

MOON.VN

CÔNG LUYỆN THI TRỰC TUYẾN SỐ 1 VIỆT NAM

ĐẶNG VIỆT HÙNG

TUYỂN CHỌN

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ (P1)

(KHÓA LUYỆN THI 2015 – 2016)

DVH

Sách hay, chỉ TẶNG chứ không BÁN!

CHỦ ĐỀ 1. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG 1. TIẾP TUYẾN TẠI MỘT ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$, có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y = 3x - 3$.

Lời giải:

Phương trình giao điểm 2 đồ thị là $\frac{2x}{x-2} = 3x - 3 \Leftrightarrow 2x = (x-2)(3x-3) \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; -1\right) \\ x = 3 \Rightarrow M(3; 3) \end{cases}$$

Với $y = \frac{2x}{x-2} \Rightarrow y' = -\frac{4}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} y'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{4} \\ y'(3) = -4 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(\frac{2}{3}; -1\right)$ là $y = -\frac{9}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right) - 1 = -\frac{9x}{4} + \frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3; 3)$ là $y = -4(x - 3) + 3 = -4x + 15$.

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 + 5$, có đồ thị (C) . Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 6 = 0$.

Lời giải:

Gọi $M(m; 2m^3 - 2m^2 + 5)$.

$y = 2x^3 - 2x^2 + 5 \Rightarrow y' = 6x^2 - 4x \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k = 6m^2 - 4m$.

Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 6 = 0$ hay $y = -\frac{x}{2} + 3$ nên

$$6m^2 - 4m = 2$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 - 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow M(1; 5) \\ m = -\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3}; \frac{127}{27}\right) \end{cases}$$

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$ (C). Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M đi qua điểm $A(0; 1)$.

Lời giải:

Gọi $M(m; m^4 - 4m^2)$.

Phương trình tiếp tuyến qua M có dạng :

$$y = y'_m(x - m) + m^4 - 4m^2 = (4m^3 - 8m)(x - m) + m^4 - 4m^2.$$

Tiếp tuyến qua $A(0; 1)$ nên $1 = (4m^3 - 8m)(0 - m) + m^4 - 4m^2 \Leftrightarrow 3m^4 - 4m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \Rightarrow M(\pm 1; -3) \\ m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{11}{9}\right) \end{cases} \text{ là các điểm cần tìm.}$$

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{6x+5}{x+1}(C)$. Tìm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến qua M cắt Ox và Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA = 4OB$.

Lời giải:

Ta có $y = \frac{6x+5}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Gọi $M\left(m; \frac{6m+5}{m+1}\right)$ là điểm thuộc đồ thị cần tìm.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(m; \frac{6m+5}{m+1}\right)$ có dạng $y = \frac{1}{(m+1)^2}(x-m) + \frac{6m+5}{m+1}$.

Phương trình giao điểm với Ox :
$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{(m+1)^2}(x-m) + \frac{6m+5}{m+1} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -6m^2 - 10m - 5 \end{cases} \Rightarrow A(-6m^2 - 10m - 5; 0)$

Phương trình giao điểm với Oy :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{(0-m)}{(m+1)^2} + \frac{6m+5}{m+1} = \frac{6m^2 + 10m + 5}{(m+1)^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(0; \frac{6m^2 + 10m + 5}{(m+1)^2}\right)$$

Theo bài $OA = 4OB \Leftrightarrow |6m^2 + 10m + 5| = 4 \cdot \frac{|6m^2 + 10m + 5|}{(m+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m^2 + 10m + 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 1 = \frac{4}{(m+1)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow M\left(1; \frac{11}{2}\right) \\ m = -3 \Rightarrow M\left(-3; \frac{13}{2}\right) \end{cases}$

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 4x - m + 1 (C_m)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của (C_m) với trục tung. Viết phương trình Δ biết khoảng cách từ $A(2; -1)$ đến Δ bằng $\sqrt{34}$.

Lời giải:

$x = 0 \Rightarrow y = 1 - m$ suy ra $B(0; 1 - m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x(m+1) + 4 \Rightarrow y'(0) = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến của (C_m) đi qua B là:

$\Delta: y - (1 - m) = 4(x - 0) \Leftrightarrow 4x - y + 1 - m = 0$

$\Rightarrow d(A; \Delta) = \frac{|4 \cdot (-2) - (-1) + 1 - m|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \sqrt{34} \Rightarrow |m + 6| = 17\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 + 17\sqrt{2} \\ m = -6 - 17\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $4x - y + 7 - 17\sqrt{2} = 0$ hoặc $4x - y + 7 + 17\sqrt{2} = 0$.

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$, có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm x_0 biết x_0 là nghiệm của phương trình $y'' + y - 15 = 0$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y = 3 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{8}{(x-1)^3}$$

$$\text{Ta có } y'' + y - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(x-1)^3} + 3 + \frac{4}{x-1} - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{2}{x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có $y(2) = 7$, $y'(2) = -4$ suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y - 7 = -4(x - 2) \Leftrightarrow y = -4x + 15$$

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 - m - 1$ (C_m). Gọi A là điểm có hoành độ dương mà (C_m) luôn đi qua với mọi m . Viết phương trình tiếp của hàm số tại A khi $m = 1$.

Lời giải:

Ta có:

$$y = x^4 - 2(2m+1)x^2 - m - 1 \Leftrightarrow y - x^4 = 2(2m+1)x^2 - m - 1 \Leftrightarrow y - x^4 + 2x^2 = (m+1)(4x^2 - 1)$$

$$\text{Gọi } A(x_0, y_0) \text{ ta có: } \begin{cases} y_0 - x_0^4 + 2x_0^2 = 0 \\ 4x_0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{7}{16} \end{cases} \text{ (Do } x_0 > 0) \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{16}\right)$$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ ta có } y = x^4 - 6x^2 - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y + \frac{7}{16} = -\frac{11}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{11}{2}x + \frac{37}{16}$$

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại.

a) Giao điểm của (C) với trục hoành.

b) Giao điểm của (C) với trục tung.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = \frac{3}{(x+1)^2}$$

a) Phương trình trục hoành là: $y = 0$. Do đó $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$. Khi đó: $y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{3}$

$$\text{Do đó phương trình tiếp tuyến là: } y = \frac{1}{3}(x-2) + 0 = \frac{1}{3}(x-2).$$

b) Phương trình trục tung là: $x = 0$. Do đó $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2$. Khi đó: $y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2} = 3$

$$\text{Do đó phương trình tiếp tuyến là: } y = 3(x-0) - 2 \text{ hay } y = 3x - 2.$$

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm x_0 thỏa mãn điều kiện $y''(x_0) = 4$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 8x \text{ suy ra } y'' = 12x^2 - 8.$$

$$\text{Do đó: } y''(x_0) = 12x_0^2 - 8 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

Xét 2 trường hợp:

+) Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -2; y'(x_0) = 4x_0^3 - 8x_0 = -4$. Do vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y = -4(x-1) - 2$$

Hay $y = -4x + 2$.

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2; y'(x_0) = 4x_0^3 - 8x_0 = 4$. Do vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y = 4(x+1) - 2$$

Hay $y = 4x + 2$.

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -4x + 2$ và $y = 4x + 2$.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 + x^2 - x + 2$ (C).

a) Tìm tọa độ giao điểm của (C) và trục Ox .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm đó.

Lời giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Vậy tọa độ giao điểm của (C) và trục Ox là $A(-2; 0)$.

b) Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Trong đó ta có: $x_0 = -2; y_0 = 0$. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(-2) = 7$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 7(x + 2)$.

Câu 11: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - (m+1)x^2 + m - 2$, có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = -2$ đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 2x^3 - 2(m+1)x$.

+) Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $M(-2; -3m+2)$ có hệ số góc là $k = y'(-2) = 4m - 20$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến d tại M là $y = (4m - 20)(x + 2) - 3m + 2$.

+) Vì d đi qua gốc tọa độ O nên $0 = 2(4m - 20) - 3m + 2 \Leftrightarrow 5m - 38 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{38}{5}$.

Vậy $m = \frac{38}{5}$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ (C). Gọi I là giao điểm 2 tiệm cận của hàm số. Viết

phương trình tiếp tuyến của (C) qua $M \in (C)$ biết $IM = \frac{\sqrt{5}}{2}IO$ và M có hoành độ dương.

Lời giải:

Ta có tiệm cận đứng của (C) là $x = -2$, tiệm cận ngang của (C) là $y = 2$

Suy ra $I(-2; 2) \Rightarrow IO^2 = 8$.

