

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Vấn đề 1. TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ.

1. Định nghĩa:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K và $\forall x_1, x_2 \in K$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Chú ý.

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó.” Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.
- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng trên K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$

- Tìm tập xác định
- Tính y'
- Tìm nghiệm $y' = 0$ hoặc tại đó đạo hàm không xác định.
- Lập bảng biến thiên
- Dựa vào bảng biến và kết luận

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$-\infty$	

Ví dụ 2. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 3}$

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Ví dụ 7. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{3x - x^2}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Ví dụ 8. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Ví dụ 9. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Tìm các khoảng điệu của các hàm số sau:

a) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{1}{2}$

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

c) $y = x^3 + x^2 + 5x - \frac{2}{3}$

Bài 2. Xét tính đơn điệu của hàm số sau:

a) $y = -x^4 + 3x^2 + 1$

b) $y = x^4 + x^2 + \frac{1}{3}$

Bài 3. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3 - x}{x + 3}$

b) $y = \frac{-5}{x - 1}$

BÀI TẬP NÂN CAO

Bài 4. Xét chiều biế thiên của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2}$

b) $y = \frac{-x^2}{x + 1}$

c) $y = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$

d) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

Bài 5. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

b) $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$

e) $y = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

f) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}$

Bài 6. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = x - \sin x$

b) $y = x + \cos^2 x$

c) $y = \cos 2x - 2x + 3$

d) $y = x + \sin^2 x$

Dạng 2: Tìm tham số hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đồng biến hoặc nghịch biến

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($a, c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$
 - Hàm số đồng biến: $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$
 - Hàm số nghịch biến: $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$

Ví dụ 10. Tìm m để hàm số $y = \frac{(m - 1)x - 2m}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $y' = \frac{-m(m - 1) + 2m}{(x - m)^2} = \frac{-m^2 + 3m}{(x - m)^2}$.

Theo yêu cầu bài toán : $y' > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 3m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Ví dụ 11. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx - 2m + 2}{x - m + 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{(m - 1)x + m^2}{x + 2}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - m^2 + 3}{x + 2}$ đồng biến trên hai khoảng xác định của nó.

Bài 8. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m^2x - 1}{x + 2}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 9. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = 3m - \frac{m^2 - 3}{x + 2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 10. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + m^2 + 3}{x + 2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Dạng 3: Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ luôn đồng, nghịch biến.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

1. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
2. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Ví dụ 13. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 3m)x + m^3 - 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2mx + m^2 - 3m$. Theo yêu cầu bài toán thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx + m^2 - 3m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 3(m^2 - 3m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^2 + 9m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{9}{2}.$$

Vậy giá trị m cần tìm $m \in \left[0; \frac{9}{2}\right]$

Ví dụ 14. Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - (m - 2)x^2 + (m - 2)x + m$ luôn nghịch biến.

Ví dụ 15. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + 2(m^2 + 2)x + m - 8$ luôn đồng biến.

Ví dụ 16. Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - (m^2 - 2m + 5)x + 3m - 1$ luôn nghịch biến.

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 11. Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau:

- a) $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + (2m + 1)x - 3m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) $y = \frac{x^2}{3} - mx^2 + (4 - 3m)x - m^2 + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) $y = \frac{(1 - m)x^3}{3} - 2(2 - m)x^2 + 2(2 - m)x + 1$ luôn nghịch biến.

Bài 12. Chứng minh các hàm số:

- a) $y = (m + 1)x^3 + x^2 + (2m^2 + 1)x - 3m + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - (m^2 + 4)^2x + m$ luôn nghịch biến.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 13. Với giá trị nào của m thì hàm số sau:

- a) $y = \sin x - mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) $y = x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) $y = mx - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- d) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- e) $y = x^3 - 3mx^2 + 4mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- f) $y = x^3 - 3(2m + 1)x^2 + (2m + 5)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 14. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $\sin x < x, \forall x > 0.$
- b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \neq 0.$
- c) $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$
- d) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

Dạng 4: Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên $(a; b)$

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng D .

- Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$.
 $\Leftrightarrow y' \geq 0$ hoặc $(y' \leq 0), \forall x \in (a; b)$ (*)
- Thông thường (*) biến đổi về được một trong hai dạng:
 - $h(m) \geq g(x), \forall x \in (a; b)$
 - $h(m) \leq g(x), \forall x \in (a; b)$.
 Trong đó $y = g(x)$ là hàm số tồn tại GTLN hoặc GTNN trên $(a; b)$
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $(a; b)$ và từ bảng biến thiên này kết luận:
 - $h(m) \geq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(a; b)}$
 - $h(m) \leq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(a; b)}$

Ví dụ 17. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$. Theo yêu cầu bài toán thì: $y' \geq 0, \forall x \in [0; 2]$

$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - 6x - 1, \forall x \in [0; 2]$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - 6x - 1, \forall x \in [0; 2]$.

Ta có $g'(x) = -6x - 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [0; 2]$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'			–	
y		–1	–25	

Từ bảng biến thiên: $m \geq \max_{[0; 2]} g(x) = -1$. Vậy giá trị m cần tìm là $m \geq -1$.

Ví dụ 18. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$. Theo yêu cầu bài toán: $y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Ví dụ 19. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1; 4]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ví dụ 21. Tìm tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 2)x^2 - m(m - 3)x - \frac{1}{3}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 15. Tìm các giá trị của m để hàm số:

- a) $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.
- b) $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m - 3)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
- c) $y = x^3 - 3mx^2 + m - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- d) $y = x^3 - 3(2m + 1)x^2 + (2m + 5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- e) $y = \frac{mx + 6}{2x + m + 1}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Dạng 5: Tìm m để phương trình, bất phương trình có nghiệmCho phương trình $f(x; m) = 0$

(*)

- Biến đổi phương trình (*) về dạng $g(x) = h(m)$ (hoặc $h(m) \geq g(x)$)
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = g(x)$ và dựa vào bảng biến kết luận.

Ví dụ 22. Giải phương trình $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

(1)

Lời giải.Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Xét hàm $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$; $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0, \forall x > \frac{1}{2}$. Suy ra hàm số $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$ đồng biến $\forall x > \frac{1}{2}$. Ta thấy $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 23. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4$.**Lời giải.**Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$.Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}, \forall x \geq \frac{1}{5}$.
$$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0, \forall x > \frac{1}{5}. \text{ Suy ra hàm số đồng biến trên } \left(\frac{1}{5}; +\infty\right).$$
Ta thấy $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) = 4$. Nghiệm bất phương trình $x \in [1; +\infty)$

Ví dụ 24. Giải phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.Điều kiện: $-\frac{3}{2} \leq x \leq 4, -\frac{3}{2} \leq y \leq 4$

Từ hệ ta có:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{2y+3} - \sqrt{4-y} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} - \sqrt{4-t}, t \in \left[-\frac{3}{2}; 4\right]$

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-t}} > 0, \forall t \in \left(-\frac{3}{2}; 4\right) \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên khoảng } \left(-\frac{3}{2}; 4\right)$$
Do đó từ (*) $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4$

$$\text{Xét } g(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x}; g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{3}{2}; 4\right)$$
 $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$ Ta có $g(3) = 4 \Rightarrow x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.**Ví dụ 25.** Tìm tham số thực m để phương trình $x + \sqrt{3x^2+1} = m$ có nghiệm thực.**Lời giải.**Tập xác định $D = \mathbb{R}$.Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{3x^2+1}; f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 6x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên để phương trình có nghiệm khi $m \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 16. Tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau:

a) $x^2 + (2 - m)x + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$

b) $\cos^2 x + (1 - m)\cos x - 2m - 2$ có nghiệm

c) $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất

Bài 17. Tìm tham số m để bất phương trình:

$\sqrt{x^2 - 2x + 24} \leq x^2 - 2x + m$ có nghiệm thực trong $[-4; 6]$

Bài 18. Tìm tham số m để bất phương trình:

$\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m$ có nghiệm thực trong $[2; 3]$

Bài 19. Tìm tham số m để phương trình $mx + \sqrt{(m - 1)x + 2} = 1$ có nghiệm thực trong $[0; 1]$

Bài 20. Tìm điều kiện của tham số m để các phương trình sau có nghiệm.

a) $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$

b) $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$

c) $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$

d) $x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = m(\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - x})$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$

f) $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} - \sqrt{(3 + x)(6 - x)} = m$

Bài 21. Tìm điều kiện của tham số m để các phương trình sau có nghiệm.

a) $2\sqrt{x + 1} = x + m$

b) $\sqrt{4 - x^2} = mx - m + 2$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = \sqrt{-x^2 + 4x + m}$

d) $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$

e) $\sqrt{4 - x^2} = mx - m + 2$

f) $\sqrt{2x^2 - 2mx + 1} + 2 = x$

g) $x + \sqrt{3x^2 + 3x^2 + 1} = m$

Vấn đề 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$ và điểm $x_0 \in (a; b)$).

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ **đạt**

cực tại x_0

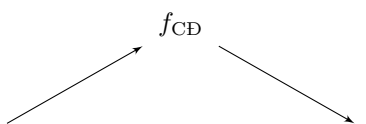
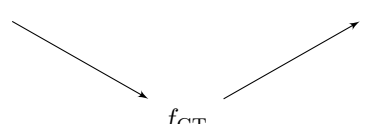
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ **đạt tiểu** tại x_0

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
y'	+		-	y'	-		+
y	 f_{CD}			y	 f_{CT}		

Chú ý.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

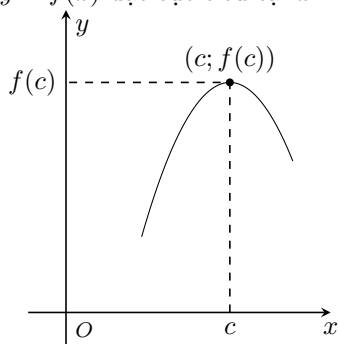
Bảng sau đây tóm tắt các khái niệm được sử dụng trong phần này:

x_0	$f(x_0)$	$(x_0; f(x_0))$
Điểm cực trị của f	Giá trị cực trị của f	Điểm cực trị của đồ thị hàm số f

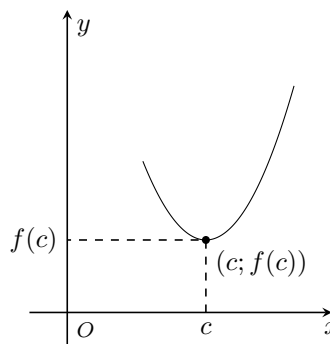
3. Minh họa đồ thị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm c .

- Nếu giá trị của $y = f(x)$ tại c lớn hơn hoặc bằng giá trị của $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = c$.
- Nếu giá trị của $y = f(x)$ tại c nhỏ hơn hoặc bằng giá trị của $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = c$.



Hàm số f đạt cực đại tại $x = c$



Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = c$

4. Các quy tắc tìm cực trị của hàm số

a) **Quy tắc 1:**

- Tìm tập xác định của hàm số.

- Tính $f'(x)$.
- Tìm các nghiệm $f'(x) = 0$ hoặc tại đó hàm số không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

b) **Quy tắc 2:**

- Tìm tập xác định của hàm số
- Tìm các nghiệm $f'(x) = 0$ và ký hiệu $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ là các nghiệm của nó.
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$
- Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i
 - $f''(x_i) > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_i$
 - $f''(x_i) < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = x_i$
 - $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ chưa đủ kết luận $x = x_i$ có là cực trị hay không

5. Một số điểm cần chú ý

- Hàm số $y = f(x)$ có cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu.
- Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu.
- Hàm số $y = f(x)$ có một cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 1 lần.
- Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần.
- Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc đạo hàm không xác định.

Dạng 1: Tìm cực trị hàm bậc ba, hàm trùng phương

- Lập bảng biến thiên cho hàm số và dựa vào bảng biến thiên và kết luận

Chú ý

- ✓ $x = a$ Gọi là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số tại $x = a$.
- ✓ $M(a; f(a))$ Gọi là điểm cực đại (cực tiểu) của đồ thị hàm số.
- ✓ $f(a)$ Gọi là giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số.

Ví dụ 26. Tìm cực trị của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 3$

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 4x - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên:

✓ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = 3$

✓ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{3}$ và $y_{CT} = \frac{77}{27}$

Ví dụ 27. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\frac{77}{27}$	3	$+\infty$	

[illegible]

Bài 22. Tìm cực trị của hàm số sau:

b) $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 2$

d) $y = x(x^2 - 3)$

f) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

h) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$

b) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 1$

d) $y = -x^4 - 3x^2 + 2$

Bài 24. Tìm cực trị của các hàm số sau:

c) $y = |x|(x + 2)$

f) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

i) $y = x + \sqrt{3 + x}$

k) $y = |x|(x + 2)^2$

Dạng 2: Tìm tham số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3ax^2 = 2bx + c$
- $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$
- Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta y' > 0 \end{cases}$

Chú ý:

- ✓ Hàm số bậc ba: hoặc có 2 cực trị hoặc không có cực trị.
- ✓ Nếu bài toán yêu cầu hàm số có cực trị và a có chứa tham số thì chia hai trường hợp:
 - Trường hợp 1: $a = 0$
 - Trường hợp 2: $a \neq 0$

Ví dụ 29. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx - 1$ có cực trị.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 4mx + m$$

Để hàm số đã cho có cực trị thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi $\Delta' = 4m^2 - 3m >$

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m < 0$ hoặc $m > \frac{3}{4}$.

Ví dụ 30. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x - 1$ có cực đại và cực tiểu.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 31. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 3x - 1$ có cực đại và cực tiểu.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 25. Tìm m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m+1)x - m^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - m^2 + m$

c) $y = mx^3 - 2mx^2 + 3x - 1$

d) $y = \frac{(m-1)x^3}{3} - mx^2 + mx - 1$

Bài 26. Tìm m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu:

a) $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$

d) $y = x^3 + 2(m+3)x^2 - mx + 2$

e) $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$

f) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$

Bài 27. Chứng minh rằng các hàm số sau luôn có cực đại, cực tiểu:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-3)x^2 - 2mx + 5$

b) $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (m+1)x - 3$

c) $y = x^3 + (2m-1)x^2 - 5x + 2$

d) $y = x^3 + m^2x^2 - (m^2+1)x + 2m - 1$

Dạng 3: Tìm tham số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ không có cực trị

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$
- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

Chú ý

Nếu a chứa tham số thì ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $a = 0$
- Trường hợp 2: $a \neq 0$

Ví dụ 32. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 2mx - 1$ không có cực trị.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 2mx + 2m$

Theo yêu cầu bài toán thì $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx + 2m = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Khi $\Delta' = m^2 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 6$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \in [0; 6]$

Ví dụ 33. Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - (m-3)x - 2m$ không có cực trị.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 28. Tìm m để các hàm số sau không có cực trị:

a) $y = x^3 - mx^2 + mx - 2$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m-2)x - m$

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - x - 2m$

d) $y = x^3 - 3mx^2 = 3(m^2-1)x - (m^2-1)$

Dạng 4: Tìm tham số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị hoặc 1 cực trị

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = 4ax^3 + 2bx$
- $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases} (*)$
- Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$

- Hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0 $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0$

Chú ý

- ✓ Hàm bậc bốn trùng phương luôn có cực trị: hoặc ba cực trị, hoặc 1 cực trị. Do đó để tìm m để hàm số có 1 cực trị thì ta nên tìm m có ba cực trị rồi suy ra m có 1 cực trị.
- ✓ Với $a > 0$, hàm số có 3 cực trị thì gồm 1 CĐ, 2 CT.
- ✓ Với $a < 0$, hàm số có 3 cực trị thì gồm 1 CT, 2 CĐ.
- ✓ Nếu a có chứa tham số thì ta chia 2 trường hợp: $a = 0$ và $a \neq 0$.

