

Câu 1: (6 điểm) Cho phương trình $x^2 + 2x + 3m - 4 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 4$.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng thuộc đoạn $[-3; 4]$.

Câu 2: (2 điểm) Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số):

$$x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 (3x_1 + 3x_2 + 8)$.

Câu 3: (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$; ($x \in \mathbb{R}$)

Câu 4: (2 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \end{cases}$$
.

Câu 5: (2 điểm) Cho các số dương a, b, c có $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}$$

Câu 6: (2 điểm) Không dùng máy tính hãy tính tổng

$$P = \cos^2 0^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ.$$

Câu 7: (2 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(4;3)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho góc AMB bằng 45° .

Câu 8: (2 điểm) Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overline{BM} = k \overline{BC}$,

$\overline{CN} = \frac{2}{3} \overline{CA}$, $\overline{AP} = \frac{4}{15} \overline{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .

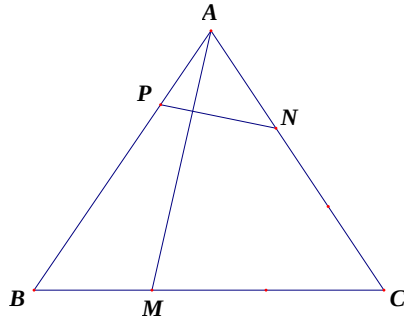
.....Hết.....

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho phương trình $x^2 + 2x + 3m - 4 = 0$ (m là tham số). a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm. b) Tìm m để pt có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 4$. c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng thuộc đoạn $[-3; 4]$.	
a)	Để phương trình có hai nghiệm thì $1^2 - (3m - 4) \geq 0$	1
	$\Leftrightarrow m \leq \frac{5}{3}$. KL	1
b)	Khi $m \leq \frac{5}{3}$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 3m - 4 \end{cases}$ (Không có bước này không trừ điểm)	0.5
	$x_1^2 x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 4$ $\Leftrightarrow (3m - 4)^2 \leq (-2)^2 - 2(3m - 4) + 4$ $\Leftrightarrow 9m^2 - 18m \leq 0$ $\Leftrightarrow m \in [0; 2]$	1
	Kết hợp với $m \leq \frac{5}{3}$ được $m \in \left[0; \frac{5}{3}\right]$. KL	0.5
c)	Nghiệm của pt $x^2 + 2x + 3m - 4 = 0$ là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và $y = -3m + 4$	0.5
	Vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x$ trên đoạn $[-3; 4]$.	0.5
	Từ bảng biến thiên để phương trình $x^2 + 2x + 3m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng thuộc đoạn $[-3; 4]$ thì $-1 < -3m + 4 \leq 3$.	0.5
	$\Leftrightarrow m \in \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. KL	0.5
2	Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 (3x_1 + 3x_2 + 8)$.	

	Trước hết xét biệt thức $\Delta' = (m-1)^2 - [-m^3 + (m+1)^2] = m^3 - 4m = m(m-2)(m+2)$. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 nên $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m(m-2)(m+2) \geq 0$. (1) Khi đó, theo Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m-1)$ với điều kiện $2(m-1) \leq 4$ (2) và $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^3 + (m+1)^2$. Điều kiện (1) và (2) giải được $-2 \leq m \leq 0$ hoặc $2 \leq m \leq 3$.	0,5
	Như vậy $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ nên biểu thức $P = (x_1 + x_2)^3 + 8x_1 x_2 = [2(m-1)]^3 + 8[-m^3 + (m+1)^2] = -16m^2 + 40m.$ Bài toán trở thành: <i>Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức</i> $P(m) = -16m^2 + 40m$ với $m \in [-2; 0] \cup [2; 3]$. Ta lập bảng biến thiên của hàm số $P(m) = -16m^2 + 40m$ với $m \in [-2; 0] \cup [2; 3]$.	0,5
		0,5
	Từ đó ta kết luận được: Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 16$ khi $m = 2$, Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = -144$ khi $m = -2$.	0,5
3	Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2; \quad (x \in \mathbb{R})$	
	PT đã cho tương đương với $3\sqrt[3]{3\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{46}{27}} = \left(x-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{46}{27}$ Đặt $\begin{cases} u = x - \frac{2}{3} \\ v = \sqrt[3]{3\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{46}{27}} = \sqrt[3]{3u+\frac{46}{27}} \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} 3u = v^3 - \frac{46}{27} \\ 3v = u^3 - \frac{46}{27} \end{cases}$	0.5
	Trừ hai phương trình cho nhau theo từng vế ta có: $3(u-v) = (v-u)(v^2 + uv + u^2) \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=0, & (1) \\ v^2 + uv + u^2 = -3, & (2) \end{cases}$ Dễ thấy $v^2 + uv + u^2 \geq 0$ nên (2) vô nghiệm.	0,5
	(1) $\Leftrightarrow u = v \Rightarrow \sqrt[3]{3x - \frac{8}{27}} = x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - \frac{5}{3}x = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ và kết luận.	0.5