Gọi $M\left(m; \frac{2m-1}{m+2}\right)$. Ta có $IM = \frac{\sqrt{5}}{2}IO \Rightarrow IM^2 = \frac{5}{4}IO^2 = 10$

$$\Rightarrow (m+2)^2 + \left(\frac{2m-1}{m+2} - 2\right)^2 = 10 \Rightarrow (m+2)^2 + \left(\frac{-5}{m+2}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 5 \Rightarrow m = -2 + \sqrt{5}$$

(do $x_M > 0$)

Ta có $y = 2 - \frac{5}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(-2 + \sqrt{5}) = 1$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y - \frac{2(-2 + \sqrt{5}) - 1}{\sqrt{5}} = x - (-2 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow y - (2 - \sqrt{5}) = x + 2 - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = x + 4 - 2\sqrt{5}$$

DẠNG 2. TIẾP TUYẾN CÓ HỆ SỐ GÓC

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$, có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 28y + 4 = 0$.

Lời giải:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$. Ta có: $y' = \frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$.

+) Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{3x_0+2}\right)$, với $x_0 \neq -\frac{2}{3}$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d với đồ thị (C) . Do d song song với đường thẳng $x - 28y + 10 = 0$ hay $y = \frac{1}{28}x + \frac{5}{14}$ nên $y'(x_0) = \frac{1}{28}$. Ta có phương trình:

$$\frac{7}{(3x_0+2)^2} = \frac{1}{28} \Leftrightarrow (3x_0+2)^2 = 196 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0+2=14 \\ 3x_0+2=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=4(tm) \\ x_0=-\frac{16}{3}(tm) \end{cases}$$

+) Với $x_0 = 4 \Rightarrow M\left(4; \frac{1}{2}\right)$. Phương trình tiếp tuyến d là: $y = \frac{1}{28}(x-4) + \frac{1}{2}$ hay $y = \frac{1}{28}x + \frac{5}{14}$ (loại).

+) Với $x_0 = -\frac{16}{3} \Rightarrow M\left(-\frac{16}{3}; \frac{5}{6}\right)$. Phương trình d là: $y = \frac{1}{28}\left(x + \frac{16}{3}\right) + \frac{5}{6}$ hay $y = \frac{1}{28}x + \frac{43}{42}$ (tm).

Vậy $y = \frac{1}{28}x + \frac{43}{42}$ là đường thẳng d cần tìm.

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$, có đồ thị (C) . Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $x + 12y - 7 = 0$.

Lời giải:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$.

+) Gọi $M(x_0; 2x_0^3 - 3x_0^2 + 5)$ là điểm cần tìm. Tiếp tuyến d của (C) tại M có hệ số góc là $k = 6x_0^2 - 6x_0$.

Vì d vuông góc với đường thẳng $x + 12y - 7 = 0$ hay $y = -\frac{1}{12}x + \frac{7}{12}$ nên $k = 12$.

Ta có phương trình $6x_0^2 - 6x_0 = 12 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow M_1(-1; 0)$.

+) Với $x_0 = 2 \Rightarrow M_2(2; 9)$.

Vậy $M_1(-1; 0)$ và $M_2(2; 9)$ là các điểm cần tìm.

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 1$, có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $7x + y - 1 = 0$.

Lời giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$

Ta có $y' = 2x^2 - 8x - 1$

Theo giả thiết, tiếp tuyến song song với đường thẳng $7x + y - 1 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -7$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 1 = -7 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_0 = -7(x-1) \\ y_2 - y_0 = -7(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -7x - \frac{11}{3} \\ y_2 = -7x + 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = -7x - \frac{11}{3}$

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $5x + y - 12 = 0$.

Lời giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Theo giả thiết, tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $5x + y - 12 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (x+1)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_0 = \frac{1}{5}(x-4) \\ y_2 - y_0 = \frac{1}{5}(x+6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5} \\ y_2 = \frac{1}{5}x + \frac{26}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}; y = \frac{1}{5}x + \frac{26}{5}$

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x-2m^2}{x+m}$, có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung song song với đường thẳng $5x - y + 17 = 0$.

Lời giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$

$$\text{Ta có } y = \frac{(x+m) - (m+2m^2)}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m+2m^2}{(x+m)^2}$$

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \frac{x-2m^2}{x+m} \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M(x_0; y_0) = M(0; y_0)$$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) song song với đường thẳng $5x - y + 17 = 0$.

$$\Rightarrow y'(x_0) = 5 \Rightarrow \frac{2m^2 + m}{m^2} = 5 \Rightarrow 3m^2 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi $m=0 \Rightarrow y_0$ không có giá trị. $\Rightarrow$ Loại

$$\text{Khi } m = \frac{1}{3} \Rightarrow y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{2}{3} = 5(x - 0) \Rightarrow y = 5x - \frac{2}{3}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}$

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 + (m-1)x^2 - 4m + 3$, có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại tại điểm A vuông góc với đường thẳng $2x + y + 3 = 0$, ở đó A là điểm cố định có hoành độ âm của hàm số đã cho.

Lời giải:

Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$

Ta có $y = \frac{1}{8}x^4 + (m-1)x^2 - 4m + 3 \Rightarrow y'(x) = \frac{x^3}{2} + 2(m-1)x$

A là điểm cố định có hoành độ âm của hàm số đã cho nên

$$y_0 = \frac{1}{8}x_0^4 + (m-1)x_0^2 - 4m + 3 \Rightarrow m(x_0^2 - 4) + \left(\frac{x_0^4}{8} - x_0^2 - y_0 + 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 = 4 \\ \left(\frac{x_0^4}{8} - x_0^2 - y_0 + 3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 1)$$

Đề tiếp tuyến của (C_m) tại tại điểm A vuông góc với đường thẳng $2x + y + 3 = 0$

$$\Rightarrow y'(x_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0^3}{2} + 2(m-1)x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{8}$$

Thử lại, ta có $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{7}{2}$,

PT tiếp tuyến: $y - 1 = \left(\frac{-2^3}{2} + 2\left(-\frac{1}{8} - 1\right) \cdot -2\right)(x + 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

Vậy $m = -\frac{1}{8}$ là giá trị cần tìm.

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng đi qua 2 điểm $A(0; 3), B(1; -6)$.

Lời giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)$

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến đi qua 2 điểm $A(0; 3), B(1; -6)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến là

$$\Rightarrow y'(x_0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6 - 3}{1 - 0} = -9$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -9 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_0 = -9(x+1) \\ y_2 - y_0 = -9(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -9x - 11 \\ y_2 = -9x + 29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -9x - 11; y = -9x + 29$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) $y = -9x - 11; y = -9x + 29$

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{-x-1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$. Vì tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$ nên ta có: $f'(x_0) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x_0-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

+) Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2(x-0)+1$ hay $y = 2x+1$.

+) Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -3$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2(x-2)-3$ hay $y = 2x-7$.

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến là: $y = 2x+1$ và $y = 2x-7$.

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - 4$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x+5$

Lời giải:

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 9$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét phương trình: $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -8$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x+1)-8$ hay $y = 9x+1$ (t/m).

+) Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -4$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x-3)-4$ hay $y = 9x-31$ (t/m).

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến là: $y = 9x+1$ và $y = 9x-31$.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$.

b) Với đường thẳng d ở câu a hãy viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d .

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x$

a) Ta có: $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -4$, $f'(x_0) = f'(-3) = 9$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x+3)-4$ hay $y = 9x+23$ (d).

b) Do $\Delta // d \Rightarrow k_{\Delta} = k_d = 9$. Xét phương trình $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$

+) Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -4$ (loại vì khi đó Δ trùng với d).

+) Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x-1)$.

Câu 11: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+16y-4=0$.

Lời giải:

Viết lại đường thẳng d ta có: $d: y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{4}$ suy ra hệ số góc của d là $k_d = -\frac{1}{16}$.

Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d nên ta có hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 16$.

Xét phương trình $f'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 8x_0 = 16 \Leftrightarrow x_0^3 - 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 16(x-2)+1$ hay $y = 16x-31$.

DẠNG 3. TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C).

a) Tại điểm có hoành độ $x = 2$.

b) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(4; -1)$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

a) Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = -3$.

