

BÀI TẬP VD - VDC

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Strong Team Toán VD – VDC -

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ trong đó m là tham số khác 0. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tại giao điểm của đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến sẽ vuông góc với đường thẳng $x + y - 2020 = 0$. Khi đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng:

- A. $-\frac{6}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. -1 . D. $\frac{6}{5}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3ax^2 + b$ có đồ thị (C) . Gọi A, B lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B có cùng hệ số góc bằng 6. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB bằng 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2a^2 + (a+b)^2$ bằng:

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và $I(-1;1)$. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) lần lượt tại $A; B$ sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó chu vi nhỏ nhất của tam giác IAB là:

- A. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$. B. $4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$. D. $6\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác nhận gốc tọa độ làm tâm đường tròn nội tiếp?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x-1) + \frac{f(x-1)}{x} = 3x+2$ và $f(1) = 6$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là:

- A. $y = -9x + 7$. B. $y = 9x - 7$. C. $y = 9x + 7$. D. $y = -9x - 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, đồng thời thỏa mãn $[f(x)]^2 + 3f(x) = x + 3$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $y = 5x + 4$. B. $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$. C. $y = -5x + 9$. D. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$.

- Câu 7.** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = 4x^2 + (m-2)x - 3m$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 3$ tại ba điểm phân biệt $A, B, C(3;30)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của S .
- A. -1. B. 1. C. 2. D. 5.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Điểm $M(a;b)$ với $a > 0$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất. Khi đó $a+b$ bằng:
- A. -1. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc trục Oy , có tung độ là số nguyên âm và thỏa mãn từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm cùng một phía của trục Ox ?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 - 2mx + 16m - 7$ có đồ thị là (C_m) . Gọi M là điểm cố định có tung độ nguyên của (C_m) và Δ là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M . Gọi S là tập các giá trị của tham số m để Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tổng các phần tử của S .
- A. 1. B. 0. C. $\frac{12}{7}$. D. $\frac{11}{7}$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm nằm trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng OM , biết điểm M có tung độ dương.
- A. $OM = \sqrt{34}$. B. $OM = \sqrt{5}$. C. $OM = 7$. D. $OM = 5$.
- Câu 12.** Tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+3}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:
- A. 35. B. 39. C. 32. D. 33.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(8x+1)]^2 + [f(1-x)]^5 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
- A. $y = \frac{1}{21}x - \frac{20}{21}$. B. $y = -\frac{1}{21}x - \frac{20}{21}$. C. $y = \frac{1}{21}x - \frac{15}{21}$. D. $y = -\frac{1}{21}x + \frac{20}{21}$.
- Câu 14.** Cho các hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+3) = g(x) + x^2 - 10x + 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(4) = f'(4) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A.** $y = 13x - 4$. **B.** $y = -13x + 4$. **C.** $y = -13x - 4$. **D.** $y = 13x + 4$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình $f^2(2-x) = x - 1 - f^3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $(d): y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 1$. Khi đó $a + b$ bằng:

- A.** -5 . **B.** 5 . **C.** 1 . **D.** -1 .

Câu 16. Cho đường cong $(C): y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$. Có bao nhiêu đường thẳng d tiếp xúc (C) tại ít nhất hai điểm?

- A.** 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+3)x - 1$ có đồ thị là (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của (C) song song với đường thẳng $y = -5x - \sqrt{3}$. Tổng các phần tử của S là:

- A.** 1 . **B.** -2 . **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $-\frac{4}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến với (C) tại A và B lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 thỏa mãn $201(k_1 + k_2) + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2020k_1^{2020}k_2^{2020}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử của S thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-10; 0)$. **B.** $(1; 10)$. **C.** $(11; 20)$. **D.** $(21; 30)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) . Biết $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = 2$ là:

- A.** $y = -x + 1$. **B.** $y = 2x - 2$. **C.** $y = -2x + 2$. **D.** $y = 4x + 4$.

Câu 20. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 + m^2x - 5$. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng 1. Tìm tổng các giá trị của m để tiếp tuyến của (C_m) tại M vuông góc với đường thẳng $x + 7y = 0$.

- A.** 2 . **B.** 0 . **C.** -2 . **D.** 4 .

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x}$. Giả sử M có hoành độ $m, m > 0$ thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung và hoành lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\Delta IAB} = 12$ trong đó I là giao điểm của 2 đường tiệm cận. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(8; 25)$. **B.** $(-23; 2)$. **C.** $(-6; 9)$. **D.** $(15; 27)$.

- Câu 22.** Cho hàm số đa thức $f(x)$ là hàm số chẵn. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hệ số góc nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Δ vuông góc với trục tung. B. Δ qua O .
 C. Δ song song với đường thẳng $y = x$. D. Δ song song với đường thẳng $y = -x$.
- Câu 23.** Cho đồ thị (C_m) hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị (C_m) với trục Ox và Oy . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại A và B . Giá trị nhỏ nhất của $|k_1 + k_2|$ là:
- A. $\frac{1}{4}$. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.
- Câu 24.** Hàm số $y = \frac{x+7}{x-2}$ có đồ thị (C) , gọi I là tâm đối xứng của (C) . Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) , biết d cắt 2 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại M và N sao cho $\triangle IMN$ cân tại I . Khi đó b có giá trị bằng:
- A. $b = 9$. B. $b = 13$. C. $\begin{cases} b = 9 \\ b = -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b = 13 \\ b = -7 \end{cases}$.
- Câu 25.** Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng là một parabol thỏa mãn điều kiện $y' = 2\sqrt{y}$ và $f(1) = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có tung độ bằng 4 là:
- A. $y = -4x, y = -4x - 8$. B. $y = 4x, y = 4x - 8$.
 C. $y = -4x, y = 4x - 8$. D. $y = 4x, y = -4x - 8$.
- Câu 26.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f'(x) > -1; f(1) = 3$ và $[f'(x) + 1]^2 = 9x^2 + 9x \cdot f(x)$. Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 4 của đồ thị (C) hàm số: $g(x) = f(x) + x$ là:
- A. $k = 9$. B. 81. C. $k = 54$. D. 27.
- Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị (C_m) . Biết đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), đồng thời tiếp tuyến tại A và C song song với nhau. Viết phương trình tiếp tuyến tại B .
- A. $y = 3x - 6$. B. $y = 3x - 30$. C. $y = -3x + 6$. D. $y = -3x + 30$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C), gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a;b)$ là một điểm thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Đẳng thức IAB có chu vi nhỏ nhất thì tổng $|2a+b|$ gần nhất với số nào sau đây?

- A. 0. B. 3. C. 5. D. -3.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (H). Gọi M, N là 2 điểm thuộc (H) sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến tại M, N bằng 2. Khi đó $x_M + x_N$ bằng:

- A. 2. B. -2. C. 0. D. 1.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x) = f(f(x))$ tại điểm $x = 3$.

