Thời gian làm bài: 90 phút.

BỘ MÔN CHUYÊN TOÁN

(*Đề gồm có 5 trang*)

Mã đề : 002

Học sinh:...

Câu 1. Môđun của số phức $z = 3 + 2i$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 13.

Câu 2. Trong một nhóm có 6 nam và 4 nữ. Số cách chọn ra hai người có cả nam và nữ là

A. 10. **B.** 45. **C.** 90. **D.** 24.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{x+3} = \dfrac{1}{4}$ là

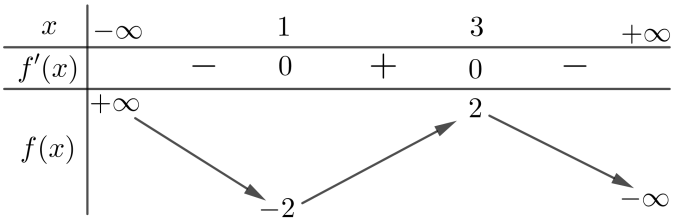
A. $x = -1$. **B.** $x = -5$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 1$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 1)$ và bán kính bằng 2 là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$. **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(-2; 2)$.

Câu 6. $\lim \dfrac{2n+3}{n+1}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

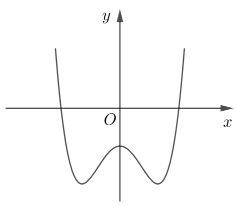
Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (xOy) ?

A. $M(0; 1; 2)$. **B.** $N(2; 0; 1)$. **C.** $P(0; 0; 1)$. **D.** $Q(2; 1; 0)$.

Câu 8. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như trong hình bên ?



A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x - 1$.

Câu 10. Với các số thực dương a, b bất kì và $a, b \neq 1$, giá trị của $\log_a b$ bằng

A. $-\log_b a$. **B.** a^b. **C.** $\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** b^a.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$ Phương trình chính tắc của d là

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$. **B**. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. **D**. $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B**. 2. **C**. -1. **D**. $+\infty$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Thể tích khối chóp $A'.BCO$ bằng

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Câu 14. Họ nguyên hàm $\displaystyle\int \left(2x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^2 + \ln|x| + C$. **B**. $x^2 + \ln|x| + C$. **C**. $4x^2 - \dfrac{1}{x^2} + C$. **D**. $x^2 - \dfrac{1}{x^2} + C$.

Câu 15. Cho khối cầu có thể tích bằng 36π. Bán kính của khối cầu đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B**. $3\sqrt{2}$. **C**. 3. **D**. 2.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $1 + 2i$ và $-2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Tam giác OAB tù. **B**. Tam giác OAB đều.

C. Tam giác OAB vuông và không cân. **D**. Tam giác OAB vuông cân.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -1; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là

A. $x - y + 2z + 6 = 0$. **B**. $x - y + 2z - 6 = 0$.

C. $x + y + z - 2 = 0$. **D**. $x + y + z + 2 = 0$.

Câu 19. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 3. **B**. $\dfrac{112}{27}$. **C**. 4. **D**. $\dfrac{58}{27}$.

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y = (3x - x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2 + \infty)$.
B. $(1; 2)$.
C. $[1; 2]$.
D. $(-\infty; 1] \cup [2 + \infty)$.

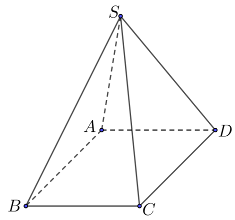
Câu 21. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+4=0$. Giá trị của $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1-z_2|^2$ bằng

A. 16.
B. $4+2\sqrt{3}$.
C. 12.
D. 20.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với d và song song với mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\vec{u}_1 = (0; -1; -2)$.
B. $\vec{u}_2 = (2; -1; 0)$.
C. $\vec{u}_3 = (-1; 0; 1)$.
D. $\vec{u}_4 = (-1; 1; -1)$.

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. 30^0.
B. 45^0.
C. 60^0.
D. 90^0.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 3$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0.
B. 6.
C. 3.
D. -1.

Câu 25. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ là

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $\sqrt{2}a$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{2}$.
B. $\dfrac{\pi a^3}{6}$.
C. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.
D. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$.

Câu 27. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x - x^2} + 1}{x - 1}$ là

A. 2.
B. 1.
C. 0.
D. 3.

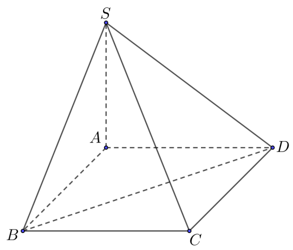
Câu 28. Cho các số a, b, c thỏa mãn $\log_a 3 = 2, \log_b 3 = \dfrac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15.}$ Giá trị của $\log_c 3$ bằng

A. 2.
B. $\dfrac{1}{2}$.
C. 3.
D. $\dfrac{1}{3}$.

Câu 29. Diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{2x}; y = 0$ và $x = 0; x = 2$ bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2} - \mathrm{e}$.
B. $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2} - 1$.
C. $\dfrac{\mathrm{e}^4 - 1}{2}$.
D. $2\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$.