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-2) + 5$ hay $y = -3x + 11$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$ là:

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}.$$

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4; -1)$ nên ta có: $-1 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(4-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}$

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{3(x_0-4)}{(x_0-1)^2} + \frac{(2x_0+1)(x_0-1)}{(x_0-1)^2} \Leftrightarrow -(x_0-1)^2 = 2x_0^2 + 2x_0 - 11 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

+) Với $x_0 = 2$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-2) + 5$ hay $y = -3x + 11$

+) Với $x_0 = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{3}(x+2) + 1$ hay $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 - 2x + 2$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) .

a) Tại điểm có hoành độ $x = 0$.

b) Biết tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 2$

a) Ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$ và $y'(x_0) = y'(0) = -2$.

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = -2(x-0) + 2$ hay $y = -2x + 2$.

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; x_0^3 - 2x_0 + 2) \in (C)$

là: $y = (3x_0^2 - 2)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0 + 2$.

Vì tiếp tuyến đi qua $O(0;0)$ nên ta có: $0 = (3x_0^2 - 2)(0 - x_0) + x_0^3 - 2x_0 + 2$

$$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Với $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = x$.

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^4 - 3x^2$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến đi qua

a) Gốc tọa độ $O(0;0)$.

b) Qua điểm $A(-36;0)$

Lời giải:

Gọi $M(x_0; x_0^4 - 3x_0^2)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = (4x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 3x_0^2$

a) Vì tiếp tuyến đi qua $O(0;0)$ nên ta có: $0 = (4x_0^3 - 6x_0)(0 - x_0) + x_0^4 - 3x_0^2$

$$\Leftrightarrow -3x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \end{cases}$$

+) Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.

+) Với $x_0 = 1$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -2(x-1) - 2$ hay $y = -2x$.

+) Với $x_0 = -1$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 2(x+1) - 2$ hay $y = 2x$.

b) Vì tiếp tuyến đi qua $O(0;0)$ nên ta có: $-36 = (4x_0^3 - 6x_0)(0 - x_0) + x_0^4 - 3x_0^2$

$$\Leftrightarrow -3x_0^4 + 3x_0^2 = -36 \Leftrightarrow x_0^4 - x_0^2 - 12 = 0. \text{ Đặt } t = x_0^2 \text{ (} t \geq 0 \text{)} \text{ ta có: } t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Khi đó $x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

• Với $x_0 = 2$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 20(x-2) + 4$ hay $y = 20x - 36$

• Với $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -20(x+2) + 4$ hay $y = -20x - 36$

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -3)$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; x_0^3 - 3x_0)$ là: $y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -3)$ nên ta có: $-3 = (3x_0^2 - 3)(1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0$

$$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

• Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x$

• Với $x_0 = \frac{3}{2}$ phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{15}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{8}$ hay $y = \frac{15x}{4} - \frac{27}{4}$.

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là: $y = -3x$ hoặc $y = \frac{15x}{4} - \frac{27}{4}$.

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua $M(1; 0)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 2)$ là:

$$y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(1; 0)$ nên ta có: $0 = (3x_0^2 - 6x_0)(1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 9x_0^2 - 3x_0^3 - 6x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 6x_0^2 - 6x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Với $x_0 = 1$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-1)$ hay $y = -3x + 3$

Vậy có phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là: $y = -3x + 3$

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua $M(2; -5)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y = \frac{2(x-2)+5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2} \Rightarrow y' = -\frac{5}{(x-2)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A\left(x_0; 2 + \frac{5}{x_0 - 2}\right)$ là: $y = -\frac{5}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + 2 + \frac{5}{x_0 - 2}$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; -5)$ nên ta có: $-5 = \frac{5}{(x_0 - 2)^2}(x_0 - 2) + 2 + \frac{5}{x_0 - 2}$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{x_0 - 2} = -7 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{7}$$

Với $x_0 = \frac{4}{7}$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{49}{20}\left(x - \frac{4}{7}\right) - \frac{3}{2}$ hay $y = -\frac{49x}{20} - \frac{1}{10}$.

Vậy có phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là: $y = -\frac{49x}{20} - \frac{1}{10}$

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, có đồ thị (C) . Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $M(0; 3)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(x_0; x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1)$ là:

$$y = (3x_0^2 - 12x_0 + 9)(x - x_0) + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; 3)$ nên ta có: $3 = (3x_0^2 - 12x_0 + 9)(0 - x_0) + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1$

$$\Leftrightarrow -3x_0^3 + 12x_0^2 - 9x_0 + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 = 4 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 6x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

• Với $x_0 = 1$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 0(x - 1) + 3$ hay $y = 3$

• Với $x_0 = 1 + \sqrt{3}$ phương trình tiếp tuyến là: $y = (9 - 6\sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) - 6 + 3\sqrt{3}$ hay

$$y = (9 - 6\sqrt{3})x + 3$$

• Với $x_0 = 1 - \sqrt{3}$ phương trình tiếp tuyến là: $y = (9 + 6\sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) - 6 - 3\sqrt{3}$ hay

$$y = (9 + 6\sqrt{3})x + 3$$

Vậy có 3 phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là: $y = 3$; $y = (9 - 6\sqrt{3})x + 3$ và $y = (9 + 6\sqrt{3})x + 3$

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (m + 2)x + 1$, có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $M(-2; 3)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + m + 2$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(-1; -1 - 2m - (m + 2) + 1)$ hay $A(-1; -3m - 2)$ là:

$$y = (3x_0^2 - 4mx_0 + m + 2)(x - x_0) - 3m - 2 \Leftrightarrow y = (-3 + 4m + m + 2)(x + 1) - 3m - 2$$

$$\Leftrightarrow y = (5m - 1)x + 2m - 3$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2; 3)$ nên ta có: $3 = -2 \cdot (5m - 1) + 2m - 3 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{7}{2}x - 4$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{2x+1}, (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị biết tiếp tuyến

a) Tại giao điểm của đồ thị và đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$

b) Song song với đường thẳng AB biết $A(0;1), B(1;-6)$

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = \frac{-7}{(2x+1)^2}$

a) Viết lại đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có: $-2x + 3 = \frac{3-x}{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ (2x+1)(-2x+3) = 3-x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ -4x^2 + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

+) Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow f'(0) = -7$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -7(x-0) + 3$ hay $y = -7x + 3$.

+) Với $x_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{4}{7}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{-4}{7}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2}$

Hay $y = \frac{-4x}{7} + \frac{17}{14}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -7) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (7; 1)$. Phương trình đường thẳng AB là: $7x + y - 1 = 0$ hay $y = -7x + 1$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng AB nên ta có: $k_t = -7$

Xét phương trình $f'(x_0) = -7 \Leftrightarrow \frac{-7}{(2x_0+1)^2} = -7 \Leftrightarrow (2x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0+1=1 \\ 2x_0+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=-1 \end{cases}$

+) Với $x_0 = 0; y_0 = 3; f'(x_0) = -7$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -7x + 3$

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -4; f'(-1) = -7$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -7(x+1) - 4$ hay $y = -7x - 11$.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị biết tiếp tuyến

a) Tại giao điểm của đồ thị và đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$

b) Tiếp tuyến có hệ số góc $k = -3$

c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d': x - 12y + 3 = 0$

Lời giải:

Ta có $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

a) Viết lại $d: y = 2x + 1$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

+) Với $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = 0; x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = 0; f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3}$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

+) Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5; f'(2) = -3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -3(x-2) + 5$ hay $y = -3x + 11$.

b) Ta có: $k = f'(x_0) = \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$

+) Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x - 1$.

+) Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-2) + 5$ hay $y = -3x + 11$.

c) Viết lại phương trình $d': y = \frac{1}{12}x + \frac{3}{12}$ có $k_{d'} = \frac{1}{12}$.

Do tiếp tuyến vuông góc với d' nên ta có: $k_t = -12$

Xét phương trình $\frac{-3}{(x_0-1)^2} = -12 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$

+) Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -4$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -12\left(x - \frac{1}{2}\right) - 4$ hay $y = -12x + 2$.

+) Với $x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = 8$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -12\left(x - \frac{3}{2}\right) + 8$ hay $y = -12x + 26$.