- A. $y = \frac{1}{8}x + \frac{9}{8}$. B. $y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$. C. $y = \frac{1}{16}x + \frac{21}{16}$. D. $y = \frac{1}{25}x + \frac{27}{25}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Giả sử tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$ là đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(x) - 3f(3x) + 2f(2x)}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(4x-6)$ tại $x = 2$. Mệnh đề nào sau đây là điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng d_1, d_2 có tích hệ số góc bằng -2?

- A. $|f(2)| \geq 4\sqrt{2}$. B. $-8 \leq f(2) \leq 8$. C. $f(2) \geq 8$. D. $|f(2)| \geq 8$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(3x) + 3f(1-3x) = 9x^2 + 3x$. Gọi (d): $y = ax + b$ (với a, b là phân số tối giản) là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0. Khi đó $a + 3b$ bằng:

- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 28$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho từ $M(m; -4)$ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (C). Số các phần tử của tập S là:

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 f(2x-1)$ và $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 có hệ số góc lần lượt là 2020 và 2021. Giá trị của $f(1)$ bằng:

- A. 2020. B. 2021. C. 1. D. -1.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - \sqrt{3}x$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ và hai tiếp tuyến khác tại điểm A và B tạo thành tam giác đều. Biết tung độ tại 3 tiếp điểm đó đều không âm, khi đó tổng hoành độ của A và B thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+3}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu cặp điểm mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau đồng thời khoảng cách giữa cặp điểm đó bằng $4\sqrt{2}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm M mà khoảng cách từ $A(6; -4)$ đến tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M gấp hai lần khoảng cách từ điểm $B(5; 1)$ đến tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{-8}{3}$	$\searrow \frac{-40}{3}$	$\nearrow +\infty$	

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 40. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 5$ có đồ thị (S) . Gọi A, B, C là các điểm phân biệt trên (S) có tiếp tuyến với (S) tại các điểm đó song song với nhau. Biết A, B, C cùng nằm trên một parabol (P) có đỉnh $I(-1; y_0)$. Tìm y_0 .

A. 4.

B. -4.

C. $\frac{1}{4}$.D. $\frac{1}{4}$.**II. BẢNG ĐÁP ÁN**

1.A	2.A	3.B	4.C	5.B	6.B	7.A	8.B	9.A	10.C
11.D	12.C	13.B	14.A	15.D	16.A	17.D	18.B	19.D	20.B
21.A	22.B	23.D	24.C	25.C	26.C	27.C	28.A	29.B	30.D
31.B	32.D	33.A	34.B	35.D	36.D	37.B	38.C	39.D	40.A

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ trong đó m là tham số khác 0. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tại giao điểm của đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến sẽ vuông góc với đường thẳng $x + y - 2020 = 0$. Khi đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng:

A. $-\frac{6}{5}$.B. $-\frac{1}{5}$.

C. -1.

D. $\frac{6}{5}$.**Lời giải**

Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$\frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)x - m^2 + m = 0 \\ x+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2 - m}{3m+1} \\ x \neq -m \end{cases} \quad (3m+1 \neq 0)$$

Ta có: $x = \frac{m^2 - m}{3m+1} \neq -m \Leftrightarrow m \neq 0$. Nên điều kiện $x \neq -m$ luôn thỏa mãn.

Vậy hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x = \frac{m^2 - m}{3m+1}$ ($3m+1 \neq 0$).

$$\text{Ta có } y' = \frac{(3m+1)m - (-m^2 + m)}{(x+m)^2} = \frac{4m^2}{(x+m)^2}.$$

Vì tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị với trục hoành vuông góc với đường thẳng $x + y - 2020 = 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} y' \left(\frac{m^2 - m}{3m+1} \right) \cdot (-1) &= -1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{\left(\frac{m^2 - m}{3m+1} + m \right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4m^2 (3m+1)^2}{16m^4} = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(3m+1)^2}{4m^2} &= 1 \Leftrightarrow (3m+1)^2 = 4m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 = 2m \\ 3m+1 = -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $-\frac{6}{5}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3ax^2 + b$ có đồ thị (C) . Gọi A, B lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B có cùng hệ số góc bằng 6. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB bằng 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2a^2 + (a+b)^2$ bằng:

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 + 6ax$.

Do tiếp tuyến của (C) tại A, B có cùng hệ số góc là 6 nên x_A, x_B là nghiệm phương trình $y' = 6 \Leftrightarrow 6x^2 + 6ax = 6 \Leftrightarrow x^2 + ax - 1 = 0$.

Ta lại có $y = (x^2 + ax - 1)(2x + a) + (2 - a^2)x + a + b$. Khi đó, phương trình đường thẳng AB là $(2 - a^2)x - y + a + b = 0$.

Theo giả thiết $d(O; AB) = 1 \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{(2-a^2)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 = (2-a^2)^2 + 1$

$$\Leftrightarrow 2ab + b^2 = a^4 - 5a^2 + 5. (*)$$

Từ (*) ta có $P = 2a^2 + (a+b)^2 = 3a^2 + 2ab + b^2 = a^4 - 2a^2 + 5 = (a^2 - 1)^2 + 4 \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = \pm 1$. Vậy GTNN cần tìm là 4.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và $I(-1;1)$. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) lần lượt tại $A; B$ sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó chu vi nhỏ nhất của tam giác IAB là:

A. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$.

B. $4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

C. $2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

D. $6\sqrt{3}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

TCD: $x = -1$; TCN: $y = 1$.

Suy ra $I(-1;1)$ là giao của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

$$M \in (C) \Rightarrow M(a; \frac{a-2}{a+1}).$$

PTTT Δ của (C) tại M là: $y = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-2}{a+1}$.

Δ giao với TCD tại điểm $A(-1; \frac{a-5}{a+1})$, Δ giao với TCN tại điểm $B(2a+1;1)$.

$$\text{Ta có: } IA = \sqrt{(-1+1)^2 + \left(\frac{a-5}{a+1} - 1\right)^2} = \left|\frac{a-5}{a+1} - 1\right| = \left|\frac{-6}{a+1}\right|.$$

$$IB = \sqrt{(2a+1+1)^2 + (1-1)^2} = 2|a+1|.$$

Do tam giác IAB vuông tại I nên $AB = \sqrt{IA^2 + IB^2}$

Ta có chu vi tam giác IAB là

$$IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} \geq 2\sqrt{12} + \sqrt{24} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác nhận gốc tọa độ làm tâm đường tròn nội tiếp?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

$$\text{Gọi } M\left(a; \frac{a-2}{a+1}\right) \in (C), (a \neq -1)$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$\begin{aligned} y &= y'(a)(x-a) + \frac{a-2}{a+1} \\ &= \frac{3x}{(a+1)^2} + \frac{a^2 - 4a - 2}{(a+1)^2} \quad (\Delta) \end{aligned}$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (Δ) với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) , I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

$$\text{Khi đó } A\left(-1; \frac{a-5}{a+1}\right), B(2a+1; 1), I(-1; 1).$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } IA: x = -1 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow d(O, IA) = 1.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } IB: y = 1 \Leftrightarrow y-1 = 0 \Rightarrow d(O, IB) = 1.$$

Vì $d(O; IA) = d(O; IB) = 1$ nên O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IAB khi O nằm trong tam giác IAB và $d(O; AB) = 1$.

