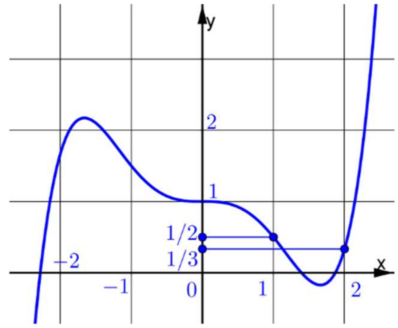
ĐỒ THỊ HÀM HỢP CHỨA MŨ – LÔGARIT

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được mô tả như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(x^2+2x\right)=1+2\ln(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt biết rằng $f(0)=1$ và $y=f(x)$ là hàm đa thức?



A. 2 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

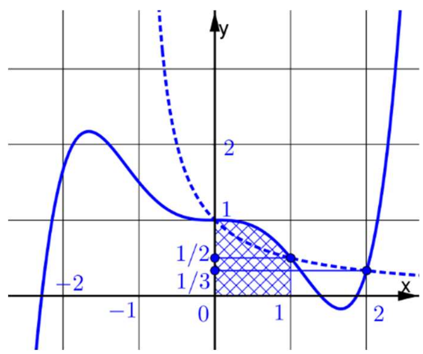
Lời giải

Chọn D

Ta xét $y=f\left(x^2+2x\right)-2\ln(x+1)$

$\Rightarrow y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)-\dfrac{2}{x+1}\Rightarrow y'=(2x+2)\left(f'(t)-\dfrac{1}{t+1}\right)$.

Trong đó $t=x^2+2x$ và ta có $y'=0\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t+1}$. Ta chú ý với $x>-1$ thì $t=(x+1)^2-1>-1$.



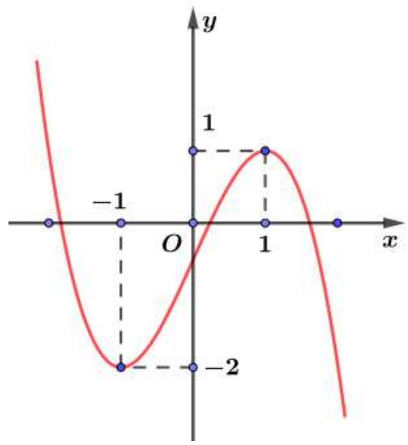
Do vậy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0=x^2+2x\\t=1=x^2+2x\\t=2=x^2+2x\end{array}\right.\xrightarrow{\boxed{x>-1}}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}-1\\x=\sqrt{3}-1\end{array}\right.$. Ta có BBT:

x	-1		0		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{3}-1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)-2\ln\sqrt{2}$	$\searrow$	$f(2)-2\ln\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Chú ý rằng $f(0)=1$ còn $f(2)=f(0)+\int_0^2 f'(x)dx \approx f(0)+S \Rightarrow \boxed{f(2)=S+1}$ với S là diện tích phần tô đậm. Dễ thấy $0,75<S<1$ còn $2\ln\sqrt{3}\approx 1,099 \Rightarrow f(2)-2\ln\sqrt{3}\approx S-0,099<1$.

Vì vậy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)-2\ln(x+1)$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left[e^{f(x)}-\frac{1}{2}(f(x))^2-f(x)\right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$y'=f'\left[e^{f(x)}-\frac{1}{2}(f(x))^2-f(x)\right].f'(x).\left[e^{f(x)}-f(x)-1\right]$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ e^{f(x)}-f(x)-1=0 \quad (1) \\ f'\left[e^{f(x)}-\frac{1}{2}(f(x))^2-f(x)\right]=0 \quad (2) \end{array}\right.$$ .Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Đặt $t=f(x)$. Giải $(1): e^t-t-1=0$.

Xét $h(t)=e^t-t-1 \Rightarrow h'(t)=e^t-1$.

$h'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

BBT:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0
$h(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Do đó $h(t)\ge 0 \forall t \Rightarrow h(t)$ tiếp xúc với trục Ox . Pt (1) có nghiệm kép, nghiệm này không là cực trị.

Giải (2): $\left[\begin{array}{ll} e^t-\frac{1}{2}t^2-t=1 & (3) \\ e^t-\frac{1}{2}t^2-t=-1 & (4) \end{array}\right.$.

Giải (3): $e^t-\frac{1}{2}t^2-t-1=0$.

Xét $k(t)=e^t-\frac{1}{2}t^2-t-1 \Rightarrow k'(t)=e^t-t-1\geq 0 \forall t$.

$\Rightarrow k'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

BBT:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(t)$		$+$	0	$+$	
$k(t)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Pt(3)có nghiệm $t=0 \Rightarrow f(x)=0$. Pt (3)có 3 nghiệm phân biệt $x_1<-1, x_2\in(0;1), x_3>1$.

Giải (4): $e^t-\frac{1}{2}t^2-t+1=0$. Xét $l(t)=e^t-\frac{1}{2}t^2-t+1 \Rightarrow l'(t)=e^t-t-1\geq 0\ \forall t$.

$\Rightarrow l'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

BBT:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$l'(t)$		$+$	0	$+$	
$l(t)$		$\nearrow$	2	$\nearrow$	

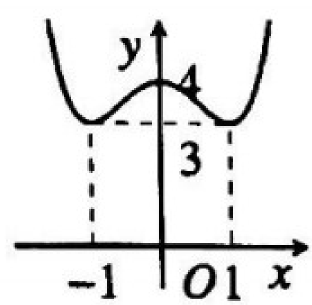
Nhận xét: $l(t)=e^t-\frac{1}{2}t^2-t+1$có $l(-2).l(-3)<0 \Rightarrow l(t)=0$có 1 nghiệm

$t=t_1\in(-3;-2) \Rightarrow f(x)=t_1$có 1 nghiệm Pt (4) có 1 nghiệm.