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
C. $\dfrac{a}{2}$.
D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31. Từ một hộp chứa 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 19, chọn ngẫu nhiên hai thẻ. Xác suất để tích của hai số ghi trên hai thẻ được chọn là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{15}{19}$.
B. $\dfrac{14}{19}$.
C. $\dfrac{4}{19}$.
D. $\dfrac{5}{19}$.

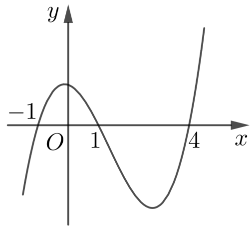
Câu 32. Họ nguyên hàm $\int \dfrac{x^3+x^2-5}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{x^2}{2}+3\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$.
B. $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$.
C. $\dfrac{x^2}{2}-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$.
D. $x-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$.

Câu 33. Cho hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón đó bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc bằng 60° ta được một thiết diện có diện tích bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^2}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2-1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m $(-10<m<10)$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có đúng một nghiệm ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 38. Cho $\displaystyle\int_0^1 (x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=a+b\mathrm{e}+c\mathrm{e}^2$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$; $d_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
B. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 40. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=\sqrt{2}$, giá trị lớn nhất của $|z+1|^2-|z-i|^2$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 41. Cho tham số thực m, biết rằng phương trình $4^x-(m+4)2^x+2=0$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=4$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;5)$. **B.** $(5;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;4)$ và $C(0;5;4)$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ của điểm M là

A. $(1;3;0)$. **B.** $(1;-3;0)$. **C.** $(3;1;0)$. **D.** $(2;6;0)$.

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 44. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $C, AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C**. $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x-1}-1)+x+3-4\sqrt{x-1} = m$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. 7. **B**. 8. **C**. 0. **D**. 4.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x) = x[\sin x + f'(x)] + \cos x$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng

A. $1+\pi$. **B**. $-1+\pi$. **C**. $1+\dfrac{\pi}{2}$. **D**. $-1+\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 47. Xét các số phức thỏa mãn $|z| \geq 2$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$. Giá trị của tích Mm bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. $\dfrac{3}{4}$. **C**. 1. **D**. 2.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Xét các điểm A, B thay đổi thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các tiếp tuyến tại A và B với trục tung. Có bao nhiêu điểm A có hoành độ là số nguyên dương sao cho $EF < 2020$?

A. 10. **B**. 11. **C**. 8. **D**. 7.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ với $a < 0$ thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^0, \widehat{BMC} = 90^0, \widehat{CMA} = 120^0$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B**. -2. **C**. 1. **D**. $\dfrac{10}{3}$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+2f(x) = 1-x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{7}{4}$. **B**. $-\dfrac{17}{4}$. **C**. $\dfrac{17}{4}$. **D**. $\dfrac{7}{4}$.

.... HẾT ....

ĐÁP ÁN ĐỀ THI

1.C	2.D	3.B	4.A	5.C	6.A	7.D	8.A	9.A	10.C
11.C	12.B	13.B	14.B	15.C	16.A	17.D	18.B	19.C	20.B
21.D	22.B	23.B	24.C	25.A	26.B	27.B	28.D	29.C	30.A
31.B	32.C	33.A	34.A	35.B	36.B	37.C	38.D	39.A	40.D
41.D	42.A	43.A	44.A	45.B	46.B	47.B	48.D	49.B	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn C

$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Câu 2. Chọn D

Số cách chọn một nam từ 6 nam là $C_6^1=6$ cách.

Số cách chọn một nữ từ 4 nữ là $C_4^1=4$ cách.

Số cách chọn ra hai người có cả nam và nữ là $6.4=24$ cách.

Câu 3. Chọn B

Phương trình $2^{x+3}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 2^{x+3}=2^{-2}\Leftrightarrow x+3=-2\Leftrightarrow x=-5$.

Câu 4. Chọn A

Trong không gian $Oxyz$, phương trình $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ là phương trình mặt cầu tâm $I(x_0;y_0;z_0)$, bán kính R.

Câu 5. Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy hàm số $f(x)$ tăng trên khoảng $(1;3)$.

Câu 6. Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{2n+3}{n+1}=\lim\dfrac{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=2$.

Câu 7. Chọn D

Điểm thuộc mặt phẳng (xOy) sẽ có cao độ bằng 0. Từ đó, ta chọn được $Q(2;1;0)$ là điểm thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 8. Chọn A

$\int\limits_0^1[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=2-(-1)=3$.

Câu 9. Chọn A

Đây là đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ có $a>0$.