Ta có:

$$d(O; AB) = 1 \Leftrightarrow d(O, \Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|a^2 - 4a - 2|}{\sqrt{9 + (a+1)^4}} = 1 \Leftrightarrow |a^2 - 4a - 2| = \sqrt{9 + (a+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4a - 2)^2 = 9 + (a+1)^4 \Leftrightarrow 12a^3 - 6a^2 - 12a + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(a^2 - 1)(2a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1(l) \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $a = 1 \Rightarrow M\left(1; -\frac{1}{2}\right), A(-1; -2), B(3; 1) \Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB \Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔIAB .

Với $a = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; -1\right), A(-1; -3), B(2; 1) \Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB \Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔIAB .

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x-1) + \frac{f(x-1)}{x} = 3x + 2$ và $f(1) = 6$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là:

A. $y = -9x + 7$.

B. $y = 9x - 7$.

C. $y = 9x + 7$.

D. $y = -9x - 7$.

Lời giải

Ta có $f'(x-1) + \frac{f(x-1)}{x} = 3x + 2 \Leftrightarrow f'(x-1) + xf'(x-1) = 3x^2 + 2x$.

$$\Leftrightarrow (xf(x-1))' = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow xf(x-1) = \int (3x^2 + 2x) dx \Leftrightarrow xf(x-1) = x^3 + x^2 + C (*)$$

Thay $x = 2$ vào $(*)$ ta được: $2f(1) = 12 + C \Leftrightarrow 2.6 = 12 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $xf(x-1) = x^3 + x^2 \Rightarrow f(x-1) = x^2 + x = (x-1)^2 + 3(x-1) + 2$.

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(3) = 9$ và $f(3) = 20$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 3$ là $y = 9(x-3) + 20 \Leftrightarrow y = 9x - 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, đồng thời thỏa mãn $[f(x)]^2 + 3f(x) = x + 3$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

A. $y = 5x + 4$.

B. $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

C. $y = -5x + 9$.

D. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$.

Lời giải

Thay $x = 1$ vào đẳng thức $[f(x)]^2 + 3f(x) = x + 3$ (1) ta được:

$$[f(1)]^2 + 3f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) = 1; f(1) = -4 \text{ (loại)}.$$

Đạo hàm hai vế của (1) ta được: $2f'(x).f(x) + 3f'(x) = 1$ (2).

Thay $x = 1$ vào (2): $2f'(1)f(1) + 3f'(1) = 1$.

$$\text{Với } f(1) = 1 \text{ ta có: } 2f'(1) + 3f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{1}{5}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(1;1)$ có hệ số góc $k = f'(1) = \frac{1}{5}$ là $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

Câu 7. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = 4x^2 + (m-2)x - 3m$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 3$ tại ba điểm phân biệt $A, B, C(3;30)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của S .

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $2x^3 - 3x^2 + 3 = 4x^2 + (m-2)x - 3m$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 2x - mx + 3 + 3m = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - x - 1) - m(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - x - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 30 \\ g(x) = 2x^2 - x - 1 - m = 0 \end{cases}$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 8(1+m) > 0 \\ g(3) = 14 - m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Gọi $A(x_1; 2x_1^3 - 3x_1^2 + 3)$ và $B(x_2; 2x_2^3 - 3x_2^2 + 3)$ theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-1-m}{2} \end{cases}$$

Để tiếp tuyến tại A và B của (C) vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow (6x_1^2 - 6x_1)(6x_2^2 - 6x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -\frac{1}{36}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) = -\frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{-1-m}{2} \left(\frac{-1-m}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{1}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m + 1}{4} - \frac{1+m}{4} = -\frac{1}{36} \Leftrightarrow m^2 + m + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{6} (t/m(*))$$

Suy ra tổng các phần tử của S bằng -1 .

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Điểm $M(a;b)$ với $a > 0$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất. Khi đó $a+b$ bằng:

A. -1.

B. 1.C. $\sqrt{3}$.D. $2\sqrt{3}$.**Lời giải**

Gọi $M\left(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$. Khi đó tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$\Delta: y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + 2 - \frac{3}{x_0+1} \Leftrightarrow 3(x-x_0) - (x_0+1)^2(y-2) - 3(x_0+1) = 0.$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến Δ là:

$$d = \frac{|3(-1-x_0) - 3(x_0+1)|}{\sqrt{9 + (x_0+1)^4}} = \frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9 + (x_0+1)^4}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si: $\frac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2 \geq 2\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2} \cdot (x_0+1)^2} = 6$. Khi đó $d \leq \sqrt{6}$.

Khoảng cách đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $\frac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Do điểm M có hoành độ dương nên $M(-1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$. Khi đó $a+b = 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc trục Oy , có tung độ là số nguyên âm và thỏa mãn từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm cùng một phía của trục Ox ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$y = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{3}{x-1}. \text{ Gọi } M(0; m) \in Oy, (m < 0).$$

Gọi tiếp tuyến của (C) đi qua M là đường thẳng $d: y = kx + m$.

$$\text{Yêu cầu của đề bài, điều kiện là hệ phương trình } \begin{cases} kx + m = 1 + \frac{3}{x-1} & (1) \\ k = \frac{-3}{(x-1)^2} & (2) \end{cases}.$$

có 2 nghiệm $x_1, x_2 \neq 1$ và thỏa mãn $\begin{cases} y(x_1) < 0 \\ y(x_2) < 0 \end{cases}$.

$$\text{Xét điều kiện } \begin{cases} y(x_1) < 0 \\ y(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{3}{x_1 - 1} < 0 \\ 1 + \frac{3}{x_2 - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1 - 1} < -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x_2 - 1} < -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{-3x}{(x-1)^2} + m = 1 + \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1} + 1 - m = 0 \quad (3).$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = t \quad (t \neq 0), \text{ phương trình (3) trở thành } 3t^2 + 6t + 1 - m = 0 \quad (4)$$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (4) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $t_1 < t_2 < -\frac{1}{3}$ (Đặt $f(t) = 3t^2 + 6t + 1 - m$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 3.f\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \\ -1 < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(1 - m) > 0 \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{2}{3}.$$

Do m nguyên âm nên $m = -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 - 2mx + 16m - 7$ có đồ thị là (C_m) . Gọi M là điểm cố định có tung độ nguyên của (C_m) và Δ là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M . Gọi S là tập các giá trị của tham số m để Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tổng các phần tử của S .

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{12}{7}$.

D. $\frac{11}{7}$.

Lời giải

Ta thấy điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của $(C_m) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 - 2mx_0 + 16m - 7, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m(-3x_0^2 - 2x_0 + 16) + x_0^3 - y_0 - 7 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2 - 2x_0 + 16 = 0 \\ x_0^3 - y_0 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{-8}{3} \\ y_0 = x_0^3 - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ (do điểm } M \text{ có tung độ nguyên).}$$

Lại có $y' = f'(x) = 3x^2 - 6mx - 2m \Rightarrow f'(2) = 12 - 14m$.

