

Họ tên: Số báo danh:

MÃ ĐỀ 035

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực?

A. $y = -x^3 + 2x^2 - 10x + 4$

B. $y = \frac{x+10}{x-1}$

C. $y = x^2 - 5x + 6$

D. $y = x + 5$

Câu 2: Cho hàm số có bảng biến thiên như sau. Tổng các giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt bằng

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

A. 0

B. -1

C. -3

D. -5

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

A. $2 \cot 2x + C$

B. $-\cot 2x + C$

C. $\cot 2x + C$

D. $-2 \cot 2x + C$

Câu 4: Tìm phương trình mặt cầu có tâm là điểm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với trục Oz

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 13$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 10$

Câu 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{2x}{x+1}$; $y = x^2$; $x = 0$; $x = 1$

A. $\left| 2 \ln 2 - \frac{5}{3} \right|$

B. $\left| 2 \ln 2 - \frac{2}{3} \right|$

C. $\left| 2 \ln 2 - \frac{7}{3} \right|$

D. $\left| 2 \ln 2 - \frac{1}{3} \right|$

Câu 6: Cho tam giác ABC có $A(3; 0; 0)$; $B(0; -6; 0)$; $C(0; 0; 6)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của trọng tâm tam giác ABC trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$

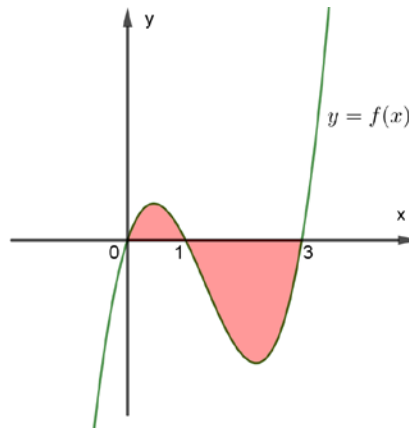
A. $H(-2;-1;3)$

B. $H(2;1;3)$

C. $H(2;-1;-3)$

D. $H(2;-1;3)$

Câu 7: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $S = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

C. $S = \int_0^3 f(x)dx.$

D. $S = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$

B. a^3

C. $2a^3$

D. $\frac{a^3}{3}$

Câu 9: Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số)

B. $\int e^x dx = e^x + C$ (C là hằng số)

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số) với $x \neq 0$

D. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a;b]$

Câu 10: Cho tập hợp $A = \{10; 10^2; 10^3; \dots; 10^{10}\}$. Gọi S là tập các số nguyên có dạng $\log_{100} m$ với $m \in A$. Tính tích các phần tử của tập hợp S

A. 60

B. 24

C. 120

D. 720

Câu 11: Tìm tập xác định của hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

B. $(-\infty; 0)$

C. $\mathbb{R}$

D. $(0; +\infty)$

Câu 12: Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a, x = b$ ($a < b$), có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi^2 \int_a^b |S(x)| dx.$

B. $V = \int_a^b S(x) dx.$

C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx.$

D. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx.$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA; SB; SC$ đôi một vuông góc với nhau và $SA = 6; SB = 4; SC = 5$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tính thể tích khối chóp $S.MBCN$

A. 30

B. 5

C. 15

D. 45

Câu 14: Cho ba điểm $A(2;1;-1); B(-1;0;4); C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

A. $x - 2y - 5z + 5 = 0$

B. $x - 2y - 5z - 5 = 0$

C. $2x - y + 5z + 5 = 0$

D. $x - 2y - 5z = 0$

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $M(2;3)$

A. $y = 2x - 1$

B. $y = -3x + 9$

C. $y = 3x - 3$

D. $y = -2x + 7$

Câu 16: Cho phương trình $25^x - 3.5^x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Tính $3x_1 + 2x_2$

A. $4\log_5 2$

B. 0

C. $3\log_5 2$

D. $2\log_5 2$

Câu 17: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1}{x-2020}$ có phương trình là

A. $x = 2020$

B. $y = 1$

C. $y = 4$

D. $y = 2$

Câu 18: Trong không gian Oxyz cho ba vecto $\vec{a} = (-1;1;0); \vec{b} = (2;2;0); \vec{c} = (1;1;1)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

A. $\vec{a} \perp \vec{b}$

B. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{c} \perp \vec{b}$

Câu 19: Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số sau $y = 10x^4 + 5x^2 + 19$

A. 2

B. 1

C. 3

D. 0

Câu 20: Cho hình trụ có chiều cao bằng $4a$, diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$. Tìm bán kính đáy của hình trụ đó

A. $2a$

B. $\frac{a}{2}$

C. a

D. $\frac{a}{4}$

Câu 21: Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = 2$. Biết diện tích xung quanh của hình nón là

$2\sqrt{5}\pi$. Tính thể tích khối nón

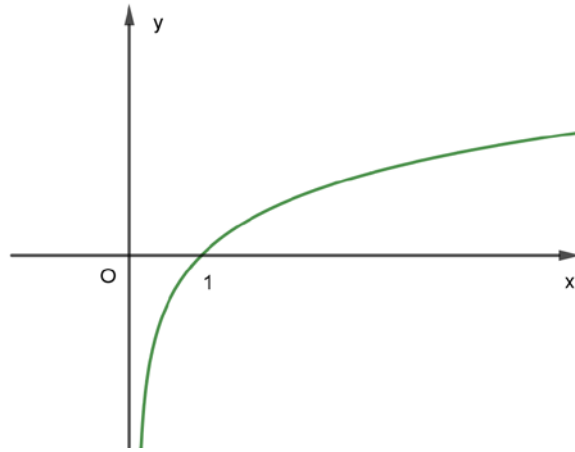
A. π

B. $\frac{5}{3}\pi$

C. $\frac{4}{3}\pi$

D. $\frac{2}{3}\pi$

Câu 22: Hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- A. $y = \ln x$ B. $y = 2^x$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = e^x$

