x^2 + 2y^2 + 5xy &= \log_2(2x + y) + 2x + y \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng

biến trên $(0; +\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow f(2x^2 + 2y^2 + 5xy) = f(2x + y) \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 5xy = 2x + y$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y \text{ vì } 2x + y > 0 \text{ nên } y < \frac{2}{3}, (2).$$

$$\text{Do } -20 \leq x \leq 20 \text{ suy ra } \frac{-19}{2} \leq y \leq \frac{21}{2}, (3).$$

Từ (2), (3) và $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; 0\}$. Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 12. Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{4^x + 1}{y} \right) &= y^2 - 2y + 1 - 16^x \Leftrightarrow \log_3(4^x + 1) - \log_3 y = (y - 1)^2 - 16^x \\ \Leftrightarrow \log_3(4^x + 1) + (4^x)^2 &= \log_3 y + (y - 1)^2 \quad (*). \text{ Đặt } t = 4^x + 1 \Leftrightarrow 4^x = t - 1 \quad (t > 1). \\ (*) \Leftrightarrow \log_3 t + (t - 1)^2 &= \log_3 y + (y - 1)^2 \quad (**). \end{aligned}$$

Đặt: $f(u) = \log_3 u + (u - 1)^2$ ($u > 1$). Ta có: $f'(u) = \frac{1}{u \ln 3} + 2(u - 1) > 0$ khi $u > 1$.

Suy ra hàm số $y = f(u)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow 4^x + 1 = y$.

Vì $1 < y < 2020$, nên ta có $1 < 4^x + 1 < 2020 \Leftrightarrow 0 < 4^x < 2019 \Leftrightarrow x < \log_4 2019 \approx 5,49$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 1 \\ x_{\max} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{\min} = 5 \\ y_{\max} = 1025 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = y_{\min} + y_{\max} = 5 + 1025 = 1030.$$

Câu 13. Chọn B

Với điều kiện $y > 0$, ta có $4^x + 2x = y + \log_2 y \Leftrightarrow 2^{2x} + 2x = 2^{\log_2 y} + \log_2 y$ (*).

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Ta thấy $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = 2^t + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x) = f(\log_2 y) \Leftrightarrow 2x = \log_2 y \Leftrightarrow y = 4^x$.

Vì $1 \leq y \leq 1024$ nên $1 \leq 4^x \leq 1024 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5$.

Vậy có 6 cặp số nguyên thỏa mãn là $(0;1), (1;4), (2;16), (3;64), (4;256), (5;1024)$.

Câu 14. Chọn D

$$\log_3 \left(\frac{2a+5}{a+b} \right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{2a+5}{3a+3b} \right) = (3a+3b) - (2a+5)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2a+5) + (2a+5) = \log_3 (3a+3b) + (3a+3b) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x + x$ có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 1 > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x) = \log_3 x + x$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

$(1) \Leftrightarrow f(2a+5) = f(3a+3b) \Leftrightarrow 2a+5 = 3a+3b \Leftrightarrow a = 5-3b$ thay vào T , ta được:

$$T = a^2 + 3b^2 = (5-3b)^2 + 3b^2 = 12b^2 - 30b + 25 \geq \frac{25}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{25}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = \frac{5}{4}$ và $a = \frac{5}{4}$.

Câu 15. Chọn B

Ta có: $\log_2 (x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-2) + 2x - 4 = y + 2^{y+1} \Leftrightarrow \log_2 (2x-4) + 2x - 4 = y + 1 + 2^{y+1} (*).$$

Đặt $\log_2 (2x-4) = t \Rightarrow 2x-4 = 2^t$, khi đó ta có $(*) \Leftrightarrow t + 2^t = (y+1) + 2^{y+1} (1)$.

Hàm $y = f(t) = t + 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow t = y+1 \Rightarrow y = \log_2 (2x-4) - 1$.

Với $3 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 1 \leq t \leq \log_2 4036 \Rightarrow 1 \leq 1+y \leq \log_2 4036$ mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; \dots; 10\}$ vậy có 11 số nguyên y hay 11 điểm M .

Do các điểm này nằm trên đường cong $y = \log_2 (2x-4) - 1$ nên không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Vậy số tam giác nhận 3 trong 11 điểm này làm đỉnh là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 16. Chọn B

Đặt $t = \log_5 (25x+25) (2 \leq t \leq 2 + \log_5 2021) \Leftrightarrow 25x+25 = 5^t \Leftrightarrow x = 5^{t-2} - 2$.

Theo bài ra: $\log_5 (25x+25) + x = 2y + 5^y \Leftrightarrow (t-2) + 5^{t-2} = 2y + 5^{2y} (*)$

Hàm $f(u) = u + 5^u$ đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow t-2 = 2y \Leftrightarrow t = 2y+2$.

Mà $2 \leq t \leq 2 + \log_5 2021 \Rightarrow 2 \leq 2y+2 \leq 2 + \log_5 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \log_5 2021$

Mặt khác $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}$. Vậy có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 17. Chọn B

Điều kiện: $x \geq 1$. Vì $x \geq 1$ và y dương nên ta có:

$$\sqrt{\log_2 x} + x = y + 2^{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 2^{\log_2 x} = y + 2^{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} + 2^{\log_2 x} = \sqrt{y^2} + 2^{y^2} (*).$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + 2^t, t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó: $(*) \Leftrightarrow f(\log_2 x) = f(y^2) \Leftrightarrow \log_2 x = y^2$.

Vì $1 \leq x < 2020$ nên $0 \leq \log_2 x < \log_2 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_2 2020$. Suy ra: $0 \leq y < \sqrt{\log_2 2020}$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{1; 2; 3\}$.

Câu 18. Chọn C

Điều kiện: $x \neq 3; y > 0$. Ta có: $\log_2(x^2 - 6x + 9) - \log_2 y + x^2 + 8 = 6x + 2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 6x + 9) + x^2 - 6x + 9 = \log_2(2y) + 2y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên là hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Nên PT (*) $\Leftrightarrow f(u) = f(v)$ với $u = x^2 - 6x + 9; v = 2y \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2y$.

Khi đó $y < 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 < 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 7$

Với $x \in \mathbb{Z}, x \neq 3 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$ (Không tm)

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$ (Thỏa mãn)

Với $x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (Không tm)

Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (Không tm)

Với $x = 5 \Rightarrow y = 2$ (Thỏa mãn)

Với $x = 6 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$ (Không tm)

Vậy có 2 cặp $(x; y)$ thỏa mãn x, y là những số nguyên và $y < 8$.

Câu 19. Chọn B

Ta có: $\frac{19^{-x-3}}{x^2 + 2x + 2021} = \frac{361^{y-2}}{4y^2 - 12y + 2026} \Leftrightarrow \frac{19^{-x-3}}{(x+2)^2 + 2017} = \frac{19^{2y-4}}{(3-2y)^2 + 2017}$.

$\Leftrightarrow \frac{19^{3-2y}}{(x+2)^2 + 2017} = \frac{19^{x+2}}{(3-2y)^2 + 2017} \Leftrightarrow 19^{x+2} \cdot [(x+2)^2 + 2017] = 19^{3-2y} \cdot [(3-2y)^2 + 2017]$

Xét hàm số: $f(t) = 19^t \cdot (t^2 + 2017)$ với $t \geq 0$ có $f'(t) = 2t \cdot 19^t + 19^t \cdot \ln 19 \cdot (t^2 + 2017) > 0; \forall t \geq 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

Mặt khác $f(x+2) = f(3-2y) \Rightarrow x+2 = 3-2y \Leftrightarrow x = 1-2y$.

Ta có $20 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 20 \leq -2y + 1 \leq 2020 \Leftrightarrow \frac{-2019}{2} \leq y \leq \frac{-19}{2}$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1009; -1008; \dots; -10\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 1000 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20. Chọn D

Xét phương trình: $e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1}$ (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow e^{\ln^2 y - x^2 - 2x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{\ln^2 y + 1} \Leftrightarrow \frac{e^{\ln^2 y}}{e^{(x+1)^2}} = \frac{(x+1)^2 + 1}{\ln^2 y + 1} \Leftrightarrow e^{\ln^2 y} (\ln^2 y + 1) = ((x+1)^2 + 1) e^{(x+1)^2} \quad (2).$$

Xét hàm số: $f(t) = e^t(t+1)$, $t \in [0; +\infty)$, ta có: $f'(t) = e^t(t+1) + e^t = e^t(t+2) > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ (2) ta có: } f(\ln^2 y) = f((x+1)^2) \Leftrightarrow \ln^2 y = (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x+1 \\ \ln y = -x-1. \end{cases}$$

Khi $\ln y = x+1 \Leftrightarrow y = e^{x+1}$. Do $1 \leq y \leq e^7$ nên $1 \leq e^{x+1} \leq e^7 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq 7 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 6$.

Hơn nữa $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (*).

Khi $\ln y = -x-1 \Leftrightarrow y = e^{-x-1}$. Do $1 \leq y \leq e^7$ nên $1 \leq e^{-x-1} \leq e^7 \Leftrightarrow 0 \leq -x-1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq -1$.

Hơn nữa $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$ (**).

Ứng với mỗi giá trị x cho ta một giá trị y thỏa đề.

Vậy từ (*) và (**) có 15 cặp số $(x; y), x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Câu 21. Chọn A

Điều kiện: $x > 2$.

$$\text{Ta có } \log_2(x-2) + 2x = y + 4(2^{y-1} + 1) \Leftrightarrow \log_2(2x-4) + 2x-4 = y+1 + 2^{y+1} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f(\log_2(2x-4)) = f(y+1) \Leftrightarrow \log_2(2x-4) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2^{y+1} + 4}{2} \Leftrightarrow x = 2^y + 2.$$

$$\text{Vì } 3 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 3 \leq 2^y + 2 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_2 2018.$$

$$\text{Do } y \text{ nguyên nên } y \in \{0; 1; \dots; 10\} \Rightarrow (x; y) \in \{(2^i + 2; i) \mid 0 \leq i \leq 10\}$$

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 22. Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3 < x \leq 10$. Đẳng thức $2x + \log_2(x-3) = 5 + y + 2^y$

$$\Leftrightarrow (2x-6) + 1 + \log_2(x-3) = y + 2^y \Leftrightarrow (2x-6) + \log_2(2x-6) = y + 2^y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$ có đạo hàm $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(\log_2(2x-6)) = f(y) \Leftrightarrow y = \log_2(2x-6) \Leftrightarrow 2x-6 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1} + 3.$$

$$\text{Theo giả thiết } x \leq 10 \Rightarrow 2^{y-1} + 3 \leq 10 \Rightarrow y \leq 1 + \log_2 7 \approx 3,8.$$

Do y nguyên dương nên ta có $y \leq 3$.

Khi đó $T = x + y = 2^{y-1} + 3 + y \leq 2^{3-1} + 3 + 3 = 10$. Vậy $\max T = 10$ khi $y = 3, x = 7$.

DẠNG 12**Bài toán lãi kép**

1. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng, lãi suất r một kì theo hình thức lãi kép. Tính số tiền thu về sau n kì

- Công thức tính nhanh: $A_n = a(1+r)^n$

2. Bài toán theo hình thức lãi kép, đầu mỗi kì gửi a đồng, lãi suất r một kì. Tính số tiền thu được sau n kì (gồm cả gốc và lãi)

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

3. Bài toán theo hình thức lãi kép, vay A đồng, lãi suất r , trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng. Hỏi sau bao nhiêu kì thì trả hết số nợ gồm cả gốc và lãi

- Công thức tính nhanh $m = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

4. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất r /kì. Sau đúng một kì rút ra m đồng và các kì sau cũng vậy. Hỏi số tiền còn lại trong tài khoản sau n ?

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

- ❖ **Lưu ý:** Trên đây là một số công thức tổng quát. Trong quá trình giải toán, các em cần biến đổi linh hoạt các đại lượng mà bài toán yêu cầu dựa trên công thức giải nhanh. Đồng thời kết hợp nhuần nhuyễn các bài toán trong trường hợp đề bài phức tạp.
- ❖ Việc chứng minh các công thức trên được tác giả trình bày thông qua bài tập rèn luyện. Ở mỗi bài giải chi tiết, tác giả sẽ làm theo cách tự luận để suy ra vấn đề, việc đưa ra công thức giải nhanh chỉ nhằm mục đích cho người đọc tham khảo, người đọc nên làm và hiểu theo cách tự luận sẽ thấy được cái hay của bài toán về lãi kép.

- Câu 1:** Ông A gửi vào ngân hàng số tiền 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6% /năm. Hỏi sau 5 năm tổng tất cả số tiền ông A thu về là bao nhiêu? Giả sử lãi suất không thay đổi và kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân.
- A. 148,58 (triệu đồng). B. 133,82 (triệu đồng).
C. 126,25 (triệu đồng). D. 141,85 (triệu đồng).
- Câu 2:** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
- A. 14 năm. B. 12 năm. C. 11 năm. D. 13 năm.
- Câu 3:** Đầu năm 2016 ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước đó. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?
- A. Năm 2023. B. Năm 2020. C. Năm 2021. D. Năm 2022.
- Câu 4:** Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% /tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?
- A. $50 \cdot (1,004)^{12}$ (triệu đồng). B. $50 \cdot 1 + 12 \times 0,04^{12}$ (triệu đồng).
C. $50 \cdot 1 + 0,04^{12}$ (triệu đồng). D. $50 \times 1,004$ (triệu đồng).
- Câu 5:** Một người gửi số tiền m triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Sau 5 năm số tiền người này nhận được là 500 triệu đồng. Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra. Tính số tiền m .
- A. $m = \frac{500}{1,06^5}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{500}{1,06}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{500}{1,006^5}$ (triệu đồng). D. $m = \frac{500}{1 + 5 \times 0,06}$ (triệu đồng).
- Câu 6:** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm người đó mới rút lãi thì số tiền lãi người đó nhận được là? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
- A. 20,128 triệu đồng. B. 70,128 triệu đồng.
C. 17,5 triệu đồng. D. 67,5 triệu đồng.
- Câu 7:** Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương

cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

- A. 2,01 tỷ đồng. B. 1,52 tỷ đồng. C. 2,31 tỷ đồng. D. 1,75 tỷ đồng.

Câu 8: Đầu năm 2017, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2017 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 20% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 5 tỷ đồng?

- A. Năm 2025. B. Năm 2026. C. Năm 2027. D. Năm 2024.

Câu 9: Một người đi làm với mức lương khởi điểm 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, mức lương một tháng của người này là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

- A. 15,77 triệu đồng. B. 14,73 triệu đồng. C. 21,97 triệu đồng. D. 16,87 triệu đồng.

Câu 10: Một người đi làm với mức lương khởi điểm là 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương được tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, tổng số tiền lương người này nhận được là bao nhiêu? Làm tròn đến hai chữ số thập phân.

- A. 3024 triệu đồng. B. 3235,68 triệu đồng.
C. 4507,89 triệu đồng. D. 3977,47 triệu đồng.

Câu 11: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

- A. 12 năm. B. 11 năm C. 10 năm. D. 13 năm.

Câu 12: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

- A. 12 năm. B. 11 năm C. 10 năm. D. 13 năm.

Câu 13: Tổng số tiền ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty năm 2016 là 300 triệu đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng trả tiền thuê mặt bằng công ty trong cả năm đó tăng 10% so với năm trước. Tổng số tiền ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty trong năm 2018 là

- A. 330 triệu đồng. B. 363 triệu đồng. C. 399,3 triệu đồng. D. 360 triệu đồng.

Câu 14: Ở địa phương X , người ta tính toán thấy rằng: nếu diện tích khai thác rừng hàng năm không đổi như hiện nay thì sau 50 năm nữa diện tích rừng sẽ hết, nhưng trên thực tế thì diện tích khai thác rừng tăng trung bình hàng năm là 6% /năm. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa diện tích rừng sẽ bị khai thác hết? Giả thiết trong quá trình khai thác, rừng không được trồng thêm, diện tích rừng tự sinh ra và mất đi (do không khai thác) là không đáng kể.

- A. 23. B. 24. C. 22. D. 21.

- Câu 15:** Theo một bài báo được công bố trên tạp chí Nature, trung bình làm cha ở 30 tuổi sẽ có 55 đợt biến cho con cái của mình. Đợt biến này tăng theo độ tuổi. Cứ tăng 1 tuổi, số lượng đợt biến sẽ tăng thêm 12% so với số lượng đợt biến ở trước đó. Hỏi sau đúng 50 năm, tức ở độ tuổi 80 lượng đợt biến là bao nhiêu?
- A. 17802. B. 15895. C. 14450. D. 16184.
- Câu 16:** Một người đi làm với mức lương khởi điểm 10 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 tháng lương của anh ta lại tăng thêm 12% so với tháng trước đó. Hỏi sau đúng 36 tháng làm việc, người này lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền lương? Làm tròn đến triệu đồng.
- A. 723 triệu đồng. B. 724 triệu đồng.
C. 725 triệu đồng. D. 726 triệu đồng.
- Câu 17:** Một người đi làm với mức lương khởi điểm m triệu đồng một tháng. Cứ sau 6 tháng lương của anh ta lại tăng thêm 10%. Hỏi sau đúng 36 tháng tổng lương người này lĩnh được là 500 triệu đồng. Tính số tiền m .
- A. $m = \frac{25}{3[(1,1)^6 - 1]}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{25}{3[(1,1)^7 - 1]}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{25}{3[(1,1)^5 - 1]}$ (triệu đồng). D. $m = \frac{50}{(1,1)^6 - 1}$ (triệu đồng).
- Câu 18:** Một sinh viên A trong thời gian 4 năm học đại học đã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất 3% năm (thủ tục vay một năm một lần vào thời gian đầu năm học). Khi ra trường A thất nghiệp nên chưa trả được tiền cho ngân hàng do vậy phải chịu lãi suất 8% / năm cho tổng số tiền vay gồm gốc và lãi của 4 năm học. Sau một năm thất nghiệp, sinh viên A cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ dần. Tổng số tiền mà sinh viên A nợ ngân hàng sau 4 năm học đại học và một năm thất nghiệp gần nhất với giá trị nào sau đây?
- A. 43.091.358 đồng. B. 48.621.980 đồng. C. 46.538.667 đồng. D. 45.188.656 đồng.
- Câu 19:** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) ít nhất gấp ba lần số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
- A. 15 năm. B. 14 năm. C. 17 năm. D. 16 năm.
- Câu 20:** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) ít nhất gấp sáu lần số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
- A. 23 năm. B. 25 năm. C. 26 năm. D. 24 năm.
- Câu 21:** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu **không** rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất **không** thay đổi và người đó **không** rút tiền ra?

A. 12 năm.

B. 11 năm.

C. 10 năm.

D. 13 năm.

Câu 22: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền 10 triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 0,5% thì sau 2 năm số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) là?

A. 255,591 (triệu đồng).

B. 254,320 (triệu đồng).

C. 254,591 (triệu đồng).

D. 255,320 (triệu đồng).

Câu 23: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền m (triệu đồng), lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 0,5% thì sau 2 năm số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) là 100 (triệu đồng). Tính số tiền m .

$$A. m = \frac{100}{201[(1,005)^{24} - 1]} \text{ (triệu đồng).}$$

$$B. m = \frac{100}{201[(1,005)^{25} - 1]} \text{ (triệu đồng).}$$

$$C. m = \frac{1}{2[(1,005)^{24} - 1]} \text{ (triệu đồng).}$$

$$D. m = \frac{1}{2[(1,005)^{25} - 1]} \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 24: Theo hình thức lãi kép, đầu mỗi tháng một người gửi đều đặn vào ngân hàng cùng một số tiền 10 (triệu đồng), lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) ít nhất là 200 triệu đồng?

A. 11 tháng.

B. 12 tháng.

C. 18 tháng.

D. 19 tháng.

Câu 25: Liên tục trong 20 năm, một người lao động luôn gửi vào một ngân hàng đúng 5.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng với lãi suất không đổi 0,65%/ tháng (nếu không rút tiền ra, lãi được nhập vào vốn để tính lãi cho kì tiếp theo). Hỏi sau 20 năm người đó có được số tiền (cả gốc và lãi) gần nhất số tiền nào dưới đây?

A. 2.850.000.000 đồng

B. 2.900.000.000 đồng

C. 2.950.000.000 đồng.

D. 3.000.000.000 đồng.

Câu 26: Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gửi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là 0,6%/ tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được (cả gốc và lãi) sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3.350.000.000 < A < 3.400.000.000$.B. $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$.C. $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$.D. $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$.

Câu 27: Một người gửi bảo hiểm cho con từ lúc con tròn 6 tuổi, hằng tháng anh ta đều đặn gửi vào tài khoản bảo hiểm của con triệu đồng với lãi suất 0,5% một tháng. Trong quá trình đó, người ta không rút tiền ra và giả sử lãi suất không thay đổi. Nếu muốn số tiền (cả gốc và lãi) rút ra lớn hơn 100 triệu đồng cũng là lúc con tròn 18 tuổi thì hằng tháng phải gửi vào tài khoản bảo hiểm tối thiểu khoảng bao nhiêu tiền? Làm tròn đến nghìn đồng.

A. 474 nghìn đồng.

B. 437 nghìn đồng.

C. 480 nghìn đồng.

D. 440 nghìn đồng.

Câu 28: Liên tục trong 25 năm, một người lao động luôn gửi vào một ngân hàng đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng với lãi suất không đổi 0,6%/ tháng. Hỏi sau 25 năm người đó có được số tiền (cả gốc và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 3.350.000.000 đồng.

B. 3.400.000.000 đồng.

C. 3.450.000.000 đồng.

D. 3.500.000.000 đồng.

- Câu 29:** Một người tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty bảo hiểm A với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty 12 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi 6%/năm. Hỏi sau đúng 18 năm kể từ ngày đóng lần đầu, người đó thu về tổng tất cả bao nhiêu tiền (cả gốc và lãi)? Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.
A. 429,43 triệu đồng. **B.** 293,32 triệu đồng. **C.** 412,23 triệu đồng. **D.** 393,12 triệu đồng.
- Câu 30:** Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong giai đoạn 10 năm hoạt động đầu tiên là 5 tỷ đồng. Biết rằng trong giai đoạn này, số tiền phải trả thuê mặt bằng năm sau luôn tăng thêm 10% so với tiền thuê mặt bằng của năm trước đó. Vậy số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm đầu tiên **gần nhất với** số tiền nào dưới đây?
A. 269,816 triệu đồng. **B.** 311,720 triệu đồng. **C.** 313,727 triệu đồng. **D.** 270,106 triệu đồng.
- Câu 31:** Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A **không** đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, kể từ ngày thứ hai trở đi lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại tăng thêm 4% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn dự trữ của trang trại A đủ dùng cho tối thiểu bao nhiêu ngày?
A. 39 ngày. **B.** 40 ngày. **C.** 41 ngày. **D.** 42 ngày.
- Câu 32:** Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong giai đoạn 10 năm hoạt động đầu tiên là 5 tỷ đồng. Biết rằng trong giai đoạn này, số tiền phải trả thuê mặt bằng năm sau luôn tăng thêm 10% so với tiền thuê mặt bằng của năm trước đó. Vậy số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 **gần nhất với** số tiền nào dưới đây?
A. 736,127 triệu đồng. **B.** 742,323 triệu đồng.
C. 733,260 triệu đồng. **D.** 739,751 triệu đồng.
- Câu 33:** Một người mới đi làm muốn gửi tiết kiệm tại ngân hàng đến khi đủ số tiền để mua xe máy. Mỗi tháng anh ta gửi đều đặn một số tiền vào ngân hàng để tiết kiệm, gửi trong 15 tháng theo hình thức lãi kép (tức là nếu đến kỳ hạn lãi mà không rút tiền thì lãi được cộng vào làm vốn). Giả sử anh ta cần 21 triệu đồng vừa đủ mua xe máy, lãi suất ngân hàng theo tháng là 0,75%. Hỏi mỗi tháng anh ta phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu?
A. 1 318 078 đồng. **B.** 1 327 964 đồng. **C.** 1 608 063 đồng. **D.** 1 322 000 đồng.
- Câu 34:** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 1%/tháng. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.
A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng). **B.** $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \times 1,03}{3}$ (triệu đồng). **D.** $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).
- Câu 35:** Một ngân hàng có chính sách hỗ trợ cho sinh viên nghèo vay vốn với lãi suất thấp. Sinh viên Nguyễn Văn Nam được ngân hàng đó cho vay mỗi tháng 1 triệu đồng trong thời gian 4 năm đại học với lãi suất 4,5%/ theo hình thức mỗi tháng lấy tiền mỗi lần vào đầu tháng, sau khi học xong 4 năm thì bắt đầu trả nợ. Giả sử sinh viên Nam sau khi ra trường có việc làm và có thể trả nợ

ngay sau tháng đầu tiên đi làm. Hỏi nếu sinh viên Nam trả nợ mỗi tháng 3 triệu đồng thì ít nhất sau bao nhiêu tháng thì Nam trả hết nợ cho ngân hàng? (Giả thiết sau khi Nam ra trường ngân hàng vẫn áp dụng lãi suất 0,5% một tháng).

- A. 19 (tháng). B. 20 (tháng). C. 18 (tháng). D. 21 (tháng).

Câu 36: Theo hình thức lãi kép, một người vay ngân hàng số tiền 500 triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Người này trả nợ đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng cùng một số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người này trả hết nợ bao gồm cả gốc lẫn lãi?

- A. 68 (tháng). B. 72 (tháng). C. 69 (tháng). D. 70 (tháng).

Câu 37: Theo hình thức lãi kép, một người vay ngân hàng với số tiền là A triệu đồng, lãi suất theo kì hạn 1 tháng là 1%. Người này trả nợ đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng cùng một số tiền là 10 triệu đồng thì sau đúng 5 năm người này trả hết nợ cả gốc và lãi cho ngân hàng. Tính số tiền vay A ?

- A. $A = \frac{1000[(1,01)^{60} - 1]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng). B. $A = \frac{1100[(1,01)^{60} - 1]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng).
C. $A = \frac{1010[(1,01)^{60} - 1]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng). D. $A = \frac{1001[(1,01)^{60} - 1]}{(1,01)^{60}}$ (triệu đồng).

Câu 38: Ông A gửi tiết kiệm vào ngân hàng 20 triệu đồng kỳ hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm theo hình thức lãi kép. Sau đúng 1 năm, ông A gửi thêm 30 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như lần gửi trước. Hỏi sau đúng 5 năm kể từ khi gửi lần đầu, ông A nhận được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi (lấy gần đúng đến hàng nghìn)?

- A. 51.518.000 đồng. B. 64.639.000 đồng. C. 51.334.000 đồng. D. 66.911.000 đồng.

Câu 39: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% / tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 2,22 triệu đồng. B. 3,03 triệu đồng. C. 2,25 triệu đồng. D. 2,20 triệu đồng.

Câu 40: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% / tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và sau đúng một năm kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền 50 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 4,95 triệu đồng. B. 4,42 triệu đồng. C. 4,5 triệu đồng. D. 4,94 triệu đồng.

Câu 41: Một người muốn có đủ 100 triệu đồng sau 24 tháng bằng cách cứ ngày mùng 1 hàng tháng gửi vào ngân hàng cùng một số tiền a đồng với lãi suất 0,6% / tháng, tính theo thể thức lãi kép. Giả định rằng trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền a gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 3.886.000 đồng. B. 3.910.000 đồng. C. 3.863.000 đồng. D. 4.142.000 đồng.

góp trong 12 tháng, với lãi suất $0,6\%$ / tháng. Hỏi mỗi tháng anh X phải trả cho cửa hàng số tiền là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. 1.948.927 đồng. B. 1.948.926 đồng. C. 2.014.545 đồng. D. 2.014.546 đồng.

Câu 48: Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ / tháng cứ đều đặn sau mỗi tháng kể từ ngày gửi người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (Biết lãi suất không thay đổi).

- A. 104 triệu đồng. B. 106 triệu đồng. C. 102 triệu đồng. D. 108 triệu đồng.

Câu 49: Bạn H trúng tuyển vào trường Đại Học Ngoại Thương nhưng vì lý do không đủ tiền đóng học phí nên H quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất 3% / năm. Ngay sau khi tốt nghiệp đại học bạn H thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi) với lãi suất theo cách tính mới là $0,25\%$ / tháng, trong vòng 5 năm. Tính số tiền mà bạn H phải trả cho ngân hàng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 323.582 đồng. B. 398.402 đồng. C. 309.718 đồng. D. 312.518 đồng.

Câu 50: Ông Nam vay ngân hàng 500 triệu đồng để mở cửa hàng điện dân dụng với lãi suất $0,8\%$ / tháng theo thỏa thuận như sau: Sau đúng 6 tháng từ ngày vay ông Nam bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau 1 tháng với số tiền trả mỗi tháng là 10 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi kể từ ngày vay, sau thời gian bao lâu ông Nam trả hết nợ cho ngân hàng?

- A. 74 tháng . B. 68 tháng . C. 69 tháng . D. 75 tháng .

BẢNG ĐÁP ÁN

1..B	2.B	3.C	4.C	5.A	6.A	7.D	8.B	9.A	10.C
11.A	12.B	13.B	14.B	15.B	16.B	17.A	18.C	19.D	20.B
21.A	22.A	23.A	24.D	25.B	26.A	27.A	28.B	29.D	30.C
31.D	32.D	33.A	34.B	35.B	36.D	37.A	38.B	39.C	40.D
41.C	42.B	43.C	44.A	45.C	46.A	47.A	48.A	49.C	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Số tiền thu được sau 5 năm là $T_n = 100 \cdot (1 + 0,06)^5 \approx 133,82$ triệu đồng.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r(\%)$ / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là $T_n = A \cdot (1 + r)^n$.

Câu 2: Chọn B

Số tiền thu được sau n năm là $T_n = 50 \cdot (1 + 0,06)^n$ triệu đồng.

Để $T_n \geq 100$ thì $50 \cdot (1 + 0,06)^n \geq 100 \Leftrightarrow 1,06^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06} 2 \Leftrightarrow n \geq 11,89...$

Vậy sau ít nhất 12 năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng.

Câu 3: Chọn C

Tổng số tiền trả lương cho nhân viên trong năm n ($n \geq 2017$) là $T_n = 1 \cdot (1 + 15\%)^{n-2016}$ tỷ đồng.

Để $T_n \geq 2$ thì $1 \cdot (1 + 15\%)^{n-2016} > 2 \Leftrightarrow n - 2016 > \log_{1,15} 2 \Leftrightarrow n > 2020,959...$

Vậy năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng là năm 2021.

Câu 4: Chọn C

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n tháng là: $A \times (1 + r)^n$.

Vậy sau một năm (tức là sau 12 tháng) gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là: $50 \times (1 + 0,04)^{12}$ (triệu đồng).

Câu 5: Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A \times (1 + r)^n$. Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là 500 triệu, nên ta có:

$$500 = m \times (1 + 0,06)^5 \Leftrightarrow m = \frac{500}{(1 + 0,06)^5} = \frac{500}{(1,06)^5}.$$

Câu 6: Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A \times (1 + r)^n$.

Sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là:

$$A_n = 50 \times (1 + 0,07)^5 \approx 70,128 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền lãi là:

$$70,128 - 50 = 20,128 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 7: Chọn D

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là $A(1+r)^n = 1.1,15^{2020-2016} \approx 1,75$ tỷ đồng.

Câu 8: Chọn B

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm thứ x là

$$A(1+r)^x = 1.1,2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_{1,2} 5 \approx 8,8. \text{ Vậy } x = 9 \text{ năm cần tìm là 2026.}$$

Câu 9: Chọn A

Mức lương một tháng của người này sau n năm là: $A(1+r)^{\frac{n}{3}} = 7.1,07^{\frac{36}{3}} \approx 15,77$

Câu 10: Chọn C

Tổng số tiền lương người này nhận trong 3 năm đầu là: $7.3.12 = 252$ triệu đồng.

Vậy sau đúng 36 năm, tổng số lương người này nhận được là:

$$S = 252 + 252(1+0,07)^1 + 252(1+0,07)^2 + \dots + 252(1+0,07)^{11} = 252 \cdot \frac{(1+0,07)^{12} - 1}{0,07} \approx 4507,89.$$

Câu 11: Chọn A

Số tiền gửi ban đầu là A thì số tiền người đó thu về (cả gốc và lãi) sau n năm là $A(1+0,061)^n$

Ta n cần nhỏ nhất sao cho $A(1+0,061)^n \geq 2A \Leftrightarrow (1,061)^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,061} 2 \approx 11,7062.$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 12: Chọn B

Số tiền gửi ban đầu là A thì số tiền người đó thu về (cả gốc và lãi) sau n năm là $A(1+0,066)^n$

Ta n cần nhỏ nhất sao cho $A(1+0,066)^n \geq 2A \Leftrightarrow (1,066)^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,066} 2 \approx 10,8451.$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền ban đầu và lãi) ít nhất gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 13: Chọn B

Gọi N là số tiền mà ông A dùng để trả tiền thuê mặt bằng công ty năm 2016

$$\Rightarrow N = 300 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền mà ông A cần trả năm 2018 là: $N(1+10\%)^2 = 300(1+0,1)^2 = 363$ (triệu đồng).

Câu 14: Chọn B

Gọi S là diện tích khai thác rừng hàng năm không đổi như hiện nay của địa phương X

$\Rightarrow$ tổng diện tích rừng của địa phương là: $50S$

Nhưng trên thực tế thì diện tích khai thác rừng tăng trung bình hàng năm là 6% /năm, nên diện tích rừng khai thác năm thứ n là: $S(1+6\%)^{n-1} = S(1+0,06)^{n-1}.$

Vậy tổng diện tích rừng bị khai thác sau n năm là:

$$S + S(1+0,06) + S(1+0,06)^2 + \dots + S(1+0,06)^{n-1} = S \frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06}.$$

Sau n năm rừng bị khai thác hết thì $S \frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} = 50S \Leftrightarrow 1,06^n = 4 \Leftrightarrow n = \log_{1,06} 4 \approx 23,79$

Vậy sau 24 năm thì rừng bị khai thác hết

Câu 15: Chọn B

Gọi A là số lượng đột biến mà trung bình làm cha ở tuổi 30 gây ra cho con cái của mình
 $\Rightarrow A = 55$ (đột biến).

Gọi r là tốc độ tăng đột biến $\Rightarrow r = 12\%$.

Sau n năm số lượng đột biến là: $A(1+r)^n$

Vậy sau 50 năm thì số lượng đột biến là: $55(1+12\%)^{50} \approx 15895$.

Câu 16: Chọn B

Ta cần tìm n sao cho $75(1+0,054)^n > 100 \Leftrightarrow n > \log_{1,054} \frac{4}{3} \approx 5,47$

Câu 17: Chọn A

Số tiền lãi người này nhận được sau 5 năm là: $50(1+0,07)^5 - 50 \approx 20,128$

Câu 18: Chọn B

Tổng số tiền thu được sau n năm là

$$S = 20(1+0,06)^n + 20(1+0,06)^{n-1} + \dots + 20(1+0,06) = 20(1+0,06) \frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06}$$

$$\text{Vậy } 20(1+0,06) \frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} > 400 \Rightarrow n > 12,993$$

Câu 16: Chọn B

Tổng số tiền lương người này nhận được cho 3 tháng làm việc đầu tiên là 30 triệu đồng.

Tổng số tiền lương người này nhận được sau 36 tháng làm việc là

$$30 + 30(1+0,12)^1 + 30(1+0,12)^2 + \dots + 30(1+0,12)^{11} = 30 \frac{(1+0,12)^{12} - 1}{0,12} \approx 724 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 17: Chọn A

Tổng số tiền lương người này nhận được cho 6 tháng làm việc đầu tiên là $6m$.