Ta có phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm $M(2;1)$ là $y = f'(2)(x-2) + 1$

Hay $y = (12 - 14m)x + 28m - 23$ (Δ).

Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân thì Δ sẽ song song với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 14m = 1 \\ 12 - 14m = -1 \\ 28m - 23 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{11}{14} \\ m = \frac{13}{14} \end{cases}.$$

Suy ra tập $S = \left\{ \frac{11}{14}; \frac{13}{14} \right\}$ và tổng các phần tử của S là $\frac{12}{7}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm nằm trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng OM , biết điểm M có tung độ dương.

A. $OM = \sqrt{34}$.

B. $OM = \sqrt{5}$.

C. $OM = 7$.

D. $OM = 5$.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-2}\right)$ (với $\frac{x_0+1}{x_0-2} > 0$) là điểm thuộc đồ thị (C) .

Vì $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ nên tiếp tuyến d tại M có hệ số góc là $k = f'(x_0) = \frac{-3}{(x_0-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến d là $y = \frac{-3}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-2}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3x}{(x_0-2)^2} + \frac{3x_0}{(x_0-2)^2} + \frac{(x_0-2)(x_0+1)}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow y = \frac{-3x}{(x_0-2)^2} + \frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{(x_0-2)^2}.$$

Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{3}; 0\right)$; $d \cap Oy = B\left(0; \frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{(x_0-2)^2}\right)$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB khi và chỉ khi I là trung điểm AB hay

$$I\left(\frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{6}; \frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{2(x_0-2)^2}\right).$$

Vì $I \in \Delta$ nên $\frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{2} - \frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{2(x_0-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 - 2}{2(x_0-2)^2} \cdot [(x_0-2)^2 - 1] = 0$.

Vì các điểm d không đi qua O nên $x_0^2 + 2x_0 - 2 \neq 0$. Suy ra $(x_0 - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = 1 \end{cases}$.

Kết hợp M có tung độ dương ta được $M(3; 4)$. Vậy $OM = \sqrt{9+16} = 5$.

Câu 12. Tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+3}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:

A. 35.

B. 39.

C. 32.

D. 33.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+3}$ (C) có hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -3, y = 5$, giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-3; 5)$.

Lấy $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{5x_0-1}{x_0+3} (x_0 \neq -3)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = \frac{16}{(x_0+3)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{5x_0-1}{x_0+3}$ (d)

Cho $x = -3 \Rightarrow y = \frac{16}{(x_0+3)^2} \cdot (-3-x_0) + \frac{5x_0-1}{x_0+3} = \frac{-16}{x_0+3} + \frac{5x_0-1}{x_0+3} = \frac{5x_0-17}{x_0+3}$

Suy ra giao điểm của (d) và TCD của (C) là $A\left(-3; \frac{5x_0-17}{x_0+3}\right)$

$$\Rightarrow IA = \left| \frac{5x_0-17}{x_0+3} - 5 \right| = \left| \frac{32}{x_0+3} \right|$$

Cho $y = 5 \Rightarrow 5 = \frac{16}{(x_0+3)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{5x_0-1}{x_0+3} \Leftrightarrow \frac{16}{(x_0+3)^2} \cdot (x-x_0) = \frac{16}{x_0+3}$

$$\Rightarrow x-x_0 = x_0+3 \Leftrightarrow x = 2x_0+3$$

Suy ra giao điểm của (d) và TCN của (C) là $B(2x_0+3; 5)$

$$\Rightarrow IB = |2x_0+3+3| = |2x_0+6|$$

Diện tích tam giác cần tìm là $S = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot |2x_0+6| \cdot \left| \frac{32}{x_0+3} \right| = 32$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(8x+1)]^2 + [f(1-x)]^5 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{21}x - \frac{20}{21}$.

B. $y = -\frac{1}{21}x - \frac{20}{21}$.

C. $y = \frac{1}{21}x - \frac{15}{21}$.

D. $y = -\frac{1}{21}x + \frac{20}{21}$.

Lời giải

Từ $[f(8x+1)]^2 + [f(1-x)]^5 = x$ (*), cho $x = 0$ ta có $[f(1)]^2 + [f(1)]^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $2.8.f(8x+1).f'(8x+1)-5[f(1-x)]^4.f'(1-x)=1$.

Cho $x=0$ ta được $16f(1).f'(1)-5.[f(1)]^4.f'(1)=1 \Leftrightarrow f(1).f'(1).[16-5(f(1))^3]=1$ (**).

Nếu $f(1)=0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1) \neq 0$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1).[16+5]=1 \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{21}$$

Vậy tọa độ tiếp điểm là $A(1;-1)$ và hệ số góc $k=-\frac{1}{21}$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } y=-\frac{1}{21}(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{21}x-\frac{20}{21}.$$

Câu 14. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+3)=g(x)+x^2-10x+5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(4)=f'(4)=5$. Tiếp tuyến của hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

A. $y=13x-4$.

B. $y=-13x+4$.

C. $y=-13x-4$.

D. $y=13x+4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x+3)=g(x)+x^2-10x+5 \Rightarrow f'(x+3)=g'(x)+2x-10.$$

ta chọn $x=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(4)=g'(1)+2.1-10 \\ f(4)=g(1)+1^2-10.1+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(1)=f'(4)+8=5+8=13 \\ g(1)=f(4)+10-5-1=9 \end{cases}.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại $x=1$ là $y=g'(1).(x-1)+g(1)=13(x-1)+9=13x-4$

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình $f^2(2-x)=x-1-f^3(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $(d):y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ tại $x=1$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. -5 .

B. 5 .

C. 1 .

D. -1 .

Lời giải

Gọi $M(1;f(1)) \in (C)$ khi đó hoành độ của M thỏa mãn phương trình

$$f^2(2-x)=x-1-f^3(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

$$\text{Thay hoành độ } M \text{ vào } (*) \text{ ta được } f^2(1)=-f^3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{cases}.$$

$$\text{Đạo hàm hai vế của } (*) \text{ ta được } -2f(2-x)f'(2-x)=1-3f^2(x).f'(x) \quad (1).$$

Thay $x=1$ ta được $-2f(1)f'(1)=1-3f^2(1).f'(1)$ (2).

Nhận thấy $f(1)=0$ không thỏa mãn (2) suy ra $f(1)=-1$. Thay $f(1)=-1$ vào (2) ta được

$$2f'(1)=1-3.f'(1) \Leftrightarrow 5f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y=\frac{1}{5}(x-1)-1$ hay $y=\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}$.

Suy ra $a+b=-1$.