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt tức hàm số có 6 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

$$\log\frac{f(x)}{mx^2}+x[f(x)-mx]=mx^3-f(x)$$



A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số suy ra $f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị là $-1;0;1$. Do đó

$f'(x)=ax\left(x^2-1\right)\Rightarrow f(x)=\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+b$.

Mặt khác, vì đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua hai điểm $(0;4),\ (1;3)$ nên $f(x)=x^4-2x^2+4\geq 3,\forall x$.

Điều kiện $\frac{f(x)}{mx^2}>0$ suy ra $m>0$.

$\log\frac{f(x)}{mx^2}+x[f(x)-mx]=mx^3-f(x)\ \Rightarrow\log f(x)+f(x)+xf(x)=\log\left(mx^2\right)+mx^2+x\left(mx^2\right)$.

$\Leftrightarrow\log\left[(x+1)f(x)\right]+\left(x+1\right).f(x)=\log\left[\left((x+1)mx^2\right)\right]+\left(x+1\right).mx^2$ (*) (Do $x+1>0$).

Xét hàm số $g(t)=\log t+t$ với $t>0$. Ta có $g'(t)=\frac{1}{t.\ln 10}+1>0$ với $t>0$.

Từ (*) ta có $(x+1)f(x)=(x+1)mx^2\Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{x^4-2x^2+4}{x^2}=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-6$.

Đặt $u=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$, khi đó $m=u^2-6,\forall u\geq 2\sqrt{2}$.

Ứng với mỗi giá trị của $u>2\sqrt{2}$ cho ta hai giá trị dương của x nên yêu cầu bài toán đưa về điều kiện là tìm m để phương trình $m=u^2-6$ có đúng một nghiệm $u>2\sqrt{2}$.

Đặt $h(u)=u^2-6$ với $u>2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(u)$.

u	$-\infty$		0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(u)$	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m>2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2021;2021]$ nên $m\in\left\{3;\ 4;\ldots;\ 2021\right\}$.

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt:

$$2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}+\log_2\left[f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)+5\right]=m$$

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = g(x) = 2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}} + \log_2\left[f^2(x) - 4f(x) + 5\right]$

TXĐ: $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}.\ln 2.\left[f'(x) - \frac{4f'(x)}{f^2(x)}\right] + \frac{\left(2f(x)-4\right)f'(x)}{\left[f^2(x)-4f(x)+5\right]\ln 2}$$

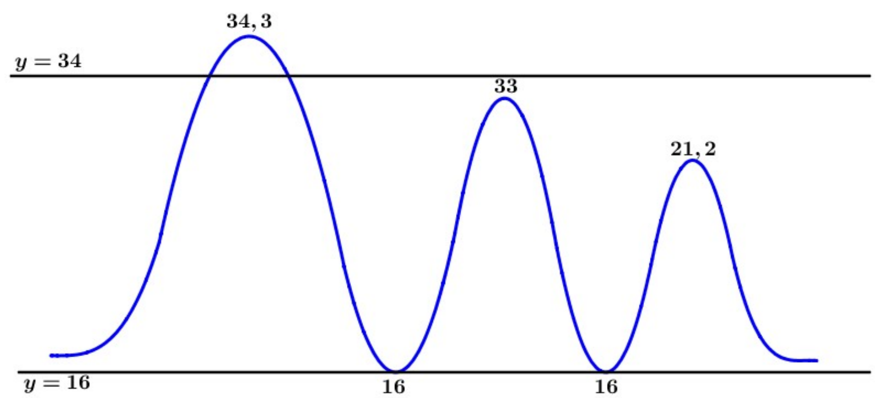
$$= \left[f(x)-2\right].f'(x).\left[2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}.\ln 2.\frac{f(x)+2}{f^2(x)} + \frac{2}{\left[f^2(x)-4f(x)+5\right]\ln 2}\right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha, \alpha \in (1;2) \\ x = \beta, \beta \in (2;3) \\ x = 1, x = 2, x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		α		2		β		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	16	$\nearrow$	$32+log_2 5$	$\searrow$	16	$\nearrow$	33	$\searrow$	16	$\nearrow$	$2^{\frac{13}{3}}+1$	$\searrow$	16

Đồ thị minh họa :



Từ bảng biến thiên, hình vẽ và $m \in \mathbb{Z}$ ta có :

$$\left[\begin{array}{l} m = 16 \\ m = 34 \end{array}\right.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	4	$\nearrow$	12
		0					

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_6\left(2f(x)+m\right) = \log_4\left(f(x)\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 1. **B.** 3. **C.** 16. **D.** 15.