Ví dụ 34. Tìm m để hàm số $y = x^4 - (3m - 1)x^2 + m - 2$ có 3 cực trị.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 2(3m - 1)x = 2x [2x^2 - (3m - 1)]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x [2x^2 - (3m - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3m - 1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số có 3 cực trị thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Khi $3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > \frac{1}{3}$.

Ví dụ 35. Tìm m để hàm số $y = x^4 - (m - 2)x^2$ có 1 cực trị.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 29. Tìm m để các hàm số sau có 3 cực trị.

a) $y = -x^4 + (m^2 + m)x^2 + m^2 - 2$

b) $y = -x^4 - (m^2 - 5)x^2 + m^2 - 2m$

c) $y = x^4 - (4m - m^2)x^2 - 2m$

d) $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10 \quad (m \neq 0)$

Bài 30. Tìm m để các hàm số sau có 1 cực trị.

a) $y = -x^4 + (2m + 3)x^2 + m - 1$

b) $y = x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 1$

c) $y = -x^4 + (2m^2 + m)x^2 + m^3 - 1$

d) $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$

Bài 31. Cho hàm số $y = x^4 + (m^2 - 3m + 2)x^2 + 4 - m$. Tìm m để hàm số có cực tiểu và không có cực đại.

Bài 32. Cho hàm số $y = -x^4 + (m^2 - m)x^2 + m^4 - m$. Tìm m để hàm số có cực tiểu.

DẠNG 5: Tìm tham số để $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại $x = x_0$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- $y'' = 6ax + 2b$

- Hàm số đạt cực tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$
- Hàm số đạt tiểu tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$
- Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow y'(x_0) = 0$. Sau đó thử lại bằng bảng biến thiên.

Ví dụ 36. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (m^2 - 4)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 + 2mx + (m^2 - 4); y'' = 2x + 2m$$

$$\text{Theo yêu cầu toán thì } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ 2 + 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ 2 + 2m < 0 \end{cases}$$

Ta thấy $m = -3$ thỏa yêu bài toán.

Ví dụ 37. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 + m + 1)x + 1$ đạt cực trị tại $x = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 33. Tìm các giá trị của m để hàm số

- $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x + 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = 1$
- $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$
- $y = -x^3 + (m + 3)x^2 - m^2 + (m^2 + 2m)x - 2$ đạt cực đại tại $x = 2$
- $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$
- $y = \frac{1}{3}x^3 - 3mx^2 + 5$ đạt cực đại tại $x = 3$
- $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$
- $y = \frac{1}{3}x^3 + (3m - 2)x^2 + (1 - 2m)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$
- $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$
- $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$
- $y = x^3 - mx^2 + 2(m + 1)x - 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 34. Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$

Bài 35. Tìm các giá trị a, b để các hàm số:

1. $y = \frac{x^4}{4} + ax^2 + b$ đạt cực trị tại $x = -1$ và giá trị cực trị tương ứng của nó bằng -2
2. $y = x^3 + ax^2 - 9x + b$ đạt cực trị tại $x = 1$ và đồ thị đi qua $A(1; -4)$
3. $y = x + a + \frac{b}{x+1}$ có đồ thị nhận $M(-2; -2)$ làm điểm cực trị.

DẠNG 6: Tìm tham số để hàm số có cực trị thỏa điều kiện cho trước

- **Bài toán 1.** Tìm tham số để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa hệ thức $F(x_1; x_2) = 0$ (1)

✓ Điều kiện để hàm có cực, cực tiểu là:

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta y' > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{điều kiện } m \text{ (*)}$$

$$\checkmark x_1, x_2 \text{ thỏa hệ thức (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ F(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

✓ Giải hệ suy ra m . So với điều kiện (*) nhận hay loại giá trị m .

- **Bài toán 2.** Tìm tham số để đồ thị hàm số có cực trị tại A, B thỏa tính chất nào đó

✓ Đặt điều kiện để đồ thị hàm số có cực trị tại A, B

✓ Thông thường phương trình $y' = 0$ có nghiệm đẹp. Giải phương trình $y' = 0$ để tìm nghiệm, từ đó tìm tọa độ các điểm A, B .

Ví dụ 38. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 2(2m+3)x + 3m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = -3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6mx - 2(2m+3)$

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 2(2m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi $\Delta' = 9m^2 + 6(2m+3) > 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 12m + 18 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Từ $x_1 + x_2 = -3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -3\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}\right)$ (*)

Theo định lý viết ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 \cdot x_2 = \frac{-2(2m+3)}{3}$ thay vào (*) ta được.

$$2m = \frac{18m}{2(2m+3)} \Leftrightarrow 2m(2m+3) = 9m \Leftrightarrow 4m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 0; m = \frac{3}{4}$

Ví dụ 39. Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP NÂN CAO

Bài 36. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+2)x + m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Bài 37. Tìm m để hàm số $y = 2x^3 - (9m+3)x^2 + 12m(m+1)x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả $x_1 - 2x_2 = 4$

Bài 38. Tìm m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (1-m)x^2 + 3(m-2)x - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả $x_1 + 2x_2 = 2$

Bài 39. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương.

Bài 40. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2-3m+2)x - m$ có hai cực trị thuộc hai phía đối với Oy

Bài 41. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB cân tại O .

Bài 42. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có điểm cực đại, cực tiểu cách đều trục tung

Bài 43. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu sao cho các điểm cực đại, cực tiểu lập thành tam giác đều.

Bài 44. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của một tam giác nhận O làm trọng tâm.

Bài 45. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của một giác có diện tích bằng $32\sqrt{2}$

Vấn đề 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

- Nếu $f(x) \leq M$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ thì M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D .
Kí hiệu

$$\max_{x \in D} f(x) = M$$

- Nếu $f(x) \geq m$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$ thì m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D .
Kí hiệu

$$\min_{x \in D} f(x) = m$$

DẠNG 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$

- Tính y'
- Giải phương trình $y' = 0$ và tìm các nghiệm $x_0 \in [a; b]$
- Tính $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_0)$
- Khi đó $\min_{[a;b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_0)\}$; $\max_{[a;b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_0)\}$
- Chú ý**

– Nếu hàm số $y = f(x)$ tăng trên $[a; b]$ thì: $\min_{x \in [a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{x \in [a;b]} f(x) = f(b)$

– Nếu hàm số $y = f(x)$ giảm trên $[a; b]$ thì: $\min_{x \in [a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{x \in [a;b]} f(x) = f(a)$

– Nếu bài toán phải đặt ẩn phụ thì phải có điều kiện cho ẩn phụ.

Ví dụ 40. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ trên $[-4; 4]$

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$
 $f(-4) = -72$; $f(4) = -16$; $f(-1) = 9$; $f(-3) = -23$

Vậy $\min_{[-4;4]} f(x) = -72$; $\max_{[-4;4]} f(x) = 9$.

Ví dụ 41. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên $[-1; 3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 42. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ trên $[-3; -2]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 43. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên $[0; 1]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 44. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 9 \cos x + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 45. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin^3 x - 2 \cos 2x + 9 \sin x + 2$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 46. Tìm giá trị lớn và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - m^2 + m}{x + 1}$ trên $[0; 1]$ bằng -2 .

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 46. Tìm GTLN-GTNN của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2, [0; 3]$

b) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5, [-1; 2]$

c) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

d) $f(x) = \sqrt{5-4x}, [-4; 4]$

e) $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}, [2; 4]$

DẠNG 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.
- Dựa vào bảng biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 47. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}; \max_{\mathbb{R}} f(x) = 3$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	

Ví dụ 48. Tìm GTLN và TGNN của hàm số $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}$.

Ví dụ 49. Tìm GTLN và TGNN của hàm số $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$.

BÀI TẬP NĂNG CAO

Bài 47. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $f(x) = 1 + 8x + x^2$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

c) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x}, (x > 0)$

d) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} (x > 0)$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + x + 2}$

f) $f(x) = \frac{8x - 3}{x^2 - x + 1}$

g) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} (x < -1)$

h) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} (x > -2)$

Dạng 3: Ứng dụng GTLN-GTNN trong giải phương trình, bất phương trình

• **Bài toán 1:** Tìm m để $F(x; m) = 0$ có nghiệm trên D .

- Bước 1: Cô lập tham số m và đưa về dạng $f(x) = A(m)$
- Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của $f(x)$ trên D .
- Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Bước 4: Kết luận giá trị của $A(m)$ để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm trên D .

• **Chú ý:**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì $f(x) = A(m) \Leftrightarrow \min_D f(x) \leq A(m) \leq \max_D f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

• **Bài toán 2:** Tìm m để bất phương $F(x; m) \geq 0$ hoặc $F(x; m) \leq 0$ có nghiệm trên D .

- Bước 1: Cô lập m và đưa về $A(m) \geq f(x)$ hoặc $A(m) \leq f(x)$.
- Khảo sát sự biến thiên của $f(x)$ trên D .
- Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của m .

• **Chú ý:** Nếu hàm số $y = f(x)$ có GTLN, GTNN trên D thì

- Bất phương trình $A(m) \leq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m) \leq \max_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m) \leq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow A(m) \leq \min_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m) \geq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m) \geq \min_D f(x)$.
- Bất phương trình $A(m) \geq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow A(m) \geq \max_D f(x)$.

- Khi đặt ẩn phụ để đổi biến, ta cần đặt điều kiện cho biến mới chính xác, nếu không sẽ làm thay đổi kết quả của bài toán.

Ví dụ 50. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3mx - 1 = 0$ có nghiệm trong $[1; +\infty)$.

Lời giải.

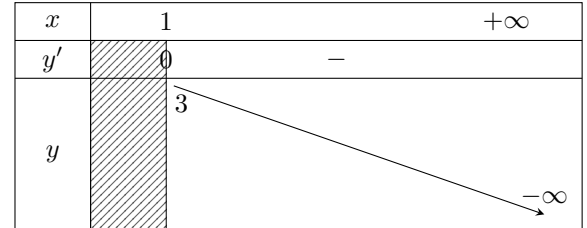
Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3m = 6x - 3x^2$.

Đặt $g(x) = 6x - 3x^2, \forall x \in [1; +\infty)$

$g'(x) = 6 - 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Từ bảng biến, để phương trình có nghiệm thì

$3m \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 1$



Ví dụ 51. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$ có nghiệm $x \in [1; 3]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 48. Tìm giá trị m không âm sao cho phương trình $x^3 - 3\sqrt[3]{3x + 2m} = 2m$ có nghiệm duy nhất.

Bài 49. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m\sqrt{2 + \tan^2 x} = m + \tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bài 50. Tìm m để phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất.

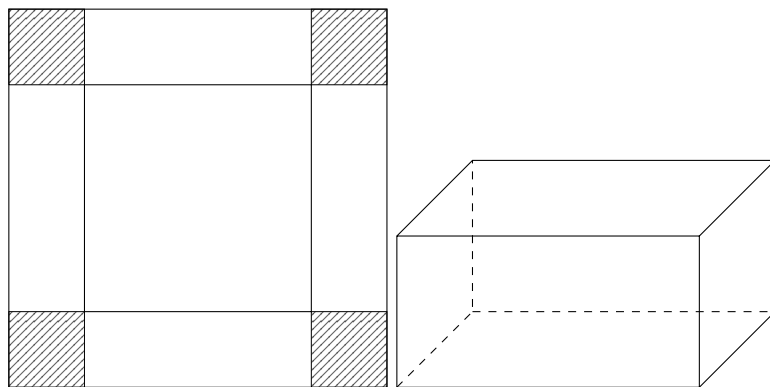
Bài 51. Tìm m để phương trình $x^3 + x^2 + x = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thuộc $[0; 1]$

Bài 52. Tìm tập hợp các giá trị của m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} \geq m$.

Dạng 4: Ứng dụng GTLN, GTNN của hàm số vào bài toán thực tế.

- **Bước 1:** Thiết lập hàm số dựa vào giả thiết đề cho.
- **Bước 2:** Sử dụng GTLN, GTNN để tìm giá trị cần tìm.

Ví dụ 52 (Đề minh họa-2007). Cho tấm nhôm hình vuông cạnh 12(cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.



Lời giải.

Vì cạnh hình vuông nhỏ bị cắt là x . Như vậy khi gấp lại ta được khối hộp có cạnh đáy $(12 - x)$, $0 < x < 12$ và chiều cao là x .

Ta có $V_{\text{hộp}} = (12 - x)^2 \cdot x$. Xét hàm hàm $f(x) = (12 - x)^2 \cdot x$ với $0 < x < 12$.

$$f'(x) = 3x^2 - 48x + 144; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 12(\text{loại}) \end{cases}.$$

Vậy $V_{\text{max}} = 256$ khi $x = 4$.

Ví dụ 53. Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(\text{m})$ và chiều rộng $r(\text{m})$ với $d = 2r$. Chiều cao bể nước $h(\text{m})$ và thể tích 2m^3 . Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 53.

1. Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi $16(\text{cm})$, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
2. Trong các hình chữ nhật có diện tích 48m^2 , hãy tìm hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Bài 54. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

Bài 55. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

Bài 56. Công ty dự lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

Bài 57. Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 238m^2 để xây nhà. Nhưng vợ ông muốn có khuôn viên sân vườn đẹp nên ông mua thêm về hai phía chiều dài mỗi chiều $3(\text{m})$ và về hai phía chiều rộng mỗi chiều $2(\text{m})$. Vậy, để ông A mua được mảnh đất có diện tích nhỏ nhất (tiết kiệm chi phí) thì mảnh đất đó chu vi là bao nhiêu?

Bài 58. Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a(\text{cm})$, ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông cạnh bằng $x(\text{cm})$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Bài 59. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10(\text{km/h})$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

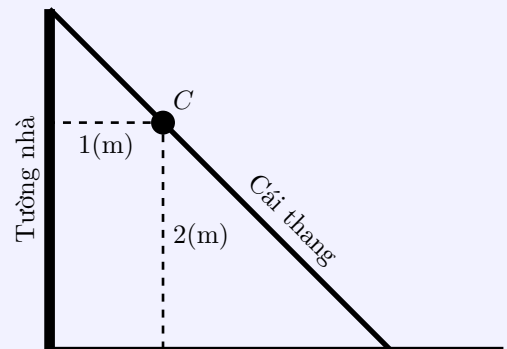
Bài 60. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Tại thời điểm nào, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Bài 61. Một tấm thiếc hình chữ nhật dài $45(\text{cm})$, rộng $24(\text{cm})$ được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gấp mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Bài 62. Một sợi dây có chiều dài $28(\text{m})$ là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

Bài 63. Ông An cần sản xuất một cái thang để treo qua một bức tường nhà.

Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C , biết rằng điểm C cao $2(\text{m})$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1(\text{m})$ (như hình vẽ bên). Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1(m) dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).



Bài 64. Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f(m, n) = m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$ trong đó là m số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

Bài 65. Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25(\text{km})$, $BC = 20(\text{km})$ và M, N lần lượt là trung điểm của AD , BC . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là $15(\text{km/h})$, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là $30(\text{km/h})$. Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

Vấn đề 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) .

1. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị (C) nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

2. Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số (C) nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

3. Tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là **tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$

nếu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Dạng 1: Tìm tiệm cận đứng, ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C).

1. Tiệm cận đứng

- Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ với x_0 là nghiệm của mẫu.
- Nếu một trong bốn giới hạn tồn tại thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

2. Tiệm cận ngang

- Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang.
- Chú ý**
Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$

Ví dụ 54. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3 - 2x}{x + 5}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -5^+} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -5^-} = -\infty$, do đó $x = -5$ là đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -2$, do đó $y = -2$ là đường tiệm cận ngang.

Ví dụ 55. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x - 1}$

.....

Ví dụ 56. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x - 1}$

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 66. Tìm các đường cận củ đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{2x}{4-5x}$

b) $y = 5 - \frac{2}{x+1}$

c) $y = \frac{4}{x+1}$

d) $y = 7 - \frac{1}{x}$

Dạng 2: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Tiệm cận xiên: (2 cách)

- Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$; $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b \Rightarrow$ TCX: $y = ax + b$
- Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$; $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Rightarrow$ TCX: $y = ax + b$

Chú ý:

- Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \Rightarrow y = ax + b$ là TCX bên phải.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b \Rightarrow y = ax + b$ là TCX bên trái.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 67. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số:

a) $y = 2x + 1 + \frac{1}{x-2}$

b) $y = -2x + \frac{1}{x-1}$

c) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$

d) $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

f) $y = \sqrt{x^2 + x} + 2x$

g) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$

h) $y = -2x + 2\sqrt{x^2 + 1}$

i) $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}$

j) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

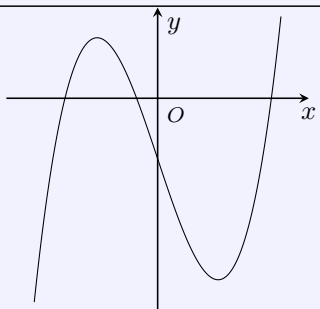
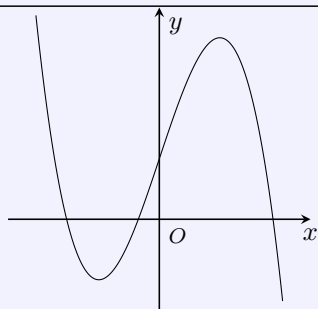
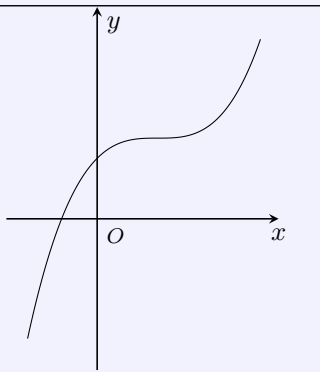
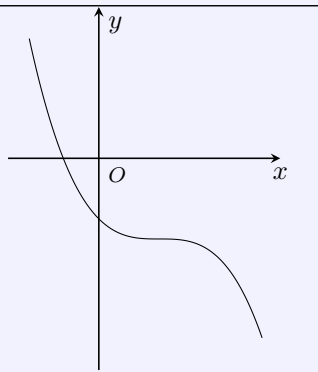
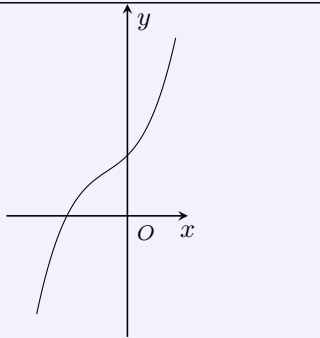
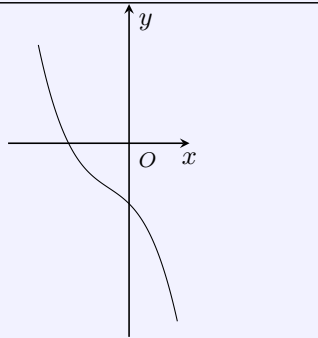
k) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

l) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Vấn đề 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Khảo sát sự biến thiên hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tính y' và cho $y' = 0 \Rightarrow$ các nghiệm (nếu có)
- Tính các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Lập bảng biến thiên:
 - ✓ Nếu $y' = 0$ có hai nghiệm thì dấu của y' là: “**trong trái ngoài cùng**”
 - ✓ Nếu $y' = 0$ có nghiệm kép thì dấu của y' là: “**luôn cùng dấu với a** ” ngoại trừ tại nghiệm kép.
 - ✓ Nếu $y' = 0$ vô nghiệm thì dấu của y' là: “**luôn cùng dấu với a** ”
- Kết luận
 - ✓ Tính chất đơn điệu của hàm số.
 - ✓ Cực trị hàm số
- Chọn vài điểm đặc biệt vẽ đồ thị hàm số. Đồ thị có 6 dạng như sau:

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có hai nghiệm		
Có nghiệm kép		
Vô nghiệm		

Ví dụ 57. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

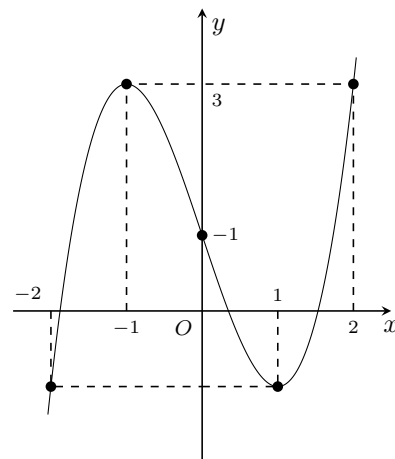
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Từ bảng biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$; $y_{CD} = 3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$; $y_{CD} = -1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$-\infty$	

$$(-2, -1), (-1, 3), (0, 1), (1, -1), (2, 3)$$


Ví dụ 62. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$

Bài 68. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

e) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

f) $y = -\frac{1}{3}x^3 = 2x^2 - 5x + 2$

Dạng 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tính y' và cho $y' = 0$ (có 3 nghiệm hoặc có 1 nghiệm và luôn có 1 nghiệm $x = 0$).
- Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Lập bảng biến thiên: “Bên phải bảng biến thiên, dấu y' luôn cùng dấu với a ”.
- Kết luận:
 - ✓ Tính chất đơn điệu.
 - ✓ Cực trị hàm số.
 - ✓ Giới hạn của hàm số.
- Vẽ đồ thị: Chọn vài điểm đặc biệt vẽ đồ thị hàm số
- Đồ thị hàm số có 4 dạng sau:

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 3 nghiệm		
Có 1 nghiệm		

Ví dụ 63. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^3 - x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

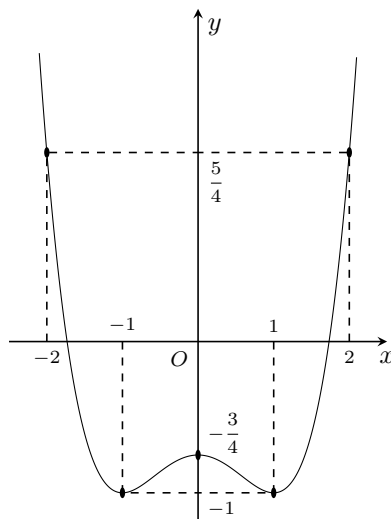
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$		-1		$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1, -1)$, $(0, -\frac{3}{4})$, $(1, -1)$, $(2, \frac{5}{4})$, $(-2, \frac{5}{4})$

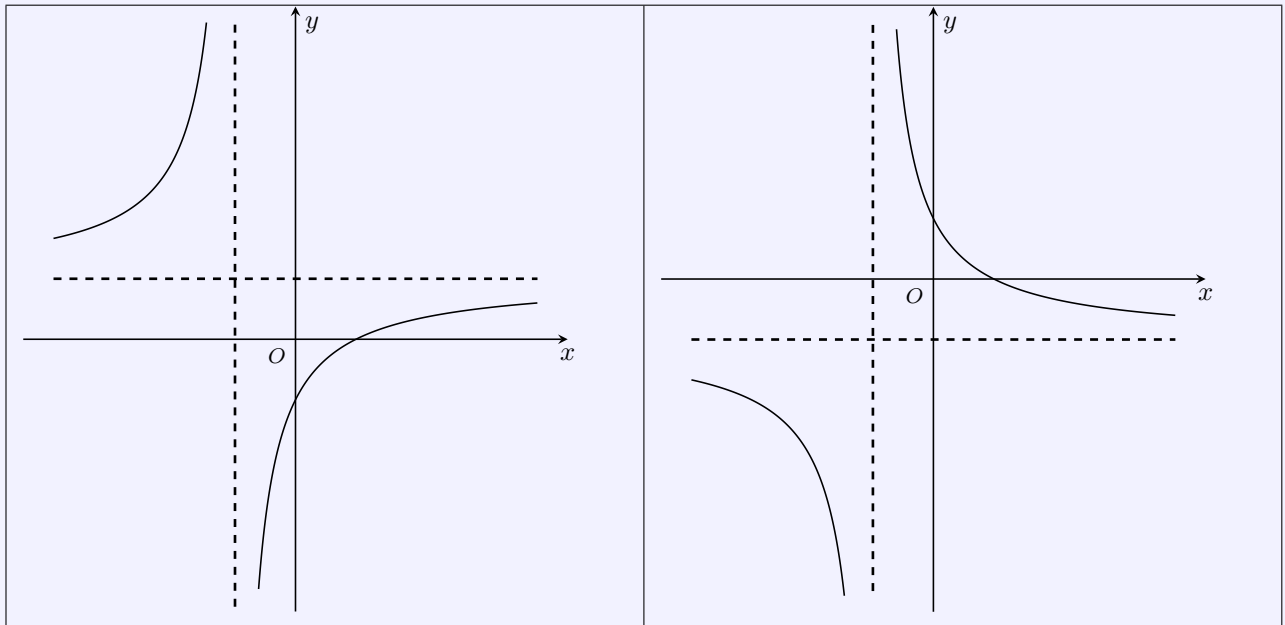


Bài 69. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

f) $y = -x^4 - 2x^2$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ (y' hoặc dương hoặc âm $\forall x \in D$)
- Đường tiệm cận:
 - ✓ Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$ vì $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{d}{c}\right)^+} y = \dots$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{d}{c}\right)^-} y = \dots$
 - ✓ Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{c}$.
- Lập bảng biến thiên: Khi $x \rightarrow \pm\infty$, thì $y \rightarrow \frac{a}{c}$.
- Kết luận:
 - ✓ Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
 - ✓ Vẽ đồ thị: Đồ thị có 2 dạng và luôn luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.
- Vẽ đồ thị: Lấy thêm vài điểm đặc biệt.
- Đồ thị có 2 dạng sau:

$$ad - bc < 0$$



Ví dụ 67. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ TCD}$$

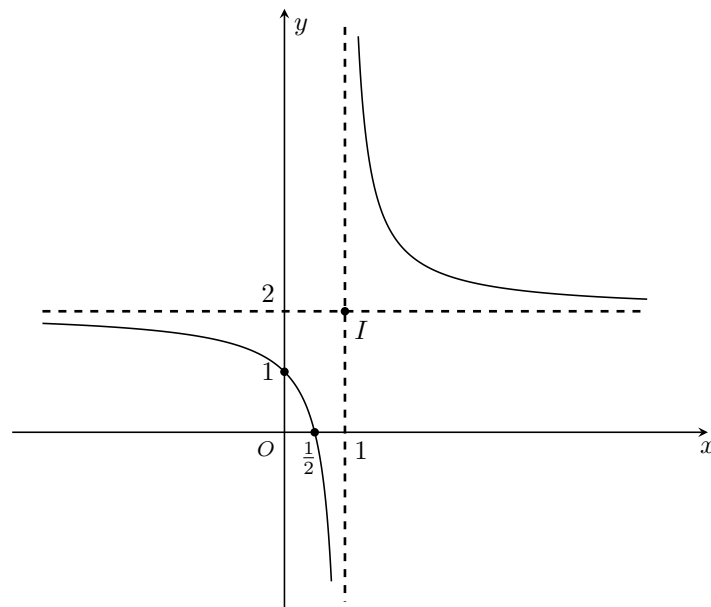
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ TCN}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ và không có cực trị.

Đồ thị: Đồ thị hàm số qua các điểm $(0; -1)$, $(\frac{1}{2}; 0)$ và nhận $I(-1; 2)$ làm tâm đối xứng.



Bài 70. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

d) $y = 4 + \frac{1-x}{x}$

Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của $(C_1) : y = f(x)$ và $(C_2) : y = g(x)$

- Lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 (*)$
- Giải phương trình $(*)$ tìm được nghiệm x thay vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$ tìm được y .

Lời giải.

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $A(1;3), B\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 71. Xác định tọa độ giao điểm của:

a) $(C) : y = x^3 + x^2 - x + 1$ và $(P) : y = 2x^2 - x + 1$

b) $(C) : y = x^4 - 5x^2 + 4$ và trục Ox

c) $(C) : y = \frac{2x+1}{x-1}$ và $d : y = 3x - 1$

d) $(C) : y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$ và $d : 4x - y - 3 = 0$

e) $(C) : y = x^2 - x - 4$ và $(C) : y = -\frac{4}{x}$

Dạng 2: Tìm tham số $(C) : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ cắt đường thẳng d tại hai điểm

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$g(x) = ax^2 + bx + c (*) (x \neq x_0)$$

- d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Tìm được tham số}$$

Ví dụ 70. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$. Tìm m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số đã cho tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow x = (x-1)(-x+m), x \neq 1$
 $\Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0 (*)$

Theo yêu cầu bài toán thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$. Khi $\begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ 1 - m + m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ 1 \neq 0 \text{ (hiển nhiên)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m < 0$ hoặc $m > 4$.

Ví dụ 71. Chứng minh đường thẳng $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt.

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 72. Tìm m để đồ thị $(C) : y = \frac{2x-3}{x-2}$ cắt đường thẳng $d : y = mx - 3m - 1$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 73. Tìm k để đường thẳng d đi qua $A(2; 0)$ có hệ số k cắt đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{4}{x-4}$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 74. Chứng minh đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{x-2}{x+1}$ luôn cắt đường thẳng $d : y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt.