Câu 10. Chọn C

Với các số thực dương a,b bất kì và $a,b\neq 1$, ta có $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

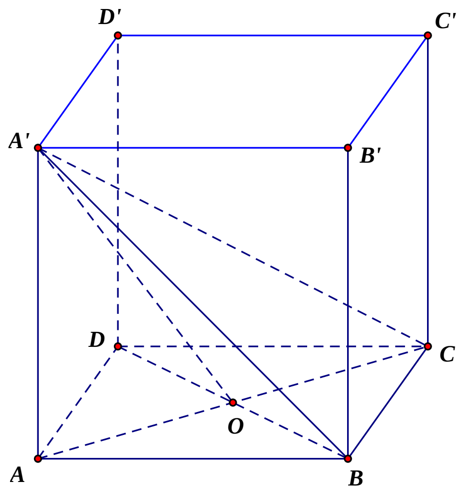
Câu 11. Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;1;2)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$ nên có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 12. Chọn B

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 13. Chọn B



Ta có: $V_{A'.BCO}=\frac{1}{4}V_{A'.ABCD}=\frac{1}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{1}{12}.12=1$.

Câu 14. Chọn B

Ta có: $\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx=x^2+\ln|x|+C$.

Câu 15. Chọn C

Ta có $V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 36\pi=\frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3=27 \Leftrightarrow R=3$.

Vậy bán kính của khối cầu đã cho bằng 3.

Câu 16. Chọn A

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Chọn D

Tọa độ các điểm A, B lần lượt là $(1;2)$ và $(-2;1)$.

$\overrightarrow{OA}=(1;2)\Rightarrow OA=\sqrt{5}$; $\overrightarrow{OB}=(-2;1)\Rightarrow OB=\sqrt{5}$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\\ OA=OB=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}OA\perp OB\\ OA=OB\end{cases}\Rightarrow$ Tam giác OAB vuông cân tại O.

Câu 18. Chọn B

Gọi (α) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;2)$.

Vì $(\alpha)\perp d$ nên (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\overrightarrow{u_d}=(1;-1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$(x-1)-(y+1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-6=0$.

Câu 19. Chọn C

Ta có hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$f'(x)=3x^2-4x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Mà $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{31}{27};\ f(1)=1;\ f(2)=3$.

Suy ra $M=3;\ m=1$. Vậy $M+m=4$.

Câu 20. Chọn B

Hàm số $y=\left(3x-x^2-2\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định khi và chỉ khi $3x-x^2-2>0 \Leftrightarrow -x^2+3x-2>0 \Leftrightarrow 1<x<2$. Tập xác định của hàm số là $(1;2)$.

Câu 21. Chọn D

Ta có: $z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+\sqrt{3}i \\ z_2=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Khi đó: $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1-z_2|^2=\left|-1+\sqrt{3}i\right|^2+\left|-1-\sqrt{3}i\right|^2+\left|2\sqrt{3}i\right|^2=20$

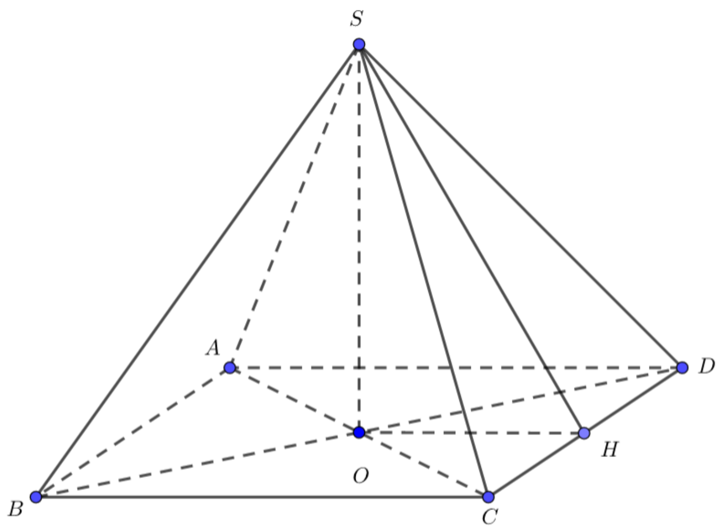
Câu 22. Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;2;1)$, (Oxy) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$.

Do $\Delta \perp d$ và $\Delta // (Oxy)$ nên $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_d},\vec{n}\right]=(2;-1;0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Câu 23. Chọn B



Gọi $O=AC\cap BD \Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Kẻ $OH\perp CD$.

Có $\begin{cases} CD\perp OH \\ CD\perp SO \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SHO) \Rightarrow CD\perp SH$.

Do đó $\left((SCD),(ABCD)\right)=(SH,OH)=\widehat{SHO}$.

$$\begin{cases} SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{2} \\ OH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan SHO = \frac{SO}{OH} = 1.$$

Vậy $((SCD),(ABCD)) = (SH, OH) = SHO = 45°$.

Câu 24. Chọn C

$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 8x = -4x(x^2 - 2)$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là 3.