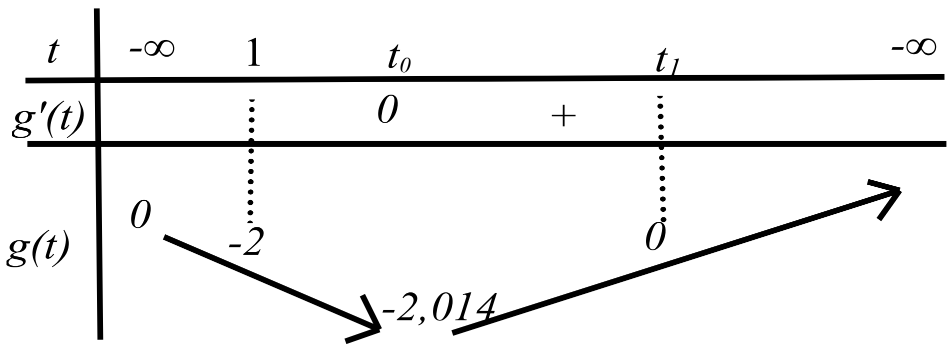
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_6\left(2f\left(x\right)+m\right)=\log_4\left(f\left(x\right)\right)\Rightarrow\begin{cases}f\left(x\right)=4^t\\2f\left(x\right)+m=6^t\end{cases}\Rightarrow 2.4^t+m=6^t\Leftrightarrow m=6^t-2.4^t.(*)$

Xét hàm số $g\left(t\right)=6^t-2.4^t$ có $g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 6^t\ln 6=4^t\ln 16\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{\ln 16}{\ln 6}\Rightarrow t_0=\ln_{\frac{3}{2}}\frac{\ln 16}{\ln 6}$.

Có $g\left(t\right)=0\Rightarrow t_1=\log_{\frac{3}{2}}2$. Hàm số $g\left(t\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Nếu phương trình $(*)$ có 1 nghiệm t thì phương trình đã cho không thể có 4 nghiệm

Nếu phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $t_3<t_4$ thì khi đó dựa vào bảng bt của $g\left(t\right)$ có $t_3<t_4\in\left(t_0;t_1\right)$

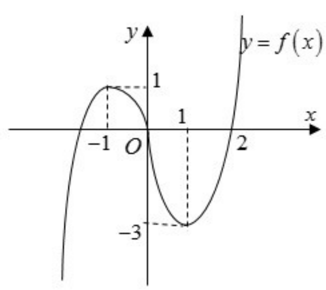
Do đó phương trình $f\left(x\right)=4^{t_4}$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy $ycbt\Leftrightarrow pt\, f\left(x\right)=4^{t_3}$ phải có nghiệm duy nhất .Hay $t_3\in\left(-\infty;1\right)$.

Mà $g\left(1\right)=-2$. Khi đó $-2<m<0$ thì $(*)$ có 2 nghiệm t_3,t_4 thỏa $t_3\in\left(-\infty;1\right)$.

Vậy $m=-1$ là giá trị nguyên duy nhất thỏa mãn.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết $f\left(-3\right)=-10$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f\left(2+f\left(e^x\right)\right)\right)=m$ có bốn nghiệm .

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $e^x=t\Rightarrow t'=e^x>0\forall x\Rightarrow e^x$ làm hàm số luôn đồng biến .

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai cực trị tại $x_1=-1;x_2=1$ tương ứng tại đó $y_1=1;y_2=-3$.

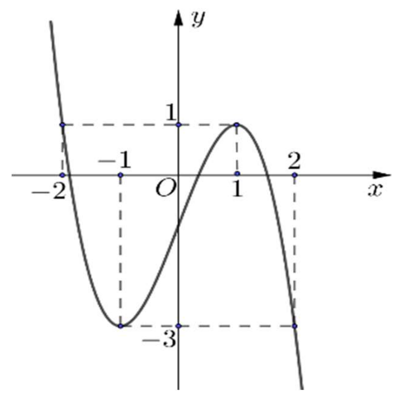
Từ đó ta có bảng sau.

x	$-\infty$									$+\infty$
e^x	0				1					$+\infty$
$f(e^x)$	0				-3					$+\infty$
$2+f(e^x)$	2		1		-1		1			$+\infty$
$f(2+f(e^x))$	0	-1	-3	-1	1	-1	-3	-1	1	$+\infty$
$f(f(2+f(e^x)))$	0	1	-10	1	-3	1	-10	1	-3	$+\infty$

Vậy phương trình $f\left(f\left(2+f\left(e^x\right)\right)\right)=m$ có bốn nghiệm $\Leftrightarrow -10<m<-3$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn .

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây.

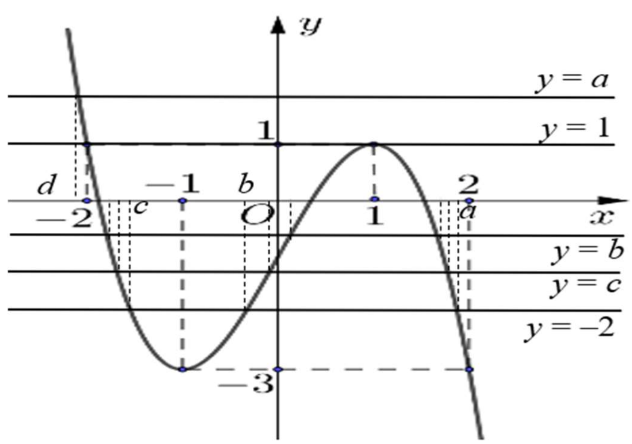


Khi đó, số nghiệm thực của phương trình $f\left(f\left(f\left(2^x\right)\right)\right)=1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Theo đồ thị, ta có: $f\left(f\left(f\left(2^x\right)\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(f\left(2^x\right)\right)=-2 \\ f\left(f\left(2^x\right)\right)=1 \end{array}\right.$