Câu 16. Cho đường cong $(C): y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$. Có bao nhiêu đường thẳng d tiếp xúc (C) tại ít nhất hai điểm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$ có đạo hàm $y'=x^3+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Do đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại 2 điểm có hoành độ a, b , ở đó $a \neq b$, nên có hệ số góc là k và thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(a) & (1) \\ \frac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(b) & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)-(2) và rút gọn cả 2 vế cho $a-b$ ta được

$$a^2+b^2+ab+a+b=0 \text{ hay } (a+b)^2+(a+b)=ab \quad (3)$$

Lấy (1)+(2) ta được

$$\frac{1}{2}(a^3+b^3+a^2b+ab^2)+\frac{2}{3}(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3+a^2+b^2$$

$$\text{Hay } \frac{(a+b)^3}{2}-2ab(a+b)+\frac{1}{3}(a+b)^2-\frac{4}{3}ab=0 \quad (4)$$

$$\text{Thế (3) vào (4) được } -\frac{3}{2}(a+b)^3-\frac{4}{3}(a+b)=0 \quad (5)$$

$$\text{Từ (5) suy ra } a+b=0 \text{ hoặc } a+b=-\frac{2}{3} \text{ hoặc } a+b=-\frac{4}{3}.$$

Với $a+b=0$, kết hợp với (3) suy ra $a=b=0$ (vô lí).

Với $a+b=-\frac{2}{3}$, kết hợp với (3) suy ra mâu thuẫn.

Với $a + b = -\frac{4}{3}$, kết hợp với (3) suy ra $a = b = -\frac{2}{3}$ (vô lí).

Vậy không tồn tại tiếp tuyến d tiếp xúc (C) tại ít nhất 2 điểm.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+3)x - 1$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của (C) song song với đường thẳng $y = -5x - \sqrt{3}$. Tổng các phần tử của S là:

- A. 1. B. -2. C. $-\frac{7}{3}$. **D. $-\frac{4}{3}$.**

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 3 \\ &= x^2 - 2(2m+1)x + (2m+1)^2 - (2m+1)^2 + m^2 + 3 \\ &= (x - 2m - 1)^2 - 3m^2 - 4m + 2 \geq -3m^2 - 4m + 2 \end{aligned}$$

Vì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của (C) song song với đường thẳng $y = -5x - \sqrt{3}$

$$\text{nên ta có } -3m^2 - 4m + 2 = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy tổng phần tử của S là $-\frac{4}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến với (C) tại A và B lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 thỏa mãn $201(k_1 + k_2) + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2020k_1^{2020} \cdot k_2^{2020}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử của S thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-10; 0)$. **B. $(1; 10)$.** C. $(11; 20)$. D. $(21; 30)$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$\text{Có } y' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Gọi hoành độ của A và B lần lượt là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{3x+2}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-2)x + m-2 = 0 (*) \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (m-2)(-1) + m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 4 \\ m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2-m \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}.$

Có $k_1 = \frac{1}{(x_1+1)^2}$, $k_2 = \frac{1}{(x_2+1)^2}$ nên:

$$k_1 k_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} \cdot \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{1}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = \frac{1}{(m-2+2-m+1)^2} = 1$$

và $k_1 + k_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1+x_2) + 2}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2}$

$$= (2-m)^2 - 2(m-2) + 2(2-m) + 2 = m^2 - 8m + 14.$$

Có $201(k_1 + k_2) + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2020 k_1^{2020} \cdot k_2^{2020} \Leftrightarrow 201(k_1 + k_2) + \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = 2020(k_1 k_2)^{2020}$

$$\Leftrightarrow 201(k_1 + k_2) + k_1 + k_2 = 2020 \Leftrightarrow 202(k_1 + k_2) = 2020 \Leftrightarrow k_1 + k_2 = 10 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 14 = 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 + 2\sqrt{3} (tm) \\ m = 4 - 2\sqrt{3} (tm) \end{cases}.$$

Vậy $S = \{4 + 2\sqrt{3}; 4 - 2\sqrt{3}\}.$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) . Biết

$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x = 2$ là:

A. $y = -x + 1.$

B. $y = 2x - 2.$

C. $y = -2x + 2.$

D. $y = 4x + 4.$

Lời giải

Đặt $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow x = \frac{t}{t-1}$

Khi đó: $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ trở thành:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f\left(\frac{t-1}{t}\right) = 1 - \frac{2(t-1)}{t} + \frac{3(t-1)^2}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f\left(\frac{t-1}{t}\right) = 2 - \frac{4}{t} + \frac{3}{t^2}$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = x^2$$

Thử lại ta thấy $f(x) = x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa đề.

Vậy $f'(x) = 2x$. Khi đó: $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, nên phương trình tiếp tuyến tại $x = 2$ là $y = 4x + 4$

Câu 20. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 + m^2x - 5$. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng 1. Tìm tổng các giá trị của m để tiếp tuyến của (C_m) tại M vuông góc với đường thẳng $x + 7y = 0$.

A. 2.

B. 0.

C. -2.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + m^2$.

Tiếp tuyến của (C_m) tại M có hệ số góc $a_t = y'(1) = 3 + m^2$.

Đường thẳng $x + 7y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x$. Do đó hệ số góc của đường thẳng này là $-\frac{1}{7}$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 7y = 0$ khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{7} \cdot a_t = -1 \Leftrightarrow a_t = 7 \Leftrightarrow 3 + m^2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $2 + (-2) = 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x}$. Giả sử M có hoành độ $m, m > 0$ thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung và hoành lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\triangle IAB} = 12$ trong đó I là giao điểm của 2 đường tiệm cận. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

A. (8; 25).

B. $(-23; 2)$.

C. $(-6; 9)$.

D. $(15; 27)$.

Lời giải

Giả sử điểm M có hoành độ là $m > 0$, vì $M \in (C)$ nên $M\left(m; \frac{m+1}{m}\right)$.

Ta có: $f'(m) = \frac{-1}{m^2}$.

Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm M có dạng:

$$y = f'(m)(x - m) + f(m) \Rightarrow y = \frac{-1}{m^2}(x - m) + 1 + \frac{1}{m}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M cắt trục tung tại điểm $B\left(0; 1 + \frac{2}{m}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M cắt trục hoành tại điểm $A(m^2 + 2m; 0)$.

Mặt khác ta có giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(0; 1)$.

Theo đề ta có $S_{\Delta AB} = 12$. Suy ra $\frac{1}{2}d(I, AB) \cdot AB = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(I, AB) \cdot |\overline{AB}| = 12$ (1).

$$\text{Trong đó } d(I, AB) = \frac{\left| -1 + \frac{m}{m^2} + \frac{m+1}{m} \right|}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{-1}{m^2}\right)^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{m^4 + 1}}.$$

Và

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \left(-(m^2 + 2m); \frac{m+2}{m} \right) \\ \Rightarrow |\overline{AB}| &= \sqrt{\left[-(m^2 + 2m) \right]^2 + \left(\frac{m+2}{m} \right)^2} = \sqrt{\frac{m^4(m+2)^2 + (m+2)^2}{m^2}} = \sqrt{m^4 + 1} \cdot \left| \frac{m+2}{m} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{m^4 + 1} \cdot \left| \frac{m+2}{m} \right| \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{m^4 + 1}} = 12 \Leftrightarrow |m+2| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -14 \end{cases}.$$

Vì $m > 0$ nên $m = 10$.