Dạng 3: Tìm tham số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt đường thẳng tại ba điểm

- Lập phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (*).
- Nhẩm nghiệm của (*) và giả sử nhẩm được nghiệm x_0 , đưa phương trình (*) về dạng:

$$(x - x_0)(ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \end{cases}$$

- d cắt (C) tại ba điểm $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Tìm được tham số.}$$

Ví dụ 72. Tìm m để đường thẳng d đi qua $M(1; 2)$ có hệ số m cắt đồ thị hàm số $(C) : y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $d : y = m(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = mx + 2 - m$

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 2x^2 + x + 2 = mx + 2 - m$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - x - m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1. Khi $\begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị } m \text{ cần tìm là } m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}.$$

Ví dụ 73. Tìm m để đồ thị hàm số $(C) : y = x^3 - 3x + 1$ cắt đường thẳng $d : mx + 1$ tại 3 điểm phân biệt.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 75. Cho hàm số $y = (x - 1)(x^2 + mx + m)$ (1) với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 76. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(3; 20)$ và có hệ số góc m . Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 77. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(0; 1)$ và có hệ số góc k . Tìm k để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Dạng 4: Tìm tham số $(C) : y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt đường thẳng tại 4 điểm.

- Lập phương trình hoành độ giao điểm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*)
- Đặt $t = x^2$. Phương trình (*) trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (1)

- d cắt (C) tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm dương. Khi $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Với $S = -\frac{b}{a}$; $P = \frac{c}{a}$. Từ đó tìm được tham số.

Ví dụ 74. Tìm m để đường thẳng $d : y = m$ cắt đồ thị $(C) : y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt.

Lời giải.

• Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2x^2 = m \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow$ (1) trở thành $t^2 - 2t - m = 0$ (*)

Theo ycbt thì (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt. Khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m > 0 \\ 2 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy giá trị m cần tìm $m \in (-1; 0)$.

• **Cách 2:**

Ta có $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để d cắt (C) tại 4 điểm phân biệt thì $-1 < m < 0$.

Ví dụ 75. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$ (1). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt với mọi $m < 0$.

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 78. Tìm m để đồ thị $(C) : y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 79. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$. Tìm m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 80. Cho hàm số $y = 2x^4 - 5(m+1)x^2 + 4m + 6$. Tìm m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Dạng 5: Tìm m để $(C) : y = f(x)$ cắt d tại n điểm thỏa tính chất nào đó

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d : $g(x) = 0$ (*).
- d cắt (C) tại n điểm $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có n nghiệm.
- Khi đó hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình (*) và thông thường sử dụng định lý Viète để giải quyết bài toán.

Ví dụ 76. Tìm m để đồ thị $(C) : y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{x(x-1)}$ cắt đường thẳng $d : y = m$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x^2 + 3x - 3}{x(x-1)} = m \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 3 = mx(x-1), x \neq 1$
 $\Leftrightarrow (1+m)x^2 - (3+m)x + 3 = 0$ (*)

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt A, B thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1. Khi

$$\begin{cases} 1+m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (1+m).1 - (3+m).1 + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m > 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \quad (**)$$

Khi đó $A(x_1; m), B(x_2, m)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (*)

Theo đề ta có $AB = 1 \Rightarrow AB^2 = 1 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 - 1 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3+m}{1+m}, x_1.x_2 = \frac{3}{1+m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3+m}{1+m}\right)^2 - \frac{12}{1+m} - 1 = 0 \Leftrightarrow (3+m)^2 - 12(1+m) - (1+m)^2 = 0 \Leftrightarrow -8m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}. \text{ Kết hợp với } (**) \text{ suy ra giá trị } m \text{ cần tìm } m = -\frac{1}{2}$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 81. Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{1-x}$. Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1; 1)$ và cắt đồ thị hàm số tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $2\sqrt{10}$.

Bài 82. Tìm m để đồ thị $(C) : y = \frac{2x+1}{x+2}$ cắt đường thẳng $d : y = -x + m$ sao cho tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB ngắn nhất.

Bài 83. Tìm m để đồ thị $(C) : y = x + 1 + \frac{1}{x+2}$ cắt đường thẳng $d : y = m(x+1) + 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Bài 84. Tìm m để đồ thị $(C) : y = \frac{mx^2 + x + m}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ dương.

Bài 85. Tìm m để đồ thị $(C) : y = x^3 - (m+2)x^2 + 3x + m - 2$ cắt trục hoành tại 3

điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 86. Tìm m để đường thẳng $d : y = m - x$ cắt $(C) : y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm AB nằm trên trục tung.

Bài 87. Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ (1). Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) luôn cắt đường thẳng $d : y = 3x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm m để trung điểm của đoạn AB nằm trên đường thẳng $\Delta : y = 2x + 3$.

Bài 88. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x + m$. Chứng minh d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm m để tam giác OAB vuông tại O .

Bài 89. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 3x$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua $A(3; 0)$ có hệ góc m . Tìm m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC vuông tại O .

Bài 90. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(C) : y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.

Bài 91. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$ có đồ thị (C) . Tìm m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Vấn đề 7. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dạng 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C) : y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 (*)$$

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = a$

- Ta có $x = a$ thay vào phương trình $y = f(x) \Rightarrow y_0$
- Tính $f'(x)$: Thay $x = x_0$ vào $k = f'(x) \Rightarrow$ hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y = a$

- Thay $y = b$ vào phương trình $y = f(x) \Rightarrow x_0$.
- Tính $f'(x_0)$: Thay x_0 vào $k = f'(x) \Rightarrow$ hệ số góc $k = f'(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Ví dụ 77. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C) : y = \frac{2x-1}{x+3}$ tại điểm có hoành bằng $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{4}{5}; \text{ hệ số góc } k = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{25}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến có dạng: } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{28}{25}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{28}{25}x - \frac{69}{100}$$

Ví dụ 78. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C) : y = x\sqrt{x^2+1}$ tại giao của (C) với trục tung.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 79. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x$ tại điểm có tung độ $y = 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 80. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = x\sqrt{x+1}$ tại giao với trục hoành.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 81. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x}{x-1}$ tại giao của (C) với đường thẳng $d : y = 2x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 92. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số:

a) $y = x^3 + x + 3$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ bằng -1

c) $y = \frac{2x-1}{x+3}$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

d) $y = \sqrt{2-x}$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài 93. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung:

a) $(C) : y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + 3$.

b) $(C) : y = \frac{1-2x}{x-1}$.

Bài 94. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) của hàm số

a) $y = 1 + \frac{2}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d : y = 2x - 1$

b) $y = \frac{x^2 - x + 2}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d : 3x - y - 2 = 0$

Dạng 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có cho trước

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0)$$

1. **Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số của tiếp tuyến bằng k**

- Giải phương trình $f'(x) = k \Rightarrow$ tìm được x_0
- Thay $x = x_0$ vào phương trình $y = f(x) \Rightarrow$ tìm được y_0

- Phương trình tiếp có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = ax + b$

- Tiếp tuyến song song với $d : y = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$. Giải phương trình này tìm được x_0
- Thay $x = x_0$ vào phương trình $y = f(x) \Rightarrow$ tìm được y_0 .
- Phương trình tiếp có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : y = ax + b$

- Tiếp tuyến vuông góc với $d : y = ax + b \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{a}$. Giải phương trình này tìm được x_0
- Thay $x = x_0$ vào phương trình $y = f(x) \Rightarrow$ tìm được y_0 .
- Phương trình tiếp có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Ví dụ 82. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 7.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{7}{(x + 2)^2}$

Vì hệ số góc tiếp tuyến bằng 7 suy ra $\frac{7}{(x + 2)^2} = 7 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 10 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến: $d_1 : y = 7x + 3, d_2 : y = 7x + 31$

Ví dụ 83. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : -x + 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 84. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : y = 3x + 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 95. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của các hàm số sau, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d :

a) $(C) : y = x^4 - x^2 + 1, d : 3x + 3$

b) $(C) : y = \frac{x+1}{x+2}, d : 3x + y - 4 = 0$

Bài 96. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số sau, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d :

a) $(C) : y = x^3 + 2x^2 - x + 1, d : x - 2y + 3 = 0$

b) $(C) : y = x^4 + 2x^2 + 1, d : x + 8y - 1 = 0$

c) $(C) : y = \frac{x+1}{x-1}, d : x + 2y - 1 = 0$

Bài 97. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x+1}{2x-1}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

Bài 98. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Bài 99. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x^2 - 6x + 9}{2 - x}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = -\frac{3}{4}x + 4$

Bài 100. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ và M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $d : 5x - y = 0$

Dạng 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$

- Gọi k là hệ số của tiếp tuyến d đi qua M .
- $d : y = k(x - x_0) + y + y_0 \Leftrightarrow y = kx - kx_0 + y_0 (*)$
- d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = kx - kx_0 + y_0 & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế (2) vào (1) $\Rightarrow$ tìm được x .
- Thế x vừa tìm được vào (2) $\Rightarrow$ tìm được hệ số góc k
- Thế k vừa tìm được vào (*) tìm được phương trình tiếp tuyến qua M
- **Chú ý:** Khi thế (2) vào (1) giả sử thu được phương trình ẩn số là x và được kí hiệu (I) . Thông thường phương trình (I) có bao nhiêu nghiệm x thì qua M có bấy nhiêu tiếp tuyến đến (C) . Từ đó ta giải quyết được bài toán “Tìm điều kiện để qua M có thể vẽ được đến (C) n tiếp tuyến”.

Ví dụ 85. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{3x+2}{x+2}$, biết tiếp tuyến đi qua $A(1; 3)$.

Lời giải.

Gọi k là hệ số của đường thẳng d đi qua $A(1; 3)$.

Phương trình của đường thẳng $d : y = k(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = kx - k + 3 (*)$

Để d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{3x+2}{x+2} = kx - k + 3 & (1) \\ \frac{4}{(x+2)^2} = k & (2) \end{cases} \quad \text{Thay (2) vào (1) ta được phương trình}$$

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{4x}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^2} + 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ thay vào (1)} \Rightarrow k = \frac{16}{9}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } d : y = \frac{16}{9}x + \frac{11}{9}$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 101. Viết phương trình tiếp của đồ thị $(C) : y = x^4 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua $A(0; 1)$

Bài 102. Viết phương trình tiếp của đồ thị $(C) : y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$, biết tiếp tuyến đi qua $M(1; 2)$

Bài 103. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$, (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm có hoành độ x_0 sao cho $f''(x_0) = 0$

Bài 104. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ (C) . Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục Ox , Oy tại A , B là tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$

Bài 105. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$, (C) . Cho điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt tiệm cận của (C) tại A , B . Chứng minh M_0 là trung điểm của AB .

Bài 106. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$, (C) . Gọi I là giao của hai tiệm cận của (C) . Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI .

Bài 107. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$. Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $d : y = 2mx - m - 1$.

Bài 108. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến cắt Ox và Oy lần lượt tại A , B sao cho $OB = 4OA$.

Bài 109. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$, (C) . Tìm m sao cho đường thẳng $d : y = mx + m + 2$ cắt (C) tại 3 điểm $A(-1; 2)$, B , C sao cho tiếp tuyến của (C) tại B , C vuông góc.

Bài 110. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$, (C) . Tìm m sao cho đường thẳng $d : y = 2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A , B và tiếp tuyến của (C) tại A , B song song với nhau.

Bài 111. Cho hàm số $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ (C) . Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

Vấn đề 8. DÙNG ĐỒ THỊ BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH.

- Biến đổi phương trình đã cho $g(x; m) = 0$ về dạng $f(x) = h(m)$ (*)
- Trong đó đồ thị $(C) : y = f(x)$ đã được vẽ câu hỏi trước đó.
- Xem $d : y = h(m)$ là đường thẳng song song trục hoành.
- Số điểm chung của (C) và d là số nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 86. Cho $(C) : y = x^3 - 3x^2 - 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .
2. Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$.

Lời giải.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

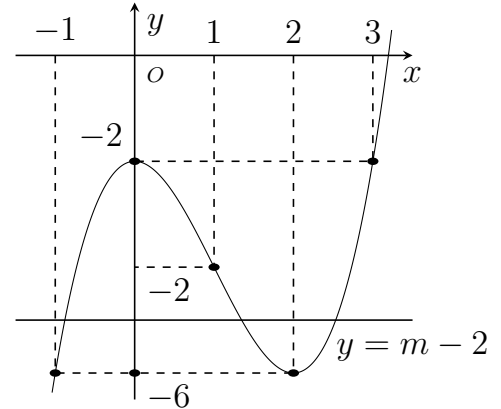
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	-6	$-\infty$	

Đồ thị hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Đồ thị hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -2$, đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -6$

Đồ thị: Qua các điểm

$(0; -2), (2; -6), (-1; -6), (1; -4), (3; -2)$



b) Từ $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2 = m - 2$

$(C) : y = x^3 - 3x^2 - 2; d : y = m - 2$

Số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ là số giao điểm của (C) và d .

Từ đồ thị ta có:

- $m - 2 < -6 \Leftrightarrow m < -4$ hoặc $m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm.
- $m - 2 = -6 \Leftrightarrow m = -4$ hoặc $m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm.
- $-6 < m - 2 < -2 \Leftrightarrow -4 < m < 0 \Rightarrow$ phương trình có 3 nghiệm.

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 112. Cho hàm số $(C) : y = (x + 1)^2(x - 1)^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .

b) Dùng đồ thị (C) biện luận theo a số nghiệm phương trình $(x^2 - 1)^2 - 2a + 1 = 0$

Bài 113. Cho hàm số $(C) : y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .

b) Tìm m để phương trình $2x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 114. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .

b) Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vấn đề 9. ĐIỂM CÓ TOẠ ĐỘ NGUYÊN

Phương pháp: Tìm điểm thuộc $(C) : y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có toạ độ nguyên.

- Thực hiện chia đa thức, ta được: $y = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{k}{Q(x)}$, trong đó $H(x)$ là đa thức và $k \in \mathbb{R}$
- $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k : Q(x) \Leftrightarrow Q(x) \in U(k)$.
- Lần lượt cho $Q(x)$ nhận giá trị (là các ước của k) để tìm giá trị của x, y tương ứng.

Ví dụ 87. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Tìm trên (C) những điểm có toạ độ nguyên.

Lời giải.

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{Ta có } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 : (x - 1) \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy những điểm thuộc (C) có toạ độ nguyên là $(2; 5), (0; 1)$

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 115. Cho hàm số $(C) : y = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$. Tìm trên (C) những điểm có toạ độ nguyên.

Bài 116. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$. Tìm trên (C) những điểm có toạ độ nguyên.

