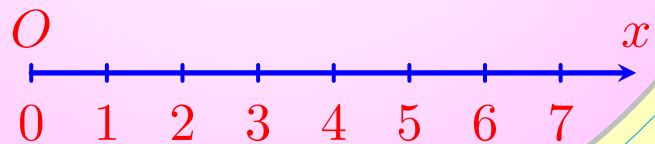
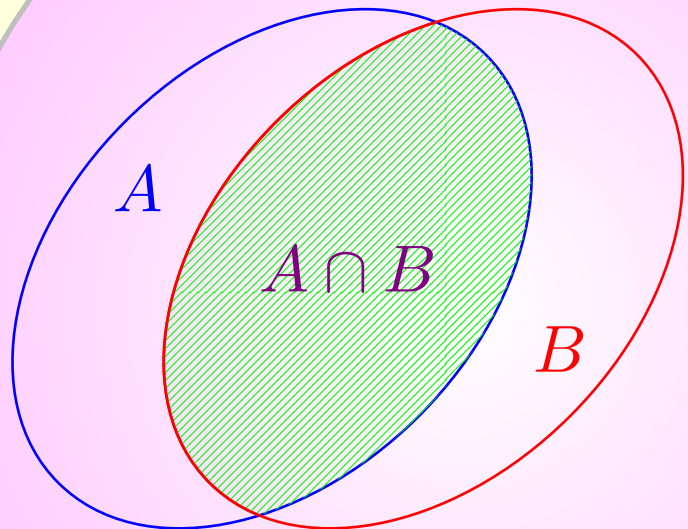


# Toán 10

Chuyên đề

TÀI LIỆU DẠY THÊM



KN<sup>+</sup>

LƯU HÀNH NỘI BỘ



# MỤC LỤC



<b>Chương 1.</b>	<b>MỆNH ĐỀ &amp; TẬP HỢP</b>	<b>1</b>
<b>Bài 1.</b>	<b>Mệnh đề</b>	<b>1</b>
(A)	Tóm tắt lý thuyết.....	1
(B)	Các dạng toán.....	3
	Dạng 1. Xác định mệnh đề & xét tính đúng - sai của mệnh đề.....	3
	Dạng 2. Mệnh đề phủ định, mệnh đề đảo, mệnh đề kéo theo, tương đương 6	
	Dạng 3. Mệnh đề chứa biến- mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ và $\exists$ .....	9
<b>Bài 2.</b>	<b>Tập hợp và các phép toán trên tập hợp</b>	<b>15</b>
(A)	CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA TẬP HỢP.....	15
(B)	CÁC TẬP HỢP SỐ.....	16
(C)	CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP.....	17
(D)	Các dạng toán.....	17
	Dạng 1. Xác định tập hợp.....	17
	Dạng 2. Tập hợp con, xác định tập hợp con.....	19
	Dạng 3. Các phép toán trên tập hợp.....	20
	Dạng 4. Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp.....	21
(E)	Bài tập tự luận.....	26
	Dạng 5. Xác định tập hợp.....	27
	Dạng 6. Tập hợp con, xác định tập hợp con.....	27
	Dạng 7. Các phép toán trên tập hợp.....	28
	Dạng 8. Các bài toán thực tế liên quan đến tập hợp.....	29
(F)	Bài tập trắc nghiệm.....	30
<b>Chương 2.</b>	<b>BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>34</b>
<b>Bài 3.</b>	<b>Bất phương trình bậc nhất hai ẩn</b>	<b>34</b>
(A)	Tóm tắt lý thuyết.....	34
(B)	Các dạng toán.....	35

	☞ Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và bài toán liên quan .....	35
	☞ Dạng 2. Bài toán thực tế liên quan .....	37
	Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm .....	39
<b>Bài 4.</b>	<b>Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn</b>	<b>45</b>
	Ⓐ Tóm tắt lý thuyết .....	45
	Ⓑ Các dạng toán .....	45
	☞ Dạng 1. Biểu diễn hình học của tập nghiệm .....	45
	☞ Dạng 2. Tìm cực trị của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác .....	58
<b>Chương 3.</b>	<b>HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC</b>	<b>65</b>
<b>Bài 5.</b>	<b>Giá trị lượng giác của một góc từ <math>0^\circ</math> đến <math>180^\circ</math></b>	<b>65</b>
	Ⓐ Giá trị lượng giác của một góc .....	66
	Ⓑ Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau .....	68
<b>Bài 6.</b>	<b>HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC</b>	<b>70</b>
	Ⓐ Tóm tắt lý thuyết .....	70
	☞ Dạng 1. Áp dụng định lý cô-sin .....	71
	☞ Dạng 2. Áp dụng định lý sin .....	73
	☞ Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng .....	75
	☞ Dạng 4. Bài tập tổng hợp .....	78
	Ⓑ Câu hỏi trắc nghiệm .....	81
<b>Chương 4.</b>	<b>VÉC-TƠ</b>	<b>87</b>
<b>Bài 7.</b>	<b>Các khái niệm mở đầu</b>	<b>87</b>
	Ⓐ Tóm tắt lý thuyết .....	87
	Ⓑ Các dạng toán .....	89
	☞ Dạng 1. Xác định một véc-tơ, độ dài véc-tơ .....	89
	☞ Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau .....	90
<b>Bài 8.</b>	<b>Tổng và hiệu của hai véc-tơ</b>	<b>98</b>
	Ⓐ Các dạng toán .....	98
	☞ Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai véc-tơ .....	98
	☞ Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức véc-tơ .....	99
	☞ Dạng 3. Tính độ dài véc-tơ .....	99
	☞ Dạng 4. Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý .....	101
<b>Bài 9.</b>	<b>Tích của một véc-tơ với một số</b>	<b>107</b>
	Ⓐ Tóm tắt lý thuyết .....	107

- ⓑ Các dạng toán..... 107
  - ☞ Dạng 1. Xác định véc-tơ tích, tính độ dài véc-tơ..... 107
  - ☞ Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ, thu gọn biểu thức..... 113
  - ☞ Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ..... 123
  - ☞ Dạng 4. Biểu diễn véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương..... 132
  - ☞ Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau..... 140

**Bài 10. Véc-tơ trong mặt phẳng tọa độ 148**

- Ⓐ Tóm tắt lý thuyết..... 148
- Ⓑ Bài tập vận dụng..... 151
- Ⓒ Bài tập trắc nghiệm..... 152

**Bài 11. Tích vô hướng của hai véc-tơ 156**

- Ⓐ Tóm tắt lý thuyết..... 156
- Ⓑ Các dạng toán..... 157
  - ☞ Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc..... 157
  - ☞ Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài..... 163
  - ☞ Dạng 3. Điều kiện vuông góc..... 166
  - ☞ Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức..... 168

**Chương 5. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM 183**

**Bài 12. Số gần đúng và sai số 183**

- Ⓐ Tóm tắt lý thuyết..... 183
- Ⓑ Các dạng toán..... 184
  - ☞ Dạng 1. Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước, đánh giá độ chính xác..... 184
  - ☞ Dạng 2. Xác định sai số tương đối của số gần đúng..... 186
  - ☞ Dạng 3. Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước..... 187
  - ☞ Dạng 4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với số gần đúng..... 189
- Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm..... 190
  - ☞ Dạng 5. Xác định sai số của số gần đúng..... 191

**Bài 13. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm 193**

- Ⓐ Tóm tắt lý thuyết..... 193
- Ⓑ Các ví dụ..... 195
- Ⓒ Bài tập tự luận..... 198



Ⓓ	Bài tập trắc nghiệm .....	202
<b>Bài 14. Các số đặc trưng đo độ phân tán</b>		<b>206</b>
Ⓐ	Tóm tắt lý thuyết.....	206
Ⓑ	Các dạng toán.....	207
☞	Dạng 1. Tìm khoảng biến thiên và so sánh độ phân tán của một hoặc nhiều mẫu số liệu.....	207
☞	Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.....	208
☞	Dạng 3. Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu .....	210
<b>Chương 6.</b>	<b>HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM</b>	<b>225</b>
<b>Bài 15. Hoạt động thực hành trải nghiệm</b>		<b>225</b>
Ⓐ	Tóm tắt lý thuyết.....	225
Ⓑ	Các ví dụ minh họa.....	226
☞	Dạng 1. Ước tính số cá thể.....	226
☞	Dạng 2. Kiểm tra tính đúng đắn của một kết quả hình học thông qua những ví dụ cụ thể.....	227
☞	Dạng 3. Sử dụng kết quả hình học để tính toán trong đo đạc thực tế.....	228
☞	Dạng 4. Tiết kiệm và đầu tư.....	232
☞	Dạng 5. Thuế thu nhập cá nhân.....	233
Ⓒ	Câu hỏi trắc nghiệm.....	235

# Chương 1

## MỆNH ĐỀ & TẬP HỢP

### Bài 1

### MỆNH ĐỀ

#### A Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Mệnh đề

○ **Định nghĩa 1.1.** *Mệnh đề logic* (gọi tắt là *mệnh đề*) là một khẳng định **hoặc đúng hoặc sai**.

- ✔ Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- ✔ Một khẳng định đúng được gọi là *mệnh đề đúng*.
- ✔ Một khẳng định sai được gọi là *mệnh đề sai*.
- ✔ Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa. Ví dụ: Q: “6 chia hết cho 3”.

##### Ghi chú:

- ✔ Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- ✔ Một câu chưa xác định được đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai) cũng là một mệnh đề. Ví dụ: “Có sự sống ngoài Trái Đất” là một mệnh đề.
- ✔ Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời gian, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí hoặc đúng hoặc sai. Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

##### 2. Mệnh đề chứa biến

○ **Định nghĩa 1.2.** Những khẳng định mà tính đúng, sai của chúng phụ thuộc vào giá trị của biến gọi là *mệnh đề chứa biến*.

Ví dụ: Cho  $P(x) : x > x^2$  với  $x$  là số thực. Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này, do đó nó chưa phải là mệnh đề.

Tuy nhiên, khi thay  $x$  bởi những giá trị cụ thể thì ta được một mệnh đề, chẳng hạn,  $P(2)$  là mệnh đề sai,  $P\left(\frac{1}{2}\right)$  là mệnh đề đúng.

### 3. Mệnh đề phủ định

**Định nghĩa 1.3.** Cho mệnh đề  $P$ . Mệnh đề “Không phải  $P$ ” được gọi là mệnh đề phủ định của  $P$  và kí hiệu là  $\bar{P}$ .

- ✔ Mệnh đề  $P$  và mệnh đề phủ định  $\bar{P}$  là hai khẳng định trái ngược nhau. Nếu  $P$  đúng thì  $\bar{P}$  sai, nếu  $P$  sai thì  $\bar{P}$  đúng.
- ✔ Mệnh đề phủ định của  $P$  có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề  $P$ : “2 là số chẵn”. Khi đó, mệnh đề phủ định của  $P$  có thể phát biểu là  $\bar{P}$ : “2 không phải là số chẵn” hoặc “2 là số lẻ”.

### 4. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

**Định nghĩa 1.4.** Cho hai mệnh đề  $P$  và  $Q$ . Mệnh đề “Nếu  $P$  thì  $Q$ ” được gọi là mệnh đề kéo theo.

- ✔ Kí hiệu là  $P \Rightarrow Q$ .
- ✔ Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi  $P$  đúng  $Q$  sai.
- ✔  $P \Rightarrow Q$  còn được phát biểu là “ $P$  kéo theo  $Q$ ”, “ $P$  suy ra  $Q$ ” hay “Vì  $P$  nên  $Q$ ”.

**Ghi chú:** Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng, thường có dạng  $P \Rightarrow Q$ . Khi đó ta nói

- ✔  $P$  là giả thiết,  $Q$  là kết luận của định lí.
- ✔  $P$  là điều kiện đủ để có  $Q$ , còn  $Q$  là điều kiện cần để có  $P$ .

**Lưu ý:** Trong logic toán học, khi xét giá trị chân lí của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề  $P, Q$ . Không phân biệt trường hợp  $P$  có phải là nguyên nhân để có  $Q$  hay không mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.

Ví dụ: “Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Âu” là một mệnh đề đúng. Vì ở đây hai mệnh đề  $P$ : “Mặt trời quay xung quanh trái đất” và  $Q$ : “Việt Nam nằm ở châu Âu” đều là mệnh đề sai.

**Định nghĩa 1.5.** Cho mệnh đề kéo theo  $P \Rightarrow Q$ . Mệnh đề  $Q \Rightarrow P$  được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ .

**Ghi chú:** Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là một mệnh đề đúng.

### 5. Mệnh đề tương đương

**Định nghĩa 1.6.** Cho hai mệnh đề  $P$  và  $Q$ . Mệnh đề có dạng “ $P$  nếu và chỉ nếu  $Q$ ” được gọi là mệnh đề tương đương.

- ✔ Kí hiệu là  $P \Leftrightarrow Q$ .
- ✔ Mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  đúng khi cả hai mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và  $Q \Rightarrow P$  cùng đúng hoặc cùng sai. (Hay  $P \Leftrightarrow Q$  đúng khi cả hai mệnh đề  $P$  và  $Q$  cùng đúng hoặc cùng sai).
- ✔  $P \Leftrightarrow Q$  còn được phát biểu là “ $P$  khi và chỉ khi  $Q$ ”, “ $P$  tương đương với  $Q$ ”, hay “ $P$  là điều kiện cần và đủ để có  $Q$ ”.

**Lưu ý:** Hai mệnh đề  $P, Q$  tương đương với nhau hoàn toàn không có nghĩa là nội dung của chúng như nhau, mà nó chỉ nói lên rằng chúng có cùng giá trị chân lí (cùng đúng hoặc cùng sai). Ví dụ: “Hình vuông có một góc tù khi và chỉ khi 100 là số nguyên tố” là một mệnh đề đúng.



## 6. Mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall$ và $\exists$

- ☑ Kí hiệu  $\forall$  (với mọi): “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”.
- ☑ Kí hiệu  $\exists$  (tồn tại): “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”.

### ⚠ Lưu ý:

- ☑ Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- ☑ Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

## B Các dạng toán

### 📁 Dạng 1. Xác định mệnh đề & xét tính đúng - sai của mệnh đề

#### 📝 VÍ DỤ MINH HỌA

🔗 Ví dụ 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

- a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam.
- b) Số  $\pi$  là một số hữu tỉ.
- c)  $x = 1$  có phải là nghiệm của phương trình  $x^2 - 1 = 0$  không?
- d) Phương trình  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  có nghiệm nguyên.
- e)  $5 < 7 - 3$ .
- f) Đây là cách xử lí khôn ngoan!

#### 💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

🔗 Ví dụ 2. Trong các mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

- ☑  $P$ : “Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng  $180^\circ$ ”.

☑ Q: “7 là số chính phương”.

☑ R: “1 là số nguyên tố”.

 **Lời giải.**

.....

.....

🔗 **Ví dụ 3.** Thay dấu “?” bằng dấu “x” vào ô thích hợp trong bảng sau

Câu	Không phải mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
13 là số nguyên tố.	?	?	?
Tổng độ dài hai cạnh bất kì của một tam giác nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.	?	?	?
Bạn đã làm bài tập chưa?	?	?	?
Thời tiết hôm nay thật đẹp!	?	?	?
$9 > 2$ .	?	?	?
27 chia hết cho 5.	?	?	?
$2 + 3 = 6$ .	?	?	?
36 là số chính phương.	?	?	?
Chó là 1 loài động vật.	?	?	?
Chó có khôn hơn lợn không?	?	?	?

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

✧ **Bài 1.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

- Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.
- Mọi số tự nhiên đều là số dương.
- Có sự sống ngoài Trái Đất.
- Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

✧ **Bài 2.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.
- Bạn học trường nào?
- Không được làm việc riêng trong giờ học.
- Tôi sẽ sút bóng trúng xà ngang.

✧ **Bài 3.** Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- $\pi < \frac{10}{3}$ .
- Phương trình  $3x + 7 = 0$  có nghiệm.
- Có ít nhất một số cộng với chính nó bằng 0.
- 2022 là hợp số.

✧ **Bài 4.** Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- 1993 chia hết cho 3.
- $\sqrt{12}$  là một số hữu tỉ.
- 9 là một số chính phương.
- $|-1997| \leq 0$ .

✧ **Bài 5.** Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ .
- $(\sqrt{2} - \sqrt{18})^2 \geq 8$ .

c)  $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2$  là một số hữu tỉ.

d)  $x = 2$  là một nghiệm của phương trình  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$ .

❖ **Bài 6.** Thay dấu “?” bằng dấu “x” vào ô thích hợp trong bảng sau

Câu	Không phải mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
Hãy đi nhanh lên!	?	?	?
$5 + 7 + 4 = 15$ .	?	?	?
Năm 2022 là năm nhuận.	?	?	?
Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm.	?	?	?
$2^{10} - 1$ chia hết cho 11.	?	?	?
Có vô số số nguyên tố.	?	?	?
Bây giờ là mấy giờ?	?	?	?
Chiến tranh thế giới lần thứ hai kết thúc năm 1946.	?	?	?
$\sqrt{5}$ là số vô tỉ.	?	?	?

 **Dạng 2.** Mệnh đề phủ định, mệnh đề đảo, mệnh đề kéo theo, tương đương

 **VÍ DỤ MINH HỌA**

❖ **Ví dụ 1.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

- $P$ : “ $\sqrt{5}$  là số hữu tỉ”.
- $Q$ : “Tổng ba góc trong một tam giác bằng  $180^\circ$ ”.
- $R$ : “25 là một số chính phương”.
- $T$ : “Hình vuông không phải là hình bình hành”.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Xét hai mệnh đề  $P$ : “tam giác  $ABC$  vuông” và  $Q$ : “ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”. Phát biểu và cho biết mệnh đề sau đúng hay sai.

a)  $P \Rightarrow Q$ .

b)  $Q \Rightarrow P$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến  $BM$ ,  $CN$ . Lập mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng khi

a)  $P$ : “Góc  $A$  tù” và  $Q$ : “Cạnh  $BC$  lớn nhất”.

b)  $P$ : “ $BM = CN$ ” và  $Q$ : “tam giác  $ABC$  cân”.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 4.** Cho định lí “Nếu  $MA \perp MB$  thì  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ ”. Hãy xác định giả thiết của định lí, kết luận của định lí và dùng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu lại định lí.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 5.** Phát biểu mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  và cho biết tính đúng sai của nó.

- a)  $P$ : “Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông” và  $Q$ : “Tứ giác  $ABCD$  là hình thoi có  $AC = BD$ ”.
- b)  $P$ : “Điểm  $M$  nằm trên phân giác của góc  $xOy$ ” và  $Q$ : “Điểm  $M$  cách đều hai cạnh  $Ox, Oy$ ”.
- c)  $P$ : “Tam giác  $ABC$  đều” và  $Q$ : “Tam giác  $ABC$  có ba đường cao bằng nhau”.

💬 **Lời giải.**

📁 **BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇨ **Bài 7.** Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau

- a)  $A$ : “2022 chia hết cho 7”.
- b)  $B$ : “Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6”.
- c)  $C$ : “Phương trình  $x^2 + x + 1 = 0$  vô nghiệm”.

⇨ **Bài 8.** Hãy lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây và cho biết các mệnh đề phủ định đó đúng hay sai?

- a)  $A$ : “735 là số nguyên tố”.
- b)  $B$ : “Phương trình  $x^2 + 9x - 2011 = 0$  vô nghiệm”.
- c)  $C$ : “Đường tròn có một tâm đối xứng”.
- d)  $D$ : “Hai đường thẳng song song không có điểm chung”.

⇨ **Bài 9.** Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo.

- a) Nếu một số chia hết cho 6 thì số đó chia hết cho 3.
- b) Nếu một số là số tự nhiên lẻ thì nó là số nguyên tố.
- c) Nếu  $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP}$  thì  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ .

❖ **Bài 10.** Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đảo.

- a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- b) Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì nó có hai cạnh đối song song và bằng nhau.

❖ **Bài 11.** Hãy xác định giả thiết, kết luận đồng thời dùng thuật ngữ “điều kiện đủ”, để phát biểu các định lí sau

- a) Nếu  $a$  và  $b$  là hai số hữu tỉ thì tổng  $a + b$  cũng là số hữu tỉ.
- b) Nếu một số tự nhiên  $n$  có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì nó chia hết cho 9.

❖ **Bài 12.** Cho định lí “Cho số tự nhiên  $n$ , nếu  $n^5$  chia hết cho 5 thì  $n$  chia hết cho 5”. Định lí này được viết dưới dạng  $P \Rightarrow Q$ .

- a) Hãy xác định các mệnh đề  $P$  và  $Q$ .
- b) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện cần”.
- c) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ “điều kiện đủ”. Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ “điều kiện cần và điều kiện đủ” phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

❖ **Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$ . Xét hai mệnh đề  
 $P$ : “Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ”.  $Q$ : “Trung tuyến  $AM$  bằng một nửa cạnh  $BC$ ”

- a) Hãy phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$ . Mệnh đề này đúng hay sai?
- b) Hãy phát biểu mệnh đề  $Q \Rightarrow P$ . Mệnh đề này đúng hay sai?
- c) Phát biểu mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai?

❖ **Bài 14.** Phát biểu mệnh đề  $P \Rightarrow Q$  và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

- a)  $P$ : “Tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật” và  $Q$ : “Tứ giác  $ABCD$  có  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường”.
- b)  $P$ : “Hình thang  $ABCD$  nội tiếp một đường tròn ” và  $Q$ : “Hình thang  $ABCD$  cân”.

❖ **Bài 15.** Hãy phát biểu mệnh đề  $P \Leftrightarrow Q$  và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai nếu biết

- a)  $P$ : “ $a$  và  $b$  cùng chia hết cho  $c$ ” và  $Q$ : “ $a + b$  chia hết cho  $c$ ”.
- b)  $P$ : “ $a$  chia hết cho 3” và  $Q$ : “ $a$  chia hết cho 9”.
- c)  $P$ : “ $ABCD$  là hình chữ nhật” và  $Q$ : “Tứ giác  $ABCD$  có ba góc vuông”.

**Dạng 3. Mệnh đề chứa biến- mệnh đề chứa kí hiệu  $\forall$  và  $\exists$**

Kí hiệu  $\forall$  đọc là “với mọi”.

Kí hiệu  $\exists$  đọc là “có một” (tồn tại một) hay “có ít nhất một” (tồn tại ít nhất một).

Mối quan hệ giữa  $\exists$  và  $\forall$ .

Cho mệnh đề " $P(x), x \in X$ ".

Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Xét câu " $n$  là số chẵn". (với  $n$  là số nguyên)

Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này. Tuy nhiên, với mỗi giá trị của  $n$  thuộc tập số nguyên, câu này cho ta một mệnh đề. Chẳng hạn,

- ☑ Với  $n = 1$  ta được mệnh đề "1 là số chẵn" (đây là mệnh đề sai).
- ☑ Với  $n = 2$  ta được mệnh đề "2 là số chẵn" (đây là mệnh đề đúng).

Ta nói rằng câu " $n$  là số chẵn" là một mệnh đề chứa biến.

**Ví dụ 2.** Xét câu " $x > 1$ ". Hãy tìm hai giá trị thực của  $x$ , ta nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 3.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

- a) 18 chia hết cho 9;
- b)  $3n$  chia hết cho 9.

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 4.** Cho mệnh đề  $P: \forall x \in \mathbb{N} : x - 2 > 0$ ". Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P$ . Xét tính đúng sai của mệnh đề  $\overline{P}$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....



⇨ **Ví dụ 5.** Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của nó.  
 $P$ : “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ ”.

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

### 📁 BÀI TẬP TỰ LUẬN

⇨ **Bài 16.** Cho câu “ $x > 5$ ”. Hãy tìm hai giá trị thực của  $x$  để từ câu đã cho, ta nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

⇨ **Bài 17.** Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- a)  $P$ : “Với mọi số thực  $x, x^2 + 1 > 0$ ”.
- b)  $Q$ : “Với mọi số tự nhiên  $n, n^2 + n$  chia hết cho 6”.

⇨ **Bài 18.** Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- a)  $M$ : “Tồn tại số thực  $x$  sao cho  $x^3 = -8$ ”.
- b)  $N$ : “Tồn tại số nguyên  $x$  sao cho  $2x + 1 = 0$ ”.

⇨ **Bài 19.** Bạn An nói “Mọi số thực đều có bình phương là một số không âm”.  
 Bạn Bình phủ định lại câu nói của bạn An “Có một số thực mà bình phương của nó là một số âm”.

- a) Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mệnh đề của bạn An.
- b) Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mệnh đề của bạn Bình.

⇨ **Bài 20.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ .
- b)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ .

⇨ **Bài 21.** Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau

- a) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3.
- b) Mọi số thập phân đều viết được dưới dạng phân số.

⇨ **Bài 22.** Phát biểu các mệnh đề sau

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ .

$$b) \exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > x.$$

✧ **Bài 23.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2.$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1.$$

$$c) \exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

$$d) \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0.$$

✧ **Bài 24.** Trong tiết học môn Toán, Nam phát biểu: “Mọi số thực đều có bình phương khác 1”. Mai phát biểu: “Có một số thực mà bình phương của nó bằng 1”.

a) Hãy cho biết bạn nào phát biểu đúng.

b) Dùng kí hiệu  $\forall, \exists$  để viết lại các phát biểu của Nam và Mai dưới dạng mệnh đề.

✧ **Bài 25.** Phát biểu bằng lời mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

✧ **Câu 1.** Phát biểu nào dưới đây là mệnh đề?

A  $2 + 3 = 9.$

B Phong cảnh đẹp quá!

C  $5 - x = 7.$

D Bây giờ là mấy giờ?.

✧ **Câu 2.** Các câu sau đây, câu nào **không** là mệnh đề?

A Phương trình  $x^2 - x + 1 = 0$  vô nghiệm.

B  $x + y > 1.$

C 12 không là số nguyên tố.

D Hai phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0$  và  $2x^2 - \sqrt{x+3} = 0$  có nghiệm chung.

✧ **Câu 3.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề **đúng**?

A Nếu  $a \geq b$  thì  $a^2 \geq b^2.$

B Nếu  $a$  chia hết cho 9 thì  $a$  chia hết cho 3.

C Nếu bạn tự tin thì bạn thành công.

D Nếu một tam giác có một góc bằng  $60^\circ$  thì tam giác đó đều.

❖ **Câu 4.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A** Phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  có nghiệm  $\Leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0$ .  
**B**  $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$ .  
**C**  $\Delta ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ .  
**D**  $n^2$  chẵn  $\Leftrightarrow n$  chẵn.

❖ **Câu 5.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A**  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0$ . **B**  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ .  
**C**  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ . **D**  $\forall x \in \mathbb{R}, |x + 1| \geq 0$ .

❖ **Câu 6.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **đúng**?

- A** Nếu số nguyên  $n$  có chữ số tận cùng là 5 thì số nguyên  $n$  chia hết cho 5.  
**B** Nếu tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.  
**C** Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật thì tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau.  
**D** Nếu tứ giác  $ABCD$  là hình thoi thì tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau.

❖ **Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo là **sai**?

- A** Nếu tam giác  $ABC$  cân thì tam giác có hai cạnh bằng nhau.  
**B** Nếu  $a$  chia hết cho 6 thì  $a$  chia hết cho 2 và 3.  
**C** Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $AB$  song song với  $CD$ .  
**D** Nếu tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì tứ giác đó là hình thoi.

❖ **Câu 8.** Cho mệnh đề  $P(x)$ : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P(x)$  là

- A** " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ". **B** " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".  
**C** " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ". **D** " $x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ".

❖ **Câu 9.** Cho mệnh đề  $P$ : " $\exists x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{x}$ ". Xác định mệnh đề phủ định của mệnh đề  $P$ .

- A**  $\bar{P}$ : " $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{x}$ ". **B**  $\bar{P}$ : " $\forall x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{x}$ ".  
**C**  $\bar{P}$ : " $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{x}$ ". **D**  $\bar{P}$ : " $\exists x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{x}$ ".

❖ **Câu 10.** Cách phát biểu nào sau đây **không** thể dùng để phát biểu mệnh đề  $A \Rightarrow B$ ?

- A** Nếu  $A$  thì  $B$ . **B**  $A$  kéo theo  $B$ .  
**C**  $A$  là điều kiện đủ để có  $B$ . **D**  $A$  là điều kiện cần để có  $B$ .

❖ **Câu 11.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A** Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x < -2$  thì  $x^2 > 4$ . **B** Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x^2 < 4$  thì  $x < -2$ .  
**C** Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x < -2$  thì  $x^2 < 4$ . **D** Với mọi số thực  $x$ , nếu  $x^2 > 4$  thì  $x > -2$ .

⇨ **Câu 12.** Biết  $A$  là mệnh đề sai và  $B$  là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $B \Rightarrow A$ .                      (B)  $B \Leftrightarrow A$ .                      (C)  $\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}$ .                      (D)  $B \Rightarrow \bar{A}$ .

⇨ **Câu 13.** Cho  $P \Leftrightarrow Q$  là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A)  $\bar{P} \Leftrightarrow Q$  sai.                      (B)  $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$  đúng.                      (C)  $\bar{Q} \Leftrightarrow P$  sai.                      (D)  $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$  sai.

⇨ **Câu 14.** Cho  $A, B, C$  là ba mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A)  $A \Rightarrow (B \Rightarrow \bar{C})$ .                      (B)  $C \Rightarrow \bar{A}$ .                      (C)  $B \Rightarrow (\bar{A} \Rightarrow \bar{C})$ .                      (D)  $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ .

⇨ **Câu 15.** Trong các mệnh đề nào sau đây mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.  
 (B) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.  
 (C) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.  
 (D) Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng  $60^\circ$ .

⇨ **Câu 16.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- (A) Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.  
 (B) Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.  
 (C) Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.  
 (D) Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

⇨ **Câu 17.** Cho mệnh đề chứa biến  $P(x)$ : " $x > x^3$ ". Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A)  $P(1)$  là mệnh đề sai.                      (B)  $P(1)$  là mệnh đề đúng.  
 (C)  $P(1)$  là mệnh đề vừa đúng vừa sai.                      (D)  $P(1)$  không phải là mệnh đề.

⇨ **Câu 18.** Xét mệnh đề chứa biến  $P(x)$ : " $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0$ ". Tìm một giá trị của biến để được mệnh đề đúng.

- (A)  $x = \frac{1}{4}$ .                      (B)  $x = 3$ .                      (C)  $x = 1$ .                      (D)  $x = 0,5$ .

⇨ **Câu 19.** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A)  $x(1 - 2x) \leq \frac{1}{8}, \forall x$ .                      (B)  $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} > \frac{5}{2}, \forall x$ .  
 (C)  $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3}, \forall x$ .                      (D)  $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}, \forall x$ .

⇨ **Câu 20.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A)  $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 - 4x + 4 > 0$ .                      (B)  $\exists x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$ .  
 (C)  $\exists x \in \mathbb{Q}, x < \frac{1}{x}$ .                      (D)  $\exists n \in \mathbb{N}, (1 + 2 + 3 + \dots + n) \vdots 11$ .

# Bài 2

# TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

## A

### CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA TẬP HỢP

#### 1. Tập hợp

Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau:

**Cách 1.** Liệt kê các phần tử của tập hợp;

**Cách 2.** Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

$a \in S$ : phần tử  $a$  thuộc tập hợp  $S$ .  $a \notin S$ : phần tử  $a$  không thuộc tập hợp  $S$ .

#### ⚠ Lưu ý:

- Số phần tử của tập hợp  $S$  được kí hiệu là  $n(S)$ . Chẳng hạn, tập hợp  $A$  trong **HD1** có số phần tử là 7, ta viết  $n(A) = 7$ .
- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là  $\emptyset$ .

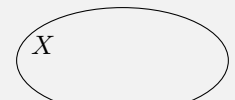
#### 2. Tập hợp con

Nếu mọi phần tử của tập hợp  $T$  đều là phần tử của tập hợp  $S$  thì ta nói  $T$  là một tập hợp con (tập con) của  $S$  và viết là  $T \subset S$  (đọc là  $T$  chứa trong  $S$  hoặc  $T$  là tập con của  $S$ ).

- Thay cho  $T \subset S$ , ta còn viết  $S \supset T$  (đọc là  $S$  chứa  $T$ ).
- Kí hiệu  $T \not\subset S$  để chỉ  $T$  không là tập con của  $S$ .

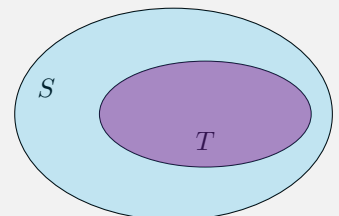
- **Nhận xét.** Từ định nghĩa trên,  $T$  là tập con của  $S$  nếu mệnh đề sau đúng:  $\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S$ .
- Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

- Người ta thường minh họa một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven (H.1.2).



H.1.2

- Minh họa  $T$  là một tập con của  $S$  như Hình 1.3.



H.1.3

#### 3. Hai tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp  $S$  và  $T$  được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của  $T$  cũng là phần tử của tập hợp  $S$  và ngược lại. Kí hiệu là  $S = T$ .

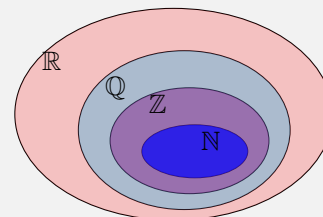
Nếu  $S \subset T$  và  $T \subset S$  thì  $S = T$ .

## B CÁC TẬP HỢP SỐ

### 1. Mối quan hệ giữa các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ .
- Tập hợp các số nguyên  $\mathbb{Z}$  gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm:  $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ .
- Tập hợp các số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$  gồm các số viết được dưới dạng phân số  $\frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- Tập hợp các số thực  $\mathbb{R}$  gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ. Số vô tỉ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Mối quan hệ giữa các tập hợp số:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .



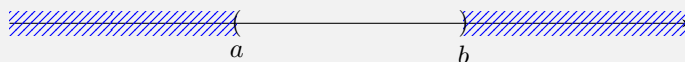
H.1.5

### 2. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

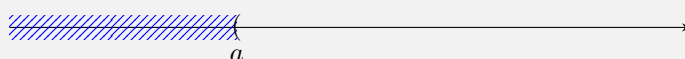
Một số tập con thường dùng của tập số thực  $\mathbb{R}$ .

- Khoảng

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



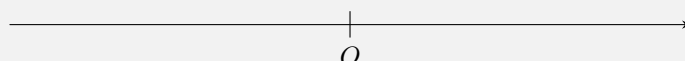
$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



$$(-\infty; +\infty)$$



- Đoạn

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



- Nửa khoảng

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



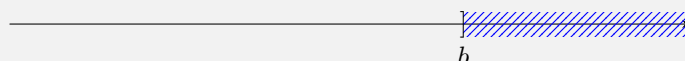
$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

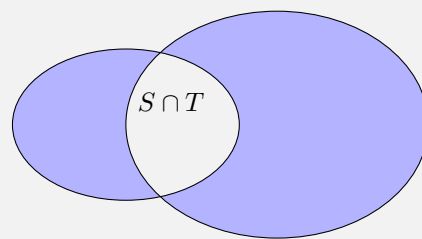


## C CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

### 1. Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp  $S$  và  $T$  gọi là giao của hai tập hợp  $S$  và  $T$ , kí hiệu là  $S \cap T$ .

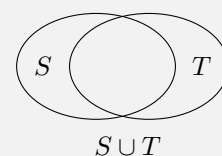
$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$



### 2. Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp  $S$  hoặc thuộc tập hợp  $T$  gọi là hợp của hai tập hợp  $S$  và  $T$ . Kí hiệu là  $S \cup T$ .

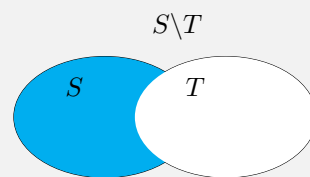
$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$



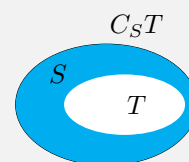
### 3. Hiệu của hai tập hợp

- Hiệu của hai tập hợp  $S$  và  $T$  là tập hợp gồm các phần tử thuộc  $S$  nhưng không thuộc  $T$ , kí hiệu là  $S \setminus T$ .

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}$$



- Nếu  $T \subset S$  thì  $S \setminus T$  được gọi là phần bù của  $T$  trong  $S$ , kí hiệu là  $C_S T$ .



## D Các dạng toán

### Dạng 1. Xác định tập hợp

Được mô tả theo 2 cách:

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp.
- Nêu tính chất đặc trưng.

❖ Ví dụ 1. Cho  $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số nguyên tố, } 5 < n < 20\}$ .

- Dùng kí hiệu  $\in, \notin$  để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5; 12; 17; 18, số nào thuộc tập  $D$ , số nào không thuộc tập  $D$ ?
- Viết tập hợp  $D$  bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp  $D$  có bao nhiêu phần tử?

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

**⇨ Ví dụ 2.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(3x - 2) = 0\}.$

b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}.$

c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 75x - 77 = 0\}.$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2)(x^2 - 9) = 0\}.$

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

**⇨ Ví dụ 3.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

a)  $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}.$

b)  $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < 3\}.$

c)  $C = \{x \mid x = 3k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 12\}.$

d)  $D = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N} \text{ và } n < 5\}.$

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--



.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 4.** Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng.

a)  $A = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{15}; \frac{5}{24}; \frac{6}{35} \right\}$ .

b)  $B = \{0; 3; 8; 15; 24; 35\}$ .

c)  $C = \{-4; 1; 6; 11; 16\}$ .

d)  $D = \{1; -2; 7\}$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### **Dạng 2. Tập hợp con, xác định tập hợp con**

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử.

- Khi liệt kê tất cả các tập con của  $A$ , ta liệt kê đầy đủ theo thứ tự:  
 $\emptyset$ ; tập 1 phần tử; tập 2 phần tử; tập 3 phần tử;...;  $A$ .
- Số tập con của  $A$  là  $2^n$ .
- Số tập con gồm  $k$  phần tử của  $A$  là  $C_n^k$ .

⇨ **Ví dụ 1.** Cho tập hợp  $S = \{2; 3; 5\}$ . Những tập hợp nào sau đây là tập con của  $S$ ?

$$S_1 = \{3\}; S_2 = \{0; 2\}; S_3 = \{3; 5\}$$

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cho tập hợp  $A = \{2; 3; 4\}$  và  $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ .

- Xác định tất cả tập con có hai phần tử của  $A$ .
- Xác định tất cả tập con có ít hơn hai phần tử của  $A$ .
- Tập  $A$  có tất cả bao nhiêu tập con.
- Xác định tất cả các tập  $X$  thỏa  $A \subset X \subset B$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Dạng 3. Các phép toán trên tập hợp**

⇨ **Ví dụ 1.** Cho hai tập hợp:  $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội chung của } 2 \text{ và } 3; n < 30\}$ ;  $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội của } 6; n < 30\}$ . Chứng minh rằng  $C = D$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Viết các tập hợp sau dưới dạng các khoảng, đoạn, nửa khoảng trong  $\mathbb{R}$  rồi biểu diễn trên trục số:  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$ ;  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** a) Cho hai tập hợp  $C = \{4; 7; 27\}$  và  $D = \{2; 4; 9; 27; 36\}$ . Hãy xác định tập hợp  $C \cap D$ .  
b) Cho hai tập hợp  $E = [1; +\infty)$  và  $F = (-\infty; 3]$ . Hãy xác định tập hợp  $E \cap F$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 4.** Cho hai tập hợp:  $C = \{2; 3; 4; 7\}$ ;  $D = \{-1; 2; 3; 4; 6\}$ . Hãy xác định tập hợp  $C \cup D$ .

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 5.** Cho các tập hợp:  $D = \{-2; 3; 5; 6\}$ ;  $E = \{x \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 10\}$ ;  $X = \{x \mid x \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 10\}$ .

a) Tìm  $D \setminus E$  và  $E \setminus D$ .

b)  $E$  có là tập con của  $X$  không? Hãy tìm phần bù của  $E$  trong  $X$  (nếu có).

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 6.** Cho hai tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$  và  $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ .

a) Tìm các tập hợp  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

b) Tìm các tập  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ,  $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ .

 **Lời giải.**

#### Dạng 4. Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp

⇨ **Ví dụ 1.** Cho  $A$  là tập hợp các học sinh giỏi Toán của trường THPT X và  $B$  là tập hợp học sinh giỏi Văn của trường này. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a)  $A \cup B$ .      b)  $A \cap B$ .      c)  $A \setminus B$ .      d)  $B \setminus A$ .      e)  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C1 có 45 học sinh trong đó có 17 bạn đạt học sinh giỏi Văn, 25 bạn đạt học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10C1.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** Một lớp học có 50 học sinh trong đó có 30 em biết chơi bóng chuyền, 25 em biết chơi bóng đá, 10 em biết chơi cả bóng đá và bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em không biết chơi môn nào trong hai môn ở trên?

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 4.** Trong số 45 cán bộ được triệu tập để chuẩn bị công tác cho một cuộc hội nghị quốc tế có 25 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 15 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 10 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇒ **Ví dụ 5.** Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇒ **Ví dụ 6.** Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇒ **Ví dụ 7.** Ở xứ sở của thần Thoại ngoài các vị thần thì còn có các sinh vật gồm 27 con người, 311 con yêu quái một mắt, 205 con yêu quái tóc răn và yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn. Tìm số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn biết có tổng số sinh vật là 500 con.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 8.** Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 9.** Lớp 10A có 45 học sinh, có 15 học sinh giỏi và 20 học sinh xếp hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học giỏi vừa xếp hạnh kiểm tốt. Các học sinh được học sinh giỏi hoặc hạnh kiểm tốt đều được khen thưởng. Số học sinh được khen thưởng của lớp 10A là là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 10.** Kết quả thi học kì một của một trường THPT có 48 thí sinh giỏi môn Toán, 37 thí sinh giỏi môn Vật Lí, 42 thí sinh giỏi môn Văn. Biết rằng có 75 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Vật lí, 76 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Văn, 66 thí sinh giỏi môn Vật lí hoặc môn Văn và có 4 thí sinh giỏi cả ba môn. Hỏi

- có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn.
- có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 2 môn.
- có bao nhiêu học sinh giỏi ít nhất 1 môn.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

🔗 Ví dụ 11. Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?

💬 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

🔗 Ví dụ 12. Trong số 42 học sinh của lớp 10A có 13 bạn được xếp loại học lực giỏi, 22 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó 7 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng? Biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.

💬 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

🔗 Ví dụ 13. Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?

💬 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 14.** Có 45 học sinh giỏi, mỗi em giỏi ít nhất một môn. Có 22 em giỏi Văn, 25 em giỏi Toán, 20 em giỏi Anh. Có 8 em giỏi đúng hai môn Văn, Toán; Có 7 em giỏi đúng hai môn Toán, Anh; Có 6 em giỏi đúng hai môn Anh, Văn. Hỏi có bao nhiêu em giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh?

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 15.** Để thành lập đội tuyển học sinh giỏi khối 10, nhà trường tổ chức thi chọn các môn Toán, Văn, Anh trên tổng số 111 học sinh. Kết quả có: 70 học sinh giỏi Toán, 65 học sinh giỏi Văn, 62 học sinh giỏi Anh. Trong đó có 49 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Toán, 32 học sinh giỏi cả hai môn Toán và Anh, 34 học sinh giỏi cả hai môn Văn và Anh. Xác định số học sinh giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh. Biết rằng có 6 học sinh không đạt yêu cầu cả ba môn.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....



## Bài tập tự luận



### Dạng 5. Xác định tập hợp

Được mô tả theo 2 cách:

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp.
- Nêu tính chất đặc trưng.

✦ **Bài 1.** Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$ .
- $B$  là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
- $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$ .

✦ **Bài 2.** Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5)\} = 0$ .
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 40\}$ .
- $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$ .
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$ .

✦ **Bài 3.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \dots; 52\}$ .
- $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 51\}$ .
- $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \dots; 62\}$ .

✦ **Bài 4.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$ .
- $B = \{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}$ .

✦ **Bài 5.** Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{0; 7; 14; 21; 28\}$$

### Dạng 6. Tập hợp con, xác định tập hợp con

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử.

- Khi liệt kê tất cả các tập con của  $A$ , ta liệt kê đầy đủ theo thứ tự:  
 $\emptyset$ ; tập 1 phần tử; tập 2 phần tử; tập 3 phần tử;...;  $A$ .

b) Số tập con của  $A$  là  $2^n$ .

✦ **Bài 6.** Tìm tất cả các tập con của tập  $A = \{a, 1, 2\}$ .

✦ **Bài 7.** Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

✦ **Bài 8.** Xác định tập hợp  $X$  biết  $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$ .

✦ **Bài 9.** Xác định tập hợp  $X$  biết  $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$ .

✦ **Bài 10.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp  $A$  sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

✦ **Bài 11.** Cho  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$ . Tìm tất cả các tập hợp  $X$  sao cho  $A \subset X \subset B$ .

### 📁 Dạng 7. Các phép toán trên tập hợp

✦ **Bài 12.** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  và  $B = \{0; 2; 4\}$ . Xác định  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ .

✦ **Bài 13.** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$  và  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước số của } 12\}$ . Tìm  $A \cap B$  và  $A \cup B$ .

✦ **Bài 14.** Cho hai tập hợp  $A$  và  $B$ . Tìm  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  biết

a)  $A = \{x \mid x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$  và  $B = \{x \mid x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$ .

b)  $A = \{x \mid x \text{ là ước nguyên dương của } 27\}$  và  $B = \{x \mid x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$ .

✦ **Bài 15.** Cho  $A$  là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuật và  $B$  là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuật dự kiến sẽ lựa chọn thi khối  $A$  vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a)  $A \cap B$ .

b)  $A \cup B$ .

✦ **Bài 16.** Cho tập hợp  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 4\}$  và  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\}$ . Tìm số nguyên  $a$  để tập hợp  $B \cap C = \emptyset$ .

✦ **Bài 17.** Xác định tập hợp  $A \cap B$  biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 7\}.$$

✧ **Bài 18.** Cho  $A$  là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10,  $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$  và  $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$ . Hãy tìm  $A \cap (B \cup C)$ .

✧ **Bài 19.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$ . Tìm  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ .

✧ **Bài 20.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x - 1| < 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x - 1| > 2\}$ . Tìm  $A \cap B$ .

✧ **Bài 21.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{Z} | 2m - 1 < x < 2m + 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| < 2\}$ . Tìm  $m$  để  $A \cap B = \emptyset$ .

✧ **Bài 22.** Cho  $A = [-2; 4]$ ,  $B = (2; +\infty)$ ,  $C = (-\infty; 3)$ . Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a)  $A \cap B, B \cap C$ .

b)  $\mathbb{R} \cap A, \mathbb{R} \cap B$ .

✧ **Bài 23.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x\}$ . Tìm  $A \setminus B, B \setminus A$ .

✧ **Bài 24.** Cho  $A = [-2; 4]$ ,  $B = (2; +\infty)$ ,  $C = (-\infty; 3)$ . Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a)  $A \setminus B, B \setminus A$ .

b)  $\mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R} \setminus B, \mathbb{R} \setminus C$ .

### Dạng 8. Các bài toán thực tế liên quan đến tập hợp

✧ **Bài 25.** Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

✧ **Bài 26.** Lớp 10B<sub>1</sub> có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Tính số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10B<sub>1</sub>.

✧ **Bài 27.** Lớp 10A<sub>1</sub> có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Tính số học sinh giỏi đúng hai môn học của lớp 10A<sub>1</sub>.

## F Bài tập trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Cho hai tập hợp  $X = \{1; 3; 5; 8\}$ ,  $Y = \{3; 5; 7; 9\}$ . Tập hợp  $X \cup Y$  bằng tập hợp nào sau đây?

- A  $\{1; 3; 5\}$ .       B  $\{3; 5\}$ .       C  $\{1; 7; 9\}$ .       D  $\{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$ .

❖ **Câu 2.** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  và  $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ . Tìm  $A \setminus B$ .

- A  $A \setminus B = \{2; 4\}$ .       B  $A \setminus B = \{1; 3; 5\}$ .  
 C  $A \setminus B = \{0; 1; 3; 5\}$ .       D  $A \setminus B = \{0; 6; 8\}$ .

❖ **Câu 3.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(x - 1) = 0\}$ ,  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 < 10\}$ . Chọn mệnh đề đúng?

- A  $A \cap B = \{1; 2\}$ .       B  $A \cap B = \{2\}$ .  
 C  $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$ .       D  $A \cap B = \{0; 3\}$ .

❖ **Câu 4.** Cho các tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (4 - x^2)(x^2 - 5x + 4) = 0\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 4\}$ . Tập hợp  $A \cap B$  là

- A  $\{-2, 1, 2, 4\}$ .       B  $\{1, 2, 4\}$ .  
 C  $\{2, 4\}$ .       D  $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ .

❖ **Câu 5.** Cho hai tập hợp  $A = (-5; 7)$  và  $B = (1; +\infty)$ . Tìm  $A \setminus B$ .

- A  $A \setminus B = (-5; 1]$ .       B  $A \setminus B = (-5; 1)$ .       C  $A \setminus B = [7; +\infty)$ .       D  $A \setminus B = (7; +\infty)$ .

❖ **Câu 6.** Cho hai tập hợp  $A = [-2; 4)$  và  $B = (0; +\infty)$ . Tìm khẳng định đúng.

- A  $A \cup B = (4; +\infty)$ .       B  $A \cap B = (0; 4)$ .  
 C  $B \setminus A = [-2; +\infty)$ .       D  $A \setminus B = [-2; 0)$ .

❖ **Câu 7.** Cho  $A$  là tập hợp các hình thoi,  $B$  là tập hợp các hình chữ nhật và  $C$  là tập hợp các hình vuông. Khi đó

- A  $A \cap B = C$ .       B  $A \setminus B = C$ .       C  $B \setminus A = C$ .       D  $A \cup B = C$ .

❖ **Câu 8.** Cho hai tập hợp  $M = \{1; 2; 3; 5\}$  và  $N = \{2; 6; -1\}$ . Xét các khẳng định

- (I)  $M \cap N = \{2\}$       (II)  $N \setminus M = \{1; 3; 5\}$       (III)  $M \cup N = \{1; 2; 3; 5; 6; -1\}$ .

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong ba khẳng định nêu trên?

- A 0.       B 3.       C 1.       D 2.

❖ **Câu 9.** Cho hai tập hợp  $A = \{2; 4; 6; 8\}$  và  $B$  là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10. Phần bù của  $A$  trong  $B$  là

- A  $\{0; 1; 3; 5; 7; 9\}$ .       B  $[0; 10) \setminus \{2; 4; 6; 8\}$ .  
 C  $\emptyset$ .       D  $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ .

❖ **Câu 10.** Cho hai tập hợp  $C_{\mathbb{R}}A = (0; +\infty)$  và  $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$ . Xác định tập  $A \cup B$ .

- (A)**  $A \cap B = (-2; 0)$ .    **(B)**  $A \cap B = (-5; -2)$ .    **(C)**  $A \cap B = (-5; 0)$ .    **(D)**  $A \cap B = [-5; -2]$ .

❖ **Câu 11.** Hình vẽ nào dưới đây biểu diễn cho tập hợp  $[-2; 1] \cap (0; 1)$ ?

- (A)**     **(B)** 
- (C)**     **(D)** 

❖ **Câu 12.** Cho hai tập  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+5}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ . Có bao nhiêu tập hợp  $X$  thỏa mãn  $B \subset X \subset A$ ?

- (A)** 64.    **(B)** 16.    **(C)** 8.    **(D)** 32.

❖ **Câu 13.** Cho tập hợp  $X = \{3; -4; 5\}$  có hai tập con  $A$  và  $B$  (số phần tử của tập  $B$  ít hơn số phần tử của tập  $A$ ). Có bao nhiêu cặp  $(A; B)$  mà  $\{3; -4\} \cup (A \setminus B) = X$ ?

- (A)** 12.    **(B)** 10.    **(C)** 11.    **(D)** 15.

❖ **Câu 14.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để  $A \cap B$  là một khoảng, biết  $A(m; m+2)$ ,  $B(4; 7)$ .

- (A)**  $4 \leq m < 7$ .    **(B)**  $2 < m < 7$ .    **(C)**  $2 \leq m < 7$ .    **(D)**  $2 < m < 4$ .

❖ **Câu 15.** Cho hai tập hợp  $A = (m-1; 5)$  và  $B = (3; +\infty)$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $A \setminus B = \emptyset$ .

- (A)**  $4 \leq m \leq 6$ .    **(B)**  $m = 4$ .    **(C)**  $m \geq 4$ .    **(D)**  $4 \leq m < 6$ .

❖ **Câu 16.** Cho hai tập hợp  $A = [-5; 8)$  và  $B = [-m; m+2]$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $A \cap B \neq \emptyset$ .

- (A)**  $m \in (-8; 6)$ .    **(B)**  $m \in [-7; +\infty)$ .    **(C)**  $m \in (-8; +\infty)$ .    **(D)**  $m \in (-1; +\infty)$ .

❖ **Câu 17.** Tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$  có bao nhiêu phần tử?

- (A)** 0.    **(B)** 1.    **(C)** 2.    **(D)** vô số.

❖ **Câu 18.** Tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 - x = 0\}$  có bao nhiêu phần tử?

- (A)** 1.    **(B)** 2.    **(C)** 0.    **(D)** 3.

❖ **Câu 19.** Hãy viết tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$  dưới dạng liệt kê các phần tử.

- (A)**  $A = \{2; 4\}$ .    **(B)**  $A = \{6; 8\}$ .    **(C)**  $A = \{-2; 2\}$ .    **(D)**  $A = (2; 4)$ .

❖ **Câu 20.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)** " $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 \leq x < 1$ ".    **(B)** " $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 < x \leq 1$ ".  
**(C)** " $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$ ".    **(D)** " $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 < x < 1$ ".

❖ **Câu 21.** Số tập con của tập hợp  $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$  là?

- A** 1.                      **B** 3.                      **C** 2.                      **D** 4.

❖ **Câu 22.** Tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  được viết dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó là

- A**  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 6\}$ .                      **B**  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ .  
**C**  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 6\}$ .                      **D**  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 6\}$ .

❖ **Câu 23.** Cho hai tập hợp  $X = \{7, 2, 8, 4, 9, 12\}$  và  $Y = \{1, 3, 7, 4\}$ . Tìm tập hợp  $X \cap Y$ .

- A**  $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 12\}$ .                      **B**  $\{2, 8, 9, 12\}$ .  
**C**  $\{4, 7\}$ .                      **D**  $\{1, 3\}$ .

❖ **Câu 24.** Cho hai tập hợp  $X = \{2, 4, 6, 9\}$  và  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ . Tìm tập hợp  $X \cup Y$ .

- A**  $\{1, 3\}$ .                      **B**  $\{6, 9\}$ .                      **C**  $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ .                      **D**  $\{2, 4\}$ .

❖ **Câu 25.** Cho hai tập hợp  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  và  $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Tìm tập hợp  $X \setminus Y$ .

- A**  $\{0\}$ .                      **B**  $\{0, 1\}$ .                      **C**  $\{1, 2\}$ .                      **D**  $\{1, 5\}$ .

❖ **Câu 26.** Cho hai tập hợp  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  và  $B = \{0, 2, 4\}$ . Tìm tập hợp  $C_A B$ .

- A**  $\{0, 2, 4, 6\}$ .                      **B**  $\{0, 2, 4, 8\}$ .                      **C**  $\{2, 4\}$ .                      **D**  $\{6, 8\}$ .

❖ **Câu 27.** Cho  $A = (-\infty; -2]$ ,  $B = [3; +\infty)$  và  $C = (0; 4)$ . Khi đó tập  $(A \cup B) \cap C$  là

- A**  $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$ .                      **B**  $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$ .  
**C**  $[3; 4)$ .                      **D**  $[3; 4]$ .

❖ **Câu 28.** Cho hai tập hợp  $A = (-3; 4]$  và  $B = (-\sqrt{2}; +\infty)$ . Tập hợp  $A \cap B$  là

- A**  $(-\sqrt{2}; 4]$ .                      **B**  $(-3; +\infty)$ .                      **C**  $(-3; -\sqrt{2}]$ .                      **D**  $(4; +\infty)$ .

❖ **Câu 29.** Cho hai tập hợp  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$  và  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$ . Tìm tập hợp  $A \cap B$ .

- A**  $[-2; 5]$ .                      **B**  $[-2; 6]$ .                      **C**  $[-5; 2]$ .                      **D**  $(-2; +\infty)$ .

❖ **Câu 30.** Cho các tập hợp  $M = [1; 4]$ ,  $N = (2; 6)$  và  $P = (1; 2)$ . Tìm tập hợp  $(M \cap N) \cap P$ .

- A**  $[0; 4]$ .                      **B**  $[5; +\infty)$ .                      **C**  $(-\infty; 1)$ .                      **D**  $\emptyset$ .

❖ **Câu 31.** Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Văn, 15 học sinh giỏi Sử, 5 học sinh giỏi cả 2 môn Văn, Sử và 2 học sinh không giỏi môn nào. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- A** 20.                      **B** 22.                      **C** 25.                      **D** 28.

❖ **Câu 32.** Để phục vụ cho công việc tiêm vắc-xin phòng chống Covid-19, Sở y tế đã huy động 30 cán bộ đo huyết áp, 25 cán bộ tiêm vắc-xin. Trong đó có 12 cán bộ làm được cả 2 công việc đo huyết áp và tiêm vắc-xin. Hỏi Sở y tế đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ cho công việc tiêm

vắc-xin phòng chống Covid-19?

**A** 42.

**B** 31.

**C** 55.

**D** 43.

# Chương 2

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### Bài 3

### BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### A Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  có dạng tổng quát là  $ax + by \leq c$ , (1)  
(hoặc  $ax + by < c$ ;  $ax + by \geq c$ ;  $ax + by > c$ ), trong đó  $a, b, c$  là những số thực đã cho,  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0,  $x$  và  $y$  là các ẩn số.

##### 2. Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình  $ax + by \leq c$  như sau (tương tự cho bất phương trình  $ax + by \geq c$ )

- ☑ **Bước 1:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vẽ đường thẳng  $\Delta: ax + by = c$ .
- ☑ **Bước 2:** Lấy một điểm  $M_0(x_0; y_0)$  không thuộc  $\Delta$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$ ).
- ☑ **Bước 3:** Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh  $ax_0 + by_0$  với  $c$ .
- ☑ **Bước 4:** Kết luận,
  - Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  chứa  $M_0$  là miền nghiệm của  $ax_0 + by_0 \leq c$ .
  - Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  không chứa  $M_0$  là miền nghiệm của  $ax_0 + by_0 \leq c$ .

**⚠ Lưu ý:** Miền nghiệm của bất phương trình  $ax_0 + by_0 \leq c$  bỏ đi đường thẳng  $ax + by = c$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax_0 + by_0 < c$ .



**B**

**Các dạng toán**

**Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và bài toán liên quan**

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Cho bất phương trình:  $2x - y < 0$ . Trong các cặp số  $(-1; 2)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(3; -2)$ ,  $(-1; -2)$ , cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

**Lời giải.**

.....

.....

**Ví dụ 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $2x + y \leq 3$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 3.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $-2x + 3y > 0$ .  
b) Cho hai điểm  $A(2; 1)$  và  $B(3; 3)$ , hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ  $(d)$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....	.....
.....	.....

❖ **Ví dụ 4.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $x + y - 3 < 0$ .  
 b) Tìm điều kiện của  $m$  và  $n$  để mọi điểm thuộc đường thẳng  $(d')$ :  $(m^2 - 2)x - y + m + n = 0$  đều là nghiệm của bất phương trình trên.

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

❖ **Bài 1.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $2x + y \leq 3$ .

❖ **Bài 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $2x - 4y < 8$ .

❖ **Bài 3.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $3x - y \leq 0$ .

❖ **Bài 4.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1$ .  
 b) Tìm điểm  $A$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm  $A$  là giao điểm của parabol  $(P)$  có dạng  $y = x^2 - 5x + 4$  và trục hoành.

❖ **Bài 5.** Cho bất phương trình  $2x + y - 1 \leq 0$ .  
 a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

b) Tìm tất cả giá trị tham số  $m$  để điểm  $M(m,1)$  nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp  $M$  tìm được trong cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$  ở câu a).

❖ **Bài 6.** Cho bất phương trình  $x - 2y + 4m > 0$ .

a) Tùy theo giá trị tham số  $m$ , hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

b) Gọi  $A, B$  lần lượt là giao của đường thẳng  $x - 2y + 4m = 0$  với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm  $C(2; 1)$  sao cho diện tích tam giác  $ABC$  bằng 4.

 **Dạng 2. Bài toán thực tế liên quan**

 **VÍ DỤ MINH HỌA**

❖ **Ví dụ 1.** Hà mang 95000 đồng ra chợ mua hoa cúc và hoa hồng. Một bông hoa cúc có giá 4000 đồng, một bông hoa hồng có giá 7000 đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà Hà phải chi để mua  $x$  bông hoa cúc và  $y$  bông hoa hồng.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 2.** Mỗi ngày Nga đều dành không quá 30 phút để đọc cả 2 cuốn sách A, B. Nga đọc được 3 trang sách A trong 2 phút, đọc được 2 trang sách B trong 1 phút. Gọi  $x, y$  lần lượt là số phút đọc sách A và số phút đọc sách B. Tìm điều kiện của  $x$  và  $y$  để Nga đọc được ít nhất 35 trang sách trong một ngày.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 3.** Một cửa hàng bán hai loại trà sữa, trong đó 4 cốc loại 1 có giá 100000 đồng, 1 cốc loại 2 có giá 30000 đồng. Muốn có lãi theo dự tính thì mỗi ngày cửa hàng phải bán được ít nhất 5 triệu đồng tiền hàng. Hỏi số cốc trà sữa bán được trong một ngày trong những trường hợp nào thì cửa hàng có lãi như dự tính?

Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**✎ Bài 7.** Giá sách của Hoa có thể chứa được khối lượng sách tối đa là 4 kg. Hoa xếp cả hai loại sách (loại 1 và loại 2) vào giá. Sách loại 1 có khối lượng 100 gam mỗi cuốn và sách loại 2 có khối lượng 200 gam mỗi cuốn. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho khối lượng của  $x$  cuốn loại 1 và  $y$  cuốn loại 2 có thể được xếp lên giá sách.

**✎ Bài 8.** Công ty viễn thông Mobifone tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng, 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Mỗi tháng Minh gọi điện thoại hết từ 200 đến 300 nghìn đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn mô tả cho số tiền điện thoại trả cho  $(x)$  phút gọi nội mạng và  $(y)$  phút gọi ngoại mạng trong một tháng.

**✎ Bài 9.** Bạn An giải 10 bài Toán trong 20 phút thì đúng được 80% số bài Toán, giải 12 bài Lý trong 15 phút thì đúng được  $\frac{3}{4}$  số bài Lý. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho thời gian giải  $x$  bài Toán đúng và  $y$  bài Lý đúng, biết thời gian giải ít hơn 150 phút.

**✎ Bài 10.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 100 m<sup>2</sup>. Diện tích để kê một chiếc ghế là 1 m<sup>2</sup>, một chiếc bàn là 2 m<sup>2</sup> và diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 24 m<sup>2</sup>. Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê, hãy viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế và chỉ ra hai nghiệm của bất phương trình.

**✎ Bài 11.** Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

⇒ **Bài 12.** Một bác nông dân cần trồng lúa và khoai trên diện tích đất 6 ha, với lượng phân bón dự trữ là 100 kg và sử dụng tối đa 120 ngày công. Để trồng 1 ha lúa cần sử dụng 20 kg phân bón, 10 ngày công với lợi nhuận là 30 triệu đồng; để trồng 1 ha khoai cần sử dụng 10 kg phân bón, 30 ngày công với lợi nhuận là 60 triệu đồng. Biết bác nông dân đã trồng  $x$  (ha) lúa và  $y$  (ha) khoai. Tìm giá trị của  $x$  để bác nông dân đạt được lợi nhuận cao nhất.

## C Câu hỏi trắc nghiệm

⇒ **Câu 1.** Trong các bất phương trình sau đây, đâu là bất phương trình bậc nhất hai ẩn  
 A  $2x^2 - 3x \geq 1$ .       B  $2x + y \leq 1$ .       C  $3x + 1 \leq 0$ .       D  $3x + y = 1$ .

⇒ **Câu 2.** Cho bất phương trình  $2x + 3y - 6 \leq 0$  (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.  
 B Bất phương trình (1) vô nghiệm.  
 C Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.  
 D Bất phương trình (1) có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ .

⇒ **Câu 3.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình  $x - 4y + 1 \geq 0$ ?

- A  $(-1; 0)$ .       B  $(-2; -1)$ .       C  $(-1; 3)$ .       D  $(0; 0)$ .

⇒ **Câu 4.** Miền nghiệm của bất phương trình  $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$  là nửa mặt phẳng chứa điểm nào?

- A  $(0; 0)$ .       B  $(1; 1)$ .       C  $(-1; 1)$ .       D  $(2; 5)$ .

⇒ **Câu 5.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $x + y - 2 > 0$ ?

- A  $(2; 1)$ .       B  $(0; 0)$ .       C  $(1; 0)$ .       D  $(0; 1)$ .

⇒ **Câu 6.** Điểm  $A(-1; 3)$  thuộc miền của bất phương trình

- A  $x + 3y < 0$ .       B  $3x - y > 0$ .       C  $-3x + 2y - 4 > 0$ .       D  $2x - y + 4 > 0$ .

⇒ **Câu 7.** Tìm tất cả các số thực  $a$  sao cho miền nghiệm của bất phương trình  $x \leq a$  chứa điểm  $M(-1; 0)$ .

- A  $a > -1$ .       B  $a \geq -1$ .       C  $a > 0$ .       D  $a \geq 0$ .

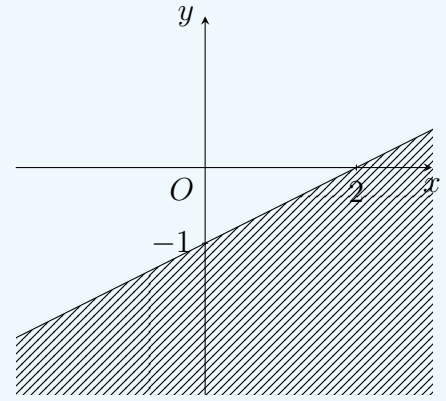
⇒ **Câu 8.** Cho đường thẳng  $d: 7x - 9y + 2 = 0$  chia mặt phẳng tọa độ làm hai nửa mặt phẳng, trong đó miền nghiệm của bất phương trình  $7x - 9y + 2 > 0$  là nửa mặt phẳng

- A có bờ là đường thẳng  $d$  và không chứa điểm  $O(0; 0)$ .  
 B không có bờ  $d$  và chứa điểm  $O(0; 0)$ .  
 C có bờ là đường thẳng  $d$  và chứa điểm  $O(0; 0)$ .  
 D không chứa bờ  $d$  và không chứa điểm  $O(0; 0)$ .

❖ Câu 9.

Phần gạch chéo trong hình vẽ dưới đây (không bao gồm đường thẳng  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào sau đây?

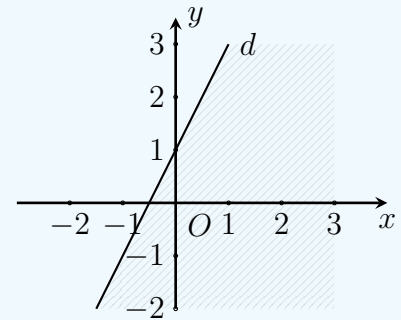
- A  $2x - y < 0$ .
- B  $x - 2y < 2$ .
- C  $2y - x < -2$ .
- D  $2x - y > 1$ .



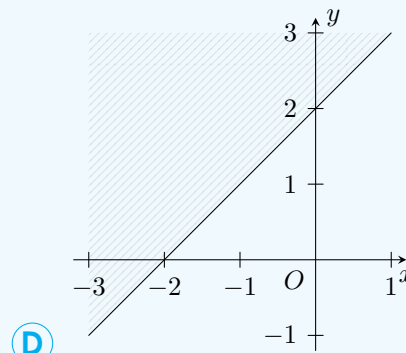
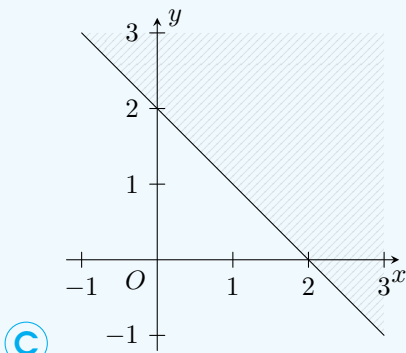
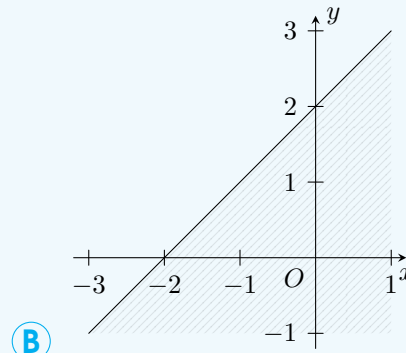
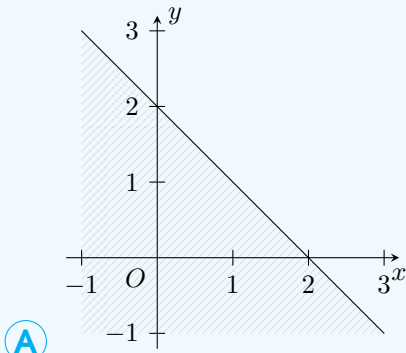
❖ Câu 10.

Bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm (phần không gạch sọc) như hình vẽ bên?

- A  $2x - y + 1 < 0$ .
- B  $x - y + 1 < 0$ .
- C  $2x - 3y + 1 < 0$ .
- D  $2x - y - 1 < 0$ .



❖ Câu 11. Miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \leq 2$  là phần không bị gạch sọc của hình vẽ nào trong các hình sau?



❖ Câu 12. Cho bất phương trình  $2x + 3y - 2 < 0$ . Miền nghiệm của bất phương trình là

- A nửa mặt phẳng chứa điểm  $O$  có bờ là đường thẳng  $2x + 3y - 2 = 0$  (không kể bờ).
- B nửa mặt phẳng chứa điểm  $O$  có bờ là đường thẳng  $2x + 3y - 2 = 0$  (kể cả bờ).

- Ⓒ nửa mặt phẳng không chứa điểm  $O$  có bờ là đường thẳng  $2x + 3y - 2 = 0$  (không kể bờ).  
 Ⓓ nửa mặt phẳng không chứa điểm  $O$  có bờ là đường thẳng  $2x + 3y - 2 = 0$  (kể cả bờ).

❖ **Câu 13.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x - 2y + 5 < 0$  là

- Ⓐ Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  (không bao gồm đường thẳng).  
 Ⓑ Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  (không bao gồm đường thẳng).  
 Ⓒ Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  (bao gồm đường thẳng).  
 Ⓓ Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  (không bao gồm đường thẳng).

❖ **Câu 14.** Cặp điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $3(x + \sqrt{2}y - \sqrt{3}) > 8(\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{2})$ ?

- Ⓐ  $A(2; -2)$  và  $B(2; 2)$ .  
 Ⓑ  $C(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$  và  $D(\sqrt{2}; -1 - \sqrt{5})$ .  
 Ⓒ  $E(\sqrt{2}; \sqrt{2})$  và  $F(\sqrt{5}; 1)$ .  
 Ⓓ  $G(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{3})$  và  $H(1; 4)$ .

❖ **Câu 15.** Giao miền nghiệm của ba bất phương trình  $y \geq 0; 3x - 2y \geq -6; 3x + 4y \leq 12$  tạo thành một tam giác có diện tích bằng

- Ⓐ 18.                      Ⓑ 9.                      Ⓒ 6.                      Ⓓ 12.

❖ **Câu 16.** Giao miền nghiệm của ba bất phương trình  $x + 4y \geq 8; -x + 2y \leq 4; x + y \leq 5$  tạo thành một tam giác có chu vi bằng

- Ⓐ  $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ .  
 Ⓑ  $\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$ .  
 Ⓒ  $\sqrt{17} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$ .  
 Ⓓ  $\sqrt{17} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ .

❖ **Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để bất phương trình  $3x + my - 7 \geq 0$  có miền nghiệm chứa điểm  $A(\sqrt{2}; 1)$ .

- Ⓐ  $m \in [3\sqrt{2} - 7; +\infty)$ .  
 Ⓑ  $m \in (-\infty; 3\sqrt{2} - 7)$ .  
 Ⓒ  $m \in (-\infty; 7 - 3\sqrt{3})$ .  
 Ⓓ  $m \in [7 - 3\sqrt{2}; +\infty)$ .

❖ **Câu 18.** Cho bất phương trình  $mx + \sqrt{2}y - 1 < 0$  với  $m$  là tham số thực. Điểm nào dưới đây luôn luôn **không** thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho?

- Ⓐ  $E(m; m^2)$ .                      Ⓑ  $F(2m^2; m)$ .                      Ⓒ  $G(0; 1 + m^2)$ .                      Ⓓ  $H(0; -1 - m^2)$ .

❖ **Câu 19.** Với giá trị nào của  $m$  thì điểm  $A(1 - m; m)$  **không** thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3(y - x) > 4$ .

- Ⓐ  $0 \leq m \leq 1$ .                      Ⓑ  $m < \frac{1}{8}$ .                      Ⓒ  $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$ .                      Ⓓ  $m \geq \frac{1}{8}$ .

❖ **Câu 20.** Một bác nông dân cần trồng lúa và khoai trên diện tích đất 6 ha, với lượng phân bón dự trữ là 100 kg và sử dụng tối đa 120 ngày công. Để trồng 1 ha lúa cần sử dụng 20 kg phân bón, 10 ngày công với lợi nhuận là 30 triệu đồng; để trồng 1 ha khoai cần sử dụng 10 kg phân bón, 30 ngày công với lợi nhuận là 60 triệu đồng. Để đạt lợi nhuận cao nhất, bác nông dân đã trồng  $x$  (ha) lúa và  $y$  (ha) khoai. Giá trị của  $x$  là

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 4.                      (D) 5.

❖ **Câu 21.** Một người thợ mộc tốn 6 giờ để làm một cái bàn và 4 giờ để làm một cái ghế. Gọi  $x$ ,  $y$  lần lượt là số bàn và số ghế mà người thợ mộc sản xuất trong một tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  biết trong một tuần người thợ mộc có thể làm tối đa 50 giờ.

- (A)  $3x + 2y \leq 25$ .                      (B)  $3x + 2y > 25$ .                      (C)  $3x + 2y \geq 25$ .                      (D)  $3x + 2y < 25$ .

❖ **Câu 22.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m<sup>2</sup>. Diện tích để kê một chiếc ghế là 0,6 m<sup>2</sup>, một chiếc bàn là 1,3 m<sup>2</sup>. Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$ ,  $y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 10 m<sup>2</sup>.

- (A)  $0,6x + 1,3y \geq 50$ .                      (B)  $0,6x + 1,3y \leq 50$ .                      (C)  $1,3x + 0,6y \leq 50$ .                      (D)  $1,3x + 0,6y \geq 50$ .

❖ **Câu 23.** Bạn Nam đang sưu tầm các đồng tiền vàng và bạc để vào một các túi, trọng lượng tối đa mà túi chứa được là 20 gam. Mỗi đồng xu vàng nặng khoảng 14 gam, mỗi đồng xu bạc nặng khoảng 7 gam. Bất phương trình nào sau đây mô tả số đồng tiền vàng ( $x$ ) và số đồng tiền bạc ( $y$ ) có thể được chứa trong túi?

- (A)  $7x + 14y \leq 20$ .                      (B)  $7x + 14y > 20$ .                      (C)  $14x + 7y \leq 20$ .                      (D)  $14x + 7y > 20$ .

❖ **Câu 24.** Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein và 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần tối thiểu 52 g protein. Gọi  $x$ ,  $y$  lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người đàn ông nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$ ,  $y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người đàn ông trong một ngày.

- (A)  $26x + 20y \leq 52$ .                      (B)  $26x + 20y < 52$ .                      (C)  $13x + 10y \geq 26$ .                      (D)  $13x + 10y > 26$ .

❖ **Câu 25.** Công ty viễn thông Viettel có gói cước Hi School tính phí là 1190 đồng mỗi phút gọi nội mạng và 1390 đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Một bạn học sinh đăng kí gói cước trên và sử dụng  $x$  phút gọi nội mạng,  $y$  phút gọi ngoại mạng trong một tháng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$ ,  $y$  để mô tả số tiền bạn đó phải trả trong một tháng ít hơn 100 nghìn đồng.

- (A)  $119x + 139y \geq 10000$ .                      (B)  $139x + 119y < 10000$ .  
(C)  $119x + 139y \leq 10000$ .                      (D)  $119x + 139y < 10000$ .

❖ **Câu 26.** Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1 – 6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại: loại 1 dành cho trẻ từ 6 – 13 tuổi, giá vé là 50000 đồng/vé và loại 2 dành cho người trên 13 tuổi, giá vé là 80000 đồng/vé. Gọi  $x$  là số vé loại 1 và  $y$  là số vé loại 2 bán được. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$ ,  $y$  để biểu diễn điều kiện sao cho số tiền bán vé thu được tối thiểu 10 triệu đồng.

- (A)  $5x + 8y \geq 100$ .                      (B)  $5x + 8y > 1000$ .                      (C)  $8x + 5y \geq 1000$ .                      (D)  $5x + 8y \geq 1000$ .



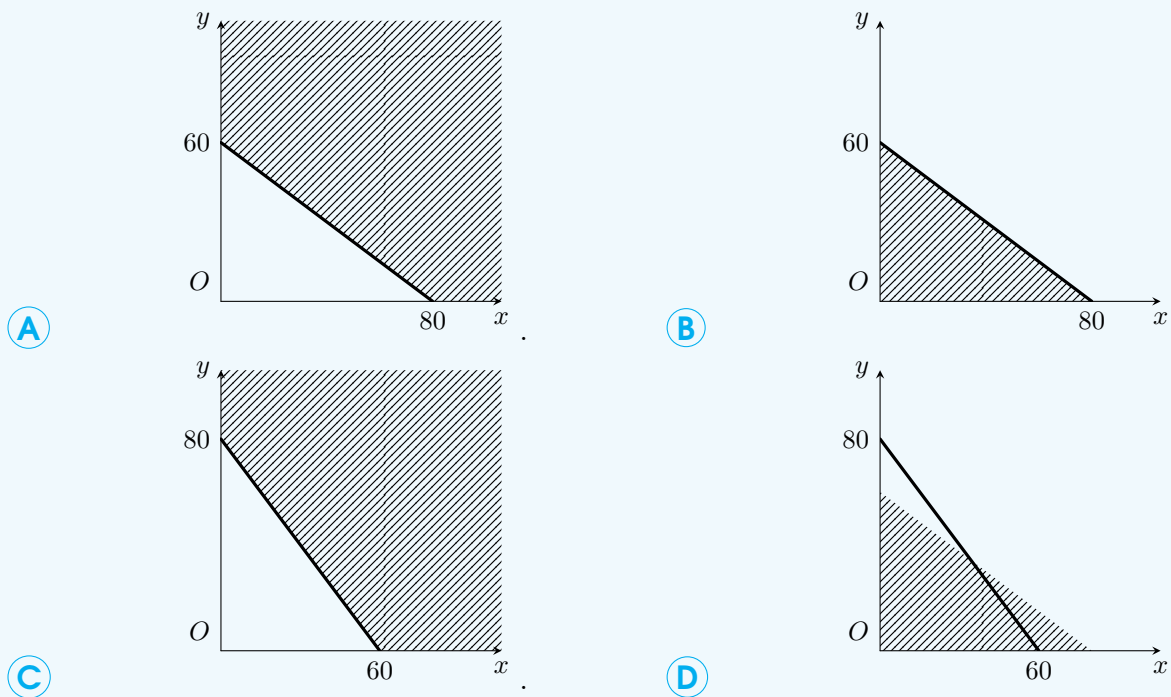
⇒ **Câu 27.** Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Gọi  $x, y$  lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa trong mỗi tuần. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$  và  $y$  sao cho Nam kiếm thêm tiền mỗi tuần được ít nhất là 900 nghìn đồng.

- (A)  $3x + 2y \leq 180$ .      (B)  $3x + 2y > 180$ .      (C)  $3x + 2y \geq 180$ .      (D)  $3x + 2y < 180$ .

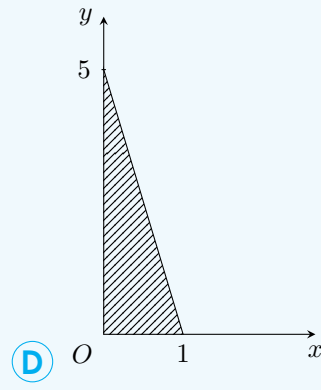
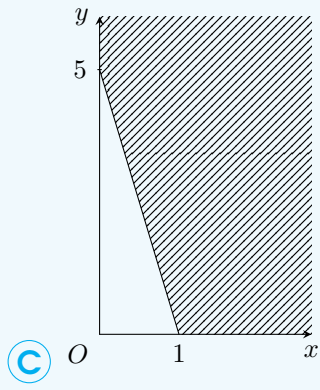
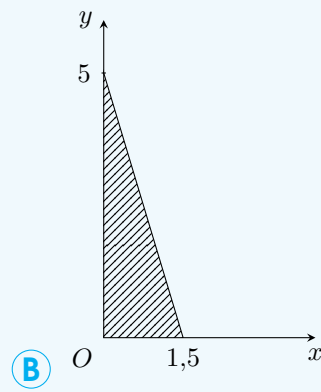
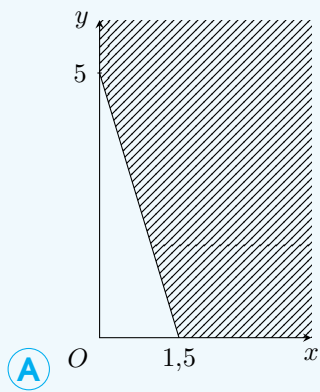
⇒ **Câu 28.** Anh A muốn thuê một chiếc ô tô (có người lái) trong một tuần. Giá thuê xe như sau: từ thứ hai đến thứ sáu phí cố định là 900 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 10 nghìn đồng/km còn thứ bảy và chủ nhật thì phí cố định là 1200 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 15 nghìn đồng/km. Gọi  $x, y$  lần lượt là số km mà anh A đi trong các ngày từ thứ hai đến thứ sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho tổng số tiền anh A phải trả không quá 20 triệu đồng.

- (A)  $10x + 15y \leq 20000$ .      (B)  $2x + 3y \geq 2720$ .  
(C)  $10x + 15y \geq 20000$ .      (D)  $2x + 3y \leq 2720$ .

⇒ **Câu 29.** Một cửa hàng làm kệ sách và bàn làm việc. Mỗi kệ sách cần 4 giờ hoàn thiện. Mỗi bàn làm việc cần 3 giờ hoàn thiện. Mỗi tháng cửa hàng có tối đa 240 giờ làm việc. Hãy biểu diễn đồ thị mô tả số giờ làm việc trong mỗi tháng của cửa hàng theo số kệ sách hoàn thiện ( $x$ ) và số bàn hoàn thiện ( $y$ ).



⇒ **Câu 30.** Một gia đình cần  $x$  kg thịt bò và  $y$  kg thịt lợn trong một ngày, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 60 nghìn đồng. Biểu diễn đồ thị mô tả chi phí gia đình đó mua thịt bò và thịt lợn mỗi ngày để số tiền bỏ ra trong một ngày không quá 300 nghìn đồng.



# Bài 4

# HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## A Tóm tắt lý thuyết

### 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ☑ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- ☑ Cặp số  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi  $(x_0; y_0)$  đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

### 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

- \* Ôn tập: Phương trình của trục  $Ox$  là  $y = 0$  và phương trình của trục  $Oy$  là  $x = 0$ .
- ☑ Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- ☑ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- \* Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:
  - ☑ Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
  - ☑ Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

### 3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

\* Nhận xét: Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức  $F(x; y) = ax + by$ , với  $(x; y)$  là tọa độ các điểm thuộc miền đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$ , tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

## B Các dạng toán

### Dạng 1. Biểu diễn hình học của tập nghiệm

- a) Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ).
- ☑ Vẽ đường thẳng  $d : ax + by = c$ ;
  - ☑ Lấy điểm  $M(x_0; y_0) \notin d$ .
    - Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng không kể bờ  $d$  chứa  $M_0$  là miền nghiệm của  $ax + by < c$ .
    - Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng không kể bờ  $d$  **không** chứa  $M_0$  là miền nghiệm của  $ax + by < c$ .

**⚠ Lưu ý:** Miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by \leq c$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ) bao gồm miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  và đường thẳng  $d$  (nửa mặt phẳng kể cả bờ  $d$ ).

b) Cách xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ☑ Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.
- ☑ Sau khi làm như trên lần lượt đối với các bất phương trình trong hệ và trên cùng mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

**✍ VÍ DỤ MINH HỌA**

🔗 **Ví dụ 1.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $2x - 4y < 8$ .

**💬 Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

🔗 **Ví dụ 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $3x + y \geq 3$ .

**💬 Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

🔗 **Ví dụ 3.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $-2x + 3y > 0$ .  
 b) Cho hai điểm  $A(2; 1)$  và  $B(3; 3)$ , hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ  $(d)$ .

**💬 Lời giải.**

..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....	..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
--	--

⇔ **Ví dụ 4.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \end{cases}$$

 **Lời giải.**

..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....	..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
--	--

⇔ **Ví dụ 5.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

 **Lời giải.**

..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....	..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
--	--

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 6.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + 5y > 2 \\ x - 3y \geq 1 \\ x + y < 3 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 7.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

⇨ **Bài 1.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}.$$

⇨ **Bài 2.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2022x - 2023y \leq 2021y.$$

⇨ **Bài 3.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1$ .

b) Tìm điểm  $A$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm  $A$  là giao điểm của parabol  $(P) : y = x^2 - 5x + 4$  và trục hoành.

⇨ **Bài 4.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$$

⇨ **Bài 5.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y < -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

⇨ **Bài 6.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

⇨ **Câu 1.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 2x + 7y - 3 > 0 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$ ?

**A**  $P(-1; -5)$ .     
  **B**  $O(0; 0)$ .     
  **C**  $M(3; -1)$ .     
  **D**  $N(2; 0)$ .

⚡ **Câu 2.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$  chứa điểm nào trong các điểm sau?

**A** (0; 0).                      **B** (1; 0).                      **C** (0; -2).                      **D** (0; 2).

⚡ **Câu 3.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x - y \geq 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$  chứa điểm nào trong các điểm sau?

**A** (1; -3).                      **B** (-2; 1).                      **C** (3; -2).                      **D** (4; 1).

⚡ **Câu 4.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y \geq -1 \\ x - y < -2 \end{cases}$  **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

**A** (5; 8).                      **B** (6; 9).                      **C** (4; 7).                      **D** (3,4).

⚡ **Câu 5.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y - 1 > 0 \\ 5x - y + 4 < 0 \end{cases}$

**A** (0; 0).                      **B** (-2; 0).                      **C** (-1; -4).                      **D** (-3; 4).

⚡ **Câu 6.** Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} y \geq 0 \\ 3x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$  có miền nghiệm  $S$  và bốn điểm  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 3)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(-1; 3)$ . Trong các điểm đã cho, có bao nhiêu điểm thuộc  $S$ ?

**A** 1.                      **B** 2.                      **C** 3.                      **D** 4.

⚡ **Câu 7.** Xét hệ bất phương trình  $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$  và bốn điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(0; 1)$ ,  $D(-2; 0)$ . Trong các điểm trên, có bao nhiêu điểm thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho?

**A** 1.                      **B** 2.                      **C** 3.                      **D** 4.

⚡ **Câu 8.** Cặp số  $(x; y)$  nào sau đây là một nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 2x + 3y - 1 > 0 \\ 5x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$ ?

**A** (0; 4).                      **B** (0; 0).                      **C** (-2; -4).                      **D** (-3; -4).

⚡ **Câu 9.** Trong các cặp số  $(x; y)$  sau, cặp số nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ 3x - 2y + 2 > 0 \end{cases}$ ?

**A**  $(x; y) = (0; 0)$ .                      **B**  $(x; y) = (1; 1)$ .                      **C**  $(x; y) = (-1; 1)$ .                      **D**  $(x; y) = (-1; -1)$ .



❖ **Câu 10.** Cặp số  $(x; y) = (0; 0)$  **không** là nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?

**A**  $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} 2x + y < 1 \\ x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} 2x + y < 1 \\ x \leq 0 \\ y < 1 \end{cases}$

❖ **Câu 11.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} 5x + 3y - 19 \leq 0 \\ 12x - 5y - 13 \geq 0 \end{cases}$  ?

**A**  $N(1 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

**B**  $N(1 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ .

**C**  $N(1; 3 + \sqrt{2})$ .

**D**  $N(5 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

❖ **Câu 12.** Cặp số  $(x; y) = (-1; 3)$  là nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?

**A**  $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + 2y \geq 2 \\ y \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + y \geq 2 \\ y \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + y \geq 2 \\ y \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + 2y \geq 2 \\ y \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$

❖ **Câu 13.** Hệ bất phương trình  $\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y + x > 3 \end{cases}$  nhận cặp số  $(x; y)$  nào sau đây làm nghiệm của nó?

**A**  $(x; y) = (2; 1)$ .

**B**  $(x; y) = (2; 3)$ .

**C**  $(x; y) = (3; 0)$ .

**D**  $(x; y) = (1; 3)$ .

❖ **Câu 14.** Cho hệ  $\begin{cases} 2x + 3y < 5 \\ x + \frac{3}{2}y < 5 \end{cases}$ . Gọi  $S_1$  là tập nghiệm của bất phương trình  $2x + 3y < 5$ ,  $S_2$  là tập nghiệm của bất phương trình  $x + \frac{3}{2}y < 5$  và  $S$  là tập nghiệm của hệ thì

**A**  $S \subset S_2$ .

**B**  $S_2 \subset S_1$ .

**C**  $S_2 \subset S$ .

**D**  $S = S_1 \cup S_2$ .

❖ **Câu 15.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + y > 4 & (1) \\ x + \frac{1}{3}y > 4 & (2) \end{cases}$ . Gọi  $S_1$  là tập nghiệm của bất phương trình (1),  $S_2$  là nghiệm của bất phương trình (2) và  $S$  là tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A**  $S_1 \subset S_2$ .

**B**  $S_2 \subset S_1$ .

**C**  $S_2 \cup S = S_1$ .

**D**  $S_1 \subset S$ .

❖ **Câu 16.** Tìm số thực  $a$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ ax - 3y \geq -12 \end{cases}$  là một tam giác có diện tích bằng 6.

**A**  $a = -4$ .

**B**  $a = 4$ .

**C**  $a = 6$ .

**D**  $a = 12$ .

⇨ **Câu 17.** Tính diện tích  $S$  của miền nghiệm hệ bất phương trình  $\begin{cases} y + x \leq 3 \\ y - x \leq 3. \\ y \geq -1 \end{cases}$

(A)  $S = 8.$                       (B)  $S = 25.$                       (C)  $S = 16.$                       (D)  $S = 12.$

⇨ **Câu 18.** Tính diện tích  $S$  của miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq -3 \\ y + x \leq 8 \\ y - x \geq -2 \end{cases}.$

(A)  $S = 48.$                       (B)  $S = 64.$                       (C)  $S = 81.$                       (D)  $S = 49.$

⇨ **Câu 19.** Tính chu vi  $P$  của miền nghiệm hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ y \geq -6 \end{cases}.$

(A)  $P = 38.$                       (B)  $P = 36.$                       (C)  $P = 42.$                       (D)  $P = 40.$

⇨ **Câu 20.** Tìm giá trị của số thực  $a$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$  có diện tích bằng 6.

(A)  $a = -3.$                       (B)  $a = 8.$                       (C)  $a = 3.$                       (D)  $a = -8.$

⇨ **Câu 21.** Tìm giá trị của số thực  $a$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x - y \geq a \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$  là một tam giác có diện tích bằng 2.

(A)  $a = 2.$                       (B)  $a = -2.$                       (C)  $a = \sqrt{2}.$                       (D)  $a = -\sqrt{2}.$

⇨ **Câu 22.** Tìm giá trị của số thực  $m$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x + my \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$  là một tam giác có diện tích bằng 4.

(A)  $m = 2.$                       (B)  $m = 4.$                       (C)  $m = \frac{1}{4}.$                       (D)  $m = \frac{1}{2}.$

⇨ **Câu 23.** Tìm giá trị của số thực  $m$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \leq -1 \\ y \geq m \end{cases}$  có chu vi bằng 8.

(A)  $m = -3.$                       (B)  $m = 2.$                       (C)  $m = 3.$                       (D)  $m = -2.$

❖ **Câu 24.** Tìm giá trị của số thực dương  $m$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ mx + y \geq 2 \end{cases} \text{ có diện tích bằng } 8.$$

**A**  $m = 2.$

**B**  $m = 3.$

**C**  $m = \frac{1}{3}.$

**D**  $m = \frac{1}{2}.$

❖ **Câu 25.** Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi  $x, y$  lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau đây xác định số giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

**A**  $\begin{cases} x + y \geq 15 \\ 15x + 10y \geq 100. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y > 100. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} x + y \leq 15 \\ 15x + 10y \geq 100. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} x + y > 15 \\ 15x + 10y < 100. \end{cases}$

❖ **Câu 26.** Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có tối thiểu 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi  $x$  là điểm trung bình các môn học và  $y$  là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống này.

**A**  $\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} x < 7 \\ y < 5. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} x > 7 \\ y > 5. \end{cases}$

❖ **Câu 27.** Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x + 7y < 0 \end{cases}$  có tập nghiệm  $S$ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A**  $(1; -1) \in S.$

**B**  $(1; -\frac{1}{2}) \notin S.$

**C**  $(4; -1) \in S.$

**D**  $(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{7}) \in S.$

❖ **Câu 28.** Điểm  $A(0; \frac{5}{3})$  luôn thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây (với  $m$  là tham số thực)?

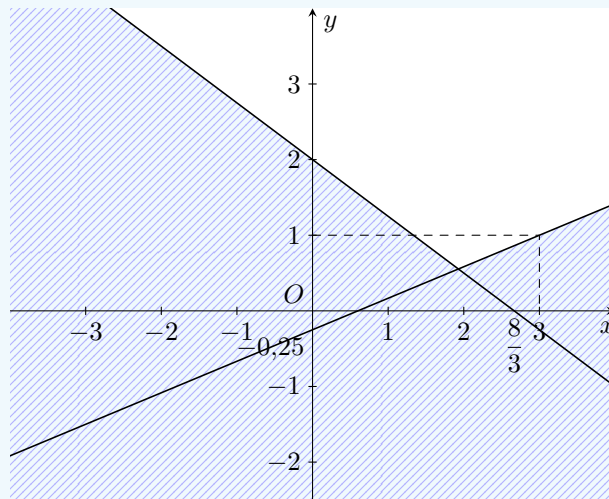
**A**  $(m^2 - 4)x + 3y - 5 \leq 0.$

**B**  $(m^2 - 4)x + 3y - 5 > 0.$

**C**  $(m^2 - 4)x + 3y - 5 < 0.$

**D**  $(m^2 - 4)x + 3y + 7 \leq 0.$

❖ **Câu 29.** Hình vẽ dưới đây là biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình nào? (với miền nghiệm là miền **không** gạch sọc và chứa bờ)



**A**  $\begin{cases} 3x + 4y - 8 \geq 0 \\ 5x - 12y - 3 \leq 0. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 3x + 4y - 8 \geq 0 \\ 5x - 12y - 3 \geq 0. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} 3x + 4y - 8 \leq 0 \\ 5x - 12y - 3 \leq 0. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} 3x + 4y - 3 \geq 0 \\ 5x - 12y - 8 \leq 0. \end{cases}$

❖ **Câu 30.**

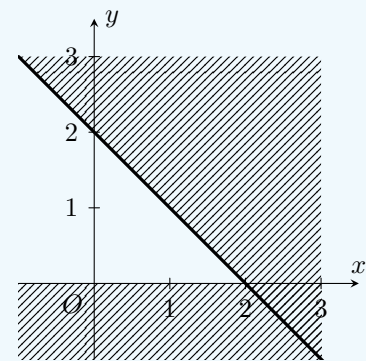
Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó trên đường thẳng  $y = 0$  trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

**A**  $\begin{cases} y \leq 0 \\ 2x + y > 1. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 2x - 2y > 6 \\ 2x + y \geq 1. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} x + y < 2 \\ y \geq 0. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} y \leq 0 \\ x + y < 1. \end{cases}$



❖ **Câu 31.**

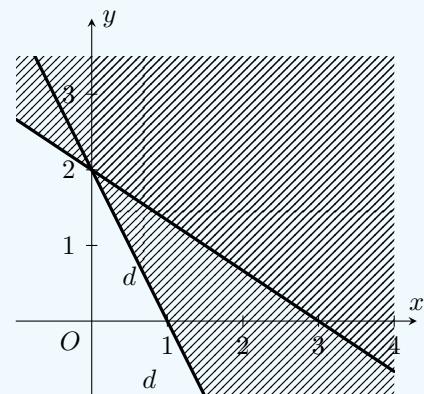
Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó trên đường thẳng  $d$  trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

**A**  $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ 2x + y > 2. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 2x + 3y < 6 \\ 2x + y \leq 2. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} x - 2y < 1 \\ 3x + 2y \leq 3. \end{cases}$

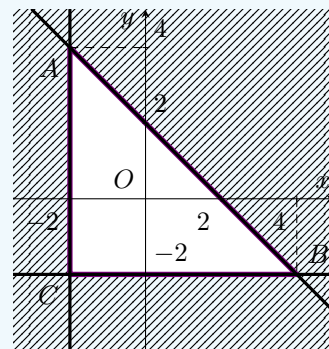
**D**  $\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 2x + y < 1. \end{cases}$



❖ **Câu 32.**

Cho hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -2 \\ x + y < 2. \end{cases}$$
 Biết rằng  $A, B, C$  là giao điểm

của hai trong ba đường thẳng  $x = -2, y = -2, x + y = 2$  (được cho như hình vẽ). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

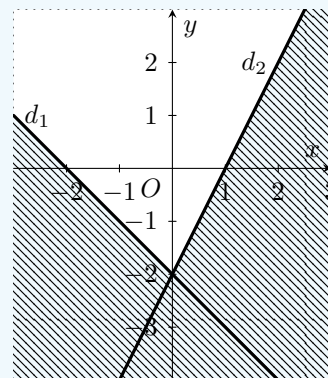


- A** Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác  $ABC$  bao gồm cả các cạnh  $AB, AC, BC$ .
- B** Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác  $ABC$  bao gồm các cạnh  $AC, BC$  ngoại trừ điểm  $A$ , điểm  $B$ .
- C** Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác  $ABC$  bao gồm các cạnh  $AB, AC, BC$  ngoại trừ điểm  $A$ , điểm  $B$ , điểm  $C$ .
- D** Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác  $ABC$  bao gồm các cạnh  $AB, BC$  ngoại trừ điểm  $A$ , điểm  $C$ .

### ❖ Câu 33.

Miền không bị gạch chéo (kể cả đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$ ) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

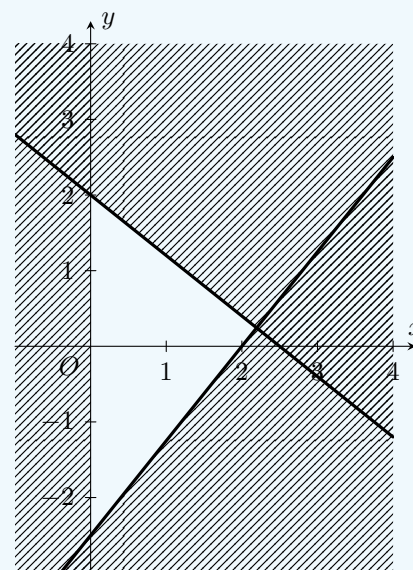
- A** 
$$\begin{cases} x - y \leq -2 \\ -2x - y \geq -2. \end{cases}$$
- B** 
$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ -2x - y \geq -2. \end{cases}$$
- C** 
$$\begin{cases} x + y \geq -2 \\ -2x + y \geq -2. \end{cases}$$
- D** 
$$\begin{cases} -x - y \leq -2 \\ 2x - y \geq -2. \end{cases}$$



### ❖ Câu 34.

Miền tam giác không bị gạch kể cả 3 cạnh của nó trong hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

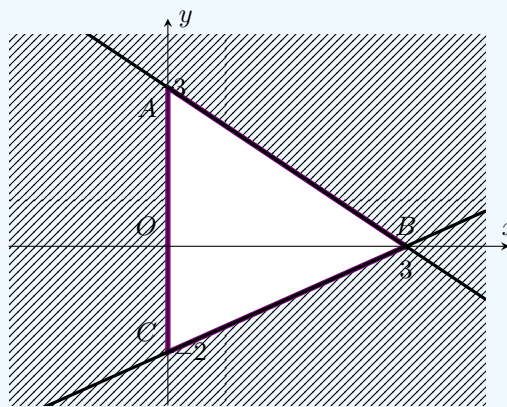
- A** 
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 10. \end{cases}$$
- B** 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 5y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 10. \end{cases}$$
- C** 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10. \end{cases}$$
- D** 
$$\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10. \end{cases}$$



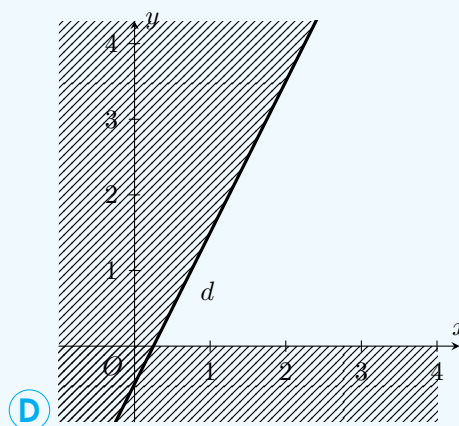
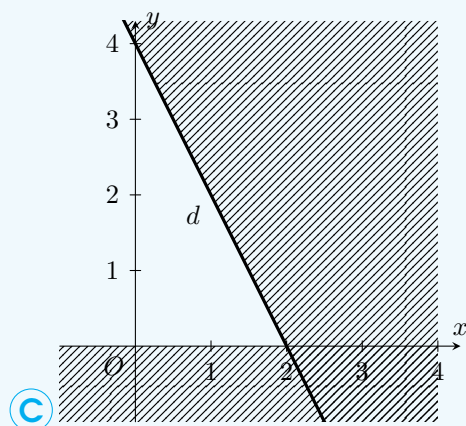
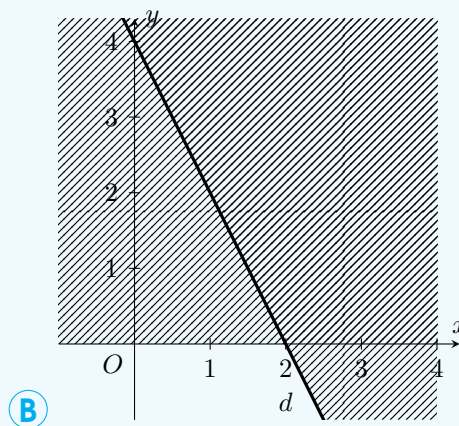
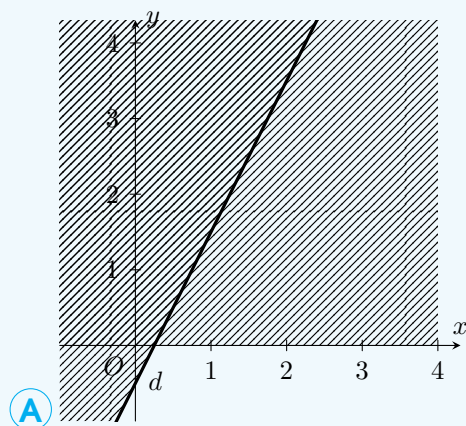
### ⇨ Câu 35.

Miền tam giác  $ABC$  kể cả ba cạnh là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ sau?

- (A) 
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x - 3y \geq 6 \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$
- (B) 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2x + 3y \geq -6 \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$
- (C) 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2x + 3y \leq -6 \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$
- (D) 
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x - 3y \leq -6 \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$



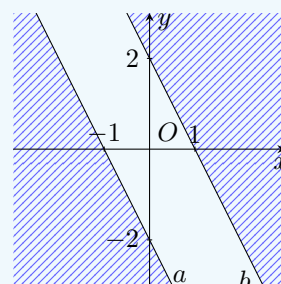
⇨ Câu 36. Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó nằm trên đường thẳng  $d$  trong hình vẽ nào sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} y < 0 \\ 2x + y \leq 4. \end{cases}$$



### ⇨ Câu 37.

Hệ bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch có hai bờ là hai đường thẳng  $a$  và  $b$  như hình bên?

- (A) 
$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ 2x + y \geq -2. \end{cases}$$
- (B) 
$$\begin{cases} 2x + y \leq -2 \\ 2x + y \geq 2. \end{cases}$$
- (C) 
$$\begin{cases} 2x - y \leq 2 \\ 2x - y \geq -2. \end{cases}$$
- (D) 
$$\begin{cases} 2x - y \leq -2 \\ 2x - y \geq 2. \end{cases}$$



### ❖ Câu 38.

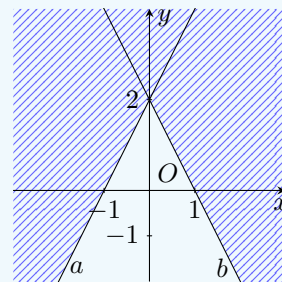
Hệ bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch như hình bên (kể cả các điểm nằm trên hai đường thẳng  $a$ ,  $b$  và không thuộc miền bị gạch)?

**A**  $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ -2x + y \geq 2. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ -2x + y \geq 2. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ -2x + y \geq -2. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ -2x + y \leq 2. \end{cases}$



### ❖ Câu 39.

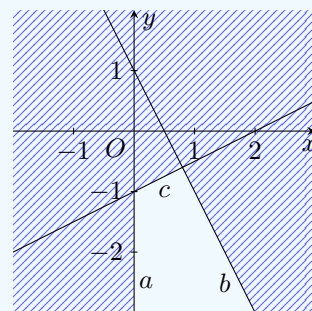
Hệ bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch như hình bên (kể cả các điểm nằm trên các đường thẳng  $a$ ,  $b$ ,  $c$  và không thuộc miền bị gạch)?

**A**  $\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 2y \geq 2 \\ x \leq 0. \end{cases}$

**B**  $\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ x - 2y \geq 2 \\ y \leq 0. \end{cases}$

**C**  $\begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ x - 2y \geq 2 \\ x \geq 0. \end{cases}$

**D**  $\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ x - 2y \geq 2 \\ x \geq 0. \end{cases}$



❖ Câu 40. Tìm tất cả các số thực  $a$ ,  $b$  sao cho miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq a \\ y < b \end{cases}$  chứa điểm  $M(-1; 1)$ .

**A**  $a \geq -1; b \leq 1.$

**B**  $a < -1; b \geq 1.$

**C**  $a \leq -1; b > 1.$

**D**  $a \leq -1; b < 1.$

❖ Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $y = m$  có điểm chung với miền nghiệm

của hệ bất phương trình  $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -2 \\ x + y \leq 2. \end{cases}$

**A**  $m \geq -2.$

**B**  $m \leq 4.$

**C**  $-2 \leq m \leq 4.$

**D**  $-2 < m < 4.$

❖ Câu 42. Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} (a-2)x + (a-4)y \geq 2 \\ (a+1)x + (3a+2)y \leq -1 \end{cases}$  với  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  và  $a \neq \frac{1}{2}$ .

Điểm nào sau đây luôn thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho?

**A**  $M\left(\frac{-3}{2a-1}; \frac{7}{2a-1}\right).$

**B**  $N\left(\frac{-7}{2a-1}; \frac{-3}{2a-1}\right).$

**C**  $P\left(\frac{7}{2a-1}; \frac{-3}{2a-1}\right).$

**D**  $P\left(\frac{7}{2a-1}; \frac{3}{2a-1}\right).$

❖ Câu 43. Miền nghiệm của hệ bất phương trình  $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 1 \leq 0 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 \geq 0 \\ y \geq -4 \end{cases}$  là

**A** tam giác vuông kể cả các điểm nằm trên ba cạnh của tam giác.

**B** tam giác đều kể cả các điểