

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 1$ (C).

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm m để hàm số (C) $y = x^4 - (m+1)x^2 + 1$ cắt d: $y = 3 - 2m$ tại 4 điểm phân biệt ?

Câu 3 (1,0 điểm).

1/. Cho số phức z thỏa $iz - (1-2i)\bar{z} = 1+9i$. Tìm mô đun của số phức $w = 1 + i + z$?

2/. Giải phương trình: $2.49^x - 9.14^x + 7.4^x = 0$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox, biết (H) được giới

hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}}$ và các đường thẳng $x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$?

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

1/. Viết phương trình đường thẳng d qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mp(P) ?

2/. CMR mp(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn. Xác định tọa độ tâm H và tính bán kính của đường tròn giao tuyến đó ?

Câu 6 (1,0 điểm).

1/. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$

2/. Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^8$?

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mp(SBD) và mp đáy là 45° . Cho $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$.

1/. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD ?

2/. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm của $\triangle SAD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SM và BG ? Xác định góc giữa hai đường thẳng SM và BG ?

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 6x^2 + 15x - 3y - 14 = 0 \\ \sqrt{z-2} + \sqrt{2-y} + 1 = z^2 - 6y \\ \sqrt{x^2 - xz + z^2} + \sqrt{x} = z + \sqrt{z} \end{cases}$$
 trên tập số thực ?

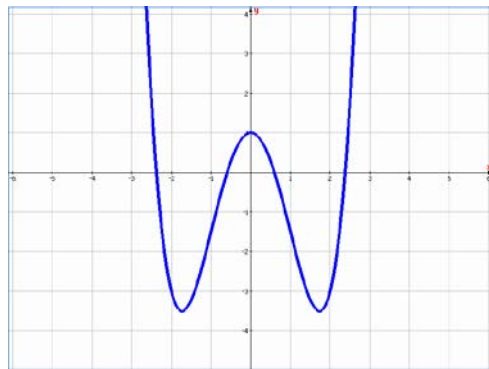
Câu 9 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-1;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với trục hoành. Tìm 2 điểm B,C sao cho M là trung điểm AB, trung điểm N của đoạn AC nằm trên đường thẳng Δ , diện tích tam giác ABC bằng 4 và điểm C có hoành độ dương ?

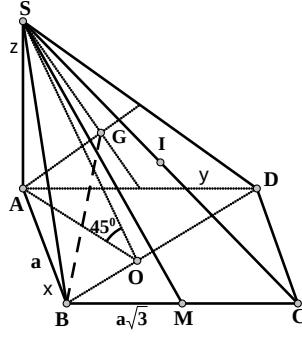
Câu 10 (1,0 điểm). Cho 2 số thực x,y thỏa mãn $x,y \geq 1$ và $3(x+y) = 4xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$?

___ Hết ___

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung																		
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 1$ (C). - TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = 2x^3 - 6x$ $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ - Hàm số đạt CĐ tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 1$, đạt CT tại $x = \pm\sqrt{3}$ và $y_{CT} = -\frac{7}{2}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ - BBT: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>0</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> $\swarrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$ $-\frac{7}{2} \quad -\frac{7}{2}$ - ĐDB: $x = \pm 2 \Rightarrow y = -3$ - Đồ thị: 	x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	0	$+$	y	$+\infty$		1		$+\infty$
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$														
y'	$-$	0	$+$	0	$+$														
y	$+\infty$		1		$+\infty$														
2	Tìm m để hàm số (C) $y = x^4 - (m + 1)x^2 + 1$ cắt d: $y = 3 - 2m$ tại 4 điểm phân biệt ? PTHĐGD: $x^4 - (m + 1)x^2 + 1 = 3 - 2m \Leftrightarrow x^4 - (m + 1)x^2 + 2m - 2 = 0$ (*) Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thay vào (*) ta được $t^2 - (m + 1)t + 2m - 2 = 0$ (**) Đề đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (**) có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 - 4(2m - 2) > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 9 > 0 \\ m > -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \end{cases}$																		
3	1/. Cho số phức z thỏa $iz - (1 - 2i)\bar{z} = 1 + 9i$. Tìm mô đun của số phức $w = 1 + i + z$? Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Khi đó $iz - (1 - 2i)\bar{z} = 1 + 9i$ $\Leftrightarrow i(a + bi) - (1 - 2i)(a - bi) = 1 + 9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i$ $\Rightarrow w = 3 + 4i \Rightarrow w = 5$ 2/. Giải phương trình: $2.49^x - 9.14^x + 7.4^x = 0$ $\Leftrightarrow 2.\left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 9.\left(\frac{7}{2}\right)^x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$																		

4	Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox, biết (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}}$ và các đường thẳng $x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$? $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = \pi (\tan x + \sin x) = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$
5	Cho (P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$. 1/. Viết phương trình đường thẳng d qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mp(P) ? ✱ (S) có tâm $I(2; -3; -3), R = \sqrt{5}$ ✱ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ 2/. CMR mp(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn. Xác định tọa độ tâm H và tính bán kính của đường tròn giao tuyến ? ✱ $d(I, (P)) = \frac{ 2 - 2(-3) + 2(-3) + 1 }{3} = 1 < \sqrt{5} = R \Rightarrow \text{mp(P) cắt mặt cầu (S).}$ ✱ Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{11}{3}\right)$ ✱ Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = 2$
6	1/. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 2 \sin x - 1$ $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin x - 1 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ 2/. Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^8$? SHTQ là $T_{k+1} = C_8^k 2^{8-k} (-3)^k x^{16-3k}$ YCBT $\Leftrightarrow 16 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 4$ Vậy số hạng chứa x^4 là $T_5 = C_8^4 2^4 (-3)^4 x^4 = 90720x^4$
7	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mp(SBD) và mp đáy là 45°. Cho $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. 1/. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD ? Dựng $OA \perp BD \Rightarrow SO \perp BD$ mà $BD = (SBD) \cap (ABCD)$ nên $\widehat{SOA} = 45^\circ$. Gọi I là trung điểm SC. ✱ $\triangle SBC$ vuông tại B nên $IS = IB = IC$ (1) ✱ $\triangle SAC$ vuông tại A nên $IS = IA = IC$ (2) ✱ $\triangle SDC$ vuông tại D nên $IS = ID = IC$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm I và bán kính $R = IC = \frac{SC}{2}$. 