4	Giai hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 & (1) \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 & (2) \end{cases}$.	
	ĐKXD: $y \geq -1,5$. (2) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3(x^2 + y^2) + 2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$	1
	Thay vào pt thứ nhất ta được: $x^2 - 3x + 1 = -\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1-x \\ \sqrt{2x-1}=x \end{cases}$ (Có thể bình phương được pt: $(x-1)^2(x^2-4x+2)=0$)	0.5
	Giải hai pt này ta được $x=1, x=2-\sqrt{2}$ Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-1), (2-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.	0.5
5	Cho các số dương a, b, c có $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}$.	
	$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}=\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+(a+b+c)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}}+\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}}+\frac{c+3}{8}\right)-\frac{c+3}{16}$ $\geq \frac{1}{2}3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}}\cdot\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}}\cdot\frac{c+3}{8}}-\frac{c+3}{16}=\frac{3a}{4}-\frac{c+3}{16}$ Suy ra: $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}\geq \frac{3a}{4}-\frac{c+3}{16}$	1
	Tương tự $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}}\geq \frac{3b}{4}-\frac{a+3}{16}$ và $\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}\geq \frac{3c}{4}-\frac{b+3}{16}$	0.5
	Cộng các vế tương ứng của ba BĐT cùng chiều ta được $P\geq \frac{3}{2},$ $P=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1.$ KL	0.5
6	Tính $P=\cos^2 0^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + ... + \cos^2 180^\circ.$	
	$\cos 0^\circ = -\cos 180^\circ \Rightarrow \cos^2 0^\circ = \cos^2 180^\circ.$... $\cos 89^\circ = -\cos 91^\circ \Rightarrow \cos^2 89^\circ = \cos^2 91^\circ.$ $\Rightarrow P=2\cos^2 0^\circ + 2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + ... + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ$ $=2+2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + ... + \cos^2 89^\circ)$	0,5 0,5

	$\cos 89^{\circ}=\sin 1^{\circ} \Rightarrow \cos ^2 89^{\circ}=\sin ^2 1^{\circ} .$... $\cos 46^{\circ}=\sin 44^{\circ} \Rightarrow \cos ^2 46^{\circ}=\sin ^2 44^{\circ} .$ $\Rightarrow P=2+2\left(\cos ^2 1^{\circ}+\sin ^2 1^{\circ}+\cos ^2 2^{\circ}+\sin ^2 2^{\circ}+\ldots+\cos ^2 44^{\circ}+\sin ^2 44^{\circ}+\cos ^2 45^{\circ}\right)$ $=2+2\left(44+\cos ^2 45^{\circ}\right)$ $=91$ KL	0,5 0,5
7	$A(1 ; 2)$ và $B(4 ; 3)$. Tìm M nằm trên trục hoành sao cho góc AMB bằng 45° .	
	Điểm M nằm trên trục hoành nên gọi $M(m ; 0)$, $\overrightarrow{MA}=(1-m ; 2), \overrightarrow{MB}=(4-m ; 3)$	0.5
	$\cos 45^{\circ}=\frac{(1-m)(4-m)+2.3}{\sqrt{(1-m)^2+2^2} \sqrt{(4-m)^2+3^2}}$	0.5
	$\Leftrightarrow m^4-10 m^3+44 m^2-110 m+75=0 \Leftrightarrow\left(m^2-6 m+5\right)\left(m^2-4 m+15\right)=0$ $m=1$ hoặc $m=5$. KL: $M(1 ; 0)$ hoặc $M(5 ; 0)$	1
8	Cho tam giác đều $A B C$ và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{B M}=k \overrightarrow{B C}$, $\overrightarrow{C N}=\frac{2}{3} \overrightarrow{C A}, \overrightarrow{A P}=\frac{4}{15} \overrightarrow{A B}$. Tìm k để $A M$ vuông góc với $P N$.	
	$\begin{aligned} +) \overrightarrow{B M}=k \overrightarrow{B C} & \Leftrightarrow \overrightarrow{A M}-\overrightarrow{A B}=k(\overrightarrow{A C}-\overrightarrow{A B}) \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{A M}=(1-k) \overrightarrow{A B}+k \overrightarrow{A C} . \\ +) \overrightarrow{P N} & =\overrightarrow{A N}-\overrightarrow{A P}=-\frac{4}{15} \overrightarrow{A B}+\frac{1}{3} \overrightarrow{A C} \end{aligned}$ 	0.5
	Để $A M$ vuông góc với $P N$ thì $\overrightarrow{A M} . \overrightarrow{P N}=0$ $\Leftrightarrow\left[(1-k) \overrightarrow{A B}+k \overrightarrow{A C}\right]\left(-\frac{4}{15} \overrightarrow{A B}+\frac{1}{3} \overrightarrow{A C}\right)=0$	0.5
	$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15} A B^2+\frac{k}{3} A C^2+\left(\frac{1-k}{3}-\frac{4 k}{15}\right) \overrightarrow{A B} \overrightarrow{A C}=0$ $\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}+\frac{k}{3}+\left(\frac{1-k}{3}-\frac{4 k}{15}\right) \cos 60^{\circ}=0$ $\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$ KL: $k=\frac{1}{3}$	1