Câu 23: Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B có cạnh $AB = 3$; $BC = 4$ và góc giữa DC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

- A. $V = \frac{125\sqrt{3}}{3} \pi$ B. $V = \frac{25\sqrt{2}}{3} \pi$ C. $V = \frac{125\sqrt{2}}{3} \pi$ D. $V = \frac{5\sqrt{2}}{3} \pi$

Câu 24: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$

- A. $(-\infty; 1)$ B. $[1; +\infty)$ C. $(-\infty; 1]$ D. $(1; +\infty)$

Câu 25: Gọi $m; M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+2}$ trên đoạn $[-1; 34]$. Tính tổng $S = 3m + M$

- A. $S = \frac{13}{2}$ B. $S = \frac{63}{2}$ C. $S = \frac{25}{2}$ D. $S = \frac{11}{2}$

Câu 26: Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 4$; $y = -2$; $x = 0$; $x = 1$ quanh trục Ox

- A. 20π B. 36π C. 12π D. 16π

Câu 27: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a}{2}$.

Tính thể tích khối lăng trụ

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ B. $\frac{3a^3}{8}$ C. $\frac{a^3}{8}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số sau đồng biến trên tập số thực

$$y = (4 - m^2)x^3 + (2 - m)x^2 + 7x - 9$$

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 29: Cho đường thẳng (d) nằm trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và vuông góc với đường thẳng (d') : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d)

- A. $(2;1;1)$ B. $(4;-2;2)$ C. $(-4;2;-2)$ D. $(-2;1;1)$

Câu 30: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $a; b; c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác. Biết dãy số $a; b; c; p$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm cosin của góc nhỏ nhất trong tam giác đó

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 31: Một người chơi trò gieo súc sắc. Mỗi ván gieo đồng thời ba con súc sắc. Người chơi thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt sáu chấm. Tính xác suất để trong ba ván, người đó thắng ít nhất hai ván

- A. $\frac{1}{1296}$ B. $\frac{308}{19683}$ C. $\frac{58}{19683}$ D. $\frac{53}{23328}$

Câu 32: Cho hai điểm $A(2;1;-1); B(0;3;1)$. Biết tập hợp các điểm $M \in mp(\alpha): x + y + z + 3 = 0$ thỏa mãn $2.MA^2 - MB^2 = 4$ là đường tròn có bán kính r . Tính r

- A. $r = 2\sqrt{7}$ B. $r = 6$ C. $r = 2\sqrt{6}$ D. $r = 5$

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{20 + \sqrt{6x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 8x + 2m}}$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng

- A. $m \in [6;8)$ B. $m \in (6;8)$ C. $m \in [12;16)$ D. $m \in (0;16)$

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 10$ và $g(x) = x^3 - 3x + 2$. Đặt

$F(x) = g[f(x)]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $F(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt

- A. $m \in (-1;3)$ B. $m \in (0;4)$ C. $m \in (3;6)$ D. $m \in (1;3)$

Câu 35: Cho tứ diện ABCD có $AB = a; AC = BC = AD = BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABD); (ABC)$ là α . Tính $\cos \alpha$ biết mặt cầu đường kính MN tiếp xúc với cạnh AD

- A. $2 - \sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3} - 3$ C. $3 - 2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2} - 1$

Câu 36: Biết $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx = a.\pi + b \ln 2$ với $a; b$ là các số hữu tỉ. Tính tỷ số $\frac{a}{b}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, mặt bên (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với

SC, chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 38: Cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(4;0;0)$ và $N(0;0;3)$ sao cho mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến mặt phẳng (α)

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 2

Câu 39: Tìm m để khoảng cách từ điểm $A\left(\frac{1}{2};1;4\right)$ đến đường thẳng $(d): \begin{cases} x=1-2m+mt \\ y=-2+2m+(1-m)t \\ z=1+t \end{cases}$

đạt giá trị lớn nhất

- A. $m=\frac{2}{3}$ B. $m=\frac{4}{3}$ C. $m=\frac{1}{3}$ D. $m=1$

Câu 40: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\ln(x^2+3x+1)+x^2+3x<0$

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 41: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=2;BC=4$.

Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi có góc B bằng 60° . Gọi điểm K là trung điểm của $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ biết $d(A'B';BK)=\frac{3}{2}$

- A. $4\sqrt{3}$ B. 6 C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Câu 42: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1=\frac{1}{3} \\ u_{n+1}=\frac{(n+1)u_n}{3n}; \forall n \geq 1 \end{cases}$. Có bao nhiêu số nguyên dương n

thỏa mãn $u_n < \frac{1}{2020}$

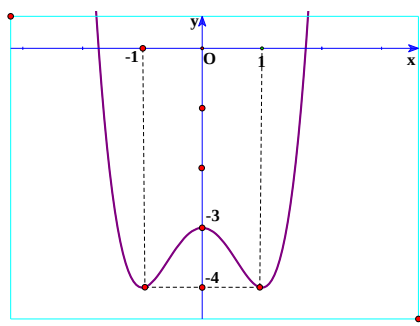
- A. 0 B. 9 C. vô số D. 5

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4x)=f(x)+4x^3+2x$ và $f(0)=2$. Tính

$$\int_0^1 f(x)dx$$

- A. $\frac{148}{63}$ B. $\frac{146}{63}$ C. $\frac{149}{63}$ D. $\frac{145}{63}$

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Tìm m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm trên đoạn $[0; \pi]$



A. $-4 < m \leq -3$

B. $-4 \leq m \leq -3$

C. $m = -4$ hoặc $m > -3$

D. $-4 \leq m < -3$

Câu 45: Tìm số nghiệm x thuộc $[0;100]$ của phương trình sau :

$$2^{\cos \pi x - 1} + \frac{1}{2} = \cos \pi x + \log_4 (3 \cos \pi x - 1)$$

A. 51

B. 49

C. 50

D. 52

Câu 46: Tính tổng các số nguyên dương n thỏa mãn $4^n + 3$ viết trong hệ thập phân là số có 2020 chữ số

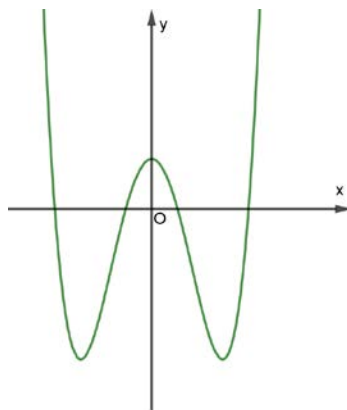
A. 6711

B. 6709

C. 6707

D. 6705

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ .



Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x) = 3f^4(x) + 2f^2(x) + 5$

A. 6

B. 3

C. 5

D. 7

Câu 48: Cho hai điểm $M(3;1;1); N(4;3;4)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-9}{1}$. Biết điểm

$I(a;b;c)$ thuộc đường thẳng (d) sao cho $IM + IN$ đạt giá trị nhỏ nhất . Tính $S = 2a + b + 3c$

A. 36

B. 38

C. 42

D. 40

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a; AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng $(SAB); (SAC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$

A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$

B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

Câu 50: Cho a là hằng số dương khác 1 thỏa mãn $a^{2\cos 2x} \geq 4\cos^2 x - 1; \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của a thuộc

khoảng nào sau đây

A. $(4; +\infty)$

B. $(2; 3)$

C. $(0; 2)$

D. $(3; 5)$

----- **HẾT** -----

1	A	26	D
2	D	27	A
3	D	28	C
4	A	29	D
5	A	30	A
6	D	31	B
7	B	32	D
8	A	33	A
9	A	34	B
10	C	35	B
11	D	36	A
12	B	37	A
13	C	38	D
14	B	39	B
15	D	40	A
16	D	41	C
17	C	42	C
18	D	43	A
19	D	44	A
20	D	45	A
21	C	46	B
22	A	47	D
23	C	48	D
24	B	49	B
25	A	50	B

ĐÁP ÁN ĐỀ THI

1A	2D	3D	4A	5A	6D	7B	8A	9A	10C	11D	12B	13C	14B	15D
16D	17C	18D	19D	20D	21C	22A	23C	24B	25A	26C	27A	28C	29D	30A
31B	32D	33A	34B	35B	36A	37A	38D	39B	40A	41C	42C	43A	44A	45A
46B	47D	48D	49B	50B										

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

Vì $y' = -3x^2 + 4x - 10 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Chọn D

Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt thì $-4 < m < 2$

Do vậy m nhận các giá trị nguyên là $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$. vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m là $(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$.

Câu 3. Chọn D

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx = -2 \cot 2x + c$$

Câu 4. Chọn A

Hình chiếu của điểm $I(1; 2; 3)$ lên trục Oz là điểm H có tọa độ là: $H(0; 0; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{IH} = (-1; -2; 0)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục Oz nên: $R = |\overrightarrow{IH}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu có tâm là $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với trục Oz là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

Câu 5. Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{2x}{x+1}$; $y = x^2$; $x = 0$; $x = 1$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left| x^2 - \frac{2x}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2x}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x^2 - 2 + \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x + 2 \ln|x+1| \right) \right|_0^1 \\ &= \left| 2 \ln 2 - \frac{5}{3} \right| \end{aligned}$$

Câu 6. Chọn D

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G(1; -2; 2)$.

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với (α) .

Mặt phẳng (α) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$.

Vì $d \perp (\alpha)$ nên: $\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $G(1; -2; 2)$ và

$$\text{vuông góc với } (\alpha) \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

H là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (α) nên $H = d \cap (\alpha)$. Hay tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; -1; 3)$$

Câu 7. Chọn B

Ta thấy $f(x) > 0 \forall x \in (0;1)$ và $f(x) < 0 \forall x \in (1;3)$

$$\text{Do đó: } S = \int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

Câu 8. Chọn A

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow S_{ABCD} = a^2$.