CHỦ ĐỀ 2. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

DẠNG 1. TƯƠNG GIAO HÀM BẬC BA

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (3m+1)x - 3$, có đồ thị là (C) . Tìm m để (C) giao Ox tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - (m+3)x^2 + (3m+1)x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ g(x) = x^2 - mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao Ox tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 10 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2, m < -2 \\ m \neq \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in (-\infty; -2) \cup \left(2; \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$$

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 - 2(2m-1)x + 6m - 1$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = x - 4$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm có hoành độ dương.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^3 - 5x^2 - 2(2m-1)x + 6m - 1 = x - 4 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - (4m-1)x + 6m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x^2 - x - 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ g(x) = x^2 - x - 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

Ta có $x = \frac{3}{2} > 0$ nên để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm có hoành độ dương thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu khác $\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 1 < 0 \\ -\frac{1}{4} - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$$

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số $y = 2x^3 - 6x - 7$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = 2m - 5$. Tìm m để (C) giao d tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } 2x^3 - 6x - 7 = 2m - 5 \Leftrightarrow g(x) = 2x^3 - 6x - 2m - 2 = 0$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 6x^2 - 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2m - 6 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 - 2m \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 2 điểm phân biệt thì hàm số $y = g(x)$ phải có cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$

$$\Leftrightarrow (-2m-6)(2-2m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=1 \end{cases}$$

Vậy $m=1$ hoặc $m=-3$

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - (3m+1)x^2 + 3mx + 6m - 1$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = 4x - 5$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 18$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - (3m+1)x^2 + 3mx + 6m - 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^3 - (3m+1)x^2 + (3m-4)x + 6m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[x^2 - (3m-1)x - 3m-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ g(x) = x^2 - (3m-1)x - 3m-2 = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0, \forall m \\ m \neq \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{9}$$

$$\text{Giả sử } x_3 = 2 \text{ thì } x_1, x_2 \text{ là 2 nghiệm của phương trình } g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1 x_2 = -3m - 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_3^2 = 18 \Leftrightarrow (3m-1)^2 + 2(3m+2) + 4 = 18 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 + (1-3m)x^2 - 4mx - m + 2$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -2x$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 1.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + (1-3m)x^2 - 4mx - m + 2 = -2x \Leftrightarrow x^3 + (1-3m)x^2 + (2-4m)x - m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ g(x) = x^2 - 3mx - m + 2 = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 4m - 8 > 0 \\ 2m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-2+2\sqrt{19}}{9}, m < \frac{-2-2\sqrt{19}}{9} \\ m \neq -\frac{3}{2} \end{cases} (*)$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là 2 nghiệm của phương trình } g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 x_2 = -m + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m < 2 \\ -m + 2 - 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } (*), \text{ vậy } m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$$

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 3m)x - m^2$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 10$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 3m)x - m^2 = -x + m \Leftrightarrow x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 3m + 1)x - m^2 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (2m+1)x + m^2 + m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) > 0 \\ m^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m \neq 0, m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \{1; 0\}$$

Ta có: $g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+1+1}{2} = m+1 \\ x = \frac{2m+1-1}{2} = m \end{cases}$

Giả sử $x_1 = 1, x_2 = m, x_3 = m+1$ ta có

$$\text{Khi đó } 1 + m^3 + (m+1)^3 = 10 \Leftrightarrow 2m^3 + 3m^2 + 3m - 8 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + 5m + 8) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 2mx + 1$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -x + 1$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 1.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - (m+1)x^2 + 2mx + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x[x^2 - (m+1)x + 2m+1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 - (m+1)x + 2m+1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4(2m+1) > 0 \\ 2m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3}, m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = 2m+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ 2m+1 - m - 1 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

Kết hợp với điều kiện (*), vậy $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 3 - 2\sqrt{3}\right)$

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = (x-1)(x^2 + mx + 1)$ (C).

a) Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 1 điểm duy nhất.

b) Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$.

Lời giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $(x-1)(x^2 + mx + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

TH1: $PT: g(x) = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{g(x)} = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

TH2: $PT: g(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Kết luận: Vậy $-2 \leq m < 2$ là giá trị cần tìm.

b)) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $(x-1)(x^2 + mx + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ g(x) = x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm

phân biệt và 2 nghiệm đó khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 4 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases}$.

Khi đó cho $x_3 = 1$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của $PT: g(x) = 0$. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 9 \Leftrightarrow m^2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{11} \quad (tm)$$

Vậy $m = \pm\sqrt{11}$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = (x-2)(2x^2 + 2mx - m-1)$ (C) .

a) Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

b) Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn :

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3 = 8$$

Lời giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $(x-2)(2x^2 + 2mx - m-1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = 2x^2 + 2mx - m-1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH1: $g(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất và nghiệm đó khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2(m+1) = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \quad (vn)$.

TH2: $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và 1 trong 2 nghiệm bằng 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2(m+1) > 0 \\ g(2) = 8 + 4m - m - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = \frac{-7}{3}$ là giá trị cần tìm.

b) Để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2(m+1) > 0 \\ g(2) = 7 + 3m \neq 0 \end{cases} (*) . \text{ Khi đó gọi } x_3 = 2 \text{ và } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0 .$$

Theo Viet ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = \frac{-m-1}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 + 4 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow m^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ (tm)} .$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số : $y = x^3 - mx + m - 1 (C)$. Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn: $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là : $x^3 - mx + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 - m(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases} (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1-m) = 4m - 3 > 0 \\ g(1) = 3 - m \neq 0 \end{cases} (*) .$$

Khi đó Khi đó gọi $x_3 = 1$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$. Do vậy $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + 1 = \frac{-1}{1-m} + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (tm)}$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 11: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 + mx + m + 1 (C)$. Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $A = x_1 x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 4$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là $x^3 + mx + m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 + m(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ g(x) = x^2 - x + 1 + m = 0 \end{cases} (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1+m) = -4m - 3 > 0 \\ g(-1) = 3 + m \neq 0 \end{cases} (*) .$$

Khi đó Khi đó gọi $x_3 = -1$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 1 + m \end{cases}$. Do vậy

$$A = -(1+m) \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1 \right] = -(1+m) \left[2 - 2(1+m) \right]$$

$$A = 2m(1+m) = 4 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -mx + m - 1$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt $A(1; -1), B, C$ sao cho $x_B^2 + 4x_C = 4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + x = -mx + m - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (m+1)x - m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 1 > 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Gọi x_B, x_C là hoành độ điểm B, C thì x_B, x_C là 2 nghiệm của phương trình

$$g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ x_B x_C = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_B^2 + 4x_C = 4 \Leftrightarrow x_B^2 + 4(2 - x_B) = 4 \Leftrightarrow x_B^2 - 4x_B + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_B - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_B = 2 \Rightarrow x_C = 0$$

$$\Rightarrow x_B \cdot x_C = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+2)x^2 + (3m+2)x - m - 1$, có đồ thị là (C) . Tìm m để (C) giao trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C (trong đó điểm A có hoành độ ko đổi) sao cho hoành độ điểm hai điểm B, C là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - (2m+2)x^2 + (3m+2)x - m - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (2m+1)x + m+1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - (2m+1)x + m+1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì PT $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Gọi x_B, x_C là hoành độ điểm B, C thì x_B, x_C là 2 nghiệm của phương trình

$$g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2m+1 \\ x_B x_C = m+1 \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có

$$x_B^2 + x_C^2 = 5 \Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 2x_B x_C = 5 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2(m+1) = 5 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = 1, m = -\frac{3}{2}$$

Câu 14: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 3$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = x + 3$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt $A(0;3), B, C$ sao cho A là trung điểm của BC .

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow x^3 - 3(m^2 - 1)x^2 - 2mx = 0$$

$$\Leftrightarrow x[x^2 - 3(m^2 - 1)x - 2m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3(m^2 - 1)x - 2m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0;3)$ ứng với đề bài đã cho.

Khi đó d và (C) cắt nhau tại $A(0;3), B, C$ phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m^2 - 1)^2 + 8m > 0 \\ 0^2 - 3(m^2 - 1) \cdot 0 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(m^2 - 1)^2 + 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Do $B, C \in d$ nên ta gọi $B(x_1; x_1 + 3), C(x_2; x_2 + 3)$.

Ta có x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1). Theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m^2 - 1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \quad (2)$

Khi đó A là trung điểm của $BC \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = x_A = 0 \\ \frac{(x_1 + 3) + (x_2 + 3)}{2} = y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0.$

Kết hợp với (2) ta được $3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Đối chiếu với (*) ta được $m = 1$ thỏa mãn.

Đ/s: $m = 1$.

Câu 15: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, có đồ thị là (C) và đường thẳng d đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc k . Tìm k để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt A, B, C .

Lời giải:

Bài ra d đi qua $A(2;0)$ và có hệ số góc k nên PT của d có dạng

$$d: y = k(x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = k(x - 2).$$

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = k(x - 2) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 3x + 1) - k(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 3x + 1 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 3x + 1 - k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(2;0)$ ứng với đề bài đã cho.