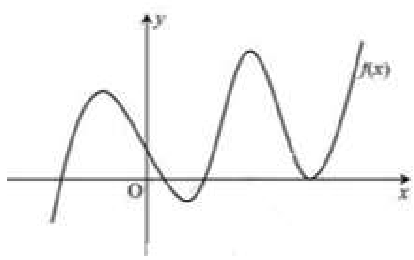
$$*\ f\left(f\left(2^x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(2^x\right)=-2 \\ f\left(2^x\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=a\in(1;2) \\ 2^x=b\in(-1;0)\ (ptvn) \\ 2^x=c\in(-2;-1)\ (ptvn) \\ 2^x=1 \\ 2^x=-2\ (ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2 a \\ x=0 \end{array}\right.$$

$$*\ f\left(f\left(2^x\right)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(2^x\right)=a \\ f\left(2^x\right)=b \\ f\left(2^x\right)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=d<-2\ (ptvn) \\ 2^x=e\in(-2;-1)\ (ptvn) \\ 2^x=f\in(0;1) \\ 2^x=g\in(1;2) \\ 2^x=h\in(1;2) \\ 2^x=k\in(-1;0)\ (ptvn) \\ 2^x=m\in(-2;-1)\ (ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=f\in(0;1) \\ 2^x=g\in(1;2) \\ 2^x=h\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2 f \\ x=\log_2 g \\ x=\log_2 h \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta thấy $a\neq f\neq g\neq h$. Do đó, phương trình có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị biểu diễn như hình vẽ và đồ thị đạo hàm không tiếp xúc với trục hoành. Khi ấy, hãy tính số nghiệm của phương trình dưới đây

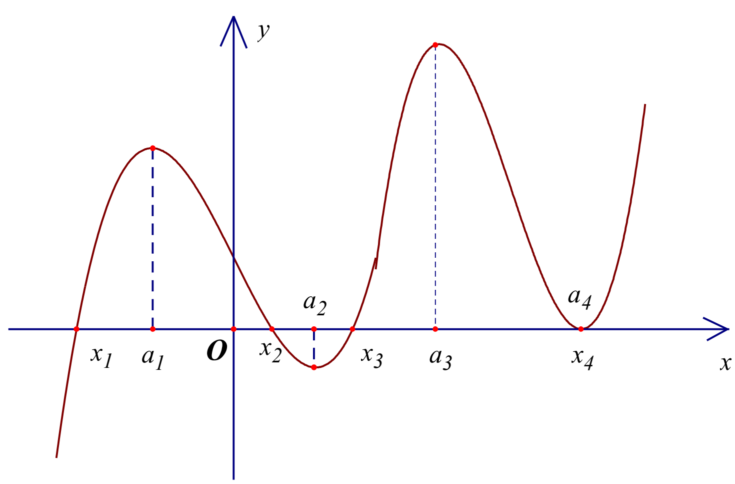
$$f(x).2^{f'(x)}+2f'(x).3^{f(x)}=f(x)+2f'(x)$$



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x)=0$ có các nghiệm $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $f'(x)=0$ có các nghiệm là $a_1<a_2<a_3<a_4$ và phương trình $f'(x)=0$ cũng chỉ có 4 nghiệm này (vì đồ thị đạo hàm không tiếp xúc với trục hoành). Từ đồ thị ta có $a_4\equiv x_4$.

$f(x).2^{f'(x)}+2f'(x).3^{f(x)}=f(x)+2f'(x) \Leftrightarrow f(x)\left(2^{f'(x)}-1\right)+2f'(x)\left(3^{f(x)}-1\right)=0$ (1).

Dễ nhận thấy $x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2, a_3$ là các nghiệm của phương trình (1).

Ta chứng minh rằng phương trình (1) chỉ có 7 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2, a_3$.

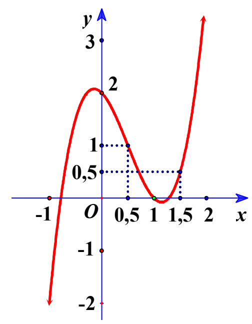
Thật vậy:

Trường hợp 1: Nếu $x < x_1$ thì $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{f(x)} < 1 \\ 2^{f'(x)} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{f(x)} - 1 < 0 \\ 2^{f'(x)} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT(1) < 0$

Trường hợp 2: Nếu $x_1 < x < a_1$ thì $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{f(x)} > 1 \\ 2^{f'(x)} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{f(x)} - 1 > 0 \\ 2^{f'(x)} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT(1) > 0$.

Thực hiện tương tự đối với các khoảng còn lại ta thấy VT(1) luôn âm hoặc luôn dương trên các khoảng đó. Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau đây



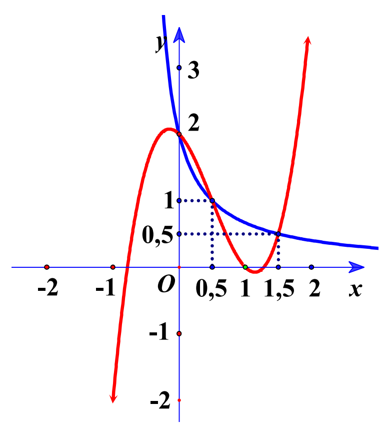
Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2\ln x$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(\frac{4}{5}; 1\right)$.   **B.** $\left(\frac{6}{5}; 2\right)$.   **C.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.   **D.** $\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right)$.