Câu 25. Chọn A

$\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2 \quad (*)$

Điều kiện $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$. Khi đó phương trình $(*)$ tương đương với

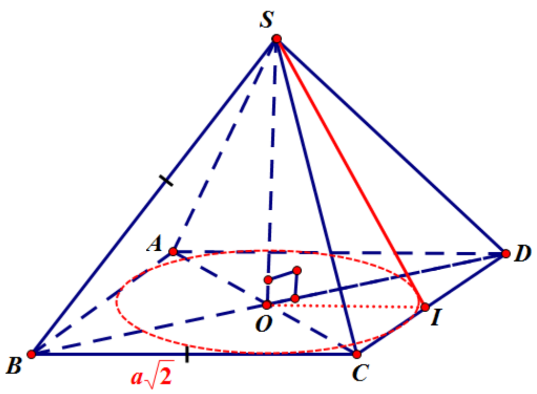
$\log_3 (x-1)^2 + \log_3 (2x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_3 [(x-1)(2x-1)]^2 = \log_3 9$.

$$\Leftrightarrow [(x-1)(2x-1)]^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(2x-1) = 3 \\ (x-1)(2x-1) = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (n) \\ x = -\dfrac{1}{2} \ (l) \end{array}\right.$$

Vậy số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng 1.

Câu 26. Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$ và I là trung điểm cạnh BC.
Khi đó chiều cao khối nón là $h = SO$ và bán kính đáy của nó là $r = OI$.

$h = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$; $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 27. Chọn B

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x - x^2 \ge 0 \\ x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;2] \setminus \{1\}$.

Ta có $\underset{x \to 1^-}{Lim}\, y = \underset{x \to 1^-}{lim} \dfrac{\sqrt{2x - x^2} + 1}{x - 1} = -\infty$; $\underset{x \to 1^+}{Lim}\, y = \underset{x \to 1^+}{lim} \dfrac{\sqrt{2x - x^2} + 1}{x - 1} = +\infty$

Suy ra $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 28. Chọn D

Điều kiện $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a, b, c \ne 1$

Ta có: $\log_a 3 = 2 \Leftrightarrow a = 3^{\frac{1}{2}}$;

$\log_b 3 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow b = 3^4$;

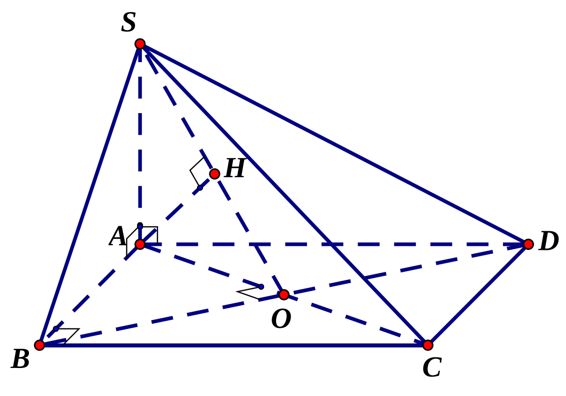
$\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15} \Leftrightarrow \log_3(abc) = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}.3^4.c\right) = \dfrac{15}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3 3^{\frac{9}{2}} + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 c = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \dfrac{1}{3}$.

Câu 29. Chọn C

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int\limits_0^2 \left|e^{2x}\right| dx = \int\limits_0^2 e^{2x} dx = \dfrac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^2 = \dfrac{e^4 - 1}{2}$

Câu 30. Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ khi đó $BD \perp AC$ (1).
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $BD \perp (SAC)$ (3).

Gọi H là hình chiếu của A lên SO, khi đó $AH \perp SO$ (4). Mặt khác, vì $AH \subset (SAC)$ nên theo (3), ta có $BD \perp AH$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $AH \perp (SBD)$, hay $d(A,(SBD)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAO, có $AS = a$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = a$.

Khi đó ΔSAO vuông cân tại A, suy ra $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d\left(A,\left(SBD\right)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. Chọn B

Ta có $n\left(\Omega\right) = C_{19}^2$.

Gọi A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên hai thẻ để tích của hai số ghi trên hai thẻ được chọn là một số chẵn".

Trường hợp 1:Chọn 2 thẻ đều đánh số chẵn,số cách chọn là C_9^2 .

Trường hợp 2:Chọn 1 thẻ đánh số chẵn và 1 thẻ đánh số lẻ,số cách chọn là $C_9^1.C_{10}^1$.

$\Rightarrow n\left(A\right) = C_9^2 + C_9^1.C_{10}^1 = 126$.

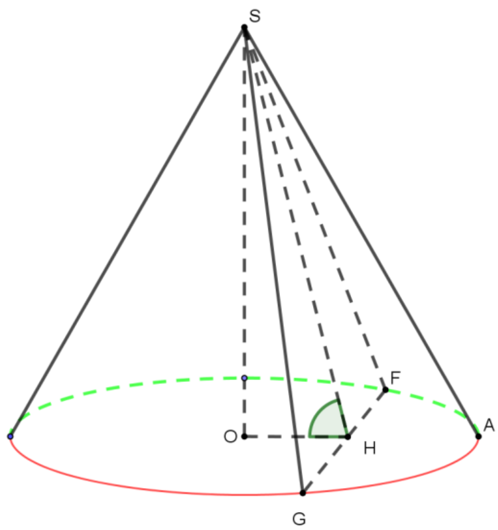
$\Rightarrow P\left(A\right) = \frac{126}{C_{19}^2} = \frac{14}{19}$.