Khi đó d và (C) cắt nhau tại $A(2;0)$, B, C phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 4k > 0 \\ 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{9}{4} \\ k \neq -1 \end{cases} (*).$$

Câu 16: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 + (1-m)x^2 + (m-1)x + 2m - 2$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = 3x + 2$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt $A(-1;-1), B, C$ sao cho B, C đối xứng nhau qua đường thẳng $x + 3y - 2 = 0$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 + (1-m)x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 - m(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2) - m(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = m-2 \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1;-1)$ ứng với đề bài đã cho.

Khi đó d và (C) cắt nhau tại $A(-1;-1)$, B, C phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 2 \\ m-2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m \neq 1 \end{cases} (*).$

Do vai trò của B, C là như nhau nên ta có thể giả sử $x_B = 2; x_C = m-2$.

$$\text{Mà } B, C \in d \Rightarrow \begin{cases} y_B = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \\ y_C = 3(m-2) + 2 = 3m - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2;8) \\ C(m-2; 3m-4) \end{cases}$$

Gọi M là giao điểm của BC và $d': x + 3y - 2 = 0$.

$$\text{Tọa độ } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} y = 3x + 2 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Rõ ràng $d \perp d'$ nên khi đó B, C đối xứng nhau qua $d' \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = x_M \\ \frac{y_B + y_C}{2} = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 + m - 2}{2} = -\frac{2}{5} \\ \frac{8 + 3m - 4}{2} = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{5} \\ m = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{5}. \text{ Đã thỏa mãn } (*).$$

$$\text{Đ/s: } m = -\frac{4}{5}.$$

Câu 17: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 3(m-2)x + 9m$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = x + 3$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt A, B, C , trong đó A là điểm cố định và độ dài $BC = 2\sqrt{10}$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 + x^2 + 3(m-2)x + 9m = x + 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x - 3 + 3m(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x - 1) + 3m(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x + 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x^2 - 2x + 3m - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x = -3 \Rightarrow y = 0$. Bài ra A là điểm cố định $\Rightarrow A(-3; 0)$.

Khi đó d và (C) cắt nhau tại A, B, C phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (3m - 1) > 0 \\ (-3)^2 - 2(-3) + 3m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{2}{3} \\ m \neq -\frac{14}{3} \end{cases} \quad (*).$$

Do $B, C \in d$ nên ta gọi $B(x_1; x_1 + 3), C(x_2; x_2 + 3) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2.$$

Ta có $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1). Theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 3m - 1 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = 2.2^2 - 8(3m - 1) = 16 - 24m.$

Bài ra $BC = 2\sqrt{10} \Rightarrow 16 - 24m = (2\sqrt{10})^2 = 40 \Leftrightarrow m = -1$. Đã thỏa mãn (*).

Đ/s: $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 18: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^3 + (4-m)x^2 + (3-5m)x - 4m + 1$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = x - 7$. Tìm m để (C) giao d tại 3 điểm phân biệt $A(-4; -11), B, C$ sao cho diện tích tam giác OBC bằng $\frac{21}{2}$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 + (4-m)x^2 + (3-5m)x - 4m + 1 = x - 7 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 2x + 8 - m(x^2 + 5x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x^2 + 2) - m(x+4)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2 + 2 - mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x^2 - mx + 2 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x = -4 \Rightarrow y = -11 \Rightarrow A(-4; -11)$ ứng với đề bài đã cho.

Khi đó d và (C) cắt nhau tại $A(-4; -11), B, C$ phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(2-m) > 0 \\ (-4)^2 - m(-4) + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 8 > 0 \\ m \neq -6 \end{cases} \quad (*).$$

Do $B, C \in d$ nên ta gọi $B(x_1; x_1 - 7), C(x_2; x_2 - 7) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2.$$

Ta có $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1). Theo Viet thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 2 - m \end{cases} \Rightarrow BC^2 = 2m^2 - 8(2 - m) = 2m^2 + 8m - 16.$$

$$\text{Bài ra có } S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot d(O; d) = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{|0 - 0 - 7|}{\sqrt{1+1}} = \frac{7BC}{2\sqrt{2}} = \frac{21}{2} \Rightarrow BC^2 = 18.$$

Do đó $2m^2 + 8m - 16 = 18 \Leftrightarrow m = -2 \pm \sqrt{21}$. Đã thỏa mãn (*).

Đ/s: $m = -2 \pm \sqrt{21}$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = (x - 2)(x^2 + mx - 1)$ (C). Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt A; B; C(2;0) sao cho độ dài $AB = \sqrt{5}$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $(x - 2)(x^2 + mx - 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow C(2;0) \\ g(x) = x^2 + mx - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 4 > 0 \\ g(2) = 3 + 2m \neq 0 \end{cases} \quad (*). \text{ Khi đó gọi } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0.$$

$$\text{Theo Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } A(x_1; 0); B(x_2; 0) \text{ ta có: } AB^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ (tm)}$$

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 20: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 - x$ (C) và đường thẳng $d: y = m(x - 1)$. Tìm m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt A; B; C(1;0) sao cho điểm $M\left(-\frac{1}{2}; -9\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $x(x^2 - 1) - m(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x) - m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + x - m = 0 \end{cases}$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt và 2 nghiệm đó khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 > 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Khi đó gọi } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0. \text{ Theo định lý Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}.$$

Ta có: $A(x_1; m(x_1 - 1)); B(x_2; m(x_2 - 1))$, trung điểm của AB

$$\text{là } \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1}{2} \\ y_M = \frac{m(x_1 - 1) + m(x_2 - 1)}{2} = \frac{m(x_1 + x_2) - 2m}{2} = \frac{-3m}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ nên $\frac{-3m}{2} = -9 \Leftrightarrow m = 6 \text{ (tm)}$.

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 + (m+2)x - m$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Tìm m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt có tung độ $y_1; y_2; y_3$ thỏa mãn $A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 11$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $x^3 + mx - m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 3 \\ g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt và 2 nghiệm đó khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1 - m) > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 3 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó cho $x_3 = 1; y_3 = 3$ và $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$. Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (2x_1 + 1)^2 + (2x_2 + 1)^2 + 9 = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) + 11$.

$$A = 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 4(x_1 + x_2) + 11 = 4[1 - 2(1 - m)] - 4 + 11 = 8m + 3 = 11 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (tm)}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 22: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^3 + mx - 4$ (C) và đường thẳng $d: y = 2mx + 4$. Tìm m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho trọng tâm tam giác OAB là $G\left(-\frac{2}{3}; 8\right)$ trong đó C là điểm có hoành độ $x_C = 2$ và O là gốc tọa độ.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $x^3 + mx - 2mx - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + m(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow C(2; 4m+4) \\ g(x) = x^2 + 2x + 4 + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - 4 - m = -m - 3 > 0 \\ g(2) = 12 + m \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$. Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 4 + m \end{cases}$.

Gọi $A(x_1; 2mx_1 + 4); B(x_2; 2mx_2 + 4)$ ta có:
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_G = \frac{2mx_1 + 4 + 2mx_2 + 4 + 0}{3} = \frac{2m(x_1 + x_2) + 8}{3} \end{cases}$$

Do vậy $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{8-4m}{3}\right)$. Cho $\frac{8-4m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = -4$ (tm).

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 2. TƯƠNG GIAO HÀM PHÂN THỨC

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{2x-1}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -x + 2m$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$-x + 2m = \frac{x+3}{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ (2x-1)(x-2m) + x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm âm phân biệt khác $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 2(2m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4m \cdot \frac{1}{2} + 2m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 2m < 0 \\ \frac{2m+3}{2} > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ m < \frac{1-\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{1-\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases}$$

Đ/s: $-\frac{3}{2} < m < \frac{1-\sqrt{7}}{2}$.

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = mx - 1$. Tìm m để (C) giao d tại 2 điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$mx - 1 = \frac{2x-3}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ mx^2 + 2mx - x - 2 = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ mx^2 - (3-2m)x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (3-2m)^2 - 4m > 0 \\ m \cdot (-2)^2 - (3-2m) \cdot (-2) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 16m + 9 > 0 \\ 4m + 6 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{4+\sqrt{7}}{2} \\ m < \frac{4-\sqrt{7}}{2} \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4+\sqrt{7}}{2} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{4-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3-2m}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{m} \end{cases} \quad (3)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} + 2 \cdot \frac{3-2m}{m} + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1+6-4m+4m}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0. \text{ Kết hợp với (2) ta được } \begin{cases} m > \frac{4+\sqrt{7}}{2} \\ 0 < m < \frac{4-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \text{ thỏa mãn.}$$

Đ/s: $m > \frac{4+\sqrt{7}}{2}$ hoặc $0 < m < \frac{4-\sqrt{7}}{2}$.

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x+1}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -2x + 3$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1^2 - 4x_2 = 9$.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$-2x + 3 = \frac{2x-m}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)(2x-3) + 2x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x^2 + x - m - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 8(m+3) > 0 \\ 2 \cdot (-1)^2 - 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{25}{8} \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó theo Viet có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{m+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} - x_1 \\ x_1 x_2 = -\frac{m+3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với $3x_1^2 - 4x_2 = 9$ ta được $3x_1^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - x_1\right) = 9 \Leftrightarrow 3x_1^2 + 4x_1 - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = -\frac{7}{3} \end{cases}$

- TH1. $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{m+3}{2} = 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow m = 0$. Đã thỏa mãn $(*)$.
- TH2. $x_1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{11}{6} \Rightarrow -\frac{m+3}{2} = \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{11}{6}\right) \Leftrightarrow m = \frac{50}{9}$. Đã thỏa mãn $(*)$.

Đ/s: $m = 0$ hoặc $m = \frac{50}{9}$.

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-4}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = x - m + 1$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = \frac{3}{2}$.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$x - m + 1 = \frac{x-1}{2x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x^2 - 4x - (2m-2)x + 4m - 4 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x^2 - (2m+3)x + 4m - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 8(4m-3) > 0 \\ 2 \cdot 2^2 - (2m+3) \cdot 2 + 4m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 20m + 33 > 0 \\ -1 - 4m + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-5)^2 + 8 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Khi đó theo Viet thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{4m-3}{2} \end{cases} \quad (2).$$

Ta có $|x_1 - x_2| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4(x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 = 9 \Leftrightarrow 4\left(\frac{2m+3}{2}\right)^2 - 16 \cdot \frac{4m-3}{2} = 9$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \text{ đã thỏa mãn } (*).$$

Đ/s: $m = 2$ hoặc $m = 3$.

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$, có đồ thị là (C) . Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB .

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Gọi m là hệ số góc của d .

Bài ra d đi qua $M(0;2) \Rightarrow$ phương trình của d có dạng $d: y = m(x-0) + 2 \Leftrightarrow y = mx + 2$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$mx + 2 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - mx + 2x - 2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - (m-1)x - 4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có d giao (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 + 16m > 0 \\ m \cdot 1^2 - (m-1) \cdot 1 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 14m + 1 > 0 \\ m - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 14m + 1 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Do $A, B \in d$ nên ta gọi $A(x_1; mx_1 + 2), B(x_2; mx_2 + 2)$.

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo Viet thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m} \\ x_1 x_2 = -\frac{4}{m} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó } M \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = x_M = 0 \\ \frac{mx_1 + 2 + mx_2 + 2}{2} = y_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ m(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với (2) ta được } \begin{cases} \frac{m-1}{m} = 0 \\ m \cdot \frac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \text{ Đã thỏa mãn (*)} \Rightarrow d : y = x + 2.$$

Đ/s: $d : y = x + 2$.

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d : y = x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 9$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\text{là: } \frac{x+1}{x-1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = x^2 + (m-2)x - m - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 + 4(m+1) > 0 \\ g(1) = -2 \neq 0 \end{cases} \quad (*). \text{ Khi đó gọi } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0.$$

$$\text{Theo Viet ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2 - m)^2 + 2(m + 1) = m^2 - 2m + 6 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy $m = 3; m = -1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d : y = 2x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và } d \text{ là: } \frac{2x-1}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = 2x^2 + mx + m + 1 = 0 \end{cases}$$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8(m+1) > 0 \\ g(-1) = 3 \neq 0 \end{cases} \quad (*). \text{ Khi đó gọi } x_1; x_2 \text{ là nghiệm của PT } g(x) = 0.$$

$$\text{Theo Viet ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - 2(m+1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -1 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy $m = 9; m = -1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = \frac{x+3}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $A = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 9$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x+3}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = x^2 - mx + 3 + m = 0 \end{cases}$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(3+m) \\ g(1) = 4 \neq 0 \end{cases} (*)$. Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 3 + m \end{cases}$

Ta có: $A = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = m^2 - 3(3+m) = m^2 - 3m - 9 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \text{ (loại)} \\ m = -3 \end{cases}$

Vậy $m = -3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 4$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x-m}{x-2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = 2x^2 - 5x + m = 0 \end{cases} (1)$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 8m > 0 \\ g(2) = m - 2 \neq 0 \end{cases} (*)$. Khi đó gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của PT $g(x) = 0$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases} (1)$. Do $2x_1 + x_2 = 4$.

Giải hệ PT $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow m = 2x_1 x_2 = 3$.

Do vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt sao A, B cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x+1}{x-2} = x + m$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 \end{cases} (1)$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 + 4(2m+1) > 0 \\ g(2) = -3 \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm.

Theo Viet ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = -2m - 1 \end{cases}$$

Ta có: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 - x_2)^2]} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$

$$= \sqrt{2[(3-m)^2 - 4(-2m-1)]} = \sqrt{2(m^2 + 2m + 13)} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} (tm)$$

Vậy $m = -3; m = 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 11: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -10$ trong đó O là gốc tọa độ.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = 2x^2 + mx + m - 1 = 0 \end{cases} (1)$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8(m-1) > 0 \\ g(-1) = 1 \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm.

Theo Viet ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 \cdot x_2 + (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 5x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{5m-5}{2} - m^2 + m^2 = -10$

$$\Leftrightarrow m = -3 (tm)$$

Vậy $m = -3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 12: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $x + y = 0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x-1}{x-2} = -x + m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0 \end{cases} (1)$$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1) > 0 \\ g(2) = -1 \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi $A(x_1; -x_1 + m); B(x_2; -x_2 + m)$ là 2 tọa độ các giao điểm.

Theo Viet ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = 2m-1 \end{cases}$$

Gọi G là trọng tâm tam giác OAB ta có :
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{m+1}{3} \\ y_G = \frac{-x_1 + m - x_2 + m + 0}{3} = \frac{m-1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{m+1}{3}; \frac{m-1}{3}\right)$$

Do điểm $G \in x + y = 0$ nên ta có: $\frac{m+1}{3} + \frac{m-1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \quad (t/m)$

Vậy $m = 0$ là các giá trị cần tìm.

Câu 13: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x - m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{OAB} = \frac{5}{4}$ trong đó O là gốc tọa độ.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{2x+1}{x-1} = 2x - m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = 2x^2 - (m+4)x + m - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+4)^2 - 8(m-1) > 0 \\ g(1) = -3 \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó gọi $A(x_1; 2x_1 - m); B(x_2; 2x_2 - m)$ là 2 tọa độ các giao điểm.

Theo Viet ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+4}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}.$$

Ta có: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2x_1 - 2x_2)^2} = \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{\frac{5}{4}(m^2 + 24)}$

$d(O; AB) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Khi đó : $S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = \frac{1}{4} |m| \sqrt{m^2 + 24} = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 = 25 \Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 25) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \quad (tm)$

Vậy $m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 14: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 5\sqrt{2}$.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$2x + m = \frac{x+2}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 2x^2 - 6x + mx - 3m = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 2x^2 + (m-7)x - 3m - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 + 8(3m+2) > 0 \\ 2 \cdot 3^2 + (m-7) \cdot 3 - 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 10m + 65 > 0 \\ -5 + 3m - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+5)^2 + 40 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; 2x_1 + m), B(x_2; 2x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; 2x_2 - 2x_1)$

$$\Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2.$$

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo Vi-et thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7-m}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{3m+2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 5\left(\frac{7-m}{2}\right)^2 + 20 \cdot \frac{3m+2}{2} = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 5(m^2 - 14m + 49) + 40(3m+2) = 200$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 50m + 125 = 0 \Leftrightarrow m = -5. \text{ Đã thỏa mãn } (*).$$

Đ/s: $m = -5$.

Câu 15: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -mx + 2$. Tìm m để (C) giao d tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O .