Bài 117. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Tìm trên (C) những điểm có toạ độ nguyên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP

Bài 118. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x + 2}{x - 1} (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)
2. Dùng (C) biện luận số nghiệm phương trình $3x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0$
3. Từ (C) suy ra đồ thị (C') của hàm số $y = \frac{x + 2}{|x - 1|}$
4. Biện luận theo a số nghiệm phương trình $\frac{x + 2}{|x - 1|} = a + 1$

Bài 119. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 1} (C)$. Tìm a, b biết rằng (C) đi qua $A\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại $O(0; 0)$ có hệ số góc bằng -3

Bài 120. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} (C)$.

1. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = m - x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi A, B là giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm I của AB khi m thay đổi.

Bài 121. Cho hàm số $y = 2x^3 + 2x^2 + 1$ (C) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .
2. Tìm các giao điểm của (C) với $(P) : y = 2x^2 + 1$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) và (P) tại giao điểm của chúng.

Bài 122. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+1}$ (H) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (H) .
2. Chứng minh rằng đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong (H) khi m thay đổi.
3. Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt (H) tại hai điểm phân biệt cùng một nhánh của (H) .

Bài 123. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ (C) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm x_0 sao cho $f''(x_0) = 0$.
3. Gọi d_m là đường thẳng đi qua điểm x_0 sao cho $f''(x_0) = 0$ và có hệ số góc m . Tìm m sao cho d_m cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.
4. Biện luận theo m số nghiệm phương trình $-x^3 - 3x + m = 0$

Bài 124. Cho hàm số $(C_m) : y = x^4 - (m+1)x^2 + m$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi $m = 2$.
2. Dùng (C) biện luận số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1 = m$.
3. Chứng minh (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $\forall m$.
4. Tìm các giá trị của m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 125. Cho hai hàm số $(C_m) : y = \frac{x-4m}{2(mx-1)}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $m = 1$.
2. Chứng minh rằng với mọi $m \neq \frac{1}{2}$, các đường (C_m) đều đi qua hai điểm cố định A, B .

3. Chứng minh rằng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C_m) tại A, B là một số khi m thay đổi.

Bài 126. Cho họ đường cong bậc ba (C_m) và họ đường thẳng (D_k) lần lượt có phương trình là

$$(C_m) : y = -x^3 + mx^2 - m \text{ và } (D_k) : y = kx + k + 1$$

• Trong phần này cho $m = 3$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .
2. Gọi A, B là 2 điểm cực đại và cực tiểu của hàm số (C) và M là điểm bất kỳ trên cung AB với $M \neq A, B$. Chứng minh rằng trên (C) ta tìm được hai điểm tại đó có tiếp tuyến vuông góc với tiếp tuyến tại M của (C) .
3. Gọi đường thẳng $\Delta : y = 1$. Cho $E \in \Delta$ biện luận số tiếp tuyến với (C) vẽ từ E .
4. Tìm $E \in \Delta$ để qua E có 3 tiếp tuyến với (C) và có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.
5. Tìm $M \in (C)$ để qua M chỉ có một tiếp tuyến với (C) .

• Trong phần này cho tham số m thay đổi

1. Tìm điểm cố định (C_m) . Định m để hai tiếp tuyến tại hai điểm cố định này vuông góc với nhau.
2. Định m để (C_m) có hai cực trị. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị.
3. Định m để (C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt
4. Định m để:
 - i) hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.
 - ii) hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
5. Tìm m để (C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ tạo thành cấp số cộng.
6. Tìm điều kiện giữa k và m để (D_k) cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt. Tìm k để (D_k) cắt (C_m) thành 2 đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 127. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x-1}{x-2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
2. Tìm các điểm trên (C) có tọa độ nguyên.
3. Tìm m để đường thẳng $d : y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau.

4. Tìm $M \in (C)$ để:
 - i) Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.
 - ii) Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất.
 - iii) Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.
5. Chứng minh rằng từ M đến bất kỳ thuộc (C) , tích khoảng cách từ M đến hai tiệm cận không đổi.
6. Chứng minh rằng đồ thị (C) có tâm đối xứng.
7. Tìm những điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

Bài 128. Cho hàm số $(C_m) : y = \frac{(1+m)x+m}{x+m}$.

• Với $m = 1$:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.
3. M là điểm có hành độ $a \neq 1$ và thuộc đồ thị hàm số, tiếp tuyến d của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A, B .
 - i) Chứng minh rằng: M là trung điểm AB .
 - ii) Chứng minh rằng: ΔIAB có diện tích không đổi, với I là giao của hai tiệm cận.
 - iii) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d . Xác định a để khoảng cách trên đạt giá trị nhỏ nhất?
 - iv) Xác định a để tiếp tuyến d lập với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

• Tìm m để:

1. Đồ thị có hai tiệm cận.
2. Hàm số đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$.

Bài 129. Cho hàm số $(C) : y = -x^3 + 3x$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = -|x|^3 + 3|x|$.
2. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x = \frac{2m}{m^2 + 1}$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 130. Cho hàm số $(C) : y = x^3 - 3x + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) qua $A(1; -1)$.
3. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x|(x^2 - 3) = 0$

Bài 131. Cho hàm số $(C) : y = x^3 - x^2 - x + 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $(x - 1)^2|x + 1| = m$.

Bài 132. Cho hàm số $(C) : y = \frac{2x}{x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Từ đồ thị (C) , suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = \frac{2|x|}{|x| - 1}$
3. Dùng đồ thị (C_1) để biện luận theo tham số m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m - 2)|x| - m = 0$

Bài 133. Cho hàm số $(C_k) : y = x^3 - 3kx^2 - 6kx$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $k = \frac{1}{4}$.
2. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình: $4|x|^3 - 3x^2 - 6|x| - 4a = 0$
3. Tìm k để trong các giao điểm của đồ thị (C_k) với trục Ox chỉ có một điểm có hoành độ dương.

Bài 134. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị của hàm số $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.
3. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0$

Bài 135. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Dựa vào đồ thị (C) , biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $-x^3 + 3x^2 - m = 0$

Bài 136. Viết phương trình của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$, biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 3x + 2006$.

Bài 137. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ tại điểm thuộc đồ thị có hoành độ $x_0 = -3$

Bài 138. Cho hàm số $(C) : y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm cực đại của (C) .

Bài 139. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$.

Bài 140. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$

Bài 141. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
2. Biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình $2x^3 - 3x^2 - 1 = m$

Bài 142. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 143. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$

Bài 144. Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5

Bài 145. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 146. Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{2x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) của đường thẳng $y = x = 2$.

Bài 147. Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Bài 148. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

Bài 149. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 . Biết $f''(x) = -1$.

Bài 150. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9.

Bài 151. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (1), biết rằng d vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 152. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Bài 153. Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 2$.
2. Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có hoành độ dương.

Bài 154. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 155. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O .

Bài 156. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Với các giá trị nào của m , phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

Bài 157. Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) , m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Bài 158. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

Bài 159. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$, (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Bài 160. Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, với O là gốc toạ độ.

Bài 161. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Bài 162. Cho hàm số $y = \frac{-x + 1}{2x - 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 163. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, O là gốc toạ độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Bài 164. Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Bài 165. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 166. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Bài 167. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Bài 168. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 169. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 170. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 1$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -x + 1$ cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt.

Bài 171. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

Bài 172. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1.

Bài 173. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Bài 174. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Cho điểm $A(2; 3)$. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A .

Bài 175. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến có hoành độ $x = 1$.

Bài 176.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$

Bài 177.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ trên đoạn $[1; 2]$

Bài 178.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.
2. Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $y = f(x + 1)$ đồng biến trên $(a; b)$.
 B. Hàm số $y = -f(x) - 1$ nghịch biến trên $(a; b)$.
 C. Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.
 D. Hàm số $y = f(x) + 1$ đồng biến trên $(a; b)$.

Câu 2. Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\mathbb{R}$.
 B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(1; +\infty)$.
 D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 3. Chỉ ra khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ trong các khoảng nào dưới đây.

- A. $(-1; 3)$.
 B. $(-\infty; -3)$ hoặc $(1; +\infty)$.
 C. $\mathbb{R}$.
 D. $(-\infty; -1)$ hoặc $(3; +\infty)$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 3x^2$.
 B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 D. $y = x^3$.

Câu 5. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

- A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Câu 6. Hàm số $y = x^3 + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

- A. $m = 0$.
 B. $m \geq 0$.
 C. $m \leq 0$.
 D. $\forall m$.

Câu 7. Tìm m lớn nhất để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 1$.
 B. $m = 2$.
 C. $m = 4$.
 D. $m = 3$.

Câu 8. Hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - 2x^2 + (m + 3)x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của m là

- A. $m = -4$.
 B. $m = 0$.
 C. $m = -2$.
 D. $m = 1$.

Câu 9. Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x + 7$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện của m là

- A. $m > 1$.
 B. $m = 2$.
 C. $m \leq 1$.
 D. $m \geq 2$.

Câu 10. Hàm số $y = (m + 2)\frac{x^3}{3} - (m + 2)x^2 + (m - 8)x + m^2 - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

- A. $m < -2$.
 B. $m > -2$.
 C. $m \leq -2$.
 D. $m \geq -2$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m - 1)$. Khẳng định nào sau là **đúng**?

- A. Hàm số luôn nghịch biến.
 B. Hàm số luôn đồng biến.
 C. Hàm số không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.
 D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Câu 12. Hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m - 1)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ khi:

- A. $m < 5$. B. $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $m > -2$. D. $m < \frac{3}{2}$.

Câu 13. Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là

- A. $m = 0$. B. $m \leq \frac{12}{7}$. C. $m \geq \frac{12}{7}$. D. m tùy ý.

Câu 14. Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m - 1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại. Nếu $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$ thì giá trị m là

- A. -1 . B. 3 . C. -3 hoặc 1 . D. -1 hoặc 3 .

Câu 15. Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 1 là

- A. $m = -\frac{9}{4}$. B. $m = 3$. C. $m \leq 3$. D. $m = \frac{9}{4}$.

Câu 16. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong bốn phát biểu sau:

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.
D. Trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 18. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 4$. B. $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Câu 19. Hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên $(1; 3)$ khi:

- A. $m \in [-5; 2)$. B. $m \in (-\infty; 2]$. C. $m \in (-\infty; -5)$. D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 20. Hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi:

- A. $m \leq 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 21. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 22. Hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ luôn:

- A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Đồng biến trên từng khoảng xác định. D. Nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Câu 23. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

- A. $y = \frac{x - 2}{x + 2}$. B. $y = \frac{-x + 2}{x + 2}$. C. $y = \frac{x - 2}{-x + 2}$. D. $y = \frac{x + 2}{-x + 2}$.

- Câu 24.** Nếu hàm số $y = \frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ nghịch biến thì giá trị của m là
A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $(-1; 2)$.
- Câu 25.** Hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi:
A. $m > 2$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m > 1$.
- Câu 26.** Hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$ khi:
A. $m < 1$. B. $m > 2$. C. $1 \leq m < 2$. D. $-1 < m < 2$.
- Câu 27.** Hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 1}{1-x}$ nghịch biến trên các khoảng xác định khi:
A. $m < 0$. B. $m \geq 0$. C. $m = 0$. D. $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 28.** Tìm điều kiện của a, b để hàm số $y = 2x + a \sin x + b \cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $a^2 + b^2 \leq 2$. B. $a^2 + b^2 \geq 2$. C. $a^2 + b^2 \leq 4$. D. $a^2 + b^2 \geq 4$.
- Câu 29.** Giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
A. $b \geq 1$. B. $b < 1$. C. $b = 1$. D. $b \leq 1$.
- Câu 30.** Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.
A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. B. $m \leq 0$.
C. $1 \leq m < 2$. D. $m \geq 2$.
- Câu 31.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. B. $m \leq -\sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. D. $m \geq \sqrt{2}$.
- Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2) \cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$. B. $-3 < m < -\frac{1}{5}$. C. $m < -3$. D. $m \geq -\frac{1}{5}$.
- Câu 33.** Cho hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$. Chọn phát biểu **đúng** trong các phát biểu sau:
A. Hàm số đồng biến trên $[0; 1]$.
B. Hàm số đồng biến trên toàn tập xác định.
C. Hàm số nghịch biến trên $[0; 1]$.
D. Hàm số nghịch biến trên toàn tập xác định.
- Câu 34.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(0; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 1)$.
- Câu 35.** Cho hàm số $y = \sqrt{x^3 - 3x}$. Chọn khẳng định **đúng**?
A. Tập xác định $D = [-\sqrt{3}; 0] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 36. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = 2x - \cos 2x - 5$.

C. $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

D. $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Câu 37. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = (x-1)^2 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

C. $y = \frac{x}{x+1}$.

D. $y = \tan x$.

Câu 38. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = 2x + \cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = -x^3 - 3x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

D. Hàm số $y = 2x^4 + x^2 + 1$ luôn nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 2)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 3)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(3; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(1; 4)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$

A. $(-1; +\infty)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

A. $(-2; 2)$.

B. $(0; 2)$.

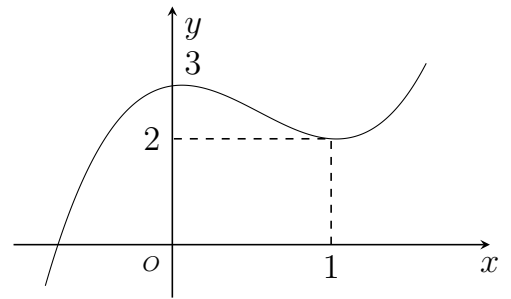
C. $(3; +\infty)$.

D. $-\infty; 1$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị bên dưới

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

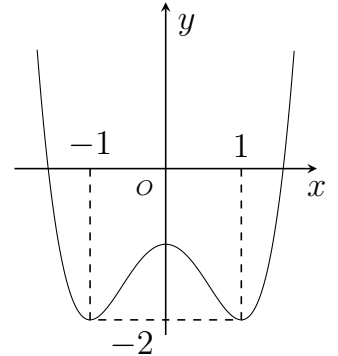
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.



Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

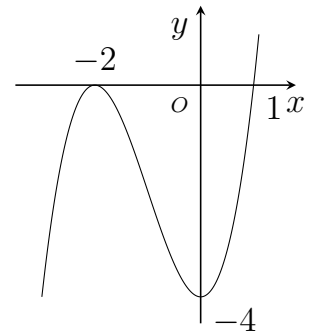
- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(-\infty; 0)$.
- D. $(0; +\infty)$.



Câu 45. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-\infty; -2)$.
- D. $(-2; 1)$.



Vấn đề 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 46. Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là

- A. 4.
- B. 1.
- C. 0.
- D. -1.

Câu 47. Hàm số $y = x^3 - 5x^3 + 3x + 1$ đạt cực trị tại:

- A. $\begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 48. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có hai cực trị là

- A. $(0; 0)$ hoặc $(1; -2)$.
- B. $(0; 0)$ hoặc $(2; 4)$.
- C. $(0; 0)$ hoặc $(2; -4)$.
- D. $(0; 0)$ hoặc $(-2; -4)$.

Câu 49. Hàm số $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ đạt cực tiểu tại x_{CT} . Kết luận nào sau đây **đúng**?