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot a^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

Câu 9. Chọn A

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (C \text{ là hằng số, } \alpha \text{ là hằng số và } \alpha \neq -1).$$

Câu 10. Chọn C

Giả thiết $\Rightarrow m = 10^k \quad (1 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N})$

$$\text{Ta có } \log_{100} m = \log_{10^2} 10^k = \frac{k}{2}$$

$$\log_{100} m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \text{ là số nguyên thì } k \in \{2; 4; 6; 8; 10\}$$

Suy ra tích tích các phần tử của tập hợp S là $(\log_{100} 10^2) \cdot (\log_{100} 10^4) \cdot \dots \cdot (\log_{100} 10^{10}) = 1.2.3.4.5 = 120$

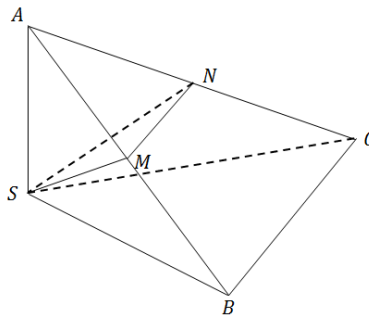
Câu 11. Chọn D

Điều kiện $x > 0$

Suy ra tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$

Câu 12. Chọn B

$$\text{Giả thiết ta suy ra } V = \int_a^b S(x) dx$$

Câu 13. Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot SB \cdot SC = 20$$

$$\text{Có tỉ lệ thể tích: } \frac{V_{ASMN}}{V_{ASBC}} = \frac{AS \cdot AM \cdot AN}{AS \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{ASMN} = \frac{V_{ASBC}}{4} = 5$$

$$\text{Do: } V_{ASBC} = V_{ASMN} + V_{SMNBC} \Rightarrow V_{SMNBC} = V_{ASBC} - V_{ASMN} = 15$$

Câu 14. Chọn B

Gọi phương trình mặt phẳng cần tìm là (P)

$$\text{Ta có: } BC \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{BC} (1; -2; -5)$$

$$(P) \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;-1) \\ \vec{n}(1;-2;-5) \end{cases} \Rightarrow (P): 1(x-2) - 2(y-1) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z - 5 = 0$$

Câu 15. Chọn D

Phương trình tiếp tuyến của hàm số: $y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0$

Tiếp tuyến tại $M(2;3) \Rightarrow x_0 = 2; y_0 = 3$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'_{(x_0)} = y'_{(2)} = \frac{-2}{(2-1)^2} = -2$$

Vậy trình tiếp tuyến cần tìm: $y = -2(x-2) + 3 = -2x + 7$

Câu 16. Chọn D

$$\text{Ta có: } 25^x - 3.5^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3.5^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5 2 \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0; x_2 = \log_2 5$. Vậy $3x_1 + 2x_2 = 2\log_2 5$.

Câu 17. Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x-1}{x-2020} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2020}{x}} = 4.$$

Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 4$.

Câu 18. Chọn D

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow A$ đúng; $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow B$ đúng

$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow C$ đúng; $\vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4 \neq 0 \Rightarrow D$ sai.

Câu 19. Chọn D.

Ta có: $y' = 40x^3 + 10x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	19	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số không có điểm cực đại nào.

Lưu ý: Có thể giải theo trắc nghiệm như sau:

Do $\begin{cases} a \cdot b = 10 \cdot 5 = 50 > 0 \\ a = 10 > 0 \end{cases}$ nên đồ thị hàm số chỉ có 1 điểm cực trị và là điểm cực tiểu.

Câu 20. Chọn D.

Gọi diện tích xung quanh, bán kính đáy, đường sinh, đường cao của hình trụ lần lượt là S_{xq}, r, l, h .

$$\text{Ta có: } S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi r h \Rightarrow r = \frac{S_{xq}}{2\pi h} = \frac{2\pi a^2}{2\pi \cdot 4a} = \frac{a}{4}.$$

Câu 21. Chọn C.

Gọi diện tích xung quanh, đường sinh, đường cao của hình nón lần lượt là S_{xq}, l, h .

$$\text{Ta có: } S_{xq} = \pi R l \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{\pi R} = \frac{2\sqrt{5}\pi}{2\pi} = \sqrt{5} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = 1.$$

Vậy thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3} \pi$.

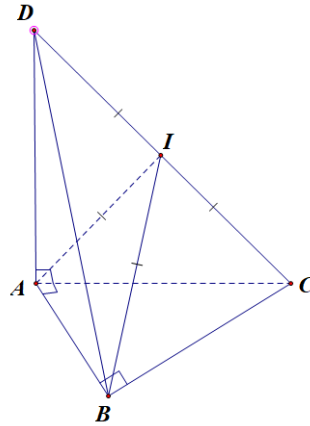
Câu 22. Chọn A

Từ hình dạng đồ thị hàm số ta thấy đây là đồ thị hàm số $\log_a x$.

Mặt khác, hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $a > 1$.

Do đó chọn A.

Câu 23. Chọn C



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} CB \perp AB \\ CB \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CB \perp (ABD) \Rightarrow CB \perp DB \Rightarrow \triangle BDC \text{ vuông tại } B$$

Gọi I là trung điểm DC , do $\triangle ADC, \triangle BDC$ lần lượt vuông tại A, B có DC là cạnh huyền nên

$$IA = IB = IC = ID = \frac{CD}{2}$$

Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và $R = \frac{CD}{2}$.