Câu 22. Cho hàm số đa thức $f(x)$ là hàm số chẵn. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hệ số góc nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Δ vuông góc với trục tung.

B. Δ qua O .

C. Δ song song với đường thẳng $y = x$.

D. Δ song song với đường thẳng $y = -x$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{2i} + a$, trong đó a, a_i là các hệ số thực.

$$\text{Khi đó } f'(x) = \sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-1}, f''(x) = \sum_{i=2}^n 2i(2i-1)a_i x^{2i-2} + 2a_1.$$

Xét hàm số $g(x) = f'(x)$ có đồ thị là (C) .

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của Δ và (C) .

$$\text{Khi đó } \Delta \text{ có hệ số góc là } f''(x_0) = \sum_{i=2}^n 2i(2i-1)a_i x_0^{2i-2} + 2a_1 \geq 2a_1, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Do đó Δ tiếp xúc với (C) tại điểm $M(0; f'(0))$, với $f'(0) = 0$. Hay Δ qua O .

Câu 23. Cho đồ thị (C_m) hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị (C_m) với trục Ox và Oy . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại A và B . Giá trị nhỏ nhất của $|k_1 + k_2|$ là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{2-m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2.$$

Do A là giao điểm của (C_m) và trục Ox nên tọa độ điểm $A(-m; 0)$.

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của } (C_m) \text{ tại } A \text{ là } k_1 = y'(-m) = \frac{2-m}{(-m+2)^2} = \frac{1}{2-m}, (m \neq 2).$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của } (C_m) \text{ tại } B \text{ là } k_2 = y'(0) = \frac{2-m}{(0+2)^2} = \frac{2-m}{4}.$$

$$\text{Khi đó, } |k_1 + k_2| = \left| \frac{1}{2-m} + \frac{2-m}{4} \right| = \left| \frac{1}{2-m} \right| + \left| \frac{2-m}{4} \right| \geq 1.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \left| \frac{1}{2-m} \right| = \left| \frac{2-m}{4} \right| \Leftrightarrow (2-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } |k_1 + k_2|_{\min} = 1.$$

Câu 24. Hàm số $y = \frac{x+7}{x-2}$ có đồ thị (C), gọi I là tâm đối xứng của (C). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt 2 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại M và N sao cho $\triangle IMN$ cân tại I. Khi đó b có giá trị bằng:

A. $b = 9$.

B. $b = 13$.

C. $\begin{cases} b = 9 \\ b = -3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} b = 13 \\ b = -7 \end{cases}$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có: $y' = -\frac{9}{(x-2)^2} < 0; \forall x \in D$. Gọi $M_o(x_o; y_o)$ là tiếp điểm, suy ra $a = -\frac{9}{(x_o-2)^2} < 0$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ 2a + b \neq 1 \end{cases}$

TCĐ của (C): $x = 2 \Rightarrow M(2; 2a + b)$

TCN của (C): $y = 1 \Rightarrow N\left(\frac{1-b}{a}; 1\right)$

Tâm đối xứng của (C): $I(2; 1)$

Vì $\triangle IMN$ cân tại I nên ta có: $IM = IN \Leftrightarrow |2a + b - 1| = \left|2 - \frac{1-b}{a}\right| \Leftrightarrow \left|a\left(2 + \frac{b-1}{a}\right)\right| = \left|2 + \frac{b-1}{a}\right|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(2 + \frac{b-1}{a}\right) = 2 + \frac{b-1}{a} \\ a\left(2 + \frac{b-1}{a}\right) = -\left(2 + \frac{b-1}{a}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$

Với $a = -1 \Rightarrow -\frac{9}{(x_o-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 5 \\ x_o = -1 \end{cases}$

Với $x_o = 5 \Rightarrow y_o = 4 \Rightarrow d: y = -x + 9 \Rightarrow b = 9$

Với $x_o = -1 \Rightarrow y_o = -2 \Rightarrow d: y = -x - 3 \Rightarrow b = -3$

Vậy $\begin{cases} b = 9 \\ b = -3 \end{cases}$.

Câu 25. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng là một parabol thỏa mãn điều kiện $y' = 2\sqrt{y}$ và $f(1) = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có tung độ bằng 4 là:

A. $y = -4x, y = -4x - 8$.

B. $y = 4x, y = 4x - 8$.

C. $y = -4x, y = 4x - 8.$

D. $y = 4x, y = -4x - 8.$

Lời giải

Nhận thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình $y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow$ loại vì đồ thị có dạng là một parabol.

$$y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^2$$

Thử lại ta được nghiệm $y = (x + C)^2$.

Mà $f(1) = 0$ nên $C = -1$.

Ta có $y = f(x) = (x - 1)^2, y' = 2(x - 1)$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

$$\text{Theo đề bài, ta có } (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 2 \\ x_0 - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Khi $x_0 = 3$ phương trình tiếp tuyến là $y = 4(x - 3) + 4 = 4x - 8$.

Khi $x_0 = -1$ phương trình tiếp tuyến là $y = -4(x + 1) + 4 = -4x$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $f'(x) > -1; f(1) = 3$ và $[f'(x) + 1]^2 = 9x^2 + 9x \cdot f(x)$. Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 4 của đồ thị (C) hàm số: $g(x) = f(x) + x$ là:

A. $k = 9$.

B. 81.

C. $k = 54$.

D. 27.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(x) + x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 1$ và $g(1) = f(1) + 1 = 4$.

$$\text{Khi đó: } [f'(x) + 1]^2 = 9x^2 + 9x \cdot f(x) \Leftrightarrow [g'(x)]^2 = 9x \cdot g(x) \quad (1)$$

Do $f'(x) > -1$ nên $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow g'(x) = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int 3\sqrt{x} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} = 2x^{\frac{3}{2}} + C \quad (2)$$

Với $x = 1$: $(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{g(1)} = 2 + C \Leftrightarrow 4 = 2 + C \Leftrightarrow C = 2$.

Khi đó: $2\sqrt{g(x)} = 2x^{\frac{3}{2}} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{g(x)} = x^{\frac{3}{2}} + 1 \Leftrightarrow g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)^2$.

Vậy, hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 4: $k = g'(4) = 54$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị (C_m) . Biết đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), đồng thời tiếp tuyến tại A và C song song với nhau. Viết phương trình tiếp tuyến tại B .

A. $y = 3x - 6$.

B. $y = 3x - 30$.

C. $y = -3x + 6$.

D. $y = -3x + 30$.

Lời giải

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* $y' = 3x^2 - 12x + 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi

$$y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow f(1) \cdot f(3) < 0 \Leftrightarrow (m+4) \cdot m < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 0 \quad (*)$$

* Vì tiếp tuyến tại A và C song song với nhau nên $f'(x_1) = f'(x_3) \Leftrightarrow 3x_1^2 - 12x_1 + 9 = 3x_3^2 - 12x_3 + 9 \Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 4$.

* Vì $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ (định lý Viet) nên $x_2 = 2$.