Lời giải

Chọn C

- Với $x > 0$, có $g'(x) = 2x.f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2.\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x^2.f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) > 1\ (*)$
- Đặt $t = x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = t + \frac{1}{2}$. Khi đó $(*)$ trở thành $\left(t + \frac{1}{2}\right)f'(t) > 1 \Leftrightarrow f'(t) > \frac{2}{2t+1}$.



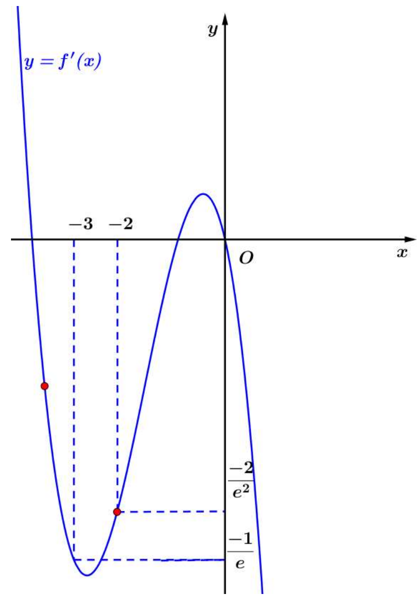
- Vẽ $(C): y = \frac{2}{2t+1}$ trên cùng hệ trục.

Dễ thấy trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ thì đồ thị $f'(t)$ nằm bên trên đồ thị $\frac{2}{2t+1}$ nên suy ra $f'(t) > \frac{2}{2t+1}$ trên

$\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ tức $f'(t)-\dfrac{2}{2t+1}>0$ trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra $g'(x)>0,\forall x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ tức $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

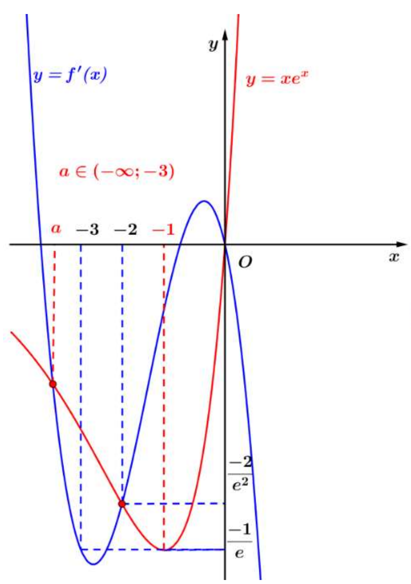
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị $(C): y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=g(x)=f\left(-\sqrt{9-x^2}\right)+\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)e^{-\sqrt{9-x^2}}$ đồng biến trên từng khoảng $(a;b),(c;d)$ và $(a;b)\cap(c;d)=\varnothing$. Gọi $m=\max(b-a)+\max(d-c)$. Khẳng định đúng là:

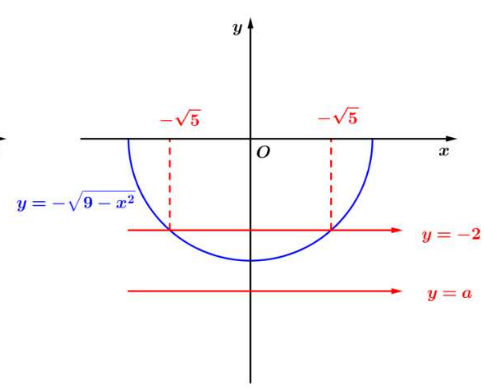


A. $m=6$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2\sqrt{5}$. **D.** $m=2\left(3+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B





- Ta có: $y=g(x)=f\left(-\sqrt{9-x^2}\right)+\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)e^{-\sqrt{9-x^2}}$

$\Leftrightarrow y=g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)+\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}.e^{-\sqrt{9-x^2}}-\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}.e^{-\sqrt{9-x^2}}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)+\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}.e^{-\sqrt{9-x^2}}\left(-\sqrt{9-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)-x.e^{-\sqrt{9-x^2}}$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)-x.e^{-\sqrt{9-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)+e^{-\sqrt{9-x^2}}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(-\sqrt{9-x^2}\right)=-\sqrt{9-x^2}.e^{-\sqrt{9-x^2}},(*)\end{array}\right.$

Ở phương trình (*), ta đặt: $t=-\sqrt{9-x^2}$ thì phương trình thành: $f'(t)=te^t$ (*)

Phương trình (*) cũng chính là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=te^t$. Từ đó, dựa vào hình vẽ ta suy ra được các nghiệm đó là:

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-\infty;-3)\\ t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{9-x^2}=a\in(-\infty;-3)\\ -\sqrt{9-x^2}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{9-x^2}=a\in(-\infty;-3)\\ \sqrt{9-x^2}=2\end{array}\right.;\forall x\in[-3;3]$

Đến đây ta nhận thấy với $a\in(-\infty;-3)$ thì phương trình $-\sqrt{9-x^2}=a$ vô nghiệm nên suy ra:

$\Rightarrow\sqrt{9-x^2}=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

x	-3		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ đó ta có bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=g(x)$ như sau:

Dựa vào BBT trên, ta kết luận hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên từng khoảng $\left(-3;-\sqrt{5}\right),\left(0;\sqrt{5}\right)$

Suy ra $m=\max(b-a)+\max(d-c)=\max\left(-\sqrt{5}+3\right)+\max\left(\sqrt{5}-0\right)=3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$

Vì $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Hơn nữa $g(-x)=f\left(e^{(-x)^2-|-x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=g(x),x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Xét $x \ge 0$

$g(x) = f\left(e^{x^2-x-2}\right) \Rightarrow g'(x) = (2x-1).e^{x^2-x-2}.f'\left(e^{x^2-x-2}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(e^{x^2-x-2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ e^{x^2-x-2}=1\left(vì\ \ e^{x^2-x-2}>0,\forall x\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2\left(vì\ \ x\ge 0\right) \end{array}\right.$.

Nếu $x>2$ thì $x^2-x-2>0$ thì $e^{x^2-x-2}>1$ suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)>0$.

Nếu $0\le x<2$ thì $x^2-x-2<0$ thì $0<e^{x^2-x-2}<1$ suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)<0$.

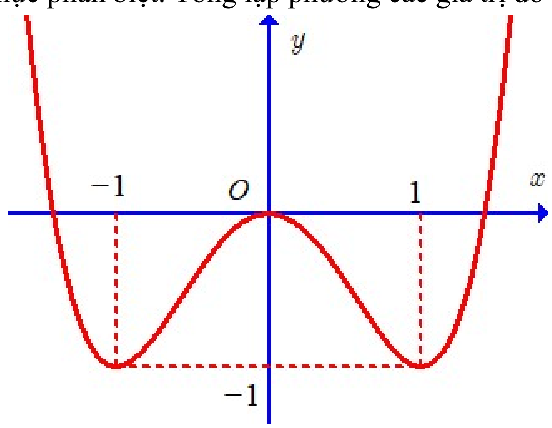
Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ trên $\left[0;+\infty\right)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $g(x)$ có hai điểm cực trị dương.

Do $g(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng tồn tại các giá trị của tham số m để phương trình $3.3^{2f^2(x)}-m\left(4\left|f(x)\right|+3m+3\right)3^{f^2(x)}+3=0$ có đúng 7 nghiệm thực phân biệt. Tổng lập phương các giá trị đó của m là

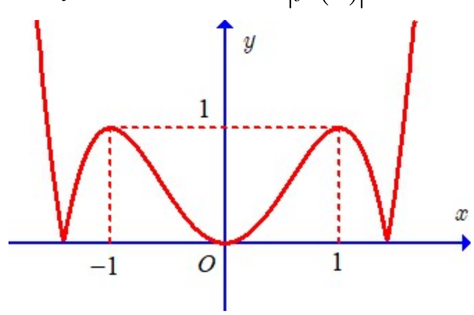


A. -8. **B.** 1. **C.** -7. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $\left|f(x)\right|$ như sau:



Xét phương trình $3.3^{2f^2(x)} - m\left(4\left|f(x)\right| + 3m + 3\right)3^{f^2(x)} + 3 = 0$ (1)

Đặt $t = \left|f(x)\right|, t \ge 0$, phương trình (1) trở thành

$$3.3^{2t^2} - m\left(4t + 3m + 3\right)3^{t^2} + 3 = 0 \quad (2)$$

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, nếu x_0 là một nghiệm của phương trình $3.3^{2f^2(x)} - m\left(4\left|f(x)\right| + 3m + 3\right)3^{f^2(x)} + 3 = 0$ (1) thì $-x_0$ cùng là nghiệm của (1). Nếu phương trình (1) có đúng 7 nghiệm thì (1) có nghiệm $x_0 = 0$ mà $f(0) = 0$ nên phương trình (1) trở thành

$$3.3^0 - m\left(4.0 + 3m + 3\right)3^0 + 3 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 - 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2. \end{array}\right.$$

Đảo lại:

* Với $m = 1$: Phương trình (1) trở thành $3.3^{2t^2} - \left(4t + 6\right)3^{t^2} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{t^2} = \dfrac{2t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3t}}{3} \\ 3^{t^2} = \dfrac{2t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3t}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3.3^{t^2} = 2t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3t} & (3) \\ 3.3^{t^2} = 2t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3t} & (4) \end{array}\right.$$

Xét (3): $(3) \Leftrightarrow 3.\left[3^{t^2} - 1\right] + 2\left[\sqrt{t^2 + 3t} - t\right] = 0$ mà $3^{t^2} \ge 3^0 = 1$ và $\sqrt{t^2 + 3t} \ge \sqrt{t^2} = t$ với mọi $t \ge 0$ nên $(3) \Leftrightarrow t = 0$.

Xét (4): $(4) \Leftrightarrow 3.3^{t^2} = \dfrac{\left(2t + 3\right)^2 - 4\left(t^2 + 3t\right)}{2t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3t}} = \dfrac{9}{2t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3t}} \Leftrightarrow \dfrac{3}{3^{t^2}} = 2t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3t}$ (5)

Từ (3) và (5) ta suy ra $3.3^{t^2} + \dfrac{3}{3^{t^2}} = 4t + 6$ hay $3.3^{t^2} + \dfrac{3}{3^{t^2}} - 4t - 6 = 0$.

Xét hàm số $h(x) = 3.3^{t^2} + \dfrac{3}{3^{t^2}} - 4t - 6$, ta thấy $h'(x) = 6\ln 3.t.\left(3^{t^2} - 3^{-t^2}\right) - 4$;

$$h''(x) = 6\ln 3.\left[\left(3^{t^2} - 3^{-t^2}\right) + 2t^2.\ln 3.\left(3^{t^2} - 3^{-t^2}\right)\right] > 0, \forall t \ge 0$$

nên $h'(t)$ đồng biến mà $h'(0).h'(1) < 0$ nên phương trình $h'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm $t = t_0 \in (0;1)$. Từ đó suy ra phương trình $h(t) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm mà $h(0) = h(1) = 0$ nên $h(t)$ có đúng hai nghiệm là $t = 0; t = 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: với $t = 0$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm x, với $t = 1$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm x. Tổng cộng 7 nghiệm, do đó $m = 1$ thoả mãn.

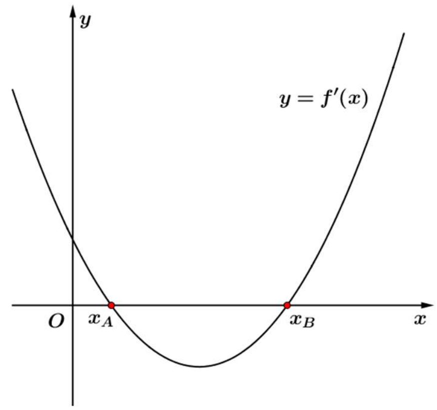
* Với $m = -2$: Phương trình (1) trở thành

$$3.3^{2t^2} + 2\left(4t - 3\right)3^{t^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(3^{t^2} - 1\right)^2 + 8t.3^{t^2} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3^{t^2} - 1 = 0 \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 0.$$

Trường hợp này phương trình đã cho có 3 nghiệm, giá trị $m = -2$ loại.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 13.



Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên R và đồ thị của hàm số dưới đây là của $y=f'\left(x\right)$

Biết rằng $x_A-x_B=2$. Tìm số điểm cực trị của hàm $h\left(x\right)=e^{g\left(x\right)}$ với

$g\left(x\right)=f\left(x-2019\right)+f\left(x-2018\right)+...+f\left(x\right)+...+f\left(x+2019\right)+f\left(x+2020\right)$

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Gọi a,b lần lượt là các nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=0$ với $b-a=2$

Khi ấy ta có: $f'\left(x\right)=k\left(x-a\right)\left(x-b\right)=k\left(x-a\right)\left(x-a-2\right)$.

Ta có: $h\left(x\right)=e^{g\left(x\right)}$. Số điểm cực trị của hàm $h\left(x\right)=e^{g\left(x\right)}$ bằng chính số nghiệm của phương trình

$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow g'\left(x\right).e^{g\left(x\right)}=0\Leftrightarrow g'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow f'\left(x-2019\right)+f'\left(x-2018\right)+...+f'\left(x\right)+...+f'\left(x+2019\right)+f'\left(x+2020\right)=0$

$\Leftrightarrow k.\left(x-a-2019\right)\left(x-a-2021\right)+...+k.\left(x-a\right)\left(x-a-2\right)+..+k.\left(x-a+2020\right)\left(x-a+2018\right)=0$

$\Leftrightarrow k.\left(x-a-2020+1\right)\left(x-a-2020-1\right)+...+k.\left(x-a-1+1\right)\left(x-a-1-1\right)$

$+...+k.\left(x-a+2019+1\right)\left(x-a+2019-1\right)=0$

$\Leftrightarrow k.\left[\left(x-a-2020\right)^2-1\right]+...+k.\left[\left(x-a-1\right)^2-1\right]+...+k.\left[\left(x-a+2019\right)^2-1\right]=0$

$\Leftrightarrow k.\left(x-a-2020\right)^2+...+k\left(x-a-1\right)^2+...+k\left(x-a+2019\right)^2+\underbrace{\left(-k-...-k\right)}_{-4040k}=0$

$\Leftrightarrow k.\left(x-a-2020\right)^2+...+k\left(x-a-1\right)^2+...+k\left(x-a+2019\right)^2-4040k=0$

$\Leftrightarrow k.\left[\left(x-a\right)^2-2.2020\left(x-a\right)+2020^2\right]+...+k.\left[\left(x-a\right)^2-2.\left(x-a\right)+1\right]$

$+...+k.\left[\left(x-a\right)^2+2.2019\left(x-a\right)+2019^2\right]-4040k=0$

$\Leftrightarrow 4040\left(x-a\right)^2+2.\left(x-a\right)\left(-2020-2019-...-1+0+...+2019\right)$

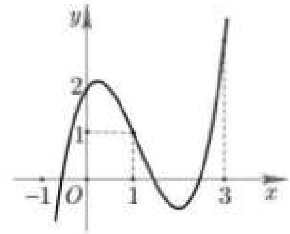
$+\left(-2020\right)^2+\left[\left(-2019\right)^2...+\left(-1\right)^2+0+1^2+...+\left(2019\right)^2\right]-4040=0$

$\Leftrightarrow 4040\left(x-a\right)^2+2.\left(-2020\right)\left(x-a\right)-4040+\left(-2020\right)^2+2.\sum\limits_{k=1}^{2019}x^2=0$ (*)

$\Delta_{(*)}=4040^2-4.4040\left(2020^2-4040+2.\sum\limits_{k=1}^{2019}x^2\right)<0$ nên suy ra (*) vô nghiệm

Từ đó suy ra hàm số $h\left(x\right)=e^{g\left(x\right)}$ không có điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Trên đoạn $[-3;4]$ hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$