Ta có:

$DA \perp (ABC)$ nên góc giữa DC và (ABC) là góc $\widehat{DCA}$

$$\Rightarrow \widehat{DCA} = 45^\circ$$

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 90^\circ, AB = 3, BC = 4 \Rightarrow AC = 5$

Xét $\triangle DAC$ có $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{DCA} = 45^\circ, AC = 5 \Rightarrow CD = 5\sqrt{2}$

$$\text{Do đó } R = \frac{CD}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{125\sqrt{2}}{3} \pi$$

Câu 24. Chọn B

Ta có

$$\left(\frac{1}{3} \right)^x \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{-x+2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -x + 2 \quad \left(\text{do } \frac{1}{3} < 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $[1; +\infty)$

Câu 25. Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = [-2; +\infty)$$

Ta có $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in [-1; 34]$.

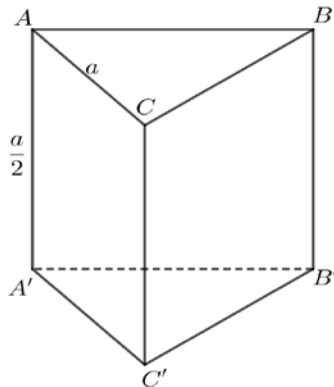
Lại có $y(-1) = -\frac{3}{2}$; $y(34) = 11$. Suy ra $m = -\frac{3}{2}$; $M = 11$. Vậy $S = 3m + M = \frac{13}{2}$.

Câu 26. Chọn C

Thể tích của vật thể cần tìm :

$$V = \pi \int_0^1 (4^2 - (-2)^2) dx = \pi \int_0^1 12 dx = 12\pi.$$

Câu 27. Chọn A



Thể tích của lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ cần tìm :

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Câu 28. Chọn C

TH1. $4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$

Với $m = 2$ thì $y = 7x - 9$ là hàm bậc nhất có $a = 7 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 2$ (nhận).

Với $m = -2$ thì $y = 4x^2 + 7x - 9$ là hàm bậc hai nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = -2$ (loại).

TH2. $4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Khi đó $y' = 3(4 - m^2)x^2 + 2(2 - m)x + 7$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ 22m^2 - 4m - 80 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2; 2) \\ m \in \left[-\frac{20}{11}; 2\right] \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{20}{11}; 2\right]; m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m = -1; m = 0; m = 1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29. Chọn D

Mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ có một vector pháp tuyến: $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$.

Đường thẳng $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ có một vector chỉ phương: $\vec{u}_{d'} = (1; 3; -1)$.

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d' nên d nhận

$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{u}_{d'}] = (-4; 2; 2)$ làm một vector chỉ phương.

Câu 30. Chọn A

Gọi công sai của cấp số cộng này là d , số hạng đầu là a .

Khi đó $b = a + d, c = a + 2d, p = a + 3d$.

Ta có nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$ hay $a+b+c-2p=0$.

$$\Rightarrow a + (a+d) + (a+2d) - 2(a+3d) = 0$$

$$\Rightarrow a - 3d = 0 \Rightarrow a = 3d.$$

Vì $a > 0$ nên $d > 0$ do đó $a < b < c$.

Vậy góc nhỏ nhất trong tam giác ABC là góc đối diện với cạnh nhỏ nhất a .

Hay $\hat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta được:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16d^2 + 25d^2 - 9d^2}{2 \cdot 4d \cdot 5d} = \frac{4}{5}.$$

Câu 31. Chọn B

Xét trong mỗi ván, để thắng sẽ xảy ra hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: xuất hiện đúng hai mặt sáu chấm, xác suất là $\frac{C_3^2 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{72}$.

+ Trường hợp 2: cả 3 đều là mặt sáu chấm, xác suất là $\frac{C_3^3}{6^3} = \frac{1}{216}$.

Do đó, xác suất để mỗi ván thắng là $\frac{5}{72} + \frac{1}{216} = \frac{2}{27}$, xác suất mỗi ván thua là $\frac{25}{27}$.

Vậy, xác suất để trong ba ván, người đó thắng ít nhất hai ván là:

$$C_3^2 \left(\frac{2}{27} \right)^2 \cdot \frac{25}{27} + C_3^3 \left(\frac{2}{27} \right)^3 = \frac{308}{19683}.$$

Câu 32. Chọn D

Gọi $M(x; y; z) \in (\alpha)$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2 - MB^2 = 4 &\Leftrightarrow 2[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2] - [x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2] = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Do đó, điểm M nằm trên mặt cầu tâm $I(4; -1; -3)$, bán kính $R = \sqrt{28}$.

Gọi đường tròn $(C) = (S) \cap (\alpha)$. Suy ra $M \in (C)$.

Khoảng cách từ tâm $I(4; -1; -3)$ đến (α) : $d(I; (\alpha)) = \frac{|4-1-3+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$.

Bán kính của đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (\alpha))} = \sqrt{28-3} = 5$.

Câu 33. Chọn A

Để hàm số có đúng hai tiệm cận đứng thì: $6x - x^2 \geq 0$ (1) và $x^2 - 8x + 2m = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Từ (1), (2) ta có: } \begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ -\frac{x^2}{2} + 4x = m \end{cases}$$

Đặt $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x, \forall x \in [0; 6]$. Ta có $f'(x) = -x + 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Bản biến thiên:

x	0	4	6
y'	+	0	-
y	0	8	6

Vậy đề (2) có hai nghiệm phân biệt thì $m \in [6; 8)$.