Vì $f(2) = 0$ nên $2 + m = 0$ hay $m = -2$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vì $f'(2) = -3$ nên phương trình tiếp tuyến tại $B(2; 0)$ là $y = -3(x - 2)$ hay $y = -3x + 6$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C), gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a; b)$ là một điểm thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B . Để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất thì tổng $|2a + b|$ gần nhất với số nào sau đây?

A. 0.

B. 3.

C. 5.

D. -3.

Lời giải

Vì I là tâm đối xứng của đồ thị (C) nên $I(-1; 2)$.

Ta có $y'_{(x)} = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'_{(a)} = \frac{1}{(a+1)^2}$.

$$\text{Vì } M(a; b) \in (C) \Rightarrow M\left(a; \frac{2a+1}{a+1}\right).$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M \text{ là đường thẳng } \Delta: y = \frac{1}{(a+1)^2} \cdot (x-a) + \frac{2a+1}{a+1}.$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ cắt tiệm cận đứng tại } A\left(-1; \frac{2a}{a+1}\right).$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ cắt tiệm cận ngang tại } B(2a+1; 2).$$

$$\text{Suy ra } IA = \frac{2}{|a+1|}; IB = 2|a+1| \text{ và chu vi tam giác } IAB \text{ là } C_{\Delta IAB} = IA + IB + AB.$$

$$\text{Ta có } C_{\Delta IAB} = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{4} + \sqrt{2 \cdot 4} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } IA = IB \Leftrightarrow 1 = (a+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0;1) \\ M(-2;3) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } |2a+b|=1.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (H) . Gọi M, N là 2 điểm thuộc (H) sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến tại M, N bằng 2. Khi đó $x_M + x_N$ bằng:

B. 2.

B. -2

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (H) .

$$y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}; y(x_0) = \frac{x_0-1}{x_0+1}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của } (H) \text{ tại } M \text{ là } y = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{x_0+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2}x - y + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0+1)^2} = 0.$$

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bằng 2, tức là

$$\frac{\left| \frac{-2}{(x_0+1)^2} - 1 + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0+1)^2} \right|}{\sqrt{\frac{4}{(x_0+1)^4} + 1}} = 2 \Leftrightarrow |4(x_0+1)| = 2\sqrt{4 + (x_0+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow 4(x_0+1)^4 - 16(x_0+1)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{2} - 1 \\ x_0 = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x_M = \sqrt{2} - 1; x_N = -\sqrt{2} - 1 \Rightarrow x_M + x_N = -2.$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x) = f(f(x))$ tại điểm $x = 3$.

A. $y = \frac{1}{8}x + \frac{9}{8}$.

B. $y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$.

C. $y = \frac{1}{16}x + \frac{21}{16}$.

D. $y = \frac{1}{25}x + \frac{27}{25}$.

Lời giải

$$\text{Có } f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$+) g(3) = f(f(3)) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5}.$$

$$+) g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(3) = f'(f(3)) \cdot f'(3) = f'\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f'(3) = \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{25}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm $x = 3$ là

$$y = \frac{1}{25}(x-3) + \frac{6}{5} \text{ hay } y = \frac{1}{25}x + \frac{27}{25}.$$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Giả sử tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$ là đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(x) - 3f(3x) + 2f(2x)}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có được $f(0) = f'(0) = 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(x) - f(0) - 3f(3x) + 3f(0) + 2f(2x) - f(0)} = \\ &= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{3x} + 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x}} = \frac{2}{1 - 9 + 4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(4x-6)$ tại $x = 2$. Mệnh đề nào sau đây là điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng d_1, d_2 có tích hệ số góc bằng -2 ?

A. $|f(2)| \geq 4\sqrt{2}$. B. $-8 \leq f(2) \leq 8$. C. $f(2) \geq 8$.

D. $|f(2)| \geq 8$

Lời giải

Ta có $g'(x) = f(4x-6) + 4xf'(4x-6)$.

Hệ số góc của d_1 là $k_1 = f'(2)$; của d_2 là $k_2 = f(2) + 8f'(2)$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$k_1 k_2 = -2 \Leftrightarrow f'(2)[f(2) + 8f'(2)] = -2 \Leftrightarrow 8[f'(2)]^2 + f(2) \cdot f'(2) + 2 = 0$$

Để tồn tại $f'(2)$ thì $[f(2)]^2 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow |f(2)| \geq 8$

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(3x) + 3f(1-3x) = 9x^2 + 3x$. Gọi $(d): y = ax + b$ (với a, b là phân số tối giản) là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0. Khi đó $a + 3b$ bằng:

A. 1.

B. -1 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Từ đẳng thức $f(3x) + 3f(1-3x) = 9x^2 + 3x$, với $x = 0$ và $x = \frac{1}{3}$ ta có $\begin{cases} f(0) + 3f(1) = 0 \\ f(1) + 3f(0) = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{3}{4} \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức ta được $3f'(3x) - 9f'(1-3x) = 18x + 3(*)$.

Thay $x = 0$ và $x = \frac{1}{3}$ vào $(*)$ ta được $\begin{cases} 3f'(0) - 9f'(1) = 3 \\ 3f'(1) - 9f'(0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) - 3f'(1) = 1 \\ 3f'(0) - f'(1) = -3 \end{cases} \begin{cases} f'(0) = -\frac{5}{4} \\ f'(1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0 là

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}(x-0) + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Khi đó $a + 3b = -\frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = 1$.

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 28$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho từ $M(m; -4)$ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (C) . Số các phần tử của tập S là:

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(m; -4)$ và có hệ số góc k có phương trình là: $y = k(x - m) - 4$

Từ M kẻ được đúng một tiếp tuyến với đồ thị (C) khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 28 = k(x - m) - 4 & (1) \\ 3x^2 - 12x = k & (2) \end{cases} (*) \text{ có đúng 1 nghiệm.}$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$x^3 - 6x^2 + 28 = (3x^2 - 12x)(x - m) - 4 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 32 = (3x^2 - 12x)(x - m) \quad (3)$$

Hệ phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có đúng 1 nghiệm.

$$\text{Ta có } (3) \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 2x - 8) = 3x(x - 4)(x - m) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2x^2 + (2 - 3m)x + 8 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ta xét 2 trường hợp:

TH1: Phương trình (4) có đúng 1 nghiệm $x = 4$. Khi đó

$$\begin{cases} 2 \cdot 4^2 + (2 - 3m) \cdot 4 + 8 = 0 \\ \Delta = (2 - 3m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3m = -10 \\ 2 - 3m = 8 \\ 2 - 3m = -8 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\textbf{TH2:} \text{ Phương trình (4) vô nghiệm hay } \Delta < 0 \Leftrightarrow (2 - 3m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < \frac{10}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 f(2x - 1)$ và $y = x f(2x - 1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 có hệ số góc lần lượt là 2020 và 2021. Giá trị của $f(1)$ bằng:

A. 2020.

B. 2021.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [x^2 f(2x - 1)]' = 2xf(2x - 1) + 2x^2 f'(2x - 1)$$

$$d_1 \text{ có hệ số góc là 2020 nên } 2f(1) + 2f'(1) = 2020 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } [xf(2x - 1)]' = f(2x - 1) + 2xf'(2x - 1)$$

$$d_2 \text{ có hệ số góc là 2021 nên } f(1) + 2f'(1) = 2021 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $f(1) = -1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - \sqrt{3}x$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ và hai tiếp tuyến khác tại điểm A và B tạo thành tam giác đều. Biết tung độ tại 3 tiếp điểm đó đều không âm, khi đó tổng hoành độ của A và B thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - \sqrt{3}$ và $y'' = 6x$.