Tổng số tiền lương người này nhận được sau đúng 36 tháng là

$$6m + 6m(1+0,1)^1 + 6m(1+0,1)^2 + \dots + 6m(1+0,1)^5 = 6m \frac{(1+0,1)^6 - 1}{0,1} = 500.$$

$$\text{Do đó } m = \frac{25}{3[(1,1)^6 - 1]} \text{ triệu đồng.}$$

Câu 18: Chọn C

Tổng số tiền A (gồm cả gốc và lãi) nợ ngân hàng sau 4 năm học là

$$A = 10(1+0,03)^4 + 10(1+0,03)^3 + 10(1+0,03)^2 + 10(1+0,03)$$

$$= 10(1,03) \frac{(1,03)^4 - 1}{1,03 - 1} = \frac{1030((1,03)^4 - 1)}{3}$$

$$\text{Tổng số tiền nợ sau 1 năm ra trường là } A(1+0,08)^1 = \frac{1030((1,08)^4 - 1)}{3}(1+0,08) \approx 46,538667.$$

Câu 19: Chọn D

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,075)^n$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$$a(1+0,075)^n \geq 3a \Leftrightarrow (1,075)^n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,075} 3 \approx 15,1908.$$

Vậy sau ít nhất 16 năm thì người này sẽ thu về số tiền cả gốc lẫn lãi ít nhất gấp ba lần số tiền gửi ban đầu.

Câu 20: Chọn B

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,075)^n$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$$a(1+0,075)^n \geq 6a \Leftrightarrow (1,075)^n \geq 6 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,075} 6 \approx 24,775.$$

Vậy sau ít nhất 25 năm thì người này sẽ thu về số tiền cả gốc lẫn lãi ít nhất gấp sáu lần số tiền gửi ban đầu.

Câu 21: Chọn A

Gọi a là số tiền gửi ban đầu, n là số năm gửi. Số tiền người đó thu về (cả gốc lẫn lãi) sau n năm là $a(1+0,061)^n$ và số tiền lãi người đó thu về là $a(1+0,061)^n - a$. Ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho:

$$a(1+0,061)^n - a \geq a \Leftrightarrow (1,061)^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,061} 2 \approx 11,7062.$$

Vậy sau ít nhất 12 năm thì người này sẽ thu về số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu.

Câu 22: Chọn A

Tổng số tiền người này thu về là:

$$10(1+0,005)^{24} + 10(1+0,005)^{23} + \dots + 10(1+0,005)^1 \\ = 10(1+0,005) \cdot \frac{(1+0,005)^{24} - 1}{0,005} \approx 255,591.$$

Câu 23: Chọn A

Số tiền người này thu về sau 2 năm là:

$$m(1+0,005)^{24} + m(1+0,005)^{23} + \dots + m(1+0,005)^1 = m(1+0,005) \cdot \frac{(1+0,005)^{24} - 1}{0,005}.$$

Theo bài ra ta có

$$m(1+0,005) \cdot \frac{(1+0,005)^{24} - 1}{0,005} = 100 \Leftrightarrow m = \frac{100 \cdot 0,005}{1,005 \cdot [(1+0,005)^{24} - 1]} = \frac{100}{201 \cdot [(1,005)^{24} - 1]}.$$

Câu 24: Chọn D

Số tiền người này thu về sau n tháng là

$$10(1+0,01)^n + 10(1+0,01)^{n-1} + \dots + 10(1+0,01)^1 = 10(1+0,01) \cdot \frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01}.$$

Theo bài ra ta có

$$10(1+0,01) \cdot \frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01} = 200 \Leftrightarrow (1+0,01)^n - 1 = \frac{200 \cdot 0,01}{10 \cdot 1,01} = \frac{20}{101} \Leftrightarrow (1,01)^n = \frac{121}{101}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,01} \left(\frac{121}{101} \right) \approx 18,1572.$$

Vậy sau ít nhất 19 tháng thì số tiền người này thu về (cả gốc và lãi) ít nhất là 200 triệu đồng.

Câu 25: Chọn B

Số tiền thu được sau 20.12=240 tháng là:

$$P_n = P_0(1+r) + P_0(1+r)^2 + P_0(1+r)^3 + \dots + P_0(1+r)^{240} = P_0(1+r) \left(\frac{(1+r)^{240} - 1}{r} \right) = 2891,6 \text{ (tr)}$$

$$\text{Tổng quát: } P_n = \frac{P_0}{r} ((1+r)^n - 1)(1+r)$$

Trong đó P_n : số tiền thu được sau n năm; P_0 là số tiền gửi ban đầu; r là lãi suất không đổi.

Tính ra = 2891,6 triệu

Câu 26: Chọn A

Số tiền thu được sau 25.12=300 tháng là:

$$P_n = \frac{P_0}{r} ((1+r)^n - 1)(1+r) = \frac{4}{0,006} ((1+0,006)^{300} - 1)(1+0,006) = 3364,866655 \text{ (tr)}$$

Câu 27: Chọn A

Số tiền nhận được sau 12 năm=12x12=144 tháng đóng bảo hiểm cho con là:

$$P_n = m(1+0,005) + m(1+0,005)^2 + m(1+0,005)^3 + \dots + m(1+0,005)^{144} > 100$$

$$\Leftrightarrow m(1+0,005) \left(\frac{(1+0,005)^{144} - 1}{0,005} \right) > 100 \Leftrightarrow m > 0,474 \text{ (tr)}$$

Câu 28: Chọn B

Số tiền thu được sau 25.12=300 tháng là:

$$P_n = \frac{P_0}{r} ((1+r)^n - 1)(1+r) = \frac{4}{0,006} ((1+0,006)^{300} - 1)(1+0,006) = 3364,866655 \text{ (tr)}$$

Câu 29: Chọn D

Số tiền có sau một năm người đó đóng là: $a \cdot 1+r$ triệu đồng

Số tiền có sau hai năm người đó đóng là: $\left[a \cdot 1+r + a \right] \cdot 1+r = a \cdot \frac{1+r^2-1}{r} \cdot 1+r$ triệu đồng

Số tiền có sau ba năm người đó đóng là: $a \cdot \frac{1+r^3-1}{r} \cdot 1+r$ triệu đồng.

Số tiền có sau n năm người đó đóng là: $a \cdot \frac{1+r^n-1}{r} \cdot 1+r$ triệu đồng.

Vậy sau 18 năm, người đó thu về tổng tất cả là: $A = \frac{12}{0,06} (1+0,06) \left[0,06^{18} - 1 \right] \approx 393,12$ triệu đồng.

Câu 30: Chọn C

Gọi số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm đầu tiên là a thì:

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 2 là: $a(1+r)$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 3: $a(1+r)^2$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 4: $a(1+r)^3$ triệu đồng.

Số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10: $a(1+r)^{10}$ triệu đồng.

Tổng số tiền công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong 10 năm là:

$$a(1+r)^{10} + a(1+r)^9 + \dots + a(1+r) + a = a \cdot \frac{1+r^{10}-1}{r} \text{ triệu đồng.}$$

$$\text{Theo bài ra ta có } 5000 = a \cdot \frac{1+0,1^{10}-1}{0,1} \Leftrightarrow a \simeq 313727 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 31: Chọn D

Gọi lượng thức ăn dự trữ đủ cho 100 ngày là a , thì số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày đầu tiên là $\frac{a}{100}$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 2 là: $\frac{a}{100}(1+0,04)$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 3 là: $\frac{a}{100}(1+0,04)^2$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ 4 là: $\frac{a}{100}(1+0,04)^3$

Số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong ngày thứ n là: $\frac{a}{100}(1+0,04)^{n-1}$

Tổng số lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại trong n ngày là: $\frac{a}{100} \cdot \frac{1+0,04^n-1}{0,04}$

$$\text{Theo bài ra ta có: } a = \frac{a}{100} \cdot \frac{1+0,04^n-1}{0,04} \Leftrightarrow n = \log_{1,04} 100 \cdot (0,04) + 1 \simeq 41,035$$

Vậy lượng thức ăn dự trữ của trang trại A đủ dùng cho tối thiểu 42 ngày.

Câu 32: Chọn D

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm đầu tiên là a .

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 2 là $a + 0,1a = 1,1a$.

Số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 3 là $1,1a + 0,1 \times 1,1a = (1,1)^2 a$.

Tương tự, ta có số tiền phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 là $(1,1)^9 a$.

Do đó tổng số tiền mà công ty phải trả cho thuê mặt bằng trong 10 năm đầu tiên là

$$a + 1,1a + (1,1)^2 a + \dots + (1,1)^9 a = a \cdot \frac{(1,1)^{10} - 1}{0,1} = 5 \cdot 10^9 \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 10^8}{(1,1)^{10} - 1}.$$

Vậy số tiền mà công ty A phải trả cho thuê mặt bằng trong năm thứ 10 là

$$(1,1)^9 \times a = 739751794,9.$$

Câu 33: Chọn A

Gọi A là số tiền mỗi tháng người đó gửi vào ngân hàng, r là lãi suất theo tháng.

Cuối tháng thứ nhất, người đó sẽ nhận được với số tiền là $A(1+r)$.

Đầu tháng thứ hai, người đó sẽ nhận được với số tiền là $A + A(1+r)$.

Cuối tháng thứ hai, người đó sẽ nhận được với số tiền là

$$A + A(1+r) + [A + A(1+r)]r = A(1+r) + A(1+r)^2.$$

Tiếp tục như vậy, cuối tháng thứ n , người đó sẽ nhận được với số tiền là:

$$B = A(1+r) + A(1+r)^2 + \dots + A(1+r)^n = \frac{A(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Vậy số tiền mỗi tháng mà người đó gửi vào ngân hàng là:

$$A = \frac{Br}{(1+r)[(1+r)^n - 1]} = \frac{21 \times 10^6 \times 0,0075}{1,0075(1,0075^{15} - 1)} \approx 1318018,617$$

Câu 34: Chọn B

Xét bài toán: Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi m là số tiền mà ông A phải trả hàng tháng sau khi vay ngân hàng một tháng, r là lãi suất mỗi tháng, số tiền ông A nợ ngân hàng là B .

Sau một tháng kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B + B.r - m = B(1+r) - m.$$

Sau hai tháng kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B(1+r) - m + [B(1+r) - m]r - m = B(1+r)^2 - [m + m(1+r)].$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Sau tháng thứ n , kể từ ngày vay Ông A còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B(1+r)^n - [m + (1+r)m + (1+r)^2 m + \dots + (1+r)^{n-1} m] = B(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Câu 35: Chọn B

Tổng số tiền Nam phải trả sau 4 năm đại học là

$$A = a(1+r)^{48} + a(1+r)^{47} + \dots + a(1+r) = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^{48} - 1}{r} \approx 54,368 \text{ (triệu đồng)}.$$

Trong đó $a = 1, r = 0,005$;

Sau khi ra trường:

Số tiền trả tháng là $m = 3$ (triệu đồng); lãi suất lúc này vẫn là $r = 0,005$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = A(1+r) - m$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+r) - m = A(1+r)^2 - m - m(1+r)$.

Số tiền Nam còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = A(1+r)^n - m - m(1+r) - \dots - m(1+r)^{n-1} = A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sau tháng thứ n hết nợ nên $A_n = 0$, vì vậy

$$A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{m}{m-Ar} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{m}{m-Ar}$$

Thay số với $m = 3, r = 0,005, A = 54,368$ ta được $n \approx 19,044$.

Vậy sau ít nhất 20 tháng thì Nam trả hết nợ cho ngân hàng.

Câu 36: Chọn D

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = 500(1+0,01) - 10$.

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+0,01) - 10 = 500(1+0,01)^2 - 10 - 10(1+0,01)$.

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = 500(1+0,01)^n - [10 + 10(1+0,01) + \dots + 10(1+0,01)^{n-1}] = 500(1+0,01)^n - 10 \frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01}.$$

Sau tháng thứ n hết nợ nên $A_n = 0$, vì vậy

$$500(1+0,01)^n - 10 \frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+0,01)^n - 1}{(1+0,01)^n} = \frac{500 \times 0,01}{10}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(1+0,01)^n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1+0,01)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,01} 2 \approx 69,66.$$

Vậy sau ít nhất 70 tháng thì người đó trả hết nợ cho ngân hàng.

Câu 37: Chọn A

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ nhất là $A_1 = A(1+0,01) - 10$.

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ hai là $A_2 = A_1(1+0,01) - 10 = A(1+0,01)^2 - 10 - 10(1+0,01)$.

Số tiền còn phải trả sau tháng thứ n là

$$A_n = A(1+0,01)^n - [10 + 10(1+0,01) + \dots + 10(1+0,01)^{n-1}] = A(1+0,01)^n - 10 \frac{(1+0,01)^n - 1}{0,01}.$$

Sau tháng thứ 60 hết nợ nên $A_{60} = 0$, vì vậy

$$A(1+0,01)^{60} - 10 \frac{(1+0,01)^{60} - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow A(1+0,01)^{60} = 1000 \left[\frac{(1+0,01)^{60} - 1}{0,01} \right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1000 \left[\frac{(1,01)^{60} - 1}{0,01} \right]}{(1,01)^{60}}.$$

Câu 38: Chọn B

Áp dụng công thức lãi kép, ta có:

Sau năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản ông A là:

$$20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 20 = 21,2 \text{ triệu đồng (do người đó gửi thêm vào 30 triệu).}$$

Sau năm thứ 5 số tiền có trong tài khoản của ông A là:

$$21,2 \cdot (1 + 0,06)^4 = 24,638820 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy sau đúng 5 năm ông A nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi (lấy gần đúng đến hàng nghìn) là: 64.639.000 đồng.

Câu 39: Chọn C

Ta có: $A = 100$ triệu đồng, $r = 1\%$. Gọi số tiền ông A phải trả hàng tháng là X .

$$\text{Sau } n \text{ tháng thì ông A còn nợ số tiền là: } S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng 5 năm tức 60 tháng trả hết nợ thì $S_{60} = 0$

$$\text{nên } X = \frac{A(1+r)^{60} \cdot r}{(1+r)^{60} - 1} \approx 2,2245 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền mỗi tháng ông A cần trả cho ngân hàng gần 2,225 triệu đồng.

Câu 40: Chọn D

Gọi m, r, T_n, a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất $n=1$ thì còn lại: $T_1 = m \cdot r + 1 - a$.

Sau khi hết tháng thứ hai $n=2$ thì còn lại: $T_2 = [m \cdot r + 1 - a] \cdot r + 1 - a$

$$= m \cdot r + 1^2 - a \cdot r + 1 - a = m \cdot r + 1^2 - a \cdot r + 2 = m \cdot r + 1^2 - \frac{a}{r} [r + 1^2 - 1].$$

Sau khi hết tháng thứ ba $n=3$ thì còn: $T_3 = \left[m \cdot r + 1^2 - \frac{a}{r} [r + 1^2 - 1] \right] \cdot r + 1 - a$

$$= m \cdot r + 1^3 - \frac{a}{r} [r + 1^3 - 1].$$

Bằng phương pháp quy nạp ta có kết quả:

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m \cdot r + 1^n - \frac{a}{r} [r + 1^n - 1]$.

Áp dụng công thức trên, ta có:

$$T_{12} = 50 = 100(0,01+1)^{12} - \frac{a}{0,01} [(0,01+1)^{12} - 1] \approx 4,94 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền mỗi tháng ông A cần trả cho ngân hàng gần 4,94 triệu đồng.

Câu 41: Chọn C

Số tiền cả gốc và lãi người này thu về sau 24 tháng là:

$$a \cdot 1 + 0,6\%^{24} + a \cdot 1 + 0,6\%^{23} + \dots + a \cdot 1 + 0,6\%^{1} = 100.$$

$$\Leftrightarrow a \cdot 1 + 0,6\% \cdot \frac{1 + 0,6\% - 1}{0,6\%} = 100 \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 0,6\%}{1 + 0,6\% \times 1 + 0,6\% - 1} \approx 3,8631.$$

Vậy hàng tháng người đó cần gửi vào ngân hàng cùng một số tiền $a = 3.863.000$ đồng.

Câu 42: Chọn B

Cách gửi thứ nhất có lãi suất 0,5%/tháng.

Tổng số tiền thu về sau một năm theo cách gửi thứ nhất là

$$5 \cdot 1 + 0,5\%^{12} + 5 \cdot 1 + 0,5\%^{11} + \dots + 5 \cdot 1 + 0,5\%^{1} \\ = 5 \cdot 1 + 0,5\% \cdot \frac{1 + 0,5\%^{12} - 1}{0,5\%} \approx 61,986 \text{ (triệu đồng).}$$

Theo cách gửi thứ hai thì sau một năm thu về số tiền

$$T = 5 \times 12 + 0,2 \times 12 = 63,4 \text{ (triệu đồng).}$$

Do đó số tiền lãi của cách hai nhiều hơn cách một khoảng 400.000 đồng.

Câu 43: Chọn C

Tổng số tiền Nam nợ ngân hàng sau đúng 4 năm học đại học là

$$A = 10 \cdot 1 + 7,8\% \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 7,8\% \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 7,8\% \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 7,8\% \quad (\text{triệu đồng})$$

Sau khi tốt nghiệp ra trường:

$$\text{Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ nhất là: } A_1 = A \cdot 1 + 0,7\% - m.$$

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ hai là

$$A_2 = A_1 \cdot 1 + 0,7\% - m = A \cdot 1 + 0,7\% \cdot 2 - [m + m \cdot 1 + 0,7\%];$$

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ ba là

$$A_3 = A_2 \cdot 1 + 0,7\% - m = A \cdot 1 + 0,7\% \cdot 3 - [m + m \cdot 1 + 0,7\% + m \cdot 1 + 0,7\% \cdot 2];$$

...

Số tiền còn nợ ngân hàng sau tháng thứ 48 (4 năm) là

$$A_{48} = A \cdot 1 + 0,7\% \cdot 48 - [m + m \cdot 1 + 0,7\% + m \cdot 1 + 0,7\% \cdot 2 + \dots + m \cdot 1 + 0,7\% \cdot 47]$$

$$= A \cdot 1 + 0,7\% \cdot 48 - m \cdot \frac{1 + 0,7\% \cdot 48 - 1}{0,7\%}.$$

Vì sau đúng 4 năm ra trường trả hết nợ nên $A_{48} = 0$

$$\Leftrightarrow A \cdot 1 + 0,7\% \cdot 48 - m \cdot \frac{1 + 0,7\% \cdot 48 - 1}{0,7\%} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{A \times 0,7\% \times 1 + 0,7\% \cdot 48}{1 + 0,7\% \cdot 48 - 1} \approx 1,191$$

Vậy số tiền m mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng là $m = 1.191.000$ (đồng).