Câu 32. Chọn C

$\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2}\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{2x-5}{x^2+x-2}\right)\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{2x-5}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)}\right)\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{x^2}{2} - \ln\left|x-1\right| + 3\ln\left|x+2\right| + C$.

Câu 33. Chọn A



Gọi ΔSFG là thiết diện cần tìm và H là trung điểm FG

Ta có : $SA = a$ và $OSA = 45^0$ nên $OS = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔOSH có $SHO = 60^0$ nên $OH = OS.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ và $SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Do ΔOHG vuông tại H nên $GH = \sqrt{OG^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy nên $GF = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra $S_{\Delta SGF} = \frac{1}{2}SH.FG = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

Câu 34. Chọn A

Xét hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 - 1\right)$. Ta có $y' = g'(x) = 2x.f'\left(x^2 - 1\right)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

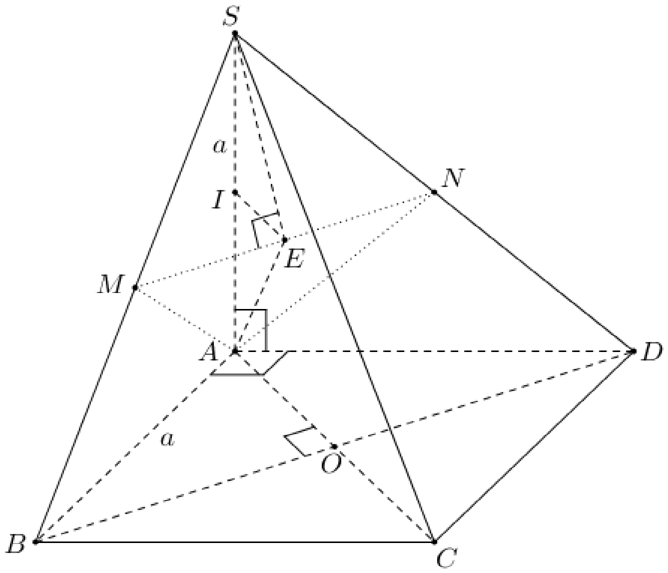
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội 3 còn các nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$ và $x = \pm\sqrt{5}$ là các nghiệm đơn và $g'(1) = 2.f'(0) > 0$. Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35. Chọn B



Có: $SB = BD = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

$$AM = AN = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SM = SN \Rightarrow \Delta AMN \text{ đều.}$$

Gọi E là trung điểm $MN \Rightarrow AE \perp MN$ và $SE \perp MN$.

Có: $\left\{\begin{array}{l} (AMN) \cap (SBD) = MN \\ AE \perp MN \\ SE \perp MN \end{array}\right. \Rightarrow \left((AMN),(SBD)\right) = \left(AE, SE\right)$.

Tính $\sin SEA$.

AE là đường cao tam giác đều $AMN \Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

SE là đường cao tam giác đều $SMN \Rightarrow SE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\Rightarrow \Delta SEA$ cân tại $E \Rightarrow SEA=2SEI$.

Gọi I là trung điểm $SA \Rightarrow SI=\dfrac{a}{2} \Rightarrow EI=\sqrt{SE^2-SI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSEI vuông tại I, ta có: $\sin SEI=\dfrac{SI}{SE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $\cos SEI=\dfrac{EI}{SE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \sin SEA=2\sin SEI.\cos SEI=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chú ý: SEA là góc tù nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $180^\circ-SEA$.

Ta vẫn có: $\sin\left(180^\circ-SEA\right)=\sin SEA=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp tọa độ hóa.

Câu 36. Chọn B

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$.

$y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi $\begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in[0;2)$.

Do m nguyên nên $m=0;\ m=1$.

Câu 37. Chọn C

Ta có $\log(mx)=2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} mx>0 \\ x+1>0 \\ \log(mx)=\log(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ mx=(x+1)^2 \end{cases}\quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+(2-m)x+1=0 \quad (*) \end{cases}$

Để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có đúng một nghiệm thì phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm $x>-1$.

* Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x_0 \Leftrightarrow \Delta=(2-m)^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow x_0=-1\ \ (L)$

Với $m=4 \Rightarrow x_0=1>-1\ \ (TM)$

* Nếu phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta=(2-m)^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Khi đó $\begin{cases} x_1+x_2=m-2 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$.

TH1: $x_1<-1<x_2 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1)<0 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)+1<0 \Leftrightarrow 1+m-2+1<0 \Leftrightarrow m<0$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m\in\{-9;-8;...;-2;-1\}$. Có 9 giá trị của m thỏa mãn.

TH2: $x_1=-1<x_2$.

$x_1=-1$ thay phương trình $(*)$ suy ra $m=0$ (L).