Câu 34. Chọn B

$$\text{Ta có } F'(x) = f'(x)g'[f(x)]. F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ g'[f(x)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^6 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0(1) \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

(1) Vô nghiệm vì $7x^6 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2 > 0 \forall x$

Bản biến thiên:

$f(x)$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	4			$+\infty$	
	0				
	$-\infty$				

Vậy $F(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt thì $m \in (0; 4)$

Câu 35. Chọn B

Ta có: $\triangle DAB = \triangle CAB$ (c.c.c) $\Rightarrow DM = CM$ nên $\triangle MCD$ cân tại M .

Mặt khác N là trung điểm cạnh CD suy ra $MN \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta được $MN \perp AB$.

Do vậy mặt cầu đường kính MN tiếp xúc với AB, CD .

Gọi I là trung điểm cạnh MN nên $IM = IN$.

Dựng $IK \perp MN$. Do mặt cầu đường kính MN tiếp xúc với AD nên $IM = IN = IK$.

Ta có: $\triangle MIA = \triangle KIA \Rightarrow AK = MA = \frac{a}{2}$.

Do đó $KD = AD - AK = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Nhận thấy $\triangle KID = \triangle NID \Rightarrow ND = KD = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ suy ra $CD = a(\sqrt{3}-1)$.

Vì $AB \perp CM, AB \perp MD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc giữa hai đường thẳng CM và MD .

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD : $MD = \sqrt{AD^2 - MA^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

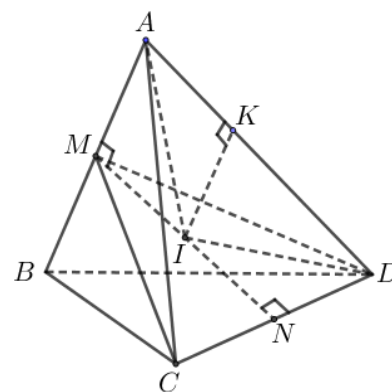
Xét tam giác MCD : $\cos M = \frac{MC^2 + MD^2 - CD^2}{2 \cdot MC \cdot MD} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - (\sqrt{3}-1)^2 a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3}-3 > 0$.

Vậy $\cos \alpha = 2\sqrt{3}-3$.

Câu 36. Chọn A

Ta có: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

Xét $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$



Nhận thấy: $A + B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} \quad (1)$

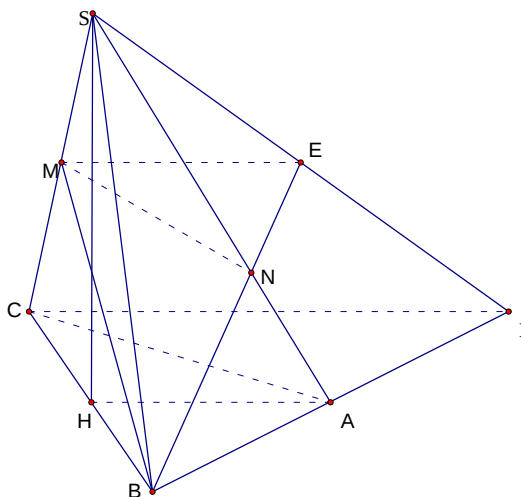
$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln \left| \sin x + \cos x \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2} \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được: $A = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$.

Do đó $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{4}$.

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

Câu 37. Chọn A



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp (ABC)$.

Gọi I đối xứng với B qua A , suy ra $AH \parallel IC \Rightarrow IC \perp SC$.

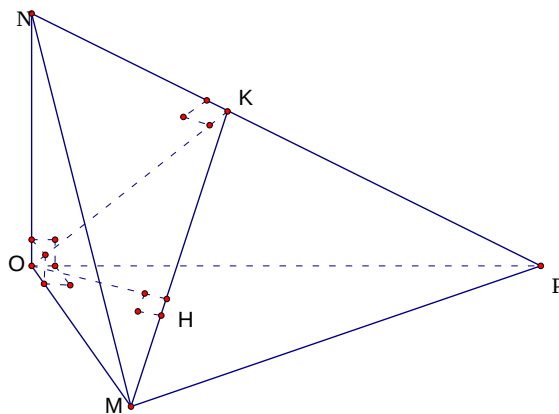
Gọi M, E lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, SI .

Gọi N là giao điểm của SA và BE thì N là trọng tâm của tam giác SBI .

Ta có: $\begin{cases} BM \perp SC \\ ME \perp SC \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp SC$

Khi đó: $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.BMN}}{V_{MN.ABC}} = \frac{1}{2}$.

Câu 38. Chọn D



Giả sử mặt phẳng (α) cắt trục Oy tại P . (P không trùng với O)

Khi đó ta có $O.MNP$ là tam diện vuông tại O .

Kẻ $OK \perp NP \Rightarrow MK \perp NP$.

Ta có $\angle OKM$ là góc nhọn trong tam giác vuông OMK nên góc $\angle OKM$ là góc giữa (α) và mặt phẳng (Oyz) . Khi đó: $\angle OMH = 30^\circ$

Kẻ $OH \perp MK \Rightarrow OH \perp (MNP) \Rightarrow d(O;(\alpha)) = OH$.

Mà trong tam giác vuông OMH ta có: $OH = OM \cdot \sin 30^\circ = 2$.