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$-mx + 2 = \frac{3x-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x-1)(mx-2) + 3x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - (m-1)x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4m > 0 \\ m \cdot 1^2 - (m-1) \cdot 1 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 6m + 1 > 0 \\ m - m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \begin{cases} O \notin AB \\ OA \perp OB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O \notin d \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq -m \cdot 0 + 2 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad (2)$

Do $A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} A(x_1; 2-mx_1) \\ B(x_2; 2-mx_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_1; 2-mx_1) \\ \overrightarrow{OB} = (x_2; 2-mx_2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + 4 - 2m(x_1 + x_2) + m^2x_1x_2.$

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo Viet thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m} \\ x_1x_2 = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{m} + 4 - 2m \cdot \frac{m-1}{m} + m^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + 4 - 2m + 2 + m = \frac{1}{m} - m + 6 = \frac{-m^2 + 6m + 1}{m}$$

Kết hợp với (2) ta được $\frac{-m^2 + 6m + 1}{m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 6m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{10}$. Đã thỏa mãn (*).

Đ/s: $m = 3 \pm \sqrt{10}$.

Câu 16: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{3-7x}{x+5}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d : y = mx - 1$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A, B đến đường thẳng $\Delta : y = -x + 2$ bằng nhau.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$mx - 1 = \frac{3-7x}{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ mx^2 + 5mx - x - 5 + 7x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ mx^2 + (5m+6)x - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (5m+6)^2 + 32m > 0 \\ m \cdot (-5)^2 + (5m+6) \cdot (-5) - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 25m^2 + 92m + 36 > 0 \\ 25m - 25m - 38 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 25m^2 + 92m + 36 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; mx_1 - 1), B(x_2; mx_2 - 1)$. Phương trình $\Delta : x + y - 2 = 0$.

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo Vi-et thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{5m+6}{m} \\ x_1 x_2 = -\frac{8}{m} \end{cases} \quad (2)$$

Lại có $d(A; \Delta) = \frac{|x_1 + mx_1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_1 + mx_1 - 3|}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{|x_2 + mx_2 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_2 + mx_2 - 3|}{\sqrt{2}}$.

Do đó $d(A; \Delta) = d(B; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|x_1 + mx_1 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + mx_2 - 3|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + mx_1 - 3 = x_2 + mx_2 - 3 \\ x_1 + mx_1 - 3 = -(x_2 + mx_2 - 3) \end{cases}$

• TH1. $x_1 + mx_1 - 3 = x_2 + mx_2 - 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) + m(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ m = -1 \end{cases}$

Với $x_1 = x_2 \Rightarrow A \equiv B \Rightarrow$ Loại do A, B phân biệt. Mà $m = -1$ cũng không thỏa mãn (*) $\Rightarrow$ Loại.

• TH2. $x_1 + mx_1 - 3 = -(x_2 + mx_2 - 3) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + m(x_1 + x_2) - 6 = 0$.

Kết hợp với (2) ta được $-\frac{5m+6}{m} - m \cdot \frac{5m+6}{m} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{5m+6+5m^2+6m+6m}{m} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 + 17m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \text{ (Ko TM (*))} \\ m = -\frac{2}{5} \text{ (TM (*))} \end{cases}$$

Câu 17: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x+3}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -2x+1$. Tìm m để (C) giao d tại hai điểm phân biệt có hoành độ A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = \frac{3}{2}$, ở đó O là gốc tọa độ.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$-2x+1 = \frac{mx-1}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ (x+3)(2x-1) + mx - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ 2x^2 + (m+5)x - 4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+5)^2 + 32 > 0 \\ 2 \cdot (-3)^2 + (m+5) \cdot (-3) - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -3m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3} \quad (*)$$

Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; 1-2x_1), B(x_2; 1-2x_2) \Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; 2x_1 - 2x_2)$

$$\Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2x_1 - 2x_2)^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2.$$

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m+5}{2} \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow AB^2 = 5\left(-\frac{m+5}{2}\right)^2 - 20 \cdot (-2) = \frac{5(m+5)^2 + 160}{4}.$$

$$\text{Ta có } h = d(O; AB) = d(O; d) = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{3}{2} \Rightarrow AB^2 \cdot h^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{5(m+5)^2 + 160}{4} \cdot \frac{1}{5} = 9 \Leftrightarrow 5(m+5)^2 + 160 = 180 \Leftrightarrow (m+5)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 (tm) \\ m = -7 (tm) \end{cases}$$

Vậy $m = -3; m = -7$ là các giá trị cần tìm.

Câu 18: [ĐVH]. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$, có đồ thị là (C) và đường thẳng d đi qua $M\left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ có hệ số góc k . Tìm k để d và (C) giao nhau tại 2 điểm phân biệt A, B thuộc 2 nhánh của đồ thị sao cho $MA = 3MB$.

Lời giải:

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Bài ra d đi qua $M\left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ có hệ số góc $k \Rightarrow d: y = k\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$k\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ k\left(x^2 + \frac{7x}{2} + \frac{5}{2}\right) + \frac{5x}{2} + \frac{5}{2} = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ kx^2 + \frac{7k+1}{2}x + \frac{5k+7}{2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d giao (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left(\frac{7k+1}{2}\right)^2 - 4k \frac{5k+7}{2} > 0 \\ k \cdot (-1)^2 + \frac{7k+1}{2} \cdot (-1) + \frac{5k+7}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}k^2 - 14k + \frac{1}{4} > 0 \\ k - k + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4}k^2 - 14k + \frac{1}{4} > 0 \quad (*)$$

$$\text{Do } A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} A\left(x_1; kx_1 + \frac{5k}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ B\left(x_2; kx_2 + \frac{5k}{2} + \frac{5}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = \left(x_1 + \frac{5}{2}; kx_1 + \frac{5k}{2}\right) \\ \overrightarrow{MB} = \left(x_2 + \frac{5}{2}; kx_2 + \frac{5k}{2}\right) \end{cases}$$

Do M nằm trong đoạn BC nên

$$MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{5}{2}; kx_1 + \frac{5k}{2}\right) = -3\left(x_2 + \frac{5}{2}; kx_2 + \frac{5k}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{5}{2} = -3\left(x_2 + \frac{5}{2}\right) \\ kx_1 + \frac{5k}{2} = -3\left(kx_2 + \frac{5k}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -10 \\ k(x_1 + 3x_2) = -10k \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = -10 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 - 10 \quad (2)$$

Hai điểm phân biệt A, B thuộc 2 nhánh của đồ thị $\Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 < 0$.

$$\text{Ta có } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của (1) nên theo Viet thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-1-7k}{2k} \\ x_1x_2 = \frac{5k+7}{2k} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Do đó } \frac{-1-7k}{2k} + \frac{5k+7}{2k} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{k} < 0 \Leftrightarrow k < 0. \text{ Kết hợp với (*) ta được } k < 0 \quad (**)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow -3x_2 - 10 + x_2 = \frac{-1-7k}{2k} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{4k} - \frac{13}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{4k} + \frac{39}{4} - 10 = \frac{-3}{4k} - \frac{1}{4}.$$

Do đó

$$x_1x_2 = \left(\frac{-3}{4k} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4k} - \frac{13}{4}\right) = \frac{5k+7}{2k} \Leftrightarrow (-3-k)(1-13k) = 8(5k+7)k \Leftrightarrow 9k^2 + 6k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{3}$$

Thỏa mãn (**).

$$\text{Đ/s: } k = \frac{-1}{3}$$

DẠNG 3. TƯƠNG GIAO HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Câu 1: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4 - 3m$, có đồ thị là (C) . Tìm m để (C) giao Ox tại hai điểm phân biệt.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của Ox và (C) là nghiệm của phương trình $x^4 - 2mx^2 + 4 - 3m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow (1)$ thành $t^2 - 2mt + 4 - 3m = 0$ (2)

Khi đó (C) giao Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép dương hoặc 2 nghiệm phân biệt trái dấu

- TH1. (2) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (4 - 3m) = 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = 4 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \\ 0 < m < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

- TH2. (2) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (4 - 3m) > 0 \\ t_1 t_2 = 4 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+4) > 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta được $m = 1$ hoặc $m > \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

Đ/s: $m = 1$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

Câu 2: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -m + 1$. Tìm m để (C) giao d tại ba điểm phân biệt.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 + 5 = -m + 1$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow (1)$ thành $t^2 - 3t + 5 = -m + 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t + m + 4 = 0$ (2)

Khi đó (C) giao d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương (3)

Do đó $0^2 - 3 \cdot 0 + m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Ngược lại, với $m = -4$ thì (2) thành $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 3$. Đã thỏa mãn (3).

Đ/s: $m = -4$.

Câu 3: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ (C). Tìm m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 20$.

Lời giải:

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^4 - 2mx^2 + m + 1 = 0$ (1)

+) Đặt $t = x^2$: (1) $\Rightarrow t^2 - 2mt + m + 1 = 0$ (2)

+) Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 1 > 0 \end{cases} (*) \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = m + 1 \end{cases}$$

+) Khi đó PT (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết bài toán $\Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 + t_2^2 + t_1^2 = 20 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 10 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 10$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 10 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: [ĐVH]. Cho hàm số : $y = x^4 - (2m+1)x^2 + 2$ (C). Tìm m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} + \frac{1}{x_3^4} + \frac{1}{x_4^4} = \frac{5}{2}$.

Lời giải :

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^4 - (2m+1)x^2 + 2 = 0$ (1)

+) Đặt $t = x^2$: (1) $\Rightarrow t^2 - (2m+1)t + 2 = 0$ (2)

+) Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 8 > 0 \\ S = 2m+1 > 0 \\ P = 2 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+1 \\ t_1 t_2 = 2 \end{cases}$$

+) Khi đó PT (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$ ta có: $\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_1^2} = \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t_1^2} + \frac{2}{t_2^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2(t_1^2 + t_2^2)}{t_1^2 t_2^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 5 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 5 \Leftrightarrow (2m+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: [ĐVH]. Cho hàm số : $y = x^4 - 2mx^2 + m + 4$ (C). Tìm m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn: $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

Lời giải :

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^4 - 2mx^2 + m + 4 = 0$ (1)

+) Đặt $t = x^2$: (1) $\Rightarrow t^2 - 2mt + m + 4 = 0$ (2)

+) Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 4 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 4 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = m + 4 \end{cases}$$

+) Khi đó PT (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết $\Leftrightarrow |-\sqrt{t_1}| + |-\sqrt{t_2}| + |\sqrt{t_2}| + |\sqrt{t_1}| = 8 \Leftrightarrow 2(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}) = 8 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+4} = 16 - 2m \Leftrightarrow \sqrt{m+4} = 8 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m^2 - 17m + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5 \text{ (tm)}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^4 - 5x^2 + 2m + 2$ (C). Tìm m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3; x_4$ theo thứ tự tăng dần sao cho $x_1 = 2x_2$.

Lời giải :

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^4 - 5x^2 + 2m + 2 = 0$ (1)

+) Đặt $t = x^2$: (1) $\Rightarrow t^2 - 5t + 2m + 2 = 0$ (2)

+) Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 25 - 8m - 8 > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 2m + 2 > 0 \end{cases} \quad (*) . \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 t_2 = 2m + 2 \end{cases}$$

+) Khi đó PT (1) có 4 nghiệm theo thứ tự tăng dần là: $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết $-2\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 4t_2 = t_1$ kết hợp với $t_1 + t_2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$.

$$\Rightarrow t_1 t_2 = 2m + 2 = 4 \Leftrightarrow m = 1 \quad (tm)$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 7: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - (m+4)x^2 + m^2 + 3$, có đồ thị là (C). Tìm m để (C) giao Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 50$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của Ox và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^4 - (m+4)x^2 + m^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \geq 0 \Rightarrow (1) \text{ thành } t^2 - (m+4)t + m^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

Khi đó (C) giao Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+4)^2 - 4(m^2 + 3) > 0 \\ t_1 + t_2 = m+4 > 0 \\ t_1 t_2 = m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 8m + 4 > 0 \\ m > -4 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Từ đó ta có } x^2 = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1^2 + t_2^2) = 50 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 25$$

$$\Rightarrow (m+4)^2 - 2(m^2 + 3) = 25 \Leftrightarrow -m^2 + 8m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \quad (TM \quad *) \\ m = 5 \quad (Ko \quad TM \quad *) \end{cases}$$

Đ/s: $m = 3$.

Câu 8: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m + 2$, có đồ thị là (C). Tìm m để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 26$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (m+1)x^2 + m + 2 = 0$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow t^2 - (m+1)t + m + 2 = 0 \quad (*)$$

Để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4(m+2) > 0 \\ m+1 > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 7 > 0 \\ m > -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 + 2\sqrt{2}, m < 1 - 2\sqrt{2} \\ m > -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 + 2\sqrt{2}$$

Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow x_1 = \sqrt{t_1}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_2}, x_4 = -\sqrt{t_2}$ và

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = m + 1 \\ t_1 t_2 = m + 2 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 26 \Leftrightarrow 2t_1^2 + 2t_2^2 = 26 \Leftrightarrow 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = 26$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)^2 - 4(m+2) = 26 \Leftrightarrow 2m^2 = 32 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: [ĐVH]. Cho hàm số $y = x^4 - (2m+1)x^2 + m^2 + m$, có đồ thị là (C) . Tìm m để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - (2m+1)x^2 + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x^2 - m)(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = m \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$$

Để (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $\begin{cases} m > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó 4 nghiệm của phương trình theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{m+1}, x_2 = -\sqrt{m}, x_3 = \sqrt{m}, x_4 = \sqrt{m+1}$

Để 4 nghiệm của phương trình lập thành một cấp số cộng thì

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \Leftrightarrow -\sqrt{m} + \sqrt{m+1} = \sqrt{m} + \sqrt{m} \Leftrightarrow \sqrt{m+1} = 3\sqrt{m} \Leftrightarrow m+1 = 9m \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$$

Vậy $m = \frac{1}{8}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: [ĐVH]. Cho hàm số: $y = x^4 - (2m+1)x^2 + m + 2$ (C). Tìm m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 4 điểm A, B, C, D có hoành độ tăng dần sao cho $AC^2 + BD^2 = 18$.

Lời giải:

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^4 - (2m+1)x^2 + m + 2 = 0$ (1)

+) Đặt $t = x^2$: (1) $\Rightarrow t^2 - (2m+1)t + m + 2 = 0$ (2)

+) Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 4m - 8 > 0 \\ S = 2m+1 > 0 \\ P = m+2 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+1 \\ t_1 t_2 = m+2 \end{cases}$$

+) Khi đó PT (1) có 4 nghiệm sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$ suy ra

$$A(-\sqrt{t_1}; 0); B(-\sqrt{t_2}; 0); C(\sqrt{t_2}; 0); D(\sqrt{t_1}; 0) \text{ ta có: } AC^2 = (\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1})^2 = BD^2$$

$$\text{Do vậy giả thiết ta có: } (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2 = 9 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 9 \Leftrightarrow 2m+1 + 2\sqrt{m+2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m+2 = m^2 - 8m + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (tm)}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 11*: [ĐVH]. Cho hàm số $y = -2x^4 + 2(m^2 - 1)x^2 - 7$, có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = -2mx - 7$. Tìm m để (C) giao d tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $-2x^4 + 2(m^2 - 1)x^2 - 7 = -2mx - 7$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 2(m^2 - 1)x^2 - 2mx = 0 \Leftrightarrow 2x[x^3 - (m^2 - 1)x - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - (m^2 - 1)x - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó d và (C) giao nhau tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (m^2 - 1)x - m = 0$ với $x \in \mathbb{R}$ có $f'(x) = 3x^2 - (m^2 - 1)$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \text{ với } f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \text{ và } 0^3 - (m^2 - 1) \cdot 0 - m \neq 0 \quad (2)$$

Ta có $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$ (*)

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = m^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}}.$$

$$\text{Do đó } f(x_1) = f\left(\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}}\right) = \sqrt{\left(\frac{m^2 - 1}{3}\right)^3} - (m^2 - 1)\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}} - m = -\frac{2}{3}(m^2 - 1)\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}} - m.$$

$$f(x_2) = f\left(-\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}}\right) = -\sqrt{\left(\frac{m^2 - 1}{3}\right)^3} + (m^2 - 1)\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}} - m = \frac{2}{3}(m^2 - 1)\sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}} - m$$

$$\text{Từ đó } f(x_1) \cdot f(x_2) = m^2 - \frac{4}{9}(m^2 - 1)^2 \cdot \frac{m^2 - 1}{3} < 0 \Leftrightarrow 27m^2 - 4(m^2 - 1)^3 < 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = m^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow (3) \text{ thành } 27(t + 1) - 4t^3 < 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 27t - 27 > 0 \Leftrightarrow (t - 3)(2t + 3)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t + 3)^2 > 0 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow t > 3 \text{ hay } m^2 - 1 > 3 \Leftrightarrow m > 2 \text{ hoặc } m < -2. \text{ Kết hợp với (*) ta được } \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\text{N như vậy } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \text{ hoặc } m < -2 \text{ hoặc } \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\text{Đ/s: } m > 2 \text{ hoặc } \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -2 \end{cases}$$