Kết luận: Vậy có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x+e^{-x} \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(1-e^{-x})dx \\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^1 (x+e^{-x})e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}(x+e^{-x})e^{2x}\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}(1-e^{-x})dx=\dfrac{1}{2}(e^2+e-1)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1(e^{2x}-e^x)dx$.

$=\dfrac{1}{2}(e^2+e-1)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(e^2+e-1)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}e^2-e+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}e^2+e-\dfrac{3}{4}$.

Mà $\int\limits_0^1 (x+e^{-x})e^{2x}dx=a+be+ce^2 \Rightarrow a=-\dfrac{3}{4};b=1;c=\dfrac{1}{4} \Rightarrow a+b+c=\dfrac{1}{2}$.

Câu 39. Chọn A

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ nên đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Gọi $A;B$ là giao điểm của Δ và $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$; $d_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Suy ra $A(-1+2t;-1+t;2-t)$; $B(1-s;2+s;3+3s)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2-s-2t;3+s-t;1+3s+t)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;1;-1)$

$\Rightarrow \dfrac{2-s-2t}{1}=\dfrac{3+s-t}{1}=\dfrac{1+3s+t}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s+t=-1 \\ 2s-t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;0;1)$

Vậy phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và cắt hai đường thẳng d_1; d_2 là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 40. Chọn D

Giả sử điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+y.i\,(x,y\in\mathbb{R})$.

$|z+1-2i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |(x+1)+(y-2)i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=2$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

$T=|z+1|^2-|z-i|^2=(x+1)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]=2x+2y \Leftrightarrow 2x+2y-T=0$ (Δ) là phương trình đường thẳng

$d(I;\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{|2.(-1)+2.2-T|}{2\sqrt{2}}\le\sqrt{2} \Leftrightarrow |2-T|\le 4 \Leftrightarrow -4\le 2-T\le 4 \Leftrightarrow -2\le T\le 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 6.

Câu 41. Chọn D

Xét phương trình: $4^x-(m+4)2^x+2=0 \qquad (1)$

Đặt $t=2^x\,(t>0)$. Khi đó (1) trở thành: $t^2-(m+4)t+2=0 \qquad (2)$

Ta có: (1) có hai nghiệm thực $x_1,x_2 \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương t_1,t_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+4)^2-8\ge 0\\ m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge -4+2\sqrt{2} \qquad (*)$$

Theo Viet ta có $\begin{cases}t_1+t_2=m+4\\ t_1.t_2=2\end{cases}$.

Giả sử $\begin{cases}t_1=2^{x_1}\\ t_2=2^{x_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\log_2 t_1\\ x_2=\log_2 t_2\end{cases}$.

Khi đó từ $t_1.t_2=2 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

Do đó $(x_1+2)(x_2+2)=4 \Leftrightarrow x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=4 \Leftrightarrow x_1x_2=-2$

$$\Rightarrow \log_2 t_1.\log_2 t_2=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.\log_2\frac{2}{t_1}=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.(1-\log_2 t_1)=-2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 t_1)^2-\log_2 t_1-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 t_1=-1\\ \log_2 t_1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1=\frac{1}{2}\Rightarrow t_2=4\\ t_1=4\Rightarrow t_2=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow t_1+t_2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow m+4=\frac{9}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{2} \quad (\text{tm}(*))$$

Vậy $m=\frac{1}{2}\in(-\infty;1)$

Câu 42. Chọn A

Gọi điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Khi đó $\begin{cases}1-x+3-x+2(0-x)=0\\ 0-y+2-y+2(5-y)=0\\ 0-z+4-z+2(4-z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\\ z=3\end{cases} \Rightarrow I(1;3;3)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IC}\right|=\left|4\overrightarrow{MI}\right|=4MI$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất

M thuộc mặt phẳng (Oxy) và MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của $I(1;3;3)$ trên mặt phẳng (Oxy).

Vậy $M(1;3;0)$.

Câu 43. Chọn A

Ta có tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và $y'=\frac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$ với mọi m.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A,B \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2+2x-m=0$ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\,(\ne -1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=1+m>0\\ 1-2-m\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m>-1.$$

Gọi $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ và x_0 là điểm cực trị của hàm số thì ta có giá trị cực trị y_0 của hàm số là $y_0=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}=2x_0+m$.

Vì $x_1,\ x_2$ là hai điểm cực trị của hàm số nên tọa độ hai điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số là $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$, suy ra A, B thuộc đường thẳng $d: y=2x+m$.