Câu 44: Chọn A

Gọi số tiền vay của mỗi người lần lượt là a, b, c ta có: $a + b + c = 10^9$ đồng. gọi m là số tiền trả đều đặn hàng tháng của mỗi người.

$$\text{An sau đúng 10 tháng trả hết nợ nên } a = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m[(1,007)^{10} - 1]}{0,007(1,007)^{10}}$$

$$\text{Bình sau đúng 15 tháng trả hết nợ nên } b = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m[(1,007)^{15} - 1]}{0,007(1,007)^{15}}$$

$$\text{Cường sau đúng 25 tháng trả hết nợ nên } c = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m[(1,007)^{25} - 1]}{0,007(1,007)^{25}}$$

$$\text{Vậy } \frac{m[(1,007)^{10} - 1]}{0,007(1,007)^{10}} + \frac{m[(1,007)^{15} - 1]}{0,007(1,007)^{15}} + \frac{m[(1,007)^{25} - 1]}{0,007(1,007)^{25}} = 10^9 \Rightarrow m \approx 2,14227 \cdot 10^7 \text{ đồng}$$

Câu 45: Chọn C

Tổng số tiền người này nhận được sau đúng n tháng kể từ ngày gửi là:

$$\begin{aligned}
 A_n &= 30 \cdot (1 + 0,0048)^n + 1 \cdot (1 + 0,0048)^{n-1} + 1 \cdot (1 + 0,0048)^{n-2} + \dots + 1 \cdot (1 + 0,0048)^1 \\
 &= 30 \cdot (1 + 0,0048)^n + 1,0048 \cdot \frac{(1,0048)^n - 1}{0,0048} = (1,0048)^n \cdot \left(30 + \frac{1}{1,0048} \right) - \frac{1,0048}{0,0048} \geq 50 \\
 \Leftrightarrow (1,0048)^n &\geq \frac{50 + \frac{1,0048}{0,0048}}{30 + \frac{1}{0,0048}} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,0048} \frac{50 + \frac{1,0048}{0,0048}}{30 + \frac{1}{0,0048}} \approx 17,634
 \end{aligned}$$

Vậy sau ít nhất 18 tháng người này thu về ít nhất 50 triệu đồng.

Câu 46: Chọn A

Theo dự định số tiền cần trả hàng tháng bằng

$$m = A_1 \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 200 \times 0,006 \times \frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60} - 1} = \frac{6}{5} \times \frac{(1,006)^{60}}{(1,006)^{60} - 1}$$

Số tiền còn nợ ngân hàng sau 12 tháng là

$$A_{12} = A(1+i)^{12} - \left[m + m(1+i) + \dots + m(1+i)^{11} \right] = A(1+i)^{12} - m \cdot \frac{(1+i)^{12} - 1}{i} = 165,53 \quad \text{triệu đồng}$$

Gọi n là số tháng tính từ thời điểm hết 12 tháng đến lúc trả hết nợ có

$$\begin{aligned}
 A_{12} \cdot (1+i)^n - \left[9 + 9 \cdot (1+i) + \dots + 9 \cdot (1+i)^{n-1} \right] &= 0 \Leftrightarrow A_{12} \cdot (1+i)^n - 9 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0 \\
 \Leftrightarrow (1,006)^n (1500 - A_{12}) &= 1500 \Leftrightarrow n = \log_{1,006} \frac{1500}{1500 - A_{12}} \approx 19,55
 \end{aligned}$$

Vậy anh Nam cần ít nhất $12 + 20 = 32$ tháng để trả hết nợ.

Câu 47: Chọn A

Đặt $\begin{cases} A = 47tr - 25tr = 22tr \\ r = 0,006 \end{cases}$ và gọi X là số tiền trả mỗi tháng cho cửa hàng, ta có:

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1 trả: $T_1 = A + rA - X = A(1+r) - X$

Tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + rT_1 - X = T_1(1+r) - X = A(1+r)^2 - X(1+(r+1))$

.....

Tháng thứ 12: $T_{12} = A(1+r)^{12} - X(1+(r+1)+(r+1)^2+\dots+(r+1)^{11})$

Trở góp xong, nên: $T_{12} = 0 \Leftrightarrow X \approx 1,948927$ (triệu đồng)

Câu 48: Chọn A

Đặt $\begin{cases} A = 100 \\ r = 0,006, \text{ ta có:} \\ X = 0,5 \end{cases}$

Số tiền còn lại sau tháng thứ 1: $T_1 = A + rA - X = A(1+r) - X$

Tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + rT_1 - X = T_1(1+r) - X = A(1+r)^2 - X(1+(r+1))$

Tháng thứ 3: $T_3 = T_2 + rT_2 - X = T_2(1+r) - X = A(1+r)^3 - X(1+(r+1)+(r+1)^2)$

.....

$$\text{Tháng 36: } T_{36} = T_{35} + rT_{35} - X = T_{35}(1+r) - X = A(1+r)^{36} - X(1+(r+1)+(r+1)^2+\dots+(r+1)^{35})$$

$$\text{Vậy sau đúng 36 tháng: } T_{36} = A(1+r)^{36} - X(1+(r+1)+(r+1)^2+\dots+(r+1)^{35}) \approx 104,005 \text{ triệu.}$$

Câu 49: Chọn C

$$\text{Tổng tiền H nợ sau 4 năm: } A = 4(1+0,03)^4 + 4(1+0,03)^3 + 4(1+0,03)^2 + 4(1+0,03)^1.$$

Gọi X là số tiền H trả mỗi tháng sau khi tốt nghiệp và $r = 0,25\%$.

$$\text{Số tiền còn lại sau 1 tháng trả nợ: } T_1 = A + rA - X = A(1+r) - X$$

$$\text{Sau 60 tháng: } T_{60} = A(1+r)^{60} - X(1+(r+1)+(r+1)^2+\dots+(r+1)^{59}).$$

$$\text{Trả hết nợ, nên: } T_{60} = 0 \Leftrightarrow X \approx 0,3097 \text{ (triệu đồng).}$$

$$100.(1,01)^3 - m \cdot \frac{[1,01^3 - 1]}{0,01} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 50: Chọn A

Sau đúng 6 tháng từ ngày vay ông Nam thì số tiền ông nợ ngân hàng là $500.1,008 = 504$ triệu

$$\text{Áp dụng CT } a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \text{ ta có: } 1000000 = \frac{504.10^6.0,8\%(1+0,08\%)^n}{(1+0,8\%)^n - 1}$$

Suy ra: $n = 63$. Vậy sau 69 tháng anh Nam trả hết số tiền trên

Giải thích công thức

Gọi a là số tiền trả hàng tháng.

$$\text{Cuối tháng 1, nợ: } A(1+r).$$

$$\text{Trả } a \text{ đồng nên còn nợ: } A(1+r) - a.$$

$$\text{Cuối tháng 2, nợ: } [A(1+r) - a](1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r).$$

$$\text{Trả } a \text{ đồng nên còn nợ: } A(1+r)^2 - a(1+r) - a.$$

$$\text{Cuối tháng 3, nợ: } [A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r).$$

$$\text{Trả } a \text{ đồng nên còn nợ: } A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a.$$

.

$$\text{Cuối tháng } n, \text{ nợ: } (1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r).$$

$$\text{Trả } a \text{ đồng nên còn nợ: } A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r) - a$$

Trả hết nợ khi

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r) - a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

.

DẠNG 13**Bài toán liên quan đến tăng trưởng**

- Câu 1.** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0 \cdot e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người.
- A. 2023 . B. 2025 . C. 2027 . D. 2020 .
- Câu 2.** Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của một nước sẽ hết sau 50 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế nên mức tiêu thụ dầu tăng lên 5% mỗi năm. Giả sử N là số năm tiêu thụ hết số dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên. Tìm giá trị N .
- A. 26 . B. 24 . C. 25 . D. 27 .
- Câu 3.** Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}})$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).
- A. $t \approx 1,65$ giờ. B. $t \approx 1,61$ giờ. C. $t \approx 1,63$ giờ. D. $t \approx 1,50$ giờ.
- Câu 4.** Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng của năm sau tăng 10% so với mỗi tháng của năm trước. Mỗi khi lĩnh lương, anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu, biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 50% giá trị chiếc xe?
- A. 11 . B. 12 . C. 10 . D. 13 .
- Câu 5.** Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, $t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì tỉ số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.
- A. Sau khoảng 25 tháng . B. Sau khoảng 24 tháng.
- C. Sau khoảng 22 tháng . D. Sau khoảng 23 tháng.
- Câu 6.** Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(t) = m_0 \cdot 2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị “con”) được nuôi tại thời điểm ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu con?
- A. 7340032 con. B. 874496 con. C. 2007040 con. D. 4014080 con.
- Câu 7.** Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0 e^{-xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

D. 124.

- D. 3 giờ 9 phút.**

- D. 41.**

- D. 165269 (nghìn đồng).**

- D. 2054.**

- D. 2037.**

- D. 15 (giờ).**

- Câu 14.** Khối lượng chất đã bị phân rã sau thời gian t được xác định bởi công thức $\Delta m = m_0 \cdot \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right)$, trong đó: m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu; T là chu kỳ bán rã. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 20 phút. Ban đầu một mẫu chất đó có khối lượng là 2gram. Hỏi sau 1 giờ 40 phút, lượng chất còn lại bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?
- A. 19,37% . B. 3,125% . C. 6,25% . D. 87,05% .
- Câu 15.** Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm, với công thức $C = A(1+r)^n$, lãi suất $r = 12\%$ một năm. Trong đó C là số tiền nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau thời gian n năm. Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để sau n năm ông Nam nhận được số tiền lãi hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không thay đổi).
- A. 5 . B. 2 . C. 4 . D. 3 .
- Câu 16.** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?
- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.
- Câu 17.** Công ty bất động sản Hoàng Thổ đang đầu tư xây dựng và kinh doanh khu nghỉ dưỡng. Công ty dự định tổ chức quảng bá theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu cứ sau n lần phát quảng cáo thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó tới khu nghỉ dưỡng tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 65.3^{-0.13n}}$. Hỏi ít nhất cần bao nhiêu lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%?
- A. 30 . B. 29 . C. 39 . D. 31 .
- Câu 18.** Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}$ (%). Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 60%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất? (Giả sử khoảng thời gian từ lúc thu hoạch gỗ đến khi xây dựng công trình đó là không đáng kể).
- A. 4238 . B. 8243 . C. 3248 . D. 2483 .
- Câu 19.** Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất 1,85% một quý. Hỏi thời gian nhanh nhất là bao lâu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?
- A. 19 quý. B. 15 quý. C. 16 quý. D. 20 quý.
- Câu 20.** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất 1,85% trên một quý. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?
- A. 20 quý. B. 19 quý. C. 14 quý. D. 15 quý.

- Câu 21.** Quan tâm tới vấn đề cải thiện việc làm của huyện A thuộc tỉnh miền núi địa đầu Tổ quốc, Sở Lao động - Thương binh và Xã hội tiến hành tạo điều kiện tạo việc làm cho những người ở độ tuổi lao động dưới hai hình thức lao động theo hợp tác xã tại địa phương hoặc tìm kiếm việc làm ở các khu công nghiệp lớn ở trong nước. Cho thấy sau n năm mức độ việc làm có thu nhập ổn định cho người dân tăng theo công thức $A_n = \frac{1}{1 + 39 \cdot \pi^{-0,25n}}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, đơn vị huyện A có tỉ lệ lao động có thu nhập ổn định trong huyện là trên 65% ?
A. 13. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.
- Câu 22.** Số lượng loài vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 5^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn A là 400 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 250 triệu con?
A. 4 phút. **B.** 7 phút. **C.** 8 phút. **D.** 6 phút.
- Câu 23.** Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Radi ^{226}Ra là 1602 năm (tức là một lượng ^{226}Ra sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam ^{226}Ra sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?
A. 0,886 gam. **B.** 1,023 gam. **C.** 0,795 gam. **D.** 0,923 gam.
- Câu 24.** Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ đó sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?
A. 16. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.
- Câu 25.** Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutonium Pu^{239} là 24360 năm (tức là lượng ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t (năm) là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi 15 gam ^{239}Pu sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn lại 2 gam? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)
A. 70812 năm. **B.** 70698 năm. **C.** 70947 năm. **D.** 71960 năm.
- Câu 26.** Anh An gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép theo kỳ hạn 1 quý với lãi suất là 1,85% một quý. Hỏi thời gian ít nhất mà anh An có được 36 triệu cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?
A. 16 năm. **B.** 15 quý. **C.** 4 năm. **D.** 15 năm.
- Câu 27.** Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 20 ngày thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì bèo phủ được $\frac{1}{20}$ mặt ao biết rằng sau mỗi ngày thì lượng bèo tăng gấp 4 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi?
A. 18 (ngày).. **B.** 1 (ngày). **C.** 16 (ngày). **D.** 19 (ngày).
- Câu 28.** Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 85.412.439 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 0,8%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì bắt đầu từ năm nào dưới đây dân số nước ta trên 100 triệu người?
A. 2023. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2021.
- Câu 29.** Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động

đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

- A. 1000 lần. B. 10 lần. C. 2 lần. D. 100 lần.

Câu 30. Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, trong đó N_0 là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t = 0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0 = 100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

- A. 27. B. 25. C. 28. D. 26.

Câu 31. Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 0,5% / tháng. Sau mỗi tháng anh Nam trả 30 triệu đồng, chịu lãi số tiền chưa trả. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

- A. 35 tháng. B. 36 tháng. C. 37 tháng. D. 38 tháng.

Câu 32. Một hộ nông dân được ngân hàng cho vay mỗi năm 10 triệu đồng theo diện chính sách để đầu tư trồng cây ăn quả (được vay trong 4 năm đầu theo thủ tục vay một năm 1 lần vào thời điểm đầu năm dương lịch). Trong 4 năm đầu, khi vườn cây chưa cho thu hoạch thì ngân hàng tính lãi suất bằng 3%/năm. Bắt đầu từ năm thứ 5 đã có thu hoạch từ vườn cây nên ngân hàng dừng cho vay và tính lãi 8%/năm. Tính tổng số tiền hộ nông dân đó nợ ngân hàng sau 5 năm?

- A. 46188667 đồng. B. 43091358 đồng. C. 46538667 đồng. D. 48621980 đồng.

Câu 33. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $P(t) = P_0 \cdot 2^t$, trong đó P_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $P(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con

- A. 5 phút. B. 8 phút. C. 7 phút. D. 6 phút.

Câu 34. Một công ty khai thác thủy lợi cho biết đã kết thúc đợt xả nước đầy mặn xuống sông Trà Vinh. Giúp người dân Trà Vinh đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp. Một đợt xả nước x ngày có công suất $86400\sqrt{800-x^2} \left(m^3 / ngày \right)$. Để xả 100000000 m^3 nước cần ít nhất mấy đợt xả?

- A. 1 đợt. B. 2 đợt. C. 3 đợt. D. 4 đợt.

Câu 35. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,5% / tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng ông ta rút hết tiền?

- A. 139. B. 140. C. 100. D. 138.

Câu 36. Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutonium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S = Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

- A. 56563 năm. B. 56562 năm. C. 56561 năm. D. 56564 năm.

Câu 37. Trong môi trường nuôi cấy ổn định người ta nhận thấy rằng: cứ sau đúng 5 ngày số lượng loài của vi khuẩn A tăng lên gấp đôi, còn sau đúng 10 ngày số lượng loài của vi khuẩn B tăng lên gấp ba. Giả sử ban đầu có 100 con vi khuẩn A và 200 con vi khuẩn B , hỏi sau bao nhiêu ngày

nuôi cấy trong môi trường đó thì số lượng loài vi khuẩn A vượt quá số lượng loại vi khuẩn B , biết rằng tốc độ tăng trưởng của mỗi loài ở mọi thời điểm là như nhau?

- A. 26 (ngày). B. 23 (ngày). C. 25 (ngày). D. 24 (ngày).

Câu 38. Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là $672,71 \text{ mmHg}$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3580 m gần với số nào sau đây nhất?

- A. 491 mmHg . B. 490 mmHg . C. 492 mmHg . D. 493 mmHg .

Câu 39. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S_n = S_0 \cdot e^{r \cdot n}$, trong đó S_0 là dân số của năm lấy làm mốc, S_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần 905300 người, mức tăng dân số là 1,37% mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi vào lớp 1. Hỏi đến năm học 2024 – 2025 ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng chỉ dành cho 35 học sinh? Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể.

- A. 458. B. 462. C. 459. D. 461.

Câu 40. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

- A. 11. B. 13. C. 10. D. 12.

Câu 41. Ông Trung vay ngân hàng 800 triệu đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 60 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,5% /tháng. Mỗi tháng ông Trung trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay và hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 60 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi mà ông Trung phải trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là bao nhiêu?

- A. 118.000.000 đồng. B. 126.066.666 đồng.
C. 122.000.000 đồng. D. 135.500.000 đồng.

Câu 42. Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \leq t \leq 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

- A. 15. B. 20. C. 10. D. 5.

Câu 43. Theo kế hoạch, với mức tiêu thụ thức ăn chăn nuôi của trang trại X không đổi theo dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng trong 365 ngày. Thực tế, 50 ngày đầu mức tiêu thụ thức ăn với ngày sau tăng 5% so với ngày trước, những ngày tiếp theo mức tiêu thụ thức ăn ngày sau tăng 10% so với ngày trước. Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó đủ dùng trong bao nhiêu ngày?

- A. 9. B. 60. C. 8. D. 59.