- A. $x_{CT} = \frac{1}{3}$.
- B. $x_{CT} = -3$.
- C. $x_{CT} = -\frac{1}{3}$.
- D. $x_{CT} = 1$.

Câu 50. Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x$ là

- A. $y_{CT} = 2y_{CD}$.
- B. $y_{CT} = \frac{3}{2}y_{CD}$.
- C. $y_{CT} = y_{CD}$.
- D. $y_{CT} = -y_{CD}$.

Câu 51. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_1 và cực tiểu x_2 thì tích $y(x_1) \cdot y(x_2)$ bằng

A. -302 .B. -82 .C. -207 .D. 25 .

Câu 52. Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = (x+1)(x-2)^2$ là

A. $2\sqrt{5}$.B. 2 .C. 4 .D. $5\sqrt{2}$.

Câu 53. Trong các đường thẳng dưới đây, đường thẳng nào đi qua trung điểm đoạn thẳng nối các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$?

A. $y = 2x - 3$.B. $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.C. $y = 2x + 3$.D. $y = -2x - 1$.

Câu 54. Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị khi m thỏa mãn điều kiện:

A. $0 < m < 2$.B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$.C. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$.D. $0 < m < 8$.

Câu 55. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 2018$ có hai điểm cực trị khi:

A. $m \leq 0$.B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.C. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.D. $m < 1$.

Câu 56. Với điều kiện nào của a và b để hàm số $y = (x+a)^2 + (x+b)^2 - x^3$ đạt cực tiểu và cực đại?

A. $ab > 0$.B. $ab < 0$.C. $ab \geq 0$.D. $ab \leq 0$.

Câu 57. Hàm số $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị khi:

A. $m = 3$.B. $m = 0$ hoặc $m = 3$.C. $m = 0$.D. $m \neq 3$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 4$ đạt cực trị tại $x = 3$ hoặc $x = 5$ là

A. $m = 0$.B. $m = 1$.C. $m = 2$.D. $m = 3$.

Câu 59. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là gốc tọa độ O và $A(2; -4)$ thì phương trình của hàm số là

A. $y = -3x^3 + x^2$.B. $y = -3x^3 + x$.C. $y = x^3 - 3x$.D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. -1 và 0 .B. $(-\infty; 0) \cup (-1; +\infty)$.C. $(-1; 0)$.D. $[0; 1]$.

Câu 61. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

A. $m = 0$.B. $m = 0$ hoặc $m = 2$.C. $m = 1$.D. $m = 2$.

Câu 62. Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2-3)x + 1$ đạt cực trị tại $x = -1$ thì m bằng

A. $m = 0$.

B. $m = -2$.

C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 63. Biết hàm số $y = 3x^3 - mx^2 + mx - 3$ có một điểm cực trị bằng -1 . Khi đó, hàm số đạt cực trị tại điểm khác có hoành độ là

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 64. Nếu $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$ thì tập tất cả các giá trị của m có thể nhận được là

A. 1.

B. -3 .

C. 1 hoặc -3 .

D. $[-3; 1]$.

Câu 65. Hàm số $y = ax^3 - ax^2 + 1$ có điểm cực tiểu $x = \frac{2}{3}$ khi điều kiện của a là

A. $a = 0$.

B. $a > 0$.

C. $a = 2$.

D. $a < 0$.

Câu 66. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2 = 7$ là

A. $m = 0$.

B. $m = \pm \frac{9}{2}$.

C. $m = \pm \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm 2$.

Câu 67. Giá trị của m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 0$ là

A. $m = \pm \frac{9}{2}$.

B. $m = \pm \frac{3}{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 68. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có phương trình là

A. $y = -8x + m$.

B. $y = -8x + m - 3$.

C. $y = -8x + m + 3$.

D. $y = -8x - m + 3$.

Câu 69. Nếu $x = 1$ là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 2)x^2 + (2m + 3)x + 2018$ thì tập hợp tất cả các giá trị của m là

A. $m = -1$.

B. $m \neq -1$.

C. $m = -\frac{2}{3}$.

D. Không có giá trị của m .

Câu 70. Giá trị của m để khoảng cách từ điểm $M(0; 3)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$ là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

B. $m = -1$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

D. Không tồn tại m .

Câu 71. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 6$. Xác định m để hàm số cực đại, cực tiểu nằm trong $(-2; 3)$

A. $m \in (-1; 3) \cup (1; 3)$.

B. $m \in (1; 3)$.

C. $m \in (3; 4)$.

D. $m \in (-1; 4)$.

Câu 72. Để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 6$ có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < -1 < x_2$ thì giá trị của m là

A. $m > 1$.

B. $m < 1$.

C. $m > -1$.

D. $m < -1$.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m > 2$. B. $m < 2$. C. $m = 2$. D. $0 < m < 2$.

Câu 74. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ có các điểm cực trị nhỏ hơn 2?

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $0 < m < 1$.

Câu 75. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6a(a+1) + 2$. Nếu gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của điểm cực trị thì giá trị $|x_2 - x_1|$ bằng

- A. $a + 1$. B. a . C. $a - 1$. D. 1.

Câu 76. Cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu cách đều trục tung?

- A. 2. B. -1. C. 1. D. 0.

Câu 77. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có hai điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ thì tập tất cả các giá trị của m là

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Câu 78. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x - \frac{4}{3}$. Tìm tất cả các giá trị của m , ($m > 0$) để đồ thị hàm số có điểm cực đại thuộc trục hoành.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{3}{4}$. D. $m = \frac{4}{3}$.

Câu 79. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$. Xác định m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành?

- A. $m < 2$. B. $m \leq 3$. C. $m < 3$. D. $m \leq 2$.

Câu 80. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$. Xác định m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục tung?

- A. $m \leq \frac{1}{2}$. B. $m > 1$. C. $\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 81. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại x_1, x_2 nằm hai phía với trục tung khi và chỉ khi:

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. a và c trái dấu.
C. $b^2 - 12ac \leq 0$. D. $b^2 - 12ac > 0$.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $I(1; 0)$ là trung điểm của AB.

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 83. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B, $M(1; -2)$ thẳng hàng.

- A. $m = 0$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = -\sqrt{2}$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 84. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O .

- A. $m = -1$. B. $m > 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 85. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có

- A. 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu. B. 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
C. 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu. D. 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Câu 86. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ dương?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 3)^2$. Giá trị cực đại của hàm số $f'(x)$ bằng

- A. 8. B. -8. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 88. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$). Trong điều kiện nào sau đây thì hàm số có 3 cực trị?

- A. a và b cùng dấu và c bất kì. B. a và b trái dấu và c bất kì.
C. $b = 0$ và a, c bất kì. D. $c = 0$ và a, b bất kì.

Câu 89. Để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + a$ ($a \neq 0$) có một cực tiểu và hai cực đại thì a, b thỏa mãn điều kiện

- A. $a < 0, b < 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b < 0$. D. $a < 0, b > 0$.

Câu 90. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 1$ ($a \neq 0$). Để hàm số chỉ có một cực trị và là cực tiểu thì a, b thỏa mãn điều kiện

- A. $a < 0, b \leq 0$. B. $a < 0, b > 0$. C. $a > 0, b > 0$. D. $a > 0, b \geq 0$.

Câu 91. Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba cực trị khi:

- A. $m = 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 92. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; 2)$. Tìm tổng $(a + b)$.

- A. -14. B. 14. C. -20. D. 34.

Câu 93. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0; -3)$ và có điểm cực tiểu $B(-1; -5)$. Khi đó giá trị a, b, c lần lượt là choice -3; -1; -5 2; -4; -3 2; 4; -3 -2; 4; -3

Câu 94. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu và thỏa mãn hai điểm cực tiểu gần nhất.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 95. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có đồ thị là (C_m) . Tìm các giá trị của m để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục tọa độ

- A. $m \leq 0$. B. $m = 2$.
C. $m > 0$. D. $m \leq 0$ hoặc $m = 2$.

Câu 96. Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m \pm 4$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = 4$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 97. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm m để ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 98. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$. Tìm m để ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.

Câu 99. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là góc toạ độ

- A. $m = -\frac{2}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{1}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.

Câu 100. Hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu thì điều kiện của m là

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m > 0$.

Câu 101. Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ khi giá trị m là

- A. -1 . B. -3 . C. 1 . D. 3 .

Câu 102. Điểm cực trị của hàm số $y = \sin 2x - x$ là

- A. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x_{\text{CT}} = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x_{\text{CT}} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x_{\text{CD}} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 103. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + 2\cos x$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

- A. $\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$. B. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. C. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. D. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$.

Câu 104. Cho hàm số $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $x = \frac{5\pi}{6}$ là một nghiệm của phương trình.
B. Trên khoảng $(0; \pi)$ hàm số có duy nhất một cực trị.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{5\pi}{6}$.
D. $y + y'' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 105. Hàm số $y = \sin 3x + m\sin x$ đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{3}$ khi m bằng

Câu 106. Biết hàm số $y = a\sin x + b\cos x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị $x = \frac{\pi}{3}$; $x = \pi$. Khi đó tổng $a + b$ bằng

- A. 3 . B. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$. C. $\sqrt{3} + 1$. D. $\sqrt{3} - 1$.

Câu 107. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^2\sqrt{x^2 + 2}$

- A. $x_{\text{CT}} = 1$. B. $x_{\text{CT}} = 0$. C. $x_{\text{CT}} = -1$. D. $x_{\text{CT}} = 2$.

Câu 108. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

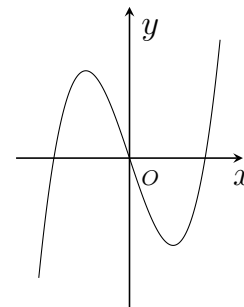
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.



Câu 109. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	-1	$+\infty$	

Câu 110. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó $x(\text{mg})$ và $x > 0$ là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng

A. 15(mg).

B. 15(mg).

C. 15(mg).

D. 15(mg).

Vấn đề 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Câu 111. Cho hàm số $y = \frac{mx + n}{x + 1}$, với tham số m, n thỏa mãn $m < n$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\min_{x \in [0;1]} y = n$.

B. $\min_{x \in [0;1]} y = \frac{m + n}{2}$.

C. $\max_{x \in [0;1]} y = m$.

D. $\max_{x \in [0;1]} y = \frac{m + n}{2}$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng -2 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng 2.

D. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-\infty; 0)$ bằng -2 .

Câu 113. Xét hàm số $y = \sqrt{4 - 3x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1; 1]$.

B. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 1$, giá trị lớn nhất bằng 7 khi $x = -1$.

Câu 114. Khi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$, một học sinh làm như sau:

(1) Tập xác định $D = [-1; 4]$ và $y' = \frac{-2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$

(2) Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1; x = 4$ và $\forall x \in (-1; 4); y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

(3) Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{5}{2}$ khi $x = \frac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1; x = 4$.

Cách giải trên:

A. Sai ở bước (3).

B. Sai từ bước (1).

C. Sai từ bước (2).

D. Cả ba bước (1), (2), (3) đều đúng.

Câu 115. Khi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$, một học sinh làm như sau:

(1) Tập xác định $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ và $y' = \frac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}}$.

(2) $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

(3) Kết luận: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 khi $x = 1$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\sqrt{2}$ khi $x = -\sqrt{2}$.

Cách giải trên:

A. Sai từ bước (1).

B. Sai từ bước (2).

C. Sai ở bước (3).

D. Cả ba bước (1), (2), (3) đều đúng.

Câu 116. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ lần lượt là

A. 0 và 2.

B. $-\sqrt{2}$ và $\sqrt{2}$.

C. -2 và 2.

D. 0 và $\sqrt{2}$.

Câu 117. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 118. Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M - m$ bằng

A. -5.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Câu 119. Trên đoạn $[-1; 1]$, hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$

A. có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

B. có giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

C. có giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và không có giá trị lớn nhất.

D. không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất tại $x = 1$.

Câu 120. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$. B. $\min_{[2;4]} y = -2$. C. $\min_{[2;4]} y = -3$. D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

Câu 121. Trong các số dưới đây, đâu là số ghi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 4x - 5|$ trên đoạn $[-6; 6]$.

- A. 0. B. 9. C. 55. D. 110.

Câu 122. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - x$ trên đoạn $[-4; 4]$ bằng

- A. 2. B. 17. C. 34. D. 68.

Câu 123. Cho hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A. Có giá trị nhỏ nhất là -1 . B. Có giá trị nhỏ nhất là 0 .
C. Có giá trị nhỏ nhất là 3 . D. Không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 124. Tập giá trị của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x \in [3; 5]$ là

- A. $\left[\frac{38}{3}; \frac{526}{15}\right]$. B. $\left[\frac{38}{3}; \frac{142}{5}\right]$. C. $\left[\frac{29}{3}; \frac{127}{5}\right]$. D. $\left[\frac{29}{3}; \frac{526}{15}\right]$.

Câu 125. Gọi $T = [a; b]$ là tập giá trị của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ với $x \in [2; 4]$. Khi đó giá trị biểu thức $P = b - a$ bằng

- A. 6. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{25}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 126. Cho hàm số $y = -x - \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-1; 2]$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A. Có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 2 .
B. Có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.
C. Không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất là 2 .
D. Không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Câu 127. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \frac{1}{2}$ là

- A. 1. B. -24 . C. -12 . D. -9 .

Câu 128. Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x$. Một học sinh giải như sau:

(I) Với mọi x ta đều có $0 \leq \sin^4 x \leq 1$ (1) và $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ (2)

(II) Cộng (1) và (2) theo vế ta được $0 \leq \sin^4 x + \cos^2 x \leq 2$

(III) Vậy GTLN của hàm số là 2 và GTNN của hàm số là 0 .

Cách giải trên.

- A. Sai từ bước (I). B. Sai từ bước (II).

C. Sai từ bước (III).

D. Cả ba bước (I), (II), (III) đều sai .

Câu 129. Hàm số $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Chọn khẳng định đúng?

A. Có giá trị lớn nhất là -5 , không có giá trị nhỏ nhất.

B. Không có giá trị lớn nhất, có giá trị nhỏ nhất là -5 .

C. Có giá trị lớn nhất là -5 , giá trị nhỏ nhất là -5 .

D. Không có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 130. Giá trị nào của x để tại đó hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 131. Hàm số nào sau đây không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$?

A. $y = x^3 + 2$.

B. $y = x^4 + x^2$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = -x + 1$.

Câu 132. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 6 + \sqrt{4x - x^2}$ là

A. 14.

B. 0.

C. 6.

D. 8.

Câu 133. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

A. $\frac{1 + m^2}{2}$.

B. $-m^2$.

C. $\frac{1 - m^2}{2}$.

D. m^2 .

Câu 134. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng

A. $\frac{m^2 - 1}{2}$.

B. $-m^2$.

C. $\frac{1 - m^2}{2}$.

D. m^2 .

Câu 135. Trên đoạn $[-1; 1]$, hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 thì a bằng

A. $a = 2$.

B. $a = 6$.

C. $a = 0$.

D. $a = 4$.

Câu 136. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng -2 là

A. $m = 4$.

B. $m = 5$.

C. $m = -4$.

D. $m = 1$.

Câu 137. Với giá trị nào của m để hàm số $y = \frac{x - 1}{x + m^2}$ trên đoạn $[2; 5]$ bằng $\frac{1}{6}$.