Để tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi ba điểm O, A, B không thẳng hàng và $OA\perp OB$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}O\notin d\\ OA\perp OB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.0+m\neq 0\\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ x_1x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ 5x_1x_2+2m(x_1+x_2)+m^2=0\end{cases}(2^*).$$

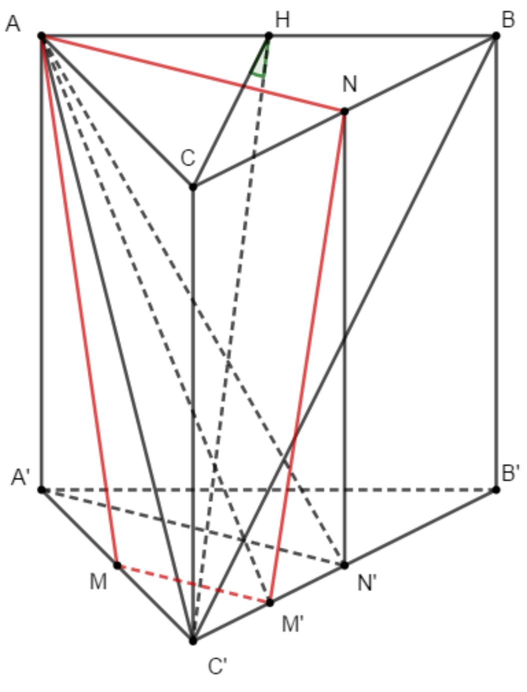
Vì $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của (*) nên có $x_1+x_2=-2$ và $x_1.x_2=-m$ nên (2*) trở thành

$$\begin{cases}m\neq 0\\ m^2-9m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=9 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m>-1).$$

Vậy $m=9$.

Câu 44. Chọn A

Cách 1:



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow CH\perp AB$ (do tam giác ABC cân tại C).
Tam giác $AC'B$ cân tại $C'\Rightarrow C'H\perp AB$.

Mà $(ABC)\cap(ABC')=AB\Rightarrow((ABC),(ABC'))=CHC'=60^\circ$.

ΔABC vuông cân tại C có $AB=2a\Rightarrow AC=CB=a\sqrt{2};CH=a$.

$\Delta C'CH$ vuông tại $C\Rightarrow CC'=CH.\tan CHC'=a\sqrt{3}=AA'=BB'$.

Gọi N' là trung điểm của $B'C'$, M' là trung điểm của $C'N'\Rightarrow\begin{cases}A'N'//AN\\ MM'//A'N'\end{cases}\Rightarrow MM'//AN$

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ cắt bởi mặt phẳng (AMN) là hình thang $AMM'N$ hay mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần, trong đó phần nhỏ là $ACNMC'M'$.

Ta có: $V_{ACNA'C'N'} = AA'.S_{\Delta ACN} = a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

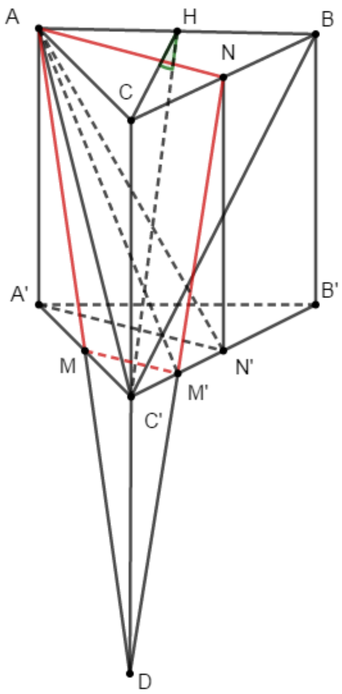
$S_{A'MM'N'} = S_{A'C'N'} - S_{MC'M'} = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a^2}{8}$.

$V_{A.A'MM'N'} = \frac{1}{3}.AA'.S_{A'MM'N'} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

$V_{A.M'N'N} = \frac{1}{3}.AC.S_{\Delta M'N'N} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Vậy $V_{ACNMC'M'} = V_{ACNA'C'N'} - V_{A.A'MM'N'} - V_{A.M'N'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{8} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{24}$.

Cách 2:



Kéo dài AM, CC', NM' cắt nhau tại D. Khi đó $V_{ACNMCM'} = V_{D.ACN} - V_{D.MCM'}$.

Ta có: $\frac{DM}{DA} = \frac{DC'}{DC} = \frac{DM'}{DN} = \frac{MC'}{AC} = \frac{CM'}{CN} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DC' = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{D.ACN} = \frac{1}{3}.DC.S_{ACN} = \frac{1}{3}.2\text{a}\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

$V_{D.MCM'} = \frac{1}{3}.DC'.S_{MC'M'} = \frac{1}{3}.\text{a}\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

$\Rightarrow V_{ACNMCM'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} - \frac{a^3\sqrt{3}}{24} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 45. Chọn B

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;3)$ và $(1;-1)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.(-1)^3+b.(-1)^2+c.(-1)+d=3 \\ a.1^3+b.1^2+c.1+d=-1 \\ 3a.(-1)^2+2b.(-1)+c=0 \\ 3a.1^2+2b.1+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x+1$.

Xét phương trình $f\left(\sqrt{x-1}-1\right)+x+3-4\sqrt{x-1}=m$ $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=m$ (2).

Đặt $t=\sqrt{x-1}-1$, vì $\sqrt{x-1}\ge 0$, suy ra $t\ge -1$. Ta có phương trình (2) trở thành:

$f(t)+(t-1)^2=m \Leftrightarrow \left(t^3-3t+1\right)+\left(t^2-2t+1\right)=m \Leftrightarrow t^3+t^2-5t+2=m$ (3).

Xét hàm số $g(t)=t^3+t^2-5t+2$ với $t\in[-1;+\infty)$, ta có $g'(t)=3t^2+2t-5$,

$$g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\in[-1;+\infty) \\ t=-\dfrac{5}{3}\notin[-1;+\infty) \end{array}\right..$$

Bảng biên thiên:

t		-1		1		$+\infty$
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$		7	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên, để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1. Khi đó $-1<m\le 7$, mà $m\in Z \Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Chọn B

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$

$f(x)=x\lfloor\sin x+f'(x)\rfloor+\cos x \Leftrightarrow f(x)=x\sin x+xf'(x)+\cos x$.

$$\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-x\sin x-\cos x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2} \quad \forall x\in(0;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\left[\frac{\cos x}{x}\right]' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{\cos x}{x}+C \quad \forall x\in(0;+\infty).$$

Do $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ suy ra $C=1$.

Vậy $f(x)=\cos x+x$. Suy ra $f(\pi)=-1+\pi$.

Câu 47. Chọn B

Ta có: $1-\left|\dfrac{i}{z}\right|\le\left|1+\dfrac{i}{z}\right|\le 1+\left|\dfrac{i}{z}\right| \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{|z|}\le\left|1+\dfrac{i}{z}\right|\le 1+\dfrac{1}{|z|}$. Mặt khác $|z|\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|}\le\dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{1}{2}\le P\le\dfrac{3}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất $M=\dfrac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất là $m=\dfrac{1}{2}$. Vậy $M.m=\dfrac{3}{4}$

Câu 48. Chọn D

Hàm số có tập xác định là .

$y' = 3x^2 - 3$.

Gọi $A(a;a^3-3a+1)$ và $B(b;b^3-3b+1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A là $k_A = 3a^2-3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại B là $k_B = 3b^2-3$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau

$\Rightarrow k_A = k_B \Leftrightarrow 3a^2-3 = 3b^2-3 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$.

Do A, B phân biệt nên $a=-b \Rightarrow B(-a;-a^3+3a+1)$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại A là $d_1: y = (3a^2-3)(x-a)+a^3-3a+1$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại B là $d_2: y = (3a^2-3)(x+a)-a^3+3a+1$.

E là giao điểm của d_1 với trục tung $\Rightarrow E(0;-2a^3+1)$.

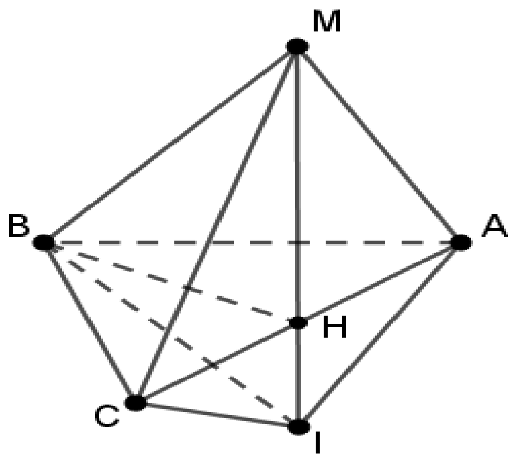
F là giao điểm của d_2 với trục tung $\Rightarrow F(0;2a^3+1)$.

Khi đó $EF = 4|a^3|$.

Theo giả thiết ta có $4|a^3| < 2020 \Leftrightarrow |a^3| < 505 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{505} < a < \sqrt[3]{505}$.

Vì a là số nguyên dương nên $a \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 49. Chọn B



Xét tứ diện $MABC$ có $MA = MB = MC = x$ (tính chất tiếp tuyến) và $AMB = 60^o; BMC = 90^o; CMA = 120^o$. Ta dễ dàng tính được $AB = x; BC = x\sqrt{2}; CA = x\sqrt{3}$ nên tâm ngoại tiếp của tam giác ABC là trung điểm H của AC.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$; từ tính chất mặt cầu ta có I, H, M cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H và $IAM = 90^o$.

Vậy $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{IA^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}} = 3$. Vậy $IM = 6$.

M thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ nên $M(-1+t;-2+t;1+t)$.

$$IM=6 \Leftrightarrow (t-2)^2+(t-4)^2+(t+4)^2=36 \Leftrightarrow 3t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(-1;-2;1) \\ M\left(\frac{1}{3};\frac{-2}{3};\frac{7}{3}\right) \end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện thì chọn $M(-1;-2;1)$ nên có đáp án B.

Câu 50. Chọn D

Đặt $t=f(x)$ thì $t^3+2t=1-x$, suy ra $(3t^2+2)\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Với $x=-2$ ta có $t^3+2t-3=0$, suy ra $t=1$.

Với $x=1$ ta có $t^3+2t=0$, suy ra $t=0$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{0} t(3t^2+2)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}(3t^3+2t)\mathrm{d}t=\left(\frac{3}{4}t^4+t^2\right)\Big|_0^1=\frac{7}{4}$.

---------- HẾT ----------