Vì $y'\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 0$ và $y''\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt[4]{3}} < 0$ nên $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Vì ba tiếp tuyến đó tạo thành tam giác đều và tiếp tuyến tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ song song với trục hoành nên hai tiếp tuyến còn lại tạo với tia Ox theo chiều dương các góc lần lượt là 60° và 120° . Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến đó lần lượt là $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ và $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

Giả sử tiếp tuyến tại A có hệ số góc là $-\sqrt{3}$, khi đó $y'(x_A) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x_A^2 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x_A = 0$.

Giả sử tiếp tuyến tại B có hệ số góc là $\sqrt{3}$, khi đó $y'(x_B) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3x_B^2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \\ x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$

Vì tung độ các tiếp điểm đều không âm nên $x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

Vậy $x_A + x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \in (-2; -1)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+3}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu cặp điểm mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau đồng thời khoảng cách giữa cặp điểm đó bằng $4\sqrt{2}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$+) y' = \frac{4}{(x+3)^2}.$$

+) Gọi A và B là cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do tiếp tuyến tại A và B song song với nhau nên

$$y'(x_A) = y'(x_B) \Rightarrow \frac{4}{(x_A+3)^2} = \frac{4}{(x_B+3)^2} \Leftrightarrow (x_A+3)^2 = (x_B+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ x_A + x_B = -6 \end{cases}.$$

+) $x_A = x_B$ thì $A \equiv B$ (loại)

+) $x_A + x_B = -6$.

$$\text{Gọi } A\left(x_A; \frac{x_A-1}{x_A+3}\right); B\left(x_B; \frac{x_B-1}{x_B+3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + \left(\frac{x_B-1}{x_B+3} - \frac{x_A-1}{x_A+3}\right)^2 = (x_B - x_A)^2 + \left[\frac{4(x_B - x_A)}{x_A x_B + 3(x_A + x_B) + 9}\right]^2 \\ &= (-2x_A - 6)^2 + \left[\frac{4(-2x_A - 6)}{x_A \cdot (-x_A - 6) - 9}\right]^2 = 4(x_A + 3)^2 + \left[\frac{-8(x_A + 3)}{-(x_A + 3)^2}\right]^2 = 4(x_A + 3)^2 + \frac{64}{(x_A + 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = (x_A + 3)^2. \text{ Do } AB = 4\sqrt{2} \text{ nên } 4t + \frac{64}{t} = 32 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow (x_A + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 3 = -2 \\ x_A + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -5 \\ x_A = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_A = -5 \Rightarrow y_A = 3 \Rightarrow A(-5; 3), B(-1; -1).$$

$$\text{Với } x_A = -1 \Rightarrow y_A = -1 \Rightarrow A(-1; -1), B(-5; 3).$$

Vậy tồn tại một cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có bao nhiêu điểm M mà khoảng cách từ $A(6; -4)$ đến tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M gấp hai lần khoảng cách từ điểm $B(5; 1)$ đến tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

+) Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$.

+) Gọi $M(x_0; y_0)$.

+) Phương trình tiếp tuyến tại điểm M : $y = \frac{1}{(x_0+2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+3}{x_0+2}$

$\Leftrightarrow x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 + 6x_0 + 6 = 0 \quad (\Delta)$

+) Theo giả thiết ta có: $d(A, \Delta) = 2d(B, \Delta)$

$\Leftrightarrow \frac{|6 + 4(x_0+2)^2 + 2x_0^2 + 6x_0 + 6|}{\sqrt{1+(x_0+2)^4}} = \frac{2|5 - (x_0+2)^2 + 2x_0^2 + 6x_0 + 6|}{\sqrt{1+(x_0+2)^4}}$

$\Leftrightarrow \frac{|6x_0^2 + 22x_0 + 28|}{\sqrt{1+(x_0+2)^4}} = 2 \frac{|x_0^2 + 2x_0 + 7|}{\sqrt{1+(x_0+2)^4}} \Leftrightarrow |6x_0^2 + 22x_0 + 28| = 2|x_0^2 + 2x_0 + 7|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0^2 + 22x_0 + 28 = 2x_0^2 + 4x_0 + 14 \\ 6x_0^2 + 22x_0 + 28 = -2x_0^2 - 4x_0 - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 + 9x_0 + 7 = 0 \\ 4x_0^2 + 13x_0 + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$

Với $x_0 = -\frac{7}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{8}{3}$.

Vậy tồn tại hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{-8}{3}$	$\searrow \frac{-40}{3}$	$\nearrow +\infty$	

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hệ

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(5) = 0 \\ f(1) = \frac{-8}{3} \\ f(5) = \frac{-40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 75a + 10b + c = 0 \\ a + b + c + d = \frac{-8}{3} \\ 125a + 25b + 5c + d = \frac{-40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -3 \\ c = 5 \\ d = -5 \end{cases}$$

Khi đó $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 5$

Ta có $y' = x^2 - 6x + 5$.

Vì tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân nên tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1.

$$\text{Vì vậy } \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 1 \\ x^2 - 6x + 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{-24 \mp 7\sqrt{5}}{3} \\ x = 3 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = -8 \pm 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta thấy trong 4 điểm tìm được không có điểm nào nằm trên đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$ nên ta nhận cả 4 điểm trên.

Vậy có 4 điểm M.

Câu 40. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 5$ có đồ thị (S) . Gọi A, B, C là các điểm phân biệt trên (S) có tiếp tuyến với (S) tại các điểm đó song song với nhau. Biết A, B, C cùng nằm trên một parabol (P) có đỉnh $I(-1; y_0)$. Tìm y_0 .

A. 4.

B. -4.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$y = x^4 + 2x^2 + 5 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4x.$$

Giả sử các tiếp tuyến tại A, B, C có cùng hệ số góc $k \Rightarrow 4x^3 + 4x = k$ (1).

$$\text{Ta có: } x^4 + 2x^2 + 5 = \frac{1}{4}x(4x^3 + 4x) + x^2 + 5 = x^2 + \frac{1}{4}kx + 5.$$

$$\text{Do đó ba điểm } A, B, C \text{ thuộc đồ thị hàm số } y = x^2 + \frac{1}{4}kx + 5 \quad (P).$$

Theo giả thiết thì (P) có đỉnh $I(-1; y_0)$ nên $-\frac{1}{8}k = -1 \Leftrightarrow k = 8$.

Khi đó $(P): y = x^2 + 2x + 5$. Vậy $y_0 = y(-1) = 4$.

HẾT