Câu 39. Chọn B

Lấy $M(1-2m; -2+2m; 1) \in (d)$, ta có $\overrightarrow{AM} \left(\frac{1}{2} - 2m; 2m - 3; -3 \right)$.

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}(m; 1-m; 1) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{m^2 + (1-m)^2 + 1} = \sqrt{2m^2 - 2m + 2}$.

Khi đó $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = \left(-m; -\frac{2m+1}{2}; \frac{m+1}{2} \right) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] \right| = \sqrt{\frac{9m^2 + 6m + 2}{4}}$.

Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là

$$d(A, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9m^2 + 6m + 2}{2m^2 - 2m + 2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{9m^2 + 6m + 2}{2m^2 - 2m + 2}$ với $m \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(m) = \frac{-15m^2 + 14m + 8}{(2m^2 - 2m + 2)^2}$.

Khi đó $f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{2}{5} \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

m	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$		$\frac{1}{3}$		9		$\frac{9}{2}$

Vậy $f(m) \leq 9$.

Khi đó ta có $d(A, d) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9m^2 + 6m + 2}{2m^2 - 2m + 2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{9} = \frac{3}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{4}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\begin{cases} x = 1 - 2m + mt \\ y = -2 + 2m + (1-m)t \\ z = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m(t-2) \\ y = -2(1-m) + (1-m)t \\ z = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + m(t-2) \\ y = (1-m)(t-2) \\ z = 3 + t - 2 \end{cases}$

Đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $H(1; 0; 3)$ với mọi m ứng với $t = 2$.

Vậy ta có $\frac{m}{2} = \frac{1-m}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Theo đề ra, ta có $d(A'B'; BK) = \frac{|\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{KB}| \cdot |\overrightarrow{A'K}|}{|\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{KB}|} \Leftrightarrow \frac{|2\sqrt{3}z|}{\sqrt{4z^2 + (2\sqrt{3} - 2y)^2}} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 18\sqrt{3}y - 3z^2 + 27 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được, $12y^2 - 18\sqrt{3}y + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

Với $y = \sqrt{3} \Rightarrow z = 0$ (loại).

Với $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(3; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Suy ra $V = 3.V_{B.A'B'C'} = 3 \cdot \frac{1}{6} |\overrightarrow{BA'}; \overrightarrow{BB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}| = 3\sqrt{3}$.

Câu 42. Chọn C

Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n}{3n} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{n}; \forall n \geq 1$.

Đặt $u_n = nv_n; \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)v_{n+1}$

Ta được $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n; \forall n \geq 1$, suy ra dãy số (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow u_n = nv_n = \frac{n}{3^n}; \forall n \geq 1.$$

Ta có $u_n < \frac{1}{2020} \Leftrightarrow \frac{n}{3^n} < \frac{1}{2020} \Leftrightarrow 3^n > 2020n \quad (*)$

Dễ thấy, bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh $(*)$ đúng $\forall n \geq 9$.

Vậy có vô số nguyên dương n thỏa mãn đề bài.

Câu 43. Chọn A

Xét $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Do $f(0) = 2$ nên suy ra $d = 2$.

$f(4x) = 64ax^3 + 16bx^2 + 4cx + d$.

Giả thiết cho $f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x$ nên ta có:
$$\begin{cases} 64a = a + 4 \\ 16b = b \\ 4c = c + 2 \\ d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{63} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{3} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vậy $f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$.

Từ đó $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \right) dx = \left(\frac{1}{63}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{148}{63}$.

Câu 44. Chọn A

Đặt $\sin x = t$. Khi $x \in [0; \pi]$ thì $t \in [0; 1]$.

Ta nhận thấy với mỗi $t \in [0; 1]$ sẽ cho tương ứng hai giá trị $x \in [0; \pi]$. Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có một nghiệm $t \in [0; 1]$. Dựa vào đồ thị ta được $-4 < m \leq -3$.

Câu 45. Chọn A

Điều kiện: $3\cos \pi x - 1 > 0$.

$$2^{\cos \pi x - 1} + \frac{1}{2} = \cos \pi x + \log_4(3\cos \pi x - 1) \Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} + 1 = 2\cos \pi x + \log_2(3\cos \pi x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} + \cos \pi x = 3\cos \pi x - 1 + \log_2(3\cos \pi x - 1). \quad (1)$$

Ta có hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $2^{\cos \pi x} = 3\cos \pi x - 1 \Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} - 3\cos \pi x + 1 = 0$

Xét hàm số $g(u) = 2^u - 3u + 1$, có $g'(u) = 2^u \cdot \ln 2 - 3 < 0, \forall u \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

Vậy hàm số $y = g(u)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$, mà $g(u) = 0$.

Do đó phương trình $2^{\cos \pi x} - 3\cos \pi x + 1 = 0$ có một họ nghiệm là:

$\cos \pi x = 1 \Leftrightarrow \pi x = k2\pi \Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Vì x thuộc $[0; 100]$ nên $k \in [0; 50]$. Vậy có 51 nghiệm x thuộc $[0; 100]$.

Câu 46. Chọn B

Theo giả thiết ta có: $10^{2019} \leq 4^n + 3 < 10^{2020} \Rightarrow 10^{2019} < 4^n < 10^{2020}$

$$\Leftrightarrow \log_4 10^{2019} < \log_4 4^n < \log_4 10^{2020} \Leftrightarrow 2019 \cdot \log_4 10 < n < 2020 \cdot \log_4 10.$$

Vì n nguyên dương nên $n = 3354$ hoặc $n = 3355$. Vậy tổng là $3354 + 3355 = 6709$.