A. ± 1 .

B. ± 2 .

C. ± 3 .

D. $m = 4$.

Câu 138. Đây là số ghi giá trị của m trong các số dưới đây, nếu 10 là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ trên đoạn $[-1; 3]$?

A. 3.

B. -6 .

C. -7 .

D. -8 .

Câu 139. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 ?

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 140. Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $2\sqrt{S}$. B. $4\sqrt{S}$. C. $2S$. D. $4S$.

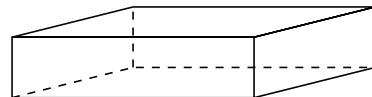
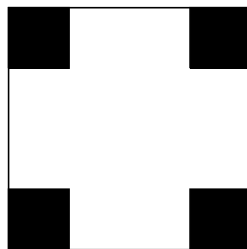
Câu 141. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16(cm) thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

- A. 36cm^2 . B. 20cm^2 . C. 16cm^2 . D. 30cm^2 .

Câu 142. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ:

- A. 12. B. 30. C. 20. D. 15.

Câu 143. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 6$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 144. Một người nông dân rào một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 10.000m^2 . Biết rằng bờ rào ở các cạnh phía bắc và phía nam giá 1500/m, bờ rào ở các cạnh phía đông và phía tây giá 6000/m. Để chi phí thấp nhất thì kích thước Đông - Tây, Bắc - Nam của mảnh vườn là

- A. 50m; 200m . B. 200m; 50m . C. 50m; 250m . D. 100m; 100m .

Câu 145. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0,024x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. 20mg. B. 0,5mg. C. 2,8mg. D. 15mg.

Câu 146. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(\text{giây})$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(\text{mét})$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v(\text{m/s})$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng

- A. 6m/s. B. 4m/s. C. 3m/s. D. 5m/s.

Câu 147. Một hộ kinh doanh có 50 phòng cho thuê. Nếu cho thuê mỗi phòng với giá là 2 triệu đồng/1tháng thì các phòng đều được thuê hết. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng thêm 100.000 đồng/tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh nên tăng mỗi phòng bao

nhiều để có tổng thu nhập mỗi tháng cao nhất?

- A. 500.000 đồng. B. 200.000 đồng. C. 300.000 đồng. D. 250.000 đồng.

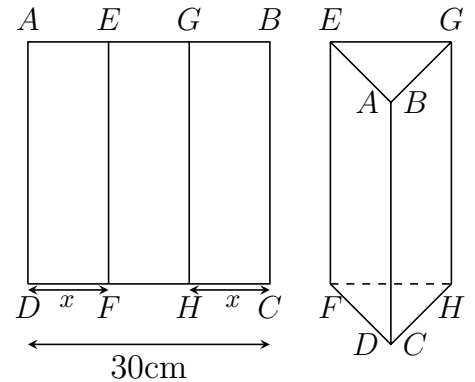
Câu 148. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

- A. 42.000 đồng. B. 40.000 đồng. C. 43.000 đồng. D. 39.000 đồng.

Câu 149. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.

Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

- A. $x = 5(\text{cm})$.
B. $x = 9(\text{cm})$.
C. $x = 8(\text{cm})$.
D. $x = 10(\text{cm})$.



Câu 150. Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\text{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

- A. 85 triệu đồng. B. 90 triệu đồng. C. 75 triệu đồng. D. 86 triệu đồng.

Câu 151. Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ / 1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000đ / 1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

- A. 2.600.000 đ. B. 2.400.000 đ. C. 2.000.000 đ. D. 2.200.000 đ.

Câu 152. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 4t^3 - \frac{t^4}{2}$ (người). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

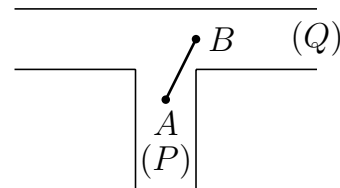
- A. 6. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 153. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 12t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng

- A. $t = 4$. B. $\begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$. C. $t = 6$. D. $t = 2$.

Câu 154. Mương nước (P) thông với mương nước (Q), bờ của mương nước (P) vuông góc với bờ của mương nước (Q). Chiều rộng của hai mương bằng nhau và bằng 8m. Một thanh gỗ AB , thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương (P) sang mương nước (Q).

Độ dài lớn nhất của thanh AB (lấy gần đúng đến chữ số phần trăm) sao cho AB khi trôi không bị vướng là



- A. 22, 63m. B. 22, 61m. C. 23, 26m. D. 23, 62m.

Câu 155. Một sợi dây kim loại dài 0,9m được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai được uốn thành hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tìm độ dài cạnh của tam giác đều (tính theo đơn vị cm) sao cho tổng diện tích của tam giác và hình chữ nhật là nhỏ nhất.

- A. $\frac{60}{2 - \sqrt{3}}$. B. $\frac{60}{2 + \sqrt{3}}$. C. $\frac{30}{1 + \sqrt{3}}$. D. $\frac{240}{8 + \sqrt{3}}$.

Câu 156. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 144 (m/s). B. 36 (m/s). C. 243 (m/s). D. 27 (m/s).

Câu 157. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Tính số con cá phải thả trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

- A. 14. B. 12. C. 15. D. 13.

Câu 158. Một chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

- A. 54 (m/s). B. 216 (m/s). C. 30 (m/s). D. 400 (m/s).

Câu 159. Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?

- A. $3\sqrt{3}m^2$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}m^2$. D. $1m^2$.

Câu 160. Một công ti dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000đ/m², chi phí để làm mặt đáy là 120.000đ/m². Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể)

A. 57582 thùng.

B. 58135 thùng.

C. 18209 thùng.

D. 12525 thùng.

Câu 161. Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định **đúng** là

A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).

B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.

C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).

D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.

Câu 162. Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

A. 20.000 đồng.

B. 22.000 đồng.

C. 15.000 đồng.

D. 10.000 đồng.

Câu 163. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Trong khoảng thời gian 6 giây đầu tiên của chuyển động, ở thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất?

A. $t = 2s$.

B. $t = 3s$.

C. $t = 6s$.

D. $t = 5s$.

Câu 164. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường $s(m)$ đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian $t(s)$, hàm số đó là $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 4s$.

B. $t = 2s$.

C. $t = 6s$.

D. $t = 8s$.

Câu 165. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

A. 115 250 000.

B. 101 250 000.

C. 100 000 000.

D. 100 250 000.

Câu 166. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24(m/s).

B. 108(m/s).

C. 18(m/s).

D. 64(m/s).

Câu 167. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = m \end{cases}$$
 có

nghiệm thực.

A. $m \geq 2$.

B. $m \geq 1$.

C. $m = 2$.

D. $m \leq 2$.

Câu 168. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/h) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến số nguyên).

A. 10 (km/h).

B. 25 (km/h).

C. 15 (km/h).

D. 20 (km/h).

Câu 169. Bạn A có một đoạn dây dài 20m. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

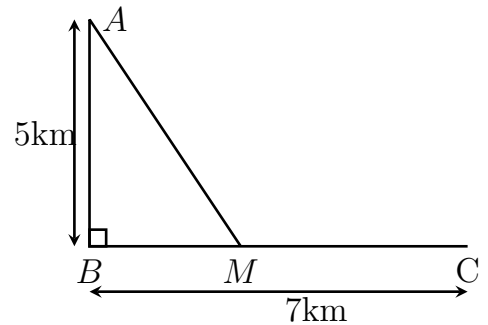
B. $\frac{180}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

C. $\frac{120}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

D. $\frac{60}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

Câu 170. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ 5km, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng 7km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc 6 km/h. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

A. $3\sqrt{2}$ km. B. $\frac{7}{3}$ km. C. $2\sqrt{5}$ km. D. $\frac{7}{2}$ km.



Câu 171. Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật (không nắp) bằng tôn thể tích $665,5\text{dm}^3$. Chiếc thùng này có đáy là hình vuông cạnh x (dm), chiều cao h (dm)

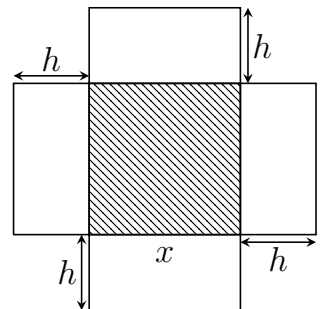
Để làm chiếc thùng, bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất.

A. 10,5(dm).

B. 12(dm).

C. 11(dm).

D. 9(dm).



Câu 172. Người ta muốn dùng vật liệu bằng kim loại để gò thành một thùng hình trụ tròn xoay có hai đáy với thể tích V cho trước (hai đáy cũng dùng chính vật liệu đó). Hãy xác định chiều cao h và bán kính R của hình trụ theo V để tốn ít vật liệu nhất.

A. $R = 2h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

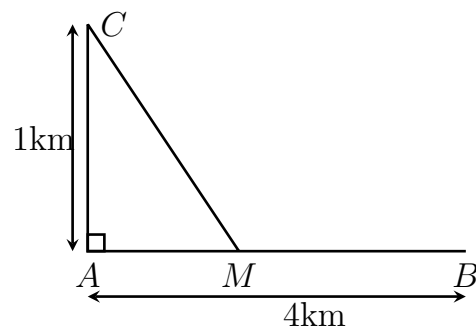
B. $R = 2h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

C. $h = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

D. $h = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 173. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như

hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



- A. 106,25 triệu đồng. B. 120 triệu đồng. C. 164,92 triệu đồng. D. 114,64 triệu đồng.

Câu 174. Một miếng bìa hình tam giác đều ABC , cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC ; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $16\sqrt{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $32\sqrt{3}$. D. $34\sqrt{3}$.

Vấn đề 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 175. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

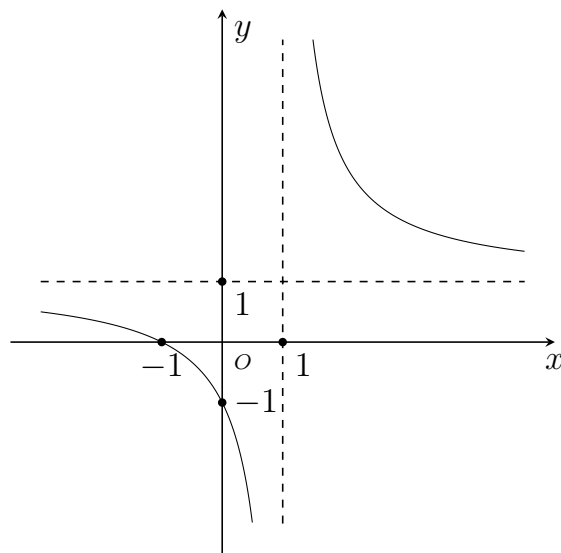
Câu 176. Cho đường cong $(C) : y = \frac{x-2}{x+2}$. Điểm nào dưới đây là giao của hai tiệm cận của (C) ?

- A. $L(-2; 2)$. B. $M(2; 1)$. C. $N(-2; -2)$. D. $K(-2; 1)$.

Câu 177. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là các đường thẳng.

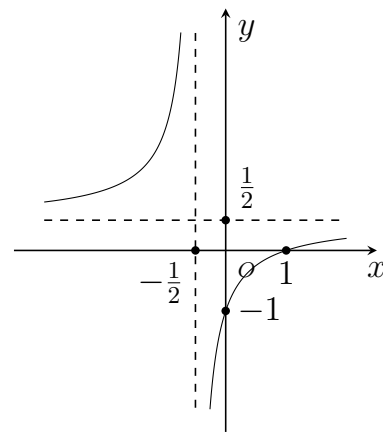
- A. $x = -1$ và $y = 1$.
B. $x = 1$ và $y = 1$.
C. $x = -1$ và $y = -1$.
D. $x = 1$ và $y = -1$.



Câu 178. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là các đường thẳng.

- A. $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$.
 B. $x = -1$ và $y = 1$.
 C. $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$.
 D. $x = -\frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.



Câu 179. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên sau. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	-1	3	2

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
 D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -1$, $y = 2$.

Câu 180. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	$+\infty$	$+\infty$	-1	$+\infty$

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.
 B. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$.
 C. Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = -1$.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Câu 181. Cho đồ thị hàm số có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	-	-	-
y	3	$+\infty$	3

Chọn khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
 B. Hàm số có giá trị cực đại $y_{\text{CD}} = 3$.
 C. Hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Câu 182.** Đường cong $(C) : y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 183.** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2+1}$ có những đường tiệm cận?
 A. $x = 0$ và $y = 2$. B. $x = 0$. C. $y = 0$. D. $x = 2$ và $y = 0$.
- Câu 184.** Đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{3x^2+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận xiên?
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 185.** Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$.
 A. Có tiệm cận đứng. B. Có tiệm cận ngang.
 C. Có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên. D. Không có đường tiệm cận.
- Câu 186.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 187.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1-\sqrt{3x+1}}{x^2-x}$.
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 188.** Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2008}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
 A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 189.** Cho hàm số $y = \frac{x(\sqrt{x^2-2x}+x)}{x^2-1}$ có đồ thị (C) . Kí hiệu n là số đường tiệm cận ngang, d là số đường tiệm cận đứng. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
 A. $n+d=2$. B. $n>d$. C. $n+d=4$. D. $n<d$.
- Câu 190.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$ là
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 191.** Đồ thị của hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?
 A. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. B. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$. C. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x-3}$. D. $y = \frac{x+3}{2x-1}$.
- Câu 192.** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là
 A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.
- Câu 193.** Đồ thị của hàm số $y = \frac{(2x-1)^2}{x^2}$ có:
 A. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{1}{2}$. B. Đường thẳng $y = 4$ là tiệm cận ngang.
 C. Đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên. D. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- Câu 194.** Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2}{x^2-x}$ có:

(I) Tiệm cận đứng $x = 0$ (II) Tiệm cận đứng $x = 1$ (III) Tiệm cận ngang $y = 3$

Mệnh đề nào **đúng**:

A. Chỉ (I) và (II).

B. Chỉ (I) và (III).

C. Chỉ (II) và (III).

D. Cả (I), (II) và (III).

Câu 195. Với các giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng?

A. $m = 0$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$.

D. $m = 1$.

Câu 196. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$?

A. 2.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 197. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Gọi $M(x_0; y_0)$, $x_0 > 0$ là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B thỏa mãn $IA^2 + IB^2 = 40$. Khi đó tích $x_0 \cdot y_0$ bằng

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 198. Cho hàm số $(C) : y = \frac{x + 1}{x - 2}$. Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất mà d có thể đạt được là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{6}$.