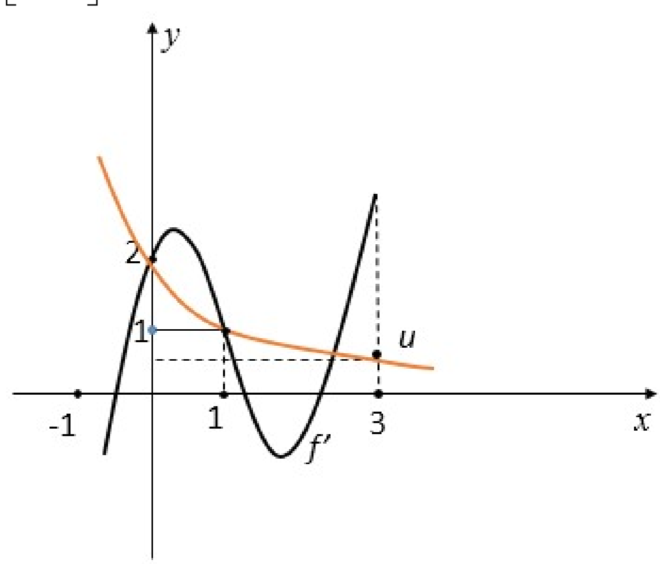
$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x+8}{x^2+8x+16}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}=0$.(1)

Đặt $t=\frac{x}{2}+1\in\left[-\frac{1}{2};3\right],\forall x\in[-3;4]$, (1) thành:

$\frac{1}{2}f'(t)=\frac{2}{2t-2+4}\Leftrightarrow f'(t)=\frac{2}{t+1}$.

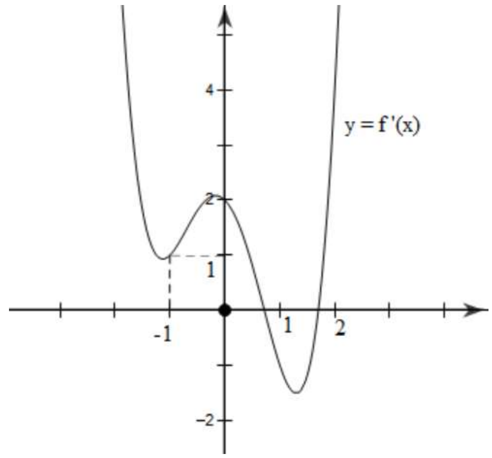
Ta thấy hàm $u(t)=\frac{2}{t+1}$ nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{2};3\right]$, như vậy đồ thị hàm số $f'(t)$ và đồ thị hàm số $u(t)=\frac{2}{t+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ trên cùng một hệ trục như sau:



Do đó trên $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ phương trình $f'(t)=\frac{2}{t+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\\t=a\in(1;3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=2(a-1)\in(0;4)\end{array}\right.$.

Như vậy $g'(x)=0$ có các nghiệm đơn $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2(a-1) \end{array}\right.$ trên đoạn $[-3;4]$, do đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị trên đoạn $[-3;4]$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Trên đoạn $[0;3]$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-1\right)+e^{1-x^2}+2020$ có mấy điểm cực trị

A. 7. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-1\right)+e^{1-x^2}+2020$ có $g'(x)=2xf'\left(x^2-1\right)-2xe^{1-x^2}$

$\Leftrightarrow g'(x)=2x\left[f'\left(x^2-1\right)-e^{1-x^2}\right]$

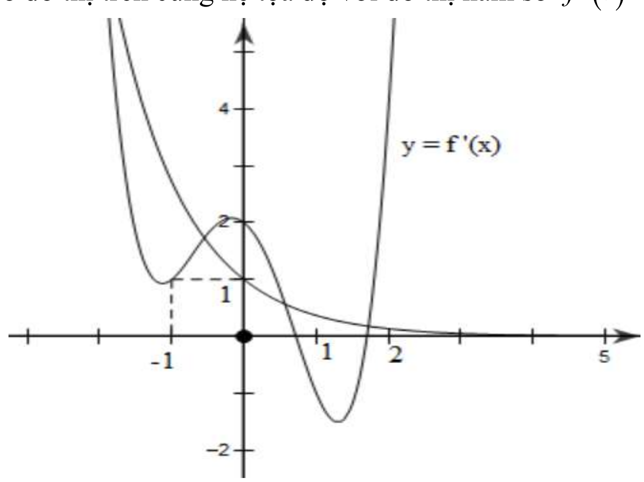
$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right)-e^{1-x^2}=0(*) \end{array}\right.$ (1)

$(*) \Leftrightarrow f'\left(x^2-1\right)=e^{1-x^2}$

Đặt $x^2-1=t$ với $x\in[0;3] \Rightarrow t\in[-1;8]$

Ta có : $x^2=t+1$ Phương trình $(1) \Leftrightarrow f(t)=e^{-t}$ (2)

Xét hàm số $y=e^{-t}$ có đồ thị trên cùng hệ tọa độ với đồ thị hàm số $f'(t)$



Từ đồ thị ta thấy phương trình (2) có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=a\in(-1;0) \\ t=b\in(0;1) \\ t=c\in(1;2) \end{array}\right.$

+) Với $t=a\Rightarrow x^2-1=a\Leftrightarrow x^2=a+1$ có một nghiệm $\in[0;3]$

+) Với $t=b\Rightarrow x^2-1=b\Leftrightarrow x^2=b+1$ có một nghiệm $\in[0;3]$

+) Với $t=c\Rightarrow x^2-1=c\Leftrightarrow x^2=c+1$ có một nghiệm $\in[0;3]$

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả bốn nghiệm đơn phân biệt $[0;3]$ nên hàm số $g(x)$ có bốn điểm cực trị.

_______________ TOANMATH.com _______________