Câu 47. Chọn D

Ta có $F'(x) = 12 \cdot f'(x) \cdot f^3(x) + 4 \cdot f'(x) \cdot f(x) = 4 \cdot f'(x) \cdot f(x) \cdot (3f^2(x) + 1)$.

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \\ 3f^2(x) + 1 = 0 \quad (VN) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, nhận thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt; $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, các nghiệm ở phương trình (1) và (2) không trùng nhau, đồng thời hàm $F(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên có 7 điểm cực trị.

Câu 48. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2; 3)$. Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1; -2; 1)$.

Nhận thấy $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0$ do đó $MN \perp d$.

Khi đó $IM + IN$ đạt giá trị nhỏ nhất khi điểm I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) chứa M, N và vuông góc với đường thẳng d .

Phương trình mặt phẳng (P) qua M, N và vuông góc đường thẳng d có phương trình là

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0.$$

Giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-9}{1} \\ x-2y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ z=9+t \\ 7+t-6+4t+9+t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ z=9+t \\ 8+6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-4}{3} \\ x = \frac{17}{3} \\ y = \frac{17}{3} \\ z = \frac{23}{3} \end{cases}.$$

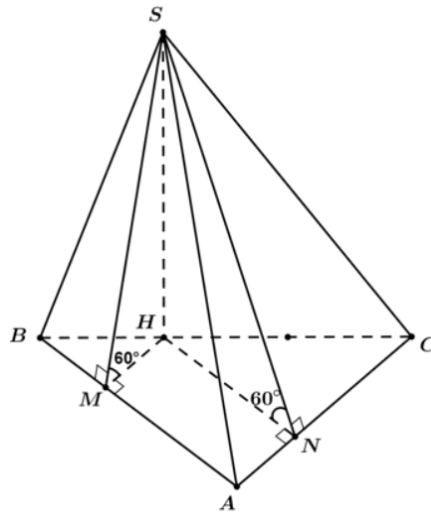
Ta được $2a+b+3c = 2 \cdot \frac{17}{3} + \frac{17}{3} + 3 \cdot \frac{23}{3} = 40$.

Câu 49. Chọn B

$$\text{Kẻ } SH \perp BC \text{ (} H \in BC \text{)}. \text{ Ta có } \begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ SH \perp BC \end{cases}$$

Kẻ $SM \perp AB$ ($M \in AB$) và $SN \perp AC$ ($N \in AC$). Khi đó $\widehat{((SAB), (ABC))} = \widehat{SMH}$ và

$\widehat{((SAC), (ABC))} = \widehat{SNH}$. Theo đề $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = 60^\circ \Rightarrow MH = NH \Rightarrow H$ cách đều hai điểm $M, N \Rightarrow H$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

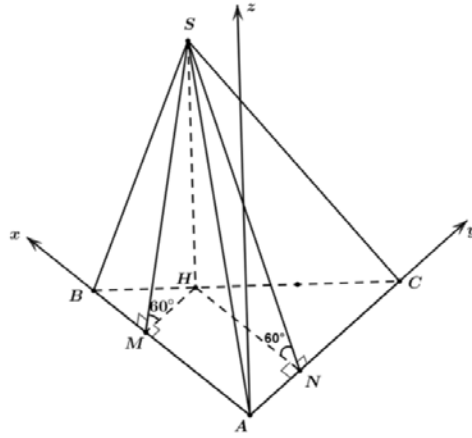


Khi đó ta có: $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow HC = 2HB$ mà $HB + HC = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} HB = \frac{a\sqrt{5}}{3} \\ HC = \frac{2a\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Theo ta-let ta có $\frac{HM}{AC} = \frac{HB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HM = \frac{AC}{3} = \frac{2a}{3}$.

Khi đó $\tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^\circ \cdot HM = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;2a;0)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a; \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)$$

$$\text{Khi đó mặt phẳng } (SAB) \text{ có VTPT } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = \left(0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2; \frac{2}{3}a^2\right) = \frac{2a^2}{3}(0; -\sqrt{3}; 1)$$

$$\text{và mặt phẳng } (SBC) \text{ có VTPT } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2; \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2; 0\right) = \frac{2a^2}{3}(2\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0).$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{(SAB);(SBC)}) = \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3}{2\sqrt{15}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

(vì α là góc nhọn nên $\tan \alpha > 0$)

Câu 50. Chọn B

Ta có $a^{2\cos 2x} \geq 4\cos^2 x - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a^{2\cos 2x} \geq 2\cos 2x + 1; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $t = 2\cos 2x$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

Khi đó bài toán trở thành: “ tìm giá trị $a > 0; a \neq 1$ thỏa mãn $a^t \geq t + 1; \forall t \in [-2; 2]$ ”.

+ Xét trường hợp 1: $0 < a < 1$

Hàm số $f(t) = a^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $\forall t > 0 \Rightarrow f(t) < f(0) \Rightarrow f(t) < 1$

Ta lại có $\forall t > 0 \Rightarrow t + 1 > 1$ nên bất phương trình $a^t \geq t + 1$ vô nghiệm trên $(0; 2]$.

Yêu cầu bài toán không thỏa.

+ Xét trường hợp 2: $a > 1$

Hàm số $f(t) = a^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

-----HẾT-----