Câu 199. Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + n}$. Biết đồ thị có tiệm cận đứng là $x = 1$ và $y'(2) = 1$. Giá trị của $m + n$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. -3.

Câu 200. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 201. Cho M là giao điểm của đồ thị $(C) : y = \frac{2x - 1}{2x + 3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M đến hai tiệm cận là

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 2.

Câu 202. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - m}$ có tiệm cận là

A. $(-\infty; +\infty)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Vấn đề 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

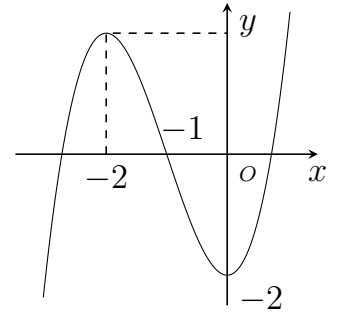
Câu 203. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



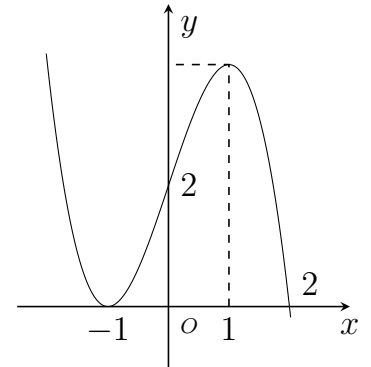
Câu 204. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = (x + 1)^2(1 - x)$.

B. $y = (x + 1)^2(1 + x)$.

C. $y = (x + 1)^2(2 - x)$.

D. $y = (x + 1)^2(2 + x)$.



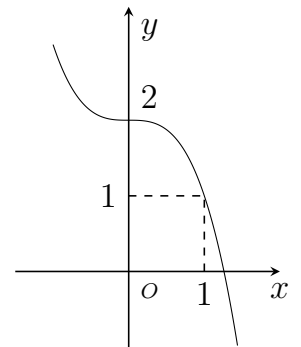
Câu 205. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^3 + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 2$.

C. $y = -x^3 - x + 2$.

D. $y = -x^3 + 2$.



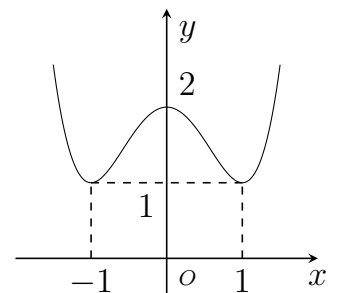
Câu 206. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = -x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = -x^4 - 4x^2 + 2$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.



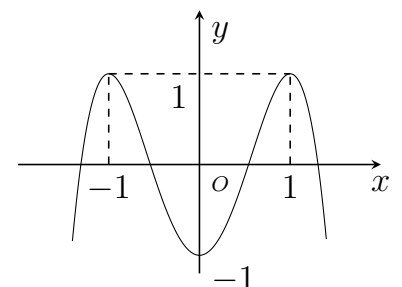
Câu 207. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

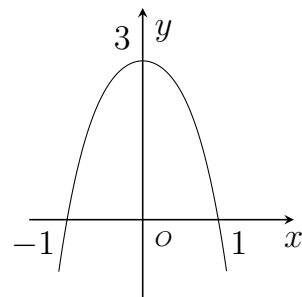
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



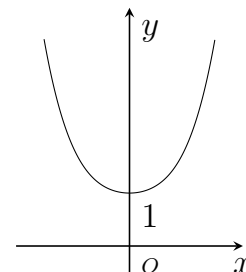
Câu 208. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.
 B. $y = -x^4 - 2x^2 - 3$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
 D. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.



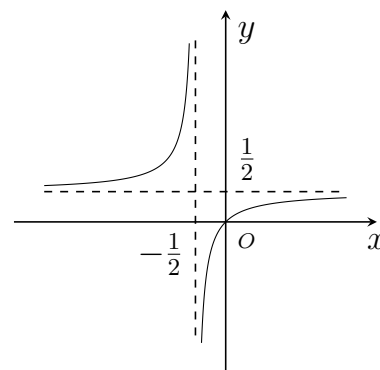
Câu 209. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = x^4 + x^2 + 2$.
 B. $y = x^4 - x^2 + 2$.
 C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
 D. $y = x^4 + x^2 + 1$.



Câu 210. Cho đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

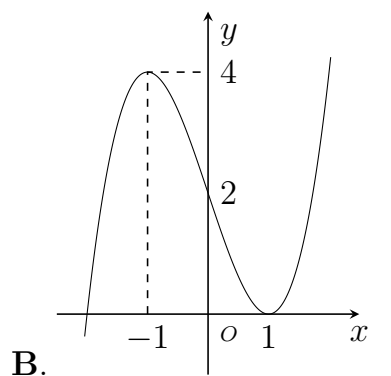
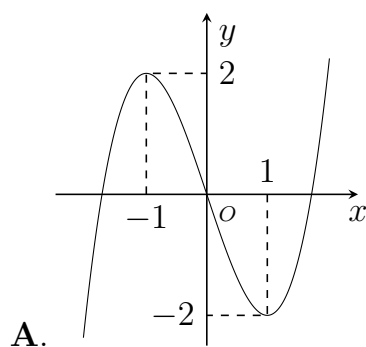
- A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$.
 B. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.
 C. $y = \frac{x}{2x+1}$.
 D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

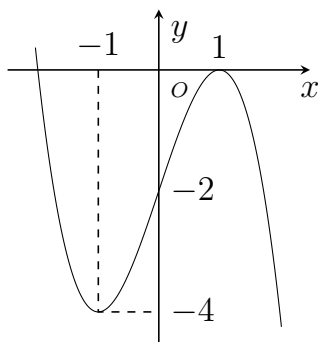


Câu 211. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

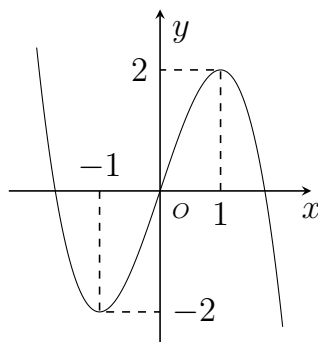
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$-\infty$	

Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?





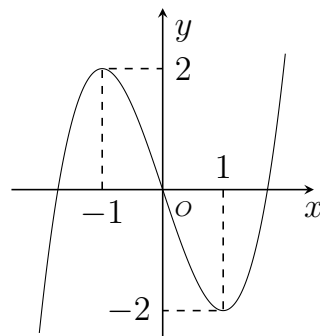
C.



D.

Câu 212. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Chọn khẳng định **đúng**?

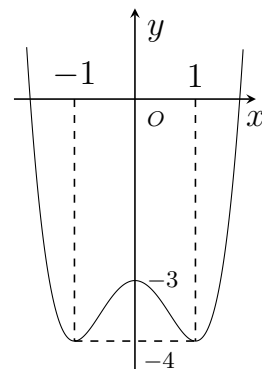
- A. Hàm số có hệ số $a < 0$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 2)$.
- C. Hàm số không có cực trị.
- D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.



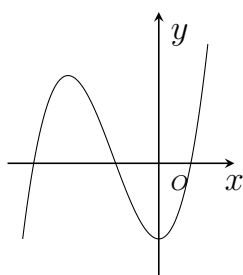
Câu 213. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Chọn khẳng định **sai**?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$
		-4		-4	

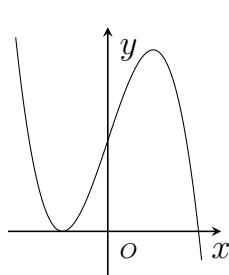
- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho biểu diễn như hình bên.
- D. Hàm số đã cho là $y = x^4 - 2x^2 - 2$.



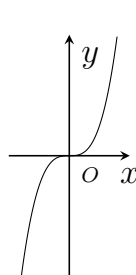
Câu 214. Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$.



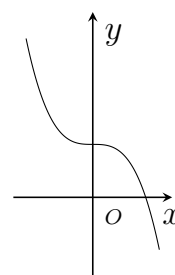
(I)



(II)



(III)



(IV)

Các đồ thị nào có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

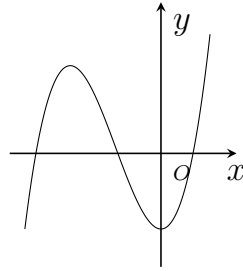
A. (I).

B. (I) và (II).

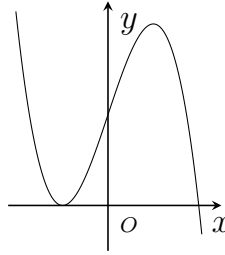
C. (II) và (IV).

D. (III) và (IV).

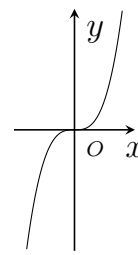
Câu 215. Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$



(I)



(II)



(III)

Các đồ thị nào có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho?

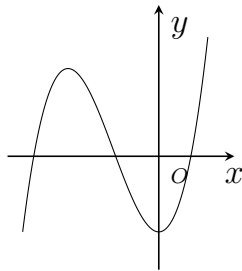
A. (I).

B. (I) và (II).

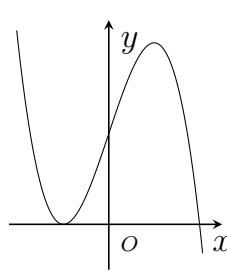
C. (III).

D. (I) và (III).

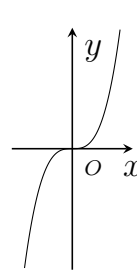
Câu 216. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



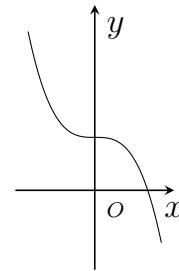
(I)



(II)



(III)



(IV)

Trong các mệnh đề sau hãy chọn mệnh đề **đúng**?

A. Đồ thị hàm số (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị hàm số (II) xảy ra khi $a \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị hàm số (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

D. Đồ thị hàm số (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

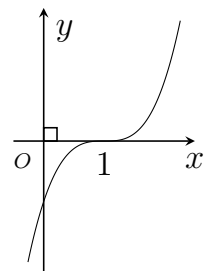
Câu 217. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



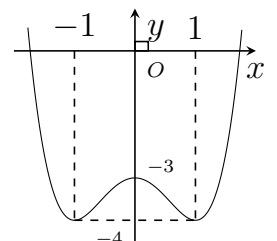
Câu 218. Xác định các hệ số a, b, c để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

A. $a = -\frac{1}{4}; b = 3; c = -3$.

B. $a = 1; b = -2; c = -3$.

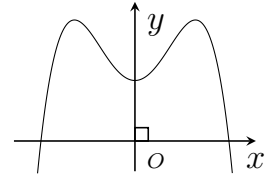
C. $a = 1; b = -3; c = 3$.

D. $a = 1; b = 3; c = -3$.



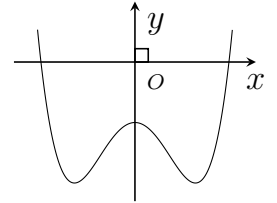
Câu 219. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c > 0$.



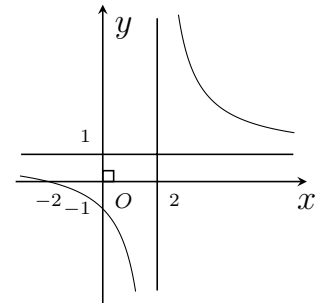
Câu 220. Hỏi a và b thoả mãn điều kiện nào để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên?

- A. $a > 0, b > 0$.
- B. $a > 0, b < 0$.
- C. $a < 0, b > 0$.
- D. $a < 0, b < 0$.



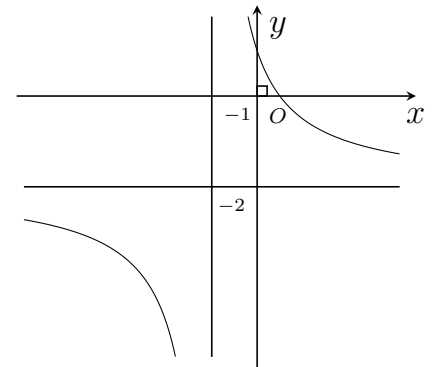
Câu 221. Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ.

- A. $a = 2, b = 2, c = -1$.
- B. $a = 1, b = 1, c = -1$.
- C. $a = 1, b = 2, c = 1$.
- D. $a = 1, b = -2, c = 1$.



Câu 222. Tìm a, b để hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- A. $a = -1, b = -2$.
- B. $a = 1, b = -2$.
- C. $a = -2, b = 1$.
- D. $a = 2, b = 1$.



Câu 223. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng như sau .

Với $m \in (1; 3)$ thì phương trình $|f(x)| = m$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 5.

B.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	0	$-\infty$	

D.

Câu 224. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Phương trình $|f(x)| = 4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

2.

C. 3.

1.

Câu 225. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt

$x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} < m < 1$.

$\frac{1}{2} \leq m < 1$.

C. $0 < m < 1$.

$0 < m \leq 1$.

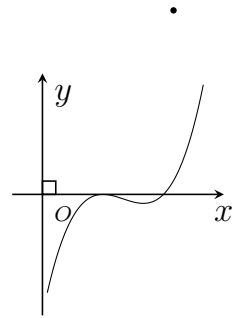
Câu 226. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.



Câu 227. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đạo hàm như hình vẽ bên.

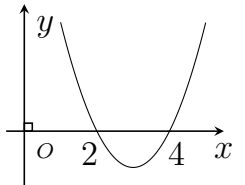
Hàm số $f(1 + x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(\sqrt{3}; +\infty)$.

B. $(-\sqrt{3}; -1)$.

C. $(1; \sqrt{3})$.

D. $(0; 1)$.



Vấn đề 6. TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Câu 228. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất. Ký hiệu $(x_0; y_0)$ là toạ độ của điểm đó. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 4$.

B. $y_0 = 0$.

C. $y_0 = 2$.

D. $y_0 = -1$.

Câu 229. Số điểm chung của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và trục hoành là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 230. Cho hàm số $y = (x - 1)(x^2 + mx + m)$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt,

A. $m > 4$.

B. $-\frac{1}{2} \neq m < 0$.

C. $0 < m < 4$.

D. $\begin{cases} -\frac{1}{2} \neq m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$.

Câu 231. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = m$ cắt đường thẳng $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt?

- A. $-4 < m < 0$. B. $m > 0$. C. $m < -4$. D. $\begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases}$.

Câu 232. Cho phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

- A. $\frac{1}{3} < m < 4$. B. $1 < m < \frac{3}{2}$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $-1 < m < \frac{3}{4}$.

Câu 233. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1?

- A. $\frac{1}{3} < m < 3$. B. $1 < m < \frac{5}{3}$. C. $2 < m < \frac{7}{3}$. D. $-2 < m < \frac{4}{3}$.

Câu 234. Cho phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1\frac{5}{2} \end{cases}$.