- Câu 44.** Áp suất không khí P theo công thức $P = P_0 \cdot e^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao, $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển ($x = 0$), k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là 672,71 (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 4000 m.
- A. 466,52 (mmHg). B. 530,23 (mmHg). C. 530,73 (mmHg). D. 545,01 (mmHg).
- Câu 45.** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?
- A. 800. B. 900. C. 950. D. 1000.
- Câu 46.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất?
- A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. B. 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.
C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. D. 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.
- Câu 47.** Một công ty thời trang vừa tung ra thị trường một mẫu quần áo mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu của một thị trường uy tín cho thấy, nếu sau t lần quảng cáo được phát trên truyền hình thì số phần trăm người xem mua sản phẩm này là:
- $$P = \frac{100}{1 + 49 \cdot e^{-0,015t}} (\%).$$
- Hỏi cần phát quảng cáo trên truyền hình tối thiểu bao nhiêu lần để số người mua sản phẩm đạt hơn 80%?
- A. 356 lần. B. 348 lần. C. 352 lần. D. 344 lần.
- Câu 48.** Ông An gửi 250 triệu đồng ở ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 9,2%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm ông An có số tiền ít nhất là 650 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không đổi)?
- A. 11. B. 10. C. 18. D. 19.
- Câu 49.** Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A \cdot e^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?
- A. 2000. B. 2160. C. 2340. D. 2520.
- Câu 50.** Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P = P_0 \cdot e^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển ($x = 0$), k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là 672,71 (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.
- A. 527,06 (mmHg). B. 530,23 (mmHg). C. 530,73 (mmHg). D. 545,01 (mmHg).

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.D	5.A	6.A	7.B	8.D	9.D	10.C
11.D	12.C	13.B	14.B	15.D	16.C	17.A	18.A	19.C	20.A
21.B	22.D	23.A	24.D	25.A	26.C	27.A	28.D	29.D	30.A
31.C	32.C	33.D	34.C	35.A	36.A	37.C	38.A	39.B	40.B
41.C	42.A	43.D	44.A	45.B	46.D	47.C	48.A	49.B	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn B

Theo bài ra ta xét phương trình:

$$P_n = 115.10^6 \Leftrightarrow P_0.e^{nr} = 115.10^6 \Leftrightarrow \ln P_0 + nr = \ln(115.10^6)$$

$$\text{Suy ra } n = \frac{\ln(115.10^6) - \ln P_0}{r} \approx 23,8.$$

Như vậy đến năm 2025 dân số nước ta sẽ ở mức 115 triệu người.

Câu 2. Chọn A

Gọi mức tiêu thụ dầu không đổi hằng năm như hiện nay là A

Khi đó lượng dầu tiêu thụ sau 50 năm là $50A$

Gọi u_n là số lượng dầu tiêu thụ vào năm thứ N

$$\text{Theo đề ta có: } \begin{cases} u_{n+1} = 1,05.u_n \\ u_1 = A \end{cases}$$

Vì N là số năm tiêu thụ hết dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên nên ta có:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N = 50A \Leftrightarrow A \cdot \frac{1 - 1,05^N}{1 - 1,05} = 50A \Leftrightarrow \frac{1,05^N - 1}{0,05} = 50 \Leftrightarrow 1,05^N = 3,5$$

$$\Leftrightarrow N = \log_{1,05} 3,5 \Leftrightarrow N \approx 25,68.$$

Câu 3. Chọn C

Theo bài ta có

$$Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}}) = 0,9.Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63.$$

Vậy sau khoảng thời gian $t \approx 1,63$ giờ thì dung lượng pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin sẽ nạp được 90% dung lượng pin tối đa.

Câu 4. Chọn D

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500 - 500.0,5 = 250$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là u_n (triệu).

Ta có $u_n = 10 \cdot (1 + 0,1)^{n-1} = 10 \cdot (1,1)^{n-1}$ (triệu).

Số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là:

$$12 \cdot [(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})] = 12 \cdot (u_n - u_1)$$

$$= 12 \cdot [10 \cdot (1,1)^{n-1} - 10] = 120 \cdot [(1,1)^{n-1} - 1].$$

Để anh A mua được ô tô thì:

$$120 \cdot \left[(1,1)^{n-1} - 1 \right] \geq 250 \Leftrightarrow (1,1)^{n-1} \geq \frac{37}{12} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,1} \frac{37}{12} + 1 \approx 12,814$$

Vậy sau 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 5. Chọn A

$$\text{Ta có: } 75 - 20\ln(t+1) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq e^{3,25} - 1 (\approx 24,79).$$

Khoảng 25 tháng thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

Câu 6. Chọn A

$$\text{Theo công thức } m(t) = m_0 \cdot 2^{kt} \text{ ta có: } \begin{cases} 112 = m(2) = m_0 \cdot 2^{2k} \\ 7168 = m(5) = m_0 \cdot 2^{5k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = 7 \\ k = 2 \end{cases}$$

Vậy sau 10 phút trong đường chất này, tổng số virus có được là: $m(10) = 7 \cdot 2^{2 \cdot 10} = 7\,340\,032$ con.

Câu 7. Chọn B

Do ở độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,72 mmHg nên ta có:

$$672,72 = 760e^{1000i} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,72}{760}$$

Khi ở độ cao 15 km tức là 15000 m thì áp suất của không khí:

$$P = 760e^{15000 \times \frac{1}{1000} \ln \frac{672,72}{760}} \approx 121,93399$$

Vậy, áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số 122.

Câu 8. Chọn D

$$\text{Vì sau 5h có 300 con vi khuẩn, nên suy ra } 300 = 100 \cdot e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}.$$

Để vi khuẩn tăng gấp đôi thì ta có phương trình:

$$200 = 100 \cdot e^{\frac{1}{5} \ln 3 \cdot t} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{5} \ln 3 \cdot t} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{5} \cdot t} = 2 \Leftrightarrow t = 5 \log_3 2 \Leftrightarrow t \approx 3,15$$

Vậy thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu là 3 giờ 9 phút.

Câu 9. Chọn D

Giả sử lượng thức ăn ngày đầu tiên là m . Tổng số thức ăn trong kho dự trữ là $100m$.

Thực tế: Ngày đầu tiên dùng hết m thức ăn.

Ngày thứ 2 dùng hết $m(1+4\%)$ thức ăn.

Ngày thứ 3 dùng hết $m(1+4\%)^2$ thức ăn.

.....

Ngày thứ n dùng hết $m(1+4\%)^{n-1}$ thức ăn. Giả sử ngày thứ n ta dùng hết thức ăn.

Ta có phương trình sau: $m + m(1+4\%) + m(1+4\%)^2 + \dots + m(1+4\%)^{n-1} = 100m$

$$\Leftrightarrow 1 + (1+4\%) + (1+4\%)^2 + \dots + (1+4\%)^{n-1} = 100 \Leftrightarrow \frac{(1+4\%)^n - 1}{(1+4\%) - 1} = 100$$

$$\Leftrightarrow (1+4\%)^n = 5 \Leftrightarrow n = \log_{1,04} 5 \approx 41,04 \longrightarrow \text{đủ cho 41 ngày.}$$

Câu 10. Chọn C.

Nếu cuối mỗi kì hạn, ông An không rút ra 4 triệu thì số tiền ông có được sau 1 năm là

$$A = 200000.(1 + 0,6\%)^{12} \text{ nghìn đồng}$$

Đầu tháng thứ 2 ông An rút về 4 triệu đồng, nếu để nguyên số tiền đó để gửi thì đến hết tháng thứ 12 ngân hàng phải trả cả gốc và lãi cho ông ứng với 4 triệu đồng đó là

$B_1 = 4000.(1 + 0,6\%)^{11} = 4000.R^{11}$ (nghìn đồng) nên đến hết tháng thứ 12, số tiền giả định là A không còn được lấy nguyên vẹn mà bị trừ đi số tiền B_1

Tương tự, với 4 triệu đồng ông rút ở tháng thứ 3, 4, ..., 11 sẽ bị trừ đi tương ứng là:

$$B_2 = 4000.R^{10}, B_3 = 4000.R^9, \dots, B_{11} = 4000.R^1$$

Do vậy, số tiền ông An nhận được khi tắt toán ở lần cuối cùng là:

$$\begin{aligned} A - (B_2 + B_3 + \dots + B_{11}) &= 200000.R^{12} - 4000(R^{11} + R^{10} + \dots + R) \\ &= 200000.R^{12} - 4000.R \cdot \frac{1 - R^{11}}{1 - R} \approx 169269 \text{ (nghìn đồng)}. \end{aligned}$$

Câu 11. Chọn D

$$\text{Theo bài ta có } 65 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0,65 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \frac{3754}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,65 \Leftrightarrow A = \frac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65}$$

$$\text{Do mẫu gỗ còn 79\% lượng Cacbon 14 nên ta có: } 79 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0,79 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,79 \Leftrightarrow t = A \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,79 = \frac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,79 \approx 2054.$$

Câu 12. Chọn C

$$\text{Theo bài ra ta có: } 40000 \cdot e^{0,012n} \leq 50000 \Leftrightarrow e^{0,012n} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0,012n \leq \ln \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \leq 18,595.$$

Suy ra sau 19 năm thì dân số vượt ngưỡng cho phép.

Vậy trong năm 2036 dân số thành phố sẽ vượt ngưỡng cho phép.

Câu 13. Chọn B

Ta có : $S_0 = 500$ (con) ; 5 giờ = 300 phút.

$$\text{Sau 5 giờ số vi khuẩn là : } S(300) = 500 \cdot e^{300r} \Leftrightarrow 1500 = 500 \cdot e^{300r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{300}$$

Vậy khoảng thời gian t kể từ lúc bắt đầu có 500 con vi khuẩn đến khi số lượng vi khuẩn đạt 121500 con thỏa mãn $121500 = 500 \cdot e^{r \cdot t}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 243}{r} = \frac{300 \ln 243}{\ln 3} = 1500 \text{ (phút)} = 25 \text{ (giờ)}.$$

Câu 14. Chọn C

Đổi 1 giờ 40 phút = 100 phút.

$$\text{Lượng chất đã phân rã là: } \Delta m = m_0 \cdot \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 2 \cdot \left(1 - 2^{-\frac{100}{20}}\right) = 1,9375 \text{ gram}.$$

Phần trăm khối lượng chất còn lại là: $\frac{2-1,9375}{2} \cdot 100\% = 3,125\%$.

Câu 15. Chọn D

Từ công thức $C = A(1+r)^n$ với $A = 100$, $r = 0,12$ và n nguyên dương.

Ta có: Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $C = 100 \cdot (1+0,12)^n$.

Số tiền lãi thu được sau n năm là $L = 100 \cdot (1+0,12)^n - 100$.

Để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng thì:

$$L > 40 \Leftrightarrow 100(1+0,12)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{7}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,12} \frac{7}{5} \approx 2,97.$$

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm là $n = 3$.

Câu 16. Chọn C

Theo công thức, tại thời điểm $t = 3$ phút, ta có

$$s(3) = s(0)2^3 = 625000 \Rightarrow s(0) = 78125 \text{ con}.$$

Gọi t (phút) là thời điểm mà số lượng vi khuẩn là 10 triệu con, ta có:

$$s(t) = s(0)2^t \Rightarrow 10\,000\,000 = 78125 \cdot 2^t \Leftrightarrow 2^t = 128 \Rightarrow t = 7.$$

Câu 17. Chọn A

Để để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%

$$\Leftrightarrow P(n) = \frac{1}{1+65 \cdot 3^{-0,13n}} > 50\% \Leftrightarrow 1+65 \cdot 3^{-0,13n} < 2$$

$$\Leftrightarrow -0,13n < \log_3 \frac{1}{65} \Leftrightarrow n > \frac{\log_3 65}{0,13} \approx 29,23$$

Vậy cần ít nhất 30 lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%.

Câu 18. Chọn A

$$\text{Theo đầu bài ta có phương trình: } P(t) = 60 \Leftrightarrow 60 = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$\Leftrightarrow t = 5750 \cdot \frac{\ln 0,6}{\ln 0,5} \approx 4237,55.$$

Vậy tuổi của công trình đó khoảng 4238 năm.

Câu 19. Chọn C**Câu 20. Chọn A****Câu 21. Chọn B****Câu 22. Chọn D****Câu 23. Chọn A****Câu 24. Chọn D****Câu 25. Chọn A****Câu 26. Chọn C****Câu 27. Chọn A.****Câu 28. Chọn D****Câu 29. Chọn D**

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = \log \frac{A_1}{A_0} = 8$

Ở Nhật Bản trận động đất có cường độ là: $M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = 6$

Khi đó: $8 - 6 = \log \frac{A_1}{A_0} - \log \frac{A_2}{A_0} = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow 2 = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100.$

Câu 30. Chọn A

Ta có: $2N_0 = N_0 \cdot e^{9k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{9}$

Để được 800 con ruồi, ta có: $800 = 100 \cdot e^{t \cdot \frac{\ln 2}{9}} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{\ln 2} \cdot 9 = 27$ ngày.

Câu 31. Chọn C

Gọi a là số tiền vay, r là lãi suất, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m.$

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là:

$$N_2 = N_1(1+r) - m = a(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$$

Số tiền nợ sau tháng thứ ba là:

$$N_3 = N_2(1+r) - m = a(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$$

....

Số tiền nợ sau n tháng là: $N_n = a(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1]$

$$= a(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] = \left(a - \frac{m}{r}\right)(1+r)^n + \frac{m}{r}.$$

$$N_n = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{\frac{m}{r}}{\frac{m}{r} - a} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{m}{m - ra}.$$

Sau n tháng anh Nam trả hết nợ khi và chỉ khi $N_n = 0 \Leftrightarrow (1 + 0,005)^n = \frac{30 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6 - 0,005 \cdot 10^9}.$

$$\Leftrightarrow (1,005)^n = \frac{6}{5} \Leftrightarrow n = \log_{1,005} \left(\frac{6}{5} \right) \approx 36,6.$$

Vậy sau 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

Câu 32. Chọn C

Số tiền nợ sau năm thứ nhất là: $10 \cdot (1 + 3\%).$

Số tiền nợ sau năm thứ 2 là: $[10 \cdot (1 + 3\%) + 10](1 + 3\%) = 10[(1 + 3\%)^2 + (1 + 3\%)].$

Số tiền nợ sau năm thứ 3 là: $10[(1 + 3\%)^3 + (1 + 3\%)^2 + (1 + 3\%)].$

Số tiền nợ sau năm thứ 4 là: $10[(1 + 3\%)^4 + (1 + 3\%)^3 + (1 + 3\%)^2 + (1 + 3\%)].$

Số tiền nợ sau năm thứ 5 là: $10[(1 + 3\%)^4 + (1 + 3\%)^3 + (1 + 3\%)^2 + (1 + 3\%)].(1 + 8\%).$

Vậy $S = 46,538667$ (triệu đồng).

Câu 33. Chọn D.

Sau 2 phút số lượng vi khuẩn 625000 con tức là: $625000 = P_0 \cdot 2^2 \Leftrightarrow P_0 = \frac{625000}{4} = 156250$.

Số lượng vi khuẩn là 10 triệu con $\Leftrightarrow 10000000 = 156250 \cdot 2^t \Leftrightarrow 2^t = 64 \Leftrightarrow t = 6$.

Câu 34. Chọn C

Số đợt xả nhỏ nhất khi và chỉ khi lượng nước xả một đợt lớn nhất.

Lượng nước xả trong x ngày là $86400x\sqrt{800-x^2} \text{ (m}^3\text{)}$.

Xét hàm số $f(x) = 86400x\sqrt{800-x^2} \text{ (m}^3\text{)}$, $x \in (0; 20\sqrt{2}]$.

Ta có $86400x\sqrt{800-x^2} \leq 86400 \cdot \frac{x^2+800-x^2}{2} = 34560000$.

Vậy $\text{Max} f(x) = 34560000 \text{ m}^3$ đạt được khi $x = \sqrt{800-x^2} \Leftrightarrow x = 20$.

$\frac{100000000}{34560000} \approx 2,9$.

Vậy cần xả 3 đợt mỗi đợt 20 ngày.

Câu 35. Chọn A

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r , S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_1 = A(1+r) - 1.$$

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_2 = [A(1+r) - 1](1+r) - 1 = A(1+r)^2 - (1+r) - 1.$$

...

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n = A(1+r)^n - (1+r)^{n-1} - (1+r)^{n-2} - \dots - (1+r) - 1 = A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có $S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$$\Leftrightarrow (1+r)^n (Ar - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \frac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n = -\log_{(1+r)} (1-Ar).$$

Với $A = 100$ triệu đồng, $r = 0,005$ ta có $n \approx 138,9757216$. Chọn A.

Câu 36. Chọn A

Vì ^{239}Pu có chu kỳ bán rã là 24360 năm nên với 20 gam ^{239}Pu ta có:

$$10 = 20 \cdot e^{-r \cdot 24360} \Leftrightarrow -r \cdot 24360 = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 2}{24360}.$$

Theo bài ra ta có phương trình $4 = 20 \cdot e^{-rt} \Leftrightarrow -rt = \ln \frac{1}{5} \Leftrightarrow rt = \ln 5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t \approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam ^{239}Pu sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 37. Chọn C

Giả sử sau x ngày nuôi cấy thì số lượng vi khuẩn hai loài bằng nhau. Điều kiện $x > 0$.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài A là: $100.2^{\frac{x}{5}}$ con vi khuẩn.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài B là: $200.3^{\frac{x}{10}}$ con vi khuẩn.

Khi đó ta có bất phương trình $100.2^{\frac{x}{5}} > 200.3^{\frac{x}{10}} \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{x}{5}}}{3^{\frac{x}{10}}} > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{10}} > 2 \Leftrightarrow x > 10.\log_{\frac{4}{3}} 2$.

Câu 38. Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_0 e^{xi}$

Ở độ cao $1000m$, ta có: $P_0 = 760mmHg, x = 1000m, P = 672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm

được hệ số suy giảm i . Ta có $672,71 = 760e^{1000i} \Leftrightarrow 1000i = \ln \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i \approx -0,000$

Khi đó ở độ cao $3580m$, áp suất của không khí là: $P = 760e^{-0,00012 \times 3580} \approx 49112$.

Câu 39. Chọn B

Chỉ những em sinh năm 2018 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 năm học 2024 – 2025.

Áp dụng công thức lãi kép để tính dân số năm 2017 và 2018.

Dân số năm 2018 là: $S_8 = S_0 e^{r \cdot n} = 905300.e^{1,37\% \cdot 8} \approx 1010162$.

Dân số năm 2017 là: $S_7 = S_0 e^{r \cdot n} = 905300.e^{1,37\% \cdot 7} \approx 996418$.

Số trẻ vào lớp 1 trong năm học 2024 – 2025 là: $1010162 - 996418 + 2400 = 16144$.

Số phòng học cần chuẩn bị là: $16144 : 35 \approx 461,26$.

Vậy số phòng học cần là 462 phòng.

Câu 40. Chọn B

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500 - 500.0,32 = 340$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là

$$u_1 = 10 \text{ (triệu)}.$$

Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là

$$u_2 = u_1 \cdot (1 + 0,12) = u_1 \cdot 1,12 \text{ (triệu)}.$$

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là

$$u_3 = u_1 \cdot (1 + 0,12)^2 = u_1 \cdot (1,12)^2 \text{ (triệu)}.$$

...

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là

$$u_n = u_1 \cdot (1 + 0,12)^{n-1} = u_1 \cdot (1,12)^{n-1} \text{ (triệu)}.$$

Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là

$$12 \cdot (u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \dots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1}) = 12 \cdot (u_n - u_1) = 12 \cdot [u_1 \cdot (1,12)^{n-1} - u_1].$$

Cho $12 \cdot [u_1 \cdot (1,12)^{n-1} - u_1] \geq 340 \Leftrightarrow (1,12)^{n-1} \geq \frac{23}{6} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,12} \frac{23}{6} + 1 \approx 12,86$.

Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 41. Chọn C

Gọi $T = 800$ triệu là số tiền vay, $A = \frac{T}{60}$ là số tiền gốc phải trả hàng tháng, $r = 0,5\%$ là lãi suất.

Ta có bảng mô tả sau:

Tháng	Trả gốc	Trả lãi	Dư nợ
1	A	rT	$T - A$
2	A	$r(T - A)$	$T - 2A$
3	A	$r(T - 2A)$	$T - 3A$
...			
60	A	$r(T - 59A)$	$T - 60A = 0$

Tổng số tiền lãi mà ông Trung phải trả là:

$$S = rT + r(T - A) + r(T - 2A) + \dots + r(T - 59A) = r[60T - (1 + 2 + \dots + 59)A]$$

$$= r\left[60T - \frac{59 \cdot 60}{2}A\right] = r\left[60T - \frac{59}{2}T\right] = \frac{61rT}{2} = 122 \text{ (triệu)}.$$

Câu 42. Chọn A

Từ giả thiết suy ra tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là: $f'(t) = 90t - 3t^2$.

Xét hàm $f'(t) = 90t - 3t^2$ với $0 \leq t \leq 25$.

Ta có: $f''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25
f''	+	0	-
f'	0	675	375

Từ bảng biến thiên ta có ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất là ngày thứ 15.

Câu 43. Chọn D

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày theo kế hoạch của trang trại X là x

Vậy lượng thức ăn dự trữ của trang tại X là $365x$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong 50 ngày đầu là:

$$x + x \cdot 1,05 + x \cdot 1,05^2 + \dots + x \cdot 1,05^{49} = x(1 + 1,05 + \dots + 1,05^{49}) = x \cdot \frac{(1 - 1,05^{50})}{1 - 1,05}$$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong những ngày tiếp theo là: (đặt $x \cdot 1,05^{49} = B$: lượng thức ăn tiêu thụ ngày thứ 50)

$$B \cdot 1,1 + B \cdot 1,1^2 + \dots + B \cdot 1,1^n = B \cdot 1,1(1 + 1,1 + \dots + 1,1^{n-1}) = \frac{B \cdot 1,1 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1} = x \cdot \frac{1,05^{49} \cdot 1,1 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1}$$

$$\text{Ta có: } x \cdot \frac{(1 - 1,05^{50})}{1 - 1,05} + x \cdot \frac{1,05^{49} \cdot 1,1 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1} = 365x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - 1,05^{50})}{1 - 1,05} + \frac{1,05^{49} \cdot 1,1 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1} = 365 \Leftrightarrow n = 8,72$$

Vậy lượng thức ăn dự trữ đủ dùng trong $50 + 8 = 58$ ngày

Câu 44. Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là 672,71 (mmHg).

$$\text{Nên ta có } 672,71 = 760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}.$$

$$\text{Áp suất ở độ cao 4000 m là } P = 760e^{4000k} = 760e^{4000 \cdot \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}} \approx 466,52 \text{ (mmHg)}.$$

Câu 45. Chọn B

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } 300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}.$$

$$\text{Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có } 100.e^{10 \cdot \frac{\ln 3}{5}} = 900 \text{ con.}$$

Câu 46. Gọi x là số tivi mỗi lần đặt hàng thì $x \in [1; 2500]$

Khi đó, số lượng tivi trung bình gửi trong kho sẽ là $\frac{x}{2}$. Do đó, chi phí gửi hàng trong khi mỗi

$$\text{năm sẽ là } 10 \cdot \frac{x}{2} = 5x.$$

$$\text{Số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là } \frac{2500}{x}.$$

$$\text{Do đó chi phí đặt hàng mỗi năm sẽ là } (20 + 9x) \cdot \frac{2500}{x} = \frac{50000}{x} + 22500$$

$$\text{Suy ra, chi phí hàng tồn kho là } C(x) = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $C(x)$ với $x \in [1; 2500]$.

$$\text{Ta có: } C'(x) = 5 - \frac{50000}{x^2}, C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 (tm) \\ x = -100 (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Do } C''(x) = \frac{100000}{x^3} > 0, \forall x \in [1; 2500] \text{ nên } \min_{x \in [1; 2500]} C(x) = C(100) = 23500$$

$$\text{Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là } \frac{2500}{100} = 25 \text{ lần.}$$

Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt hàng 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Câu 47. Chọn C

$$\text{Để số người mua sản phẩm đạt hơn 80\% thì } P > 80 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + 49.e^{-0,015t}} > 80$$

$$\Leftrightarrow 1 + 49.e^{-0,015t} < \frac{100}{80} \Leftrightarrow 49.e^{-0,015t} < \frac{10}{8} - 1$$

$$\Leftrightarrow 49.e^{-0,015t} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-0,015t} < \frac{1}{196} \Leftrightarrow -0,015t < \ln \frac{1}{196} \Leftrightarrow t > \frac{1}{0,015} \ln 196 \approx 351,8743$$

Vậy số lần quảng cáo tối thiểu là 352 lần.

Câu 48. Chọn A

Gọi S là số tiền gửi ban đầu.

Áp dụng công thức lãi kép sau n năm ($n \in \mathbb{N}$) thì số tiền thu được là: $S_n = S(1 + 0,092)^n$

Theo đề ta có: $250(1 + 0,092)^n \geq 650 \Leftrightarrow (1,092)^n \geq \frac{13}{5} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,092} \left(\frac{13}{5} \right) \approx 10,8567$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên ta chọn $n = 11$.

Câu 49. Chọn B.

Theo giả thiết ta có $I(1) = A = 500$.

Ngày thứ 10 có 1000 ca nên $I(10) = Ae^{9r_0} \Leftrightarrow 1000 = 500.e^{9r_0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\ln 2}{9}$.

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là $I(20) = 500.e^{\frac{19 \ln 2}{9}} \approx 2160$.

Câu 50. Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là 672,71 (mmHg).

Nên ta có: $672,71 = 760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 3000 m là $P = 760e^{3000k} = 760e^{3000 \cdot \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}} \approx 527,06$ (mmHg).

DẠNG 14**Mũ - Logarit trong đề thi của BGD&ĐT**

- Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- A. $m \geq 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 2$. D. $m > 2$.
- Câu 2:** Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$
- A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $D = [-1; 3]$.
 C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $D = (-1; 3)$.
- Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
- A. $m = 0$. B. $0 < m < 3$. C. $m < -1$ hoặc $m > 0$. D. $m > 0$.
- Câu 4:** Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.
- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = \frac{1}{3}$.
- Câu 5:** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?
- A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.
- Câu 6:** Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.
- A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$.
 C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.
- Câu 7:** Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% /tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?
- A. 2,22 triệu đồng. B. 3,03 triệu đồng.
 C. 2,25 triệu đồng. D. 2,20 triệu đồng.
- Câu 8:** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
- A. 13 năm. B. 10 năm. C. 11 năm. D. 12 năm.

- Câu 9:** Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?
A. Năm 2023. **B.** Năm 2022. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2020.
- Câu 10:** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
A. 13 năm. **B.** 14 năm. **C.** 12 năm. **D.** 11 năm.
- Câu 11:** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.
A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng). **B.** $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng). **D.** $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).
- Câu 12:** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?
A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2048. **D.** Năm 2049.
- Câu 13:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?
A. 8. **B.** 4. **C.** 19. **D.** 5.
- Câu 14:** Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.
A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 15:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.
A. 7. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 16:** Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?
A. 13. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.
- Câu 17:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.
A. $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

- Câu 18:** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x}$.
- A. 17. B. 16. C. 18. D. 15.
- Câu 19:** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.
- A. 27. B. 9. C. 11. D. 12.
- Câu 20:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?
- A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.
- Câu 21:** Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$?
- A. 7. B. 8. C. Vô số. D. 9.
- Câu 22:** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?
- A. 6. B. 5. C. Vô số. D. 7.
- Câu 23:** Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?
- A. 2017. B. 4014.. C. 2018.. D. 4015..
- Câu 24:** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.
- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 25$. C. $S_{\min} = 33$. D. $S_{\min} = 17$.
- Câu 25:** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng
- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2 \frac{3}{2}$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.
- Câu 26:** Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$
- A. $(1; 2)$.. B. $[1; 2]$.. C. $[1; 2)$.. D. $[2; +\infty)$..
- Câu 27:** Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?
- A. 79. B. 80. C. Vô số. D. 81.
- Câu 28:** Cho phương trình $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt
- A. 49. B. 47. C. Vô số. D. 48.
- Câu 29:** Cho phương trình $2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 \sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt?

A. 123. B. 125. C. Vô số. D. 124.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247. B. 248. C. 229. D. 290.

Câu 31: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5. B. 3. C. Vô số. D. 4.

Câu 32: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. Vô số. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 33: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. 2. B. 4. C. 3. D. Vô số.

Câu 34: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19. B. 20. C. 18. D. 21.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8. B. 9. C. 1. D. Vô số.

Câu 37: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m+n < 10$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 7. B. 8. C. 10. D. 9.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên (m, n) sao cho $m+n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2.a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 16. B. 14. C. 15. D. 13.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số

Câu 40: Cho phương trình $(2\log_2^2 x - \log_2 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. Vô số. B. 62. C. 63. D. 64.

Câu 41: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1) + \log_{8ab+1}(4a+5b+1) = 2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

- A. 9. B. 6. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{20}{3}$.

Câu 42: Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 6. B. 9. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 43: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 20. B. 19. C. 9. D. 21.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x + 30) - 5] \leq 0$?

- A. 30. B. Vô số. C. 31. D. 29.

Câu 45: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0$?

- A. 1024. B. 1047. C. 1022. D. 1023.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1..$ B. $m < \frac{2}{3}..$ C. $m < 0..$ D. $m \leq 1..$

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$?

- A. 24.. B. Vô số. C. 25.. D. 26..

Câu 48: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của của biểu thức

$$P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

- A. 80. B. 79. C. 157. D. 158.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

- A. 89. B. 46. C. 45. D. 90.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

- A. 55. B. 28. C. 29. D. 56.

Câu 52: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59.

B. 58.

C. 116.

D. 115.

Câu 53: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0.

B. 1.

C. Vô số.

D. 2.

Câu 54: Xét các số thực x, y sao cho $49^{9-y^2} \geq a^{4x - \log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x - 3y$ bằng:

A. $\frac{121}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. 24.

D. 39.

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b - 1)(a \cdot 2^b - 5) < 0$?

A. 20.

B. 21.

C. 22.

D. 19.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải**Chọn B**Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

B. $D = [-1; 3]$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (-1; 3)$.

Lời giải**Chọn C** $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$. Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$ Vậy tập xác định: $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $m = 0$.

B. $0 < m < 3$.

C. $m < -1$ hoặc $m > 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải**Chọn D**Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (1 + m) < 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 4: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

A. $M = \frac{1}{4}$.

B. $M = 1$.

C. $M = \frac{1}{2}$.

D. $M = \frac{1}{3}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y.$$

$$\text{Khi đó } M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)} = \frac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x + 3y)^2} = \frac{\log_{12}(36y^2)}{\log_{12}(36y^2)} = 1.$$

Câu 5: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $[3; 4)$.

D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } a, b > 1 \text{ và } x, y > 0 \text{ nên } a^x; b^y; \sqrt{ab} > 1$$

$$\text{Do đó: } a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a b^y = \log_a \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b \\ 2y = 1 + \log_b a \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, ta có: } P = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_a b + \log_b a.$$

Lại do $a, b > 1$ nên $\log_a b, \log_b a > 0$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, P = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{2}.$$

Lưu ý rằng, luôn tồn tại $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \in \left[\frac{5}{2}; 3 \right).$$

Câu 6: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$

của $P = a + 2b$.

$$\text{A. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}.$$

$$\text{B. } P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}.$$

$$\text{C. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}.$$

$$\text{D. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}.$$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $ab < 1$.

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 [2(1-ab)] + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b) \quad (*).$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow a(2b+1) = 2-b \Leftrightarrow a = \frac{-b+2}{2b+1}.$$

$$\text{Do } a > 0, b > 0 \text{ nên } \frac{-b+2}{2b+1} > 0 \Rightarrow 0 < b < 2.$$

$$\text{Khi đó: } P = a + 2b = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b. \text{ Xét hàm số } g(b) = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b \text{ trên khoảng } (0; 2).$$

$$g'(b) = \frac{-5}{(2b+1)^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-2-\sqrt{10}}{4} \notin (0; 2) \\ b = \frac{-2+\sqrt{10}}{4} \in (0; 2) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

$$\Leftrightarrow 2 = \left(1 + \frac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow N = \log_{(1,061)} 2 \approx 11,7$$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

- Câu 9:** Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?
A. Năm 2023. **B.** Năm 2022. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2020.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $1 \cdot (1+r)^n > 2 \Leftrightarrow 1 \cdot (1+0,15)^n > 2 \Leftrightarrow n > 4,96$

Vậy từ năm thứ 5 sau khi thành lập công ty thì tổng tiền lương bắt đầu lớn hơn 2 tỷ đồng.

Suy ra năm cần tìm là: $2016 + 5 = 2021$.

- Câu 10:** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
A. 13 năm. **B.** 14 năm. **C.** 12 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Chọn C

Gọi n là số năm một người gửi tiền vào ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó thu về sau n năm là: $50.000.000(1+6\%)^n$

Theo đề cho, ta có: $50.000.000(1+6\%)^n > 100.000.000 \Leftrightarrow (1,06)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 \approx 11,9$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

- Câu 11:** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Công thức: Vay số tiền A lãi suất $r\%$ / tháng. Hỏi trả số tiền a là bao nhiêu để n

tháng hết nợ $a = \frac{A \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{100 \cdot 0,01 \cdot (1+0,01)^3}{(1+0,01)^3 - 1}$.

Cách 2: Theo đề ta có: ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là : $100.0,01 + 100 = 100.1,01$ (triệu đồng)

- Số tiền dư : $100.1,01 - m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 2:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$(100.1,01 - m).0,01 + (100.1,01 - m) = (100.1,01 - m).1,01 = 100.(1,01)^2 - 1,01.m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^2 - 1,01.m - m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 3:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$\left[100.(1,01)^2 - 1,01.m - m \right].1,01 = 100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m - m$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2 + 1,01 + 1}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{100.(1,01)^3.(1,01-1)}{\left[(1,01)^2 + 1,01 + 1 \right].(1,01-1)} = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 12: Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2029.

B. Năm 2028.

C. Năm 2048.

D. Năm 2049.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_n = 1400$ ha ; $A = 800$ ha ; $r = 6\%$.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow A(1+r)^n > 1400$

$$\Leftrightarrow n > \log_{1+r} \left(\frac{1400}{A} \right) \Leftrightarrow n > \log_{1,06} \left(\frac{1400}{800} \right) \Leftrightarrow n > 9,609 \Rightarrow n = 10.$$

Vậy năm đầu tiên là năm 2029.

Câu 13: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8.

B. 4.

C. 19.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0(1) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m.3^x + 3m^2 - 75 = 0$$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0(2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -5 \\ m > 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do m nguyên nên $m = \{6; 7; 8; 9\}$.

Câu 14: Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình thành: $t^2 - 2m.t + 2m^2 - 5 = 0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ hoặc } m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do m nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử.

Câu 15: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ (1).

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ (2).

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 16: Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành:

$$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 17: Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$.

B. $[2;4]$.

C. $(2;4)$.

D. $(3;4)$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có

$$f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x}$.

A. 17.

B. 16.

C. 18.

D. 15.

Lời giải**Chọn A**

Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-15x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì:

$$27^{3x^2-15x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-16x} - (1-x) = 0$ có nghiệm vì:

$$g_1(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-x) \text{ liên tục trên } \left[\frac{1}{3}; 5\right] \text{ và } g_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_1(5) < 0.$$

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-17x} - (1-2x) = 0$ có nghiệm vì $g_2(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-2x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_2(5) < 0$.

Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x} \Leftrightarrow 3x^2 - 15x = \log_{27}(1+xy) - xy$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 15 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 5\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$

khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(5) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(5) = -\frac{\log_{27}(1+5y)}{5} + y > -\frac{5y}{5 \ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 14 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 15$.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 15\}$ hay có 17 giá trị y thỏa đề.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.

A. 27.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-9x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì

$$27^{3x^2-9x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-10x} - (1-x) = 0$, có nghiệm vì $g_1(x) = 27^{3x^2-10x} - (1-x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_1(3) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-11x} - (1-2x) = 0$, có nghiệm vì $g_2(x) = 27^{3x^2-11x} - (1-2x)$

liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g_2(3) < 0$.

Khi $y \geq 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x} \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = \log_{27}(1+xy) - xy$$

$$\Leftrightarrow 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$

khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(3) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(3) = -\frac{\log_{27}(1+3y)}{3} + y > -\frac{3y}{3 \ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 8 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 9$ (do y là số nguyên dương).

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 9\}$ hay có 11 giá trị y thỏa đề.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -1$

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) = 2y + 3^{2y} \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = t + 3^t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 1 + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, tức hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(\log_3(x+1)) = f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x = 9^y - 1$

Vì $0 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021$.

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(0; 0); (8; 1); (80; 2); (728; 3)\}$ nên tổng cộng có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$?

A. 7.

B. 8.

C. Vô số.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

ĐKXD: $(6-x)(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Vậy có 7 số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log[(6-x)(x+2)]$.

Câu 22: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 6.

B. 5.

C. Vô số.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\log_9 x^2 - \log_3 (6x-1) = -\log_3 m$ là phương trình (1).

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 6x-1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases} (*)$$

Với điều kiện (*) thì:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3 (6x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (mx) = \log_3 (6x-1) \Leftrightarrow mx = 6x-1 \Leftrightarrow (m-6)x = -1 \quad (2)$$

Với $m = 6$ thì phương trình (2) trở thành: $0x = -1$: VN. Vậy không nhận $m = 6$.

$$\text{Với } m \neq 6 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m-6}.$$

$$\text{Để phương trình (1) có nghiệm thì } -\frac{1}{m-6} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{-6-m+6}{6(m-6)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m}{m-6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-6} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6.$$

Mà m nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 23: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017.

B. 4014..

C. 2018..

D. 4015..

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > -1, mx > 0$.

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{(x+1)^2}{x} \quad (x > -1, x \neq 0); \quad f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (l)$$

Lập bảng biến thiên

x	-1	0	1	$+\infty$
y'			0	
	-		+	
y	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m=4 \\ m<0. \end{cases}$

Vì $m \in [-2017; 2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là

$$m \in \{-2017; -2016; \dots; -1; 4\}.$$

Câu 24: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 25$. C. $S_{\min} = 33$. D. $S_{\min} = 17$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.

Đặt $t = \ln x, u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0(1), 5t^2 + bt + a = 0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x , một u thì có một x .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3 \cdot x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3 \text{ (do } a, b \text{ nguyên dương), suy ra } b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8.$$

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30$, suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được $a = 3, b = 8$.

Câu 25: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2 \frac{3}{2}$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y) = t$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = 9^t, y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$$

Câu 26: Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$

- A. $(1; 2)$. B. $[1; 2]$. C. $[1; 2)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (*)

Điều kiện: $x > 0$

$$(*) \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m \log_2 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m - 1 \end{cases}$$

Ta có: $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2(t/m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \log_2 x = m-1 \Leftrightarrow x = 2^{m-1}$ có nghiệm duy nhất trên $[1; 2)$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^{m-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2..$$

Câu 27: Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

A. 79.

B. 80.

C. Vô số.

D. 81.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (1).

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_3 m \text{ (do } m > 0) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ \sqrt{3^x - m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \\ 3^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 m \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log_3 m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq m < 3^4 \end{cases}$$

$$\text{Do } m \text{ nguyên dương} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \in \{3; 4; 5; \dots; 80\} \end{cases}.$$

Vậy có tất cả $1 + 80 - 3 + 1 = 79$ giá trị m nguyên dương thỏa mãn đề bài.

Câu 28: Cho phương trình $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. 49.

B. 47.

C. Vô số.

D. 48.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_7 m \end{cases}$$

Với $m = 1$, phương trình trở thành $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \\ x = 0 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Phương trình này có hai nghiệm

Với $m \geq 2$, điều kiện phương trình là $x \geq \log_7 m$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \\ 7^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ 7^x = m \end{cases}$$

Do $x = 2^{\frac{5}{4}} \approx 2,26$ không là số nguyên, nên phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq 3 \\ m < 7^2 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{3; 4; 5; \dots; 48\}$. Suy ra có 46 giá trị của m .

Do đó có tất cả 47 giá trị của m .

Câu 29: Cho phương trình $2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 \sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt?

A. 123. B. 125. C. Vô số. D. 124.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m \end{cases}$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \\ x = \log_5 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_5 m \end{cases}.$$

TH1: Nếu $m = 1$ thì $x = \log_5 m = 0$ (loại) nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

TH2: Nếu $m > 1$ thì phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_5 m < 3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 125. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; \dots; 124\}$$

Vậy có tất cả 123 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247. B. 248. C. 229. D. 290.

Lời giải

Chọn B

Có $u_{n+1} = 2u_n = 2^n u_1$. Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$

Đặt $t = \log u_1 - 2 \log u_{10}$, điều kiện $t \geq -2$

Pt trở thành $\sqrt{2+t} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \log u_1 - 2 \log u_{10} = -1$

$\Leftrightarrow \log u_1 = 1 - 18 \log 2 \Leftrightarrow u_1 = 10^{1-18 \log 2}$

Mặt khác $u_n = 2^{n-1} u_1 = 2^{n-1} \cdot 10^{1-18 \log 2} = 2^n \cdot 5 \cdot 10^{-18 \log 2} > 5^{100} \Rightarrow n > \log_2 (5^{99} \cdot 10^{18 \log 2}) \approx 247,87$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 248.

Câu 31: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

Lời giải

Chọn B

ĐK: $\begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\log_9 x^2 - \log_3 (4x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 m = \log_3 \frac{4x-1}{x} \Leftrightarrow m = \frac{4x-1}{x} \quad (1).$$

Xét hàm $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	4	$+\infty$	$-\infty$	4

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ khi $0 < m < 4$.

$\Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3\}$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm là $m \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 32: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. Vô số.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > \frac{1}{5}, m > 0$

Phương trình tương đương với:

$$\log_3 x - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \frac{5x-1}{x} = f(x)$$

Xét $f(x) = \frac{5x-1}{x}; x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right); f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0; \forall x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		5

0

Để phương trình có nghiệm thì $m \in (0;3)$, suy ra có 4 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 33: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$

Phương trình tương đương với:

$$\log_3 x - \log_3(3x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{3x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x} = f(x)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{3x-1}{x}; x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right); f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0; \forall x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		3

0

Để phương trình có nghiệm thì $m \in (0;3)$, suy ra có 2 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 34: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$y' = 6(x-1) + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2-3}{x+1}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$	

Vì $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in (\frac{1}{3}; 6)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 20.

C. 18.

D. 21.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Khi $y \leq 0$, vì $xy > -1$ và $x > \frac{1}{3}$ nên ta có $y > -3$.

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-18x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì $27^{3x^2-18x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in (\frac{1}{3}; 6)$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-19x} - (1-x) = 0$, có nghiệm vì $g_1(x) = 27^{3x^2-19x} - (1-x)$ liên tục trên $[\frac{1}{3}; 6]$ và $g_1(\frac{1}{3}) \cdot g_1(6) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-20x} - (1-2x) = 0$, có nghiệm vì $g_2(x) = 27^{3x^2-20x} - (1-2x)$ liên tục trên $[\frac{1}{3}; 6]$ và $g_2(\frac{1}{3}) \cdot g_2(6) < 0$.

Khi $y \geq 1$, xét trên $[\frac{1}{3}; 6]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x} \Leftrightarrow 3x^2 - 18x = \log_{27}(1+xy) - xy$$

$$\Leftrightarrow 3x - 18 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 18 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $[\frac{1}{3}; 6]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy) \ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \geq 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in [\frac{1}{3}; 6]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$

khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(6) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(6) = -\frac{\log_{27}(1+6y)}{6} + y > -\frac{6y}{6\ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 17 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 18$.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 18\}$ hay có 20 giá trị y thỏa đề.

Cách 2.

Giả sử y là một trong những số nguyên thỏa mãn yêu cầu, lúc đó ta xét phương trình

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$$

trên $D = \left(\frac{1}{3}; 6\right) \cap \{x \in \mathbb{R} : xy > -1\}$, và trên D nó tương đương với $f(x) = 0$, trong đó

$$f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \frac{1}{3}\log_3(1+xy).$$

Ta có vài tính toán sau $f'(x) = 6x + y - 18 - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3}$, $f''(x) = 6 + \frac{y^2}{(1+xy)^2 \ln 3}$.

Nếu $y < 0$, khi ấy vì cần có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ nên có ngay $y \geq -2$, lúc ấy $D = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{y}\right)$ trên D ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right) \leq -6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1 - \frac{2}{3}\right) < 0.$$

Kết hợp $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{y}^-} f(x) = +\infty$ và việc f liên tục trên D cho thấy f có điểm triệt tiêu trên D ,

nghĩa là trường hợp này cho ta $y \in \{-2, -1\}$ thỏa yêu cầu.

Nếu $y = 0$, ta có $f(x) = 3x^2 - 18x < 0$ với mọi $x \in D$, vì thế loại.

Nếu $y \geq 19$, lúc đó có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f'(x) = y - 16 - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > y - 17 > 0.$$

Kết hợp việc $f'(x)$ tăng ngặt trên D , cho ta f tăng ngặt trên D và trên D có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right)$$

Xét $g(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1 + \frac{1}{3}y\right)$ trên $[10; +\infty)$, ta có

$$g'(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3+y)} > 0, g(19) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_3\left(1 + \frac{19}{3}\right) > 0$$

Vậy, $g(y) > 0$ với mỗi $y \geq 19$, cho thấy là $f(x) > 0$ với mọi $x \in D$.

Nếu $1 \leq y \leq 18$, thế thì vì $g(18) = \frac{1 - \log_3 7}{3} < 0$ kết hợp tính tăng ngặt của g trên $[1; 18]$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = g(y) = \frac{1}{3} + y - 9 - \frac{1}{3} \log_3 \left(1 + \frac{1}{3}y\right) < 0.$$

Còn, theo bất đẳng thức số e , ta có

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 6y - \frac{1}{3} \log_3(1 + 6y) > 6y - \ln(1 + 6y) > 0.$$

Đến đây, theo tính liên tục của f , ta thấy nó triệt tiêu trên D .

Tóm lại $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $-2 \leq y \leq 18$.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8.

B. 9.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow (x^{\log a} + 2)^{\log a} = x - 2$.

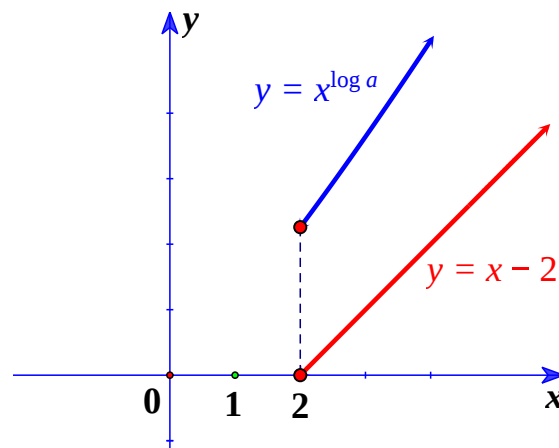
Vì $(x^{\log a} + 2)^{\log a} > 0$ nên suy ra $x > 2$.

Ta có: $(x^{\log a} + 2)^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow (x^{\log a} + 2)^{\log a} + (x^{\log a} + 2) = x^{\log a} + x$.

Xét hàm số $f(t) = t^{\log a} + t$ có $f'(t) = \log a \cdot t^{\log a - 1} + 1 > 0$, $\forall t > 2$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Mà $f(x^{\log a} + 2) = f(x) \Rightarrow x^{\log a} + 2 = x \Rightarrow x^{\log a} = x - 2$.

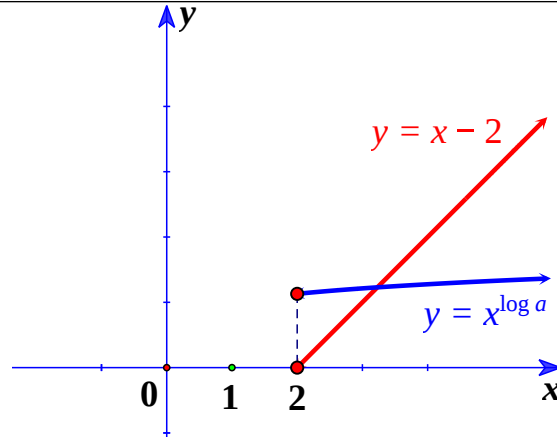
Trường hợp 1: $\log a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 10$.



Để thấy hai đồ thị của hai hàm số $y = x^{\log a}$ và $y = x - 2$ không có điểm chung, vậy $a \geq 10$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\log a < 1 \Leftrightarrow a < 10$.

Để thấy phương trình $x^{\log a} = x - 2$ luôn có nghiệm duy nhất.



Vậy $a \in \{2; 3; \dots; 9\} \Rightarrow$ có 8 giá trị của a thỏa mãn.

Câu 37: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n < 10$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Leftrightarrow h(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - \frac{2}{n}a^m = 0$ (1)

Ta tìm m, n nguyên dương thỏa mãn $m + n < 10$ sao cho (1) có đúng 3 nghiệm $a \in (-1; 1)$ (*)

* Với $m = 1$: $h(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - \frac{2}{n}a$ có $h'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{2}{n}$ và $h''(a) = -\frac{a}{\sqrt{(a^2 + 1)^3}}$.

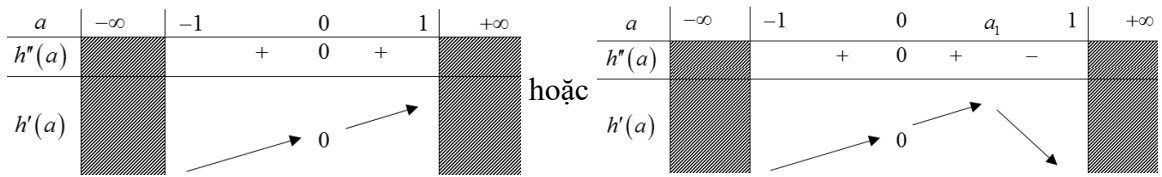
a	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h''(a)$			$+$	$-$	
$h'(a)$			$1 - \frac{2}{n}$		
		$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{n}$		$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{n}$	

Nếu $\begin{cases} 1 - \frac{2}{n} \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{n} \geq 0 \end{cases}$ thì $h'(a)$ không đổi dấu trên khoảng $(-1; 1)$, suy ra (*) không thỏa mãn.

Nếu $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{n} < 0 < 1 - \frac{2}{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < n < 2\sqrt{2} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ cũng không xảy ra.

Vậy $m \geq 2$. Khi đó $h'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{2ma^{m-1}}{n}$ và $h''(a) = -\frac{1}{\sqrt{(a^2 + 1)^3}} - \frac{2m(m-1)a^{m-2}}{n}$.

+ Nếu m chẵn thì $h'(a) > 0$ với $\forall a \in (-1; 0)$; $h''(a) < 0$ với $\forall a \in (0; 1)$, suy ra $h'(a)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Mà $h'(0) = 1$ nên hoặc $h'(a) > 0$ với $\forall a \in (0; 1)$ hoặc trên khoảng $(0; 1)$ thì $h'(a) = 0$ có nghiệm duy nhất a_1 .



Suy ra (*) không thỏa mãn.

+ Vậy phải có m lẻ và $m \geq 3$. Khi đó $h(-a) = \ln(-a + \sqrt{a^2 + 1}) - \frac{2}{n}(-a)^n$

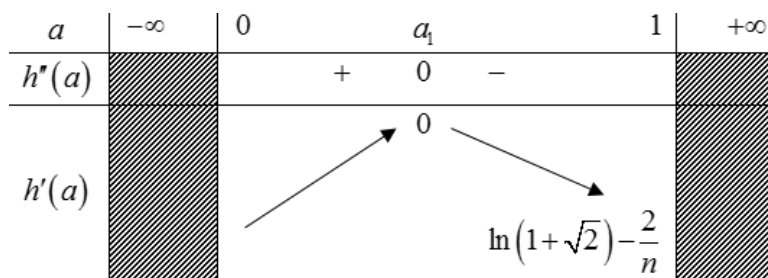
$$= \ln \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}} + \frac{2}{n}a^m = -h(a). \text{ Hay hàm số } h(a) \text{ là hàm số lẻ và } h(0) = 0.$$

Do đó từ (*) $\Leftrightarrow$ trên khoảng $(0; 1)$ (1) có nghiệm duy nhất (**)

Ta có $h''(a) < 0$ với $\forall a \in (0; 1)$ nên $h'(a)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

+ Nếu $h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2m}{n} \geq 0$ thì $h(a) > 0$ với $\forall a \in (0; 1)$, suy ra (**) không thỏa mãn.

Vậy phải có $h'(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2m}{n} < 0$. Mà $h'(0) = 1 > 0$ nên $h'(a) = 0$ có nghiệm duy nhất a_2 trên khoảng $(0; 1)$.



$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m, n \in \mathbb{Z}^+ \\ m+n \leq 10 \\ m = 2k+1, m \geq 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2m}{n} < 0 \\ \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{n} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m, n \in \mathbb{Z}^+ \\ m+n \leq 10 \\ m = 2k+1, m \geq 3 \\ \frac{m}{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} = 2, 2... \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m, n \in \{1; 2\} \\ m = 2k+1, m \geq 3 \\ m+n \leq 10 \\ n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} = 2, 2... \end{cases}$$

n	m
1	3, 5, 7, 9
2	3, 5, 7

Từ bảng trên suy ra có 7 cặp số (m, n) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên (m, n) sao cho $m + n \leq 16$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng

3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2.a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 16.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình: $2.a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ (*).

Nhận thấy $a = 0$ là một nghiệm của phương trình (*).

Xét $a \neq 0$ khi đó: $(*) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^m}$ (**).

Xét hàm số: $f(a) = \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^m} \Rightarrow f'(a) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - m \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^{m+1}}$.

Xét $g(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - m \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Rightarrow g'(a) = \frac{1-m}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{a^2}{(\sqrt{a^2 + 1})^3} \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $g(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình $g(a) = 0$ có nghiệm duy nhất $a = 0$.

Nếu m chẵn:

a	-1	0	1
$g(a)$	+	0	-
a^{m+1}	-	0	+
$f'(a)$	-		-
$f(a)$	$\ln(-1 + \sqrt{2})$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\ln(1 + \sqrt{2})$	

Khi đó phương trình $f(a) = \frac{2}{n}$ không có hai nghiệm phân biệt (**loại**).

Nếu m lẻ:

a	-1	0	1
$g(a)$	+	0	-
a^{m+1}	+	0	+
$f'(a)$	+		-
$f(a)$	$\ln(-1 + \sqrt{2})$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $\ln(1 + \sqrt{2})$	

Đề phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt $\in (-1;1)$ khi và chỉ khi (**) có 2 nghiệm phân biệt

$$\in (-1;1) \Leftrightarrow \frac{2}{n} > \ln(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2,27 \text{ mà } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } n \in \{1;2\}.$$

$$\text{Với } m=1 \text{ ta có: } (*) \Leftrightarrow \frac{2a}{n} = \ln(a+\sqrt{a^2+1}) \Leftrightarrow \ln(a+\sqrt{a^2+1}) - \frac{2a}{n} = 0.$$

$$\text{Đặt } h(a) = \ln(a+\sqrt{a^2+1}) - \frac{2a}{n} \Rightarrow h'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{2}{n} < 0, \forall a \in \mathbb{R}, n \in \{1;2\} \text{ nên } h(a) \text{ nghịch}$$

biến trên $\mathbb{R}$, suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $a=0$ (loại).

Từ đó ta có $m > 1$.

Với $n=1 \Rightarrow m+1 \leq 16 \Rightarrow m \leq 15$, mà m lẻ và $m > 1$ nên $m \in \{3;5;7;9;11;13;15\}$.

Với $n=2 \Rightarrow m+2 \leq 16 \Rightarrow m \leq 14$, mà m lẻ và $m > 1$ nên $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$.

Vậy có tất cả 13 cặp (m,n) thỏa mãn.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện $x+y > 0; x^2+y^2 \neq 0$.

$$\text{Ta đặt: } \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t. \text{ Ta có } \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Vì } (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2 \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$$

Thế thì $x^2+y^2 = 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3,27$, vì x nguyên vậy nên $x^2 \in \{0;1\}$.

$$\text{Với } x=0, \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=1, \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases}. \text{ Hệ này có nghiệm } \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x=-1, \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có phương trình } (3^t+1)^2 = 4^t - 1 \Leftrightarrow 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2, \text{ ta có}$$

$$\text{Với } t \geq 0 \Rightarrow 9^t \geq 4^t \Rightarrow f(t) > 0$$

$$\text{Với } t < 0 \Rightarrow 4^t < 2 \Rightarrow f(t) > 0$$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm

Kết luận: Vậy $x \in \{0;1\}$.

Câu 40: Cho phương trình $(2\log_2^2 x - \log_2 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. Vô số.

B. 62.

C. 63.

D. 64.

Lời giải**Chọn B**

$$(2\log_2^2 x - \log_2 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 4^x = m \end{cases} \\ \begin{cases} 4^x - m > 0 \\ 2\log_2^2 x - \log_2 x - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x = \log_4 m \end{cases} \\ \begin{cases} x > \log_4 m \\ x = 3 \vee x = 3^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

➤ Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt. Do đó $m = 1$ thỏa.

➤ Nếu $m > 1$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm $x = \log_4 m$, nghiệm này luôn là nghiệm của (*). Do đó, (*) có đúng hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

➤ Với $m = 2$ thì $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ như vậy phương trình (2) có hai nghiệm nên ta loại trường hợp này

➤ Với $m \geq 3$ thì $x = 3^{-\frac{1}{2}} \approx 0,577$, trong khi đó $\log_4 3 \approx 0,79$ nên ta loại nghiệm $x = 3^{-\frac{1}{2}}$, như vậy (2) chỉ còn nghiệm $x = 3$.

Xét $\log_4 m < 3 \Leftrightarrow m < 64$.

Các giá trị m nguyên dương cần tìm thuộc tập $S = \{1\} \cup [3, 64)$. Vậy có tất cả 62 giá trị m .

Câu 41: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 9.

B. 6.

C. $\frac{27}{4}$.D. $\frac{20}{3}$.**Lời giải****Chọn C**

Từ giả thiết suy ra $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) > 0$ và $\log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) > 0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$\begin{aligned} \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) &\geq 2\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \\ &= 2\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1). \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 16a^2 + b^2 + 1 = (4a - b)^2 + 8ab + 1 \geq 8ab + 1 \quad (\forall a, b > 0),$$

$$\text{suy ra } 2\log_{8ab+1}(16a^2 + b^2 + 1) \geq 2.$$

$$\text{Khi đó } \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) = \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \\ b = 4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{24a+1}(32a^2+1)=1 \\ b=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a^2=24a \\ b=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a+2b=\frac{3}{4}+6=\frac{27}{4}.$$

Câu 42: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

- A. 6. B. 9. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$a > 0, b > 0$ nên ta có $\log_{3a+2b+1}(6ab+1) > 0; \log_{6ab+1}(3a+2b+1) > 0$.

Ta có $9a^2+b^2 \geq 6ab$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=3b$.

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1) &\geq \log_{3a+2b+1}(6ab+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1) \\ &\geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(6ab+1)\cdot\log_{6ab+1}(3a+2b+1)}=2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(3a+2b+1)}=2. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} b=3a > 0 \\ \log_{3a+2b+1}(6ab+1)=\log_{6ab+1}(3a+2b+1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a > 0 \\ \log_{9a+1}(18a^2+1)=\log_{18a^2+1}(9a+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a > 0 \\ \log_{9a+1}(18a^2+1)=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a > 0 \\ 18a^2+1=9a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } a+2b=\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Câu 43: Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 20. B. 19. C. 9. D. 21.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > m$

$$\text{Đặt: } t=\log_5(x-m) \Rightarrow \begin{cases} x-m=5^t \\ 5^x+m=t \end{cases} \Rightarrow 5^x+x=5^t+t \quad (1).$$

Xét hàm số $f(u)=5^u+u \Rightarrow f'(u)=5^u \ln 5+1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x=t \Leftrightarrow x=5^x+m \Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $f(x)=x-5^x, x > m$

Do: $5^x > 0 \Rightarrow m < x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$$f'(x) = 1 - 5^x \ln 5, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \left(\frac{1}{\ln 5} \right).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\approx -0,295$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow \approx -0,917$	$\searrow -\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \leq \approx -0,917 \xrightarrow{m \in (-20; 20)} m = \{-19; -18; \dots; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+30) - 5] \leq 0$?

A. 30.

B. Vô số.

C. 31.

D. 29.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x > -30$. Đặt $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+30) - 5]$

$$\text{Xét phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 9^x \\ \log_2(x+30) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ x+30 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	-30	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$ $	$-$	0	$+$

Suy ra bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là: $S = (-30; 0] \cup \{2\}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-29; -28; \dots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 45: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0$?

A. 1024.

B. 1047.

C. 1022.

D. 1023.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2^x, \text{ ta có bất phương trình } (2t - \sqrt{2})(t - y) < 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(t - y) < 0 \quad (*)$$

Vì y là số nguyên dương nên $\frac{\sqrt{2}}{2} < t < y$. Do đó $(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^x < y \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \log_2 y$.

Để với mỗi số y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn thì ta có $\log_2 y \leq 10 \Leftrightarrow y \leq 1024$.

Suy ra $y \in \{1; 2; \dots; 1024\}$.

Vậy có 1024 số nguyên dương của y thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1..$ B. $m < \frac{2}{3}..$ C. $m < 0..$ D. $m \leq 1..$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $x > 0$; Bất phương trình tương đương $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 2 < -3m$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2^2 x - 2\log_2 x - 2$.

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 2\ln(2)}{x\ln^2(2)}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		— 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -3 \nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm thực thì $-3m > -3 \Leftrightarrow m < 1..$

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

- A. 24.. B. Vô số. C. 25.. D. 26..

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x > -25$.

Đặt $A(x) = (2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3], x > -25$.

$$2^{x^2} - 4^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

$$\log_3(x+25) - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25	0	2	$+\infty$
$A(x)$		— 0 +	0 +	

$$\text{Từ đó, } A(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -25 < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 0; 2\}$$

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \leq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \leq 2^{2x} \\ x+25 \geq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \geq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -25 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \\ -25 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -25 < x \leq 0 \vee x = 2.$$

• Vậy có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$.

Câu 48: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của của biểu thức

$$P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leq x^2 + y^2 - 2x + 2 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 \geq 0.$$

Khi đó (*) trở thành $2^t \leq t+1$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1 \quad (t \geq 0)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2^t \ln 2 - 1; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow t = \log_2 \frac{1}{\ln 2} = t_0.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 2^t - t - 1 \quad (t \geq 0)$ như sau

t	0	t_0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+	+
$f(t)$	0	$f(t_0)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $2^t - t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$.

Do đó $0 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính bằng 1 (kể cả biên). Nếu $2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$ thì $(x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (2x+1)^2 = 4x^2 + (x+1)^2 + 1 > 1$ mâu thuẫn với $0 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

$$\text{Với } 2x - y + 1 \neq 0 \text{ thì } P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow (\Delta): (2P-8)x - Py + P - 4 = 0.$$

Với $(x; y)$ thỏa mãn giả thiết, P là một giá trị của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ khi và chỉ khi đường

thẳng $(\Delta): (2P-8)x - Py + P - 4 = 0$ và hình tròn là hình tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính bằng 1 (kể cả biên) có điểm chung. Điều này tương đương với

$$d(I, (\Delta)) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2 + P^2}} \leq 1 \Leftrightarrow |3P-12| \leq \sqrt{(2P-8)^2 + P^2}$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 10P + 20 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}. \text{ Suy ra miền giá trị của } P \text{ là đoạn } [5 - \sqrt{5}; 5 + \sqrt{5}].$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của p bằng $5 - \sqrt{5} (\approx 2,76)$ đạt được khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 80.

B. 79.

C. 157.

D. 158.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + y > 0 \\ x^2 + y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x \\ y > -x^2 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x^2 > x \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ do đó có điều kiện $y > -x \Rightarrow y \geq 1 - x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x^2 + y) - \log_2(x + y)$.

$$\text{Ta có } f'(y) = \frac{1}{(x^2 + y)\ln 3} - \frac{1}{(x + y)\ln 2} = \frac{(x + y)\ln 2 - (x^2 + y)\ln 3}{(x^2 + y)(x + y)\ln 3 \cdot \ln 2}$$

$$\text{Vì } x \leq x^2 \Rightarrow 0 < x + y \leq x^2 + y$$

$$0 < \ln 2 < \ln 3$$

$$\text{Suy ra } \ln 2(x + y) < \ln 3(x^2 + y) \Rightarrow f'(y) < 0.$$

$$\text{Nhận xét: } f(1 - x) = \log_3(x^2 - x + 1) - \log_2 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử phương trình $f(y) = 0$ có nghiệm, vì $f'(y) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(y) = 0$ có nghiệm duy nhất $y = m$.

Có bảng biến thiên:

y	$1 - x$	m	$+\infty$
$f'(y)$		-	-
$f(y)$	+	$\rightarrow 0$	-

Nên bất phương trình $f(y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leq y \leq m$ do đó để bất phương trình có không quá 255 giá trị $y \in \mathbb{Z}$ thì $m \leq 255 - x$ nên $f(256 - x) < 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + 256) - \log_2 256 < 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - x + 256 < 3^8 \Leftrightarrow -78,9 < x < 79,9$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $-78 \leq x \leq 79 \Rightarrow$ có 158 giá trị x thỏa mãn.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89.

B. 46.

C. 45.

D. 90.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

Với x nguyên tùy ý, ta có $x^2 \geq x$

Xét hàm số $f(y) = \log_2(x + y) - \log_3(x^2 + y)$

Tập xác định : $D = (-x; +\infty)$ ($y > -x \Rightarrow y > -x^2$)

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 2} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 3} = \frac{(x^2+y)\ln 3 - (x+y)\ln 2}{(x+y)(x^2+y)\ln 2 \cdot \ln 3} \geq 0 \quad \forall y \in D$$

($x^2 + y \geq x + y > 0; \ln 3 > \ln 2 > 0$) $\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên D .

Ta có $f(-x+1) = -\log_3(x^2 - x + 1) \leq 0$ (do $x^2 - x + 1 \geq 1$)

Có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(-x+128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2 - x + 128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \quad (x_1 \approx -44,87; x_2 \approx 45,87)$$

$\Rightarrow x \in \{-44; -43; \dots; 45\}$. Vậy có 90 giá trị x .

Cách 2

Ta có: $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$ (1)

Đặt $t = x + y \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2 - x + t) \leq 0 \quad (2)$$

Ta có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2 - x + t) \ln 3} > 0$ với mọi $t \geq 1$. Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn (2) nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2 - x + 128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8.$$

Vậy có 90 giá trị thỏa mãn YCBT.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 55.

B. 28.

C. 29.

D. 56.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + y > 0 \\ x^2 + y > 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ Khi đó}$$

$$\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_3 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x > (x + y)^{\log_3 4} - (x + y) \quad (1)$$

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \geq 1$ thì (1) được viết lại là $x^2 - x > t^{\log_3 4} - t$ (2)

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t .

Nhận thấy $f(t) = t^{\log_3 4} - t$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên nếu $x^2 - x > 243^{\log_3 4} - 243 = 781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t \geq 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \leq 781 \Leftrightarrow -27,4 \leq x \leq 28,4$.

Mà x nguyên nên $x \in \{-27, -26, \dots, 27, 28\}$.

Vậy có tất cả $28 + 28 = 56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 59.

B. 58.

C. 116.

D. 115.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$.

Tập xác định $D = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0, \forall x \in D \text{ (do } x^2 + y \geq x + y > 0, \ln 4 > \ln 3)$$

$\Rightarrow f$ tăng trên D .

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x - x + 1) - \log_4(x^2 - x + 1) \leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow f(-x+729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4(x^2 - x + 729) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 729 - 4^6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0$$

$$\Leftrightarrow -57,5 \leq x \leq 58,5$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, \dots, 58\}$.

Vậy có $58 - (-57) + 1 = 116$ số nguyên x thỏa.

Câu 53: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0..

B. 1..

C. Vô số.

D. 2..

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có nhận xét: } \begin{cases} e^x \geq e.x \\ e^y \geq e.y \end{cases} \Rightarrow e^{x+y} \leq e(x+y) \Leftrightarrow x+y=1.$$

(Dấu '=' xảy ra khi $x+y=1$).

Do đó ta có: $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow f(x) + f(1-x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9 + m^2 \cdot 9^x + 9 + m^2 \cdot 9^{1-x}}{9 + m^2 \cdot 9^x + m^2 \cdot 9^{1-x} + m^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 + m^2 \cdot 9^x + 9 + m^2 \cdot 9^{1-x} = 9 + m^2 \cdot 9^x + m^2 \cdot 9^{1-x} + m^4$$

$$\Leftrightarrow m^4 = 9 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 54: Xét các số thực x, y sao cho $49^{9-y^2} \geq a^{4x-\log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x - 3y$ bằng:

A. $\frac{121}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. 24.

D. 39.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 49^{9-y^2} \geq a^{4x-\log_7 a^2} \Leftrightarrow \log_7 (49^{9-y^2}) \geq \log_7 (a^{4x-\log_7 a^2}).$$

$$\Leftrightarrow (9-y^2)\log_7 (49) \geq (4x-\log_7 a^2)\log_7 (a) \Leftrightarrow 2(9-y^2) \geq 2(2x-\log_7 a)\log_7 a. (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_7 a, \text{ khi } a > 0 \text{ thì } t \in \mathbb{R}, (1) \text{ trở thành } t^2 - 2xt + 9 - y^2 \geq 0. (2)$$

$$(1) \text{ đúng với mọi } a > 0 \Leftrightarrow (2) \text{ đúng với mọi } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = x^2 - 9 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9.$$

$$\text{Xét } (4x-3y)^2 \leq (16+9)(x^2+y^2) \Rightarrow (4x-3y)^2 \leq 225 \Rightarrow 4x-3y \leq 15$$

$$\text{Suy ra } P = x^2 + y^2 + 4x - 3y \leq 9 + 15 = 24, \text{ đẳng thức xảy ra khi}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5}; y = -\frac{9}{5} \\ x = -\frac{12}{5}; y = \frac{9}{5} \end{cases}.$$

Vậy GTLN của P bằng 24.

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b - 1)(a \cdot 2^b - 5) < 0$?

A. 20.

B. 21.

C. 22.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

$$(5^b - 1)(a \cdot 2^b - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^b - 1 = 0 \\ a \cdot 2^b - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \log_2 \frac{5}{a} \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} \log_2 \frac{5}{a} < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 5.$$

$$\text{Vì hàm số } y = a^x \text{ (} a > 1 \text{)} \text{ là hàm đồng biến nên } (5^b - 1)(a \cdot 2^b - 5) < 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5}{a} < b < 0.$$

$$\text{Yêu cầu của bài toán suy ra } -3 \leq \log_2 \frac{5}{a} < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{5}{a} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 40 \\ a > 20 \end{cases} \xrightarrow{a \in \mathbb{N}^*} a \in \{21, 22, \dots, 40\}$$

.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} \log_2 \frac{5}{a} > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 5$$

$$\text{Vì hàm số } y = a^x \text{ (} a > 1 \text{)} \text{ là hàm đồng biến nên } (5^b - 1)(a \cdot 2^b - 5) < 0 \Leftrightarrow 0 < b < \log_2 \frac{5}{a}.$$

$$\text{Yêu cầu của bài toán suy ra } 2 \leq \log_2 \frac{5}{a} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq \frac{5}{a} < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{5}{4} \\ a > \frac{5}{8} \end{cases} \xrightarrow{a \in \mathbb{N}^*} a = 1.$$

Vậy có 21 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.