Mặt khác, $OA = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SA = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{19}}{2} \Rightarrow R = IC = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{19}}{4}$

2/. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm của ΔSAD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SM và BG ? Xác định góc giữa hai đường thẳng SM và BG ?

Dựng hệ trục tọa độ Axyz với $A(0;0;0), D(0;a\sqrt{3};0)$

$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M\left(a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \begin{cases} \overrightarrow{SM} = \left(a;\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \\ \overrightarrow{BG} = \left(-a;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \end{cases}$

$B(a;0;0), G\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$

$\times \begin{cases} [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BG}] = \left(\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{3}; \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{BM} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right) \end{cases} \Rightarrow d(SM, BG) = \frac{|[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BG}] \cdot \overrightarrow{BM}|}{|[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BG}]|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{429}}{12}} = \frac{2a\sqrt{143}}{429}$

$\times \cos(SM, BG) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BG}|}{SM \cdot BG} = \frac{9}{\sqrt{510}} \Rightarrow (SM, BG) = 66^\circ 30'$

8

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 6x^2 + 15x - 3y - 14 = 0 \\ \sqrt{z-2} + \sqrt{2-y} + 1 = z^2 - 6y \\ \sqrt{x^2 - xz + z^2} + \sqrt{x} = z + \sqrt{z} \end{cases}$ trên tập số thực ? ĐK: $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow (x-2)^3 + 3(x-2) = y^3 + 3y$ (4)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có tập xác định và liên tục trên R,

có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R. Nên (4) $\Leftrightarrow y = x - 2$

(3) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - xz + z^2} - z = \sqrt{z} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - xz}{\sqrt{x^2 - xz + z^2} + z} = \frac{z - x}{\sqrt{z} + \sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow (x-z) \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 - xz + z^2} + z} + \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - xz + z^2} + z} + \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = 0 : vn \end{cases}$

vì $\frac{x}{\sqrt{x^2 - xz + z^2} + z} + \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} > 0, \forall x \geq 2, y \leq 2, z \geq 0$

Với $x = z$ thay vào (2) ta được $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ (5)

Theo BĐT Bunhiacopxki ta có $VT = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(x-2) + (4-x)} = 2$

và $VP = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$

nên (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ x^2 - 6x + 11 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 3 \Rightarrow y = 1$ Vậy $(3; 1; 3)$ là nghiệm của hệ.

9

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-1;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với trục hoành. Tìm 2 điểm B, C sao cho M là trung điểm

AB, trung điểm N của đoạn AC nằm trên đường thẳng Δ và diện tích tam giác ABC bằng 4 và điểm C có hoành độ dương ?

$$\text{Do } M = Ox \cap \Delta \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

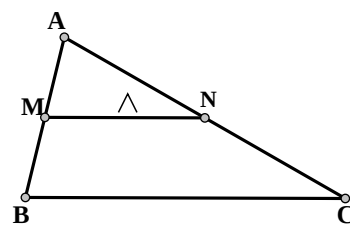
Và $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm AB nên $B(2; -2)$

đường thẳng BC qua $B(2; -2)$ và song song với Δ nên $BC: 2x + y - 2 = 0$

$$\Rightarrow C(c; 2 - 2c) \text{ với } c > 0. \text{ Mặt khác, } \overrightarrow{AB} = (3; -4) \Rightarrow \begin{cases} AB = 5 \\ AB: 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$S_{\Delta ABC} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{|4c + 3(2 - 2c) - 2|}{5} = 4 \Leftrightarrow |4 - 2c| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2c = 8 \\ 4 - 2c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 (\text{loại}) \\ c = 6 \Rightarrow C(6; -10) \end{cases}$$



10 Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ và $3(x + y) = 4xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$?

Đặt $t = x + y \geq 2 \Rightarrow xy = \frac{3}{4}(x + y) = \frac{3}{4}t, t \geq \frac{3}{2}$

Theo Viet; x, y là nghiệm phương trình $X^2 - tX + \frac{3}{4}t = 0$ (1)

Mà (1) có nghiệm $\Leftrightarrow t^2 - 3t \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 (\text{loại}) \\ t \geq 3 \end{cases} \Rightarrow t \geq 3$ (a)

Mặt khác, $x, y \geq 1 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x + y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3t}{4} - t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 4$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $3 \leq t \leq 4$ Mà $3(x + y) = 4xy \Leftrightarrow \frac{x + y}{xy} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$

Khi đó $P = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 3\left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2}{xy}\right] = t^3 - \frac{9}{4}t^2 - \frac{8}{t} + \frac{16}{3}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \frac{9}{4}t^2 - \frac{8}{t} + \frac{16}{3}$ với $3 \leq t \leq 4$

Có $f'(t) = 3t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{8}{t^2} = 3t\left(t - \frac{3}{2}\right) + \frac{8}{t^2} > 0, \forall t \in [3; 4]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[3; 4]$.

mà $f(3) = \frac{113}{12}; f(4) = \frac{94}{3}$

Vậy $\max P = \frac{94}{3} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (1; 3), (3; 1)$

$\min P = \frac{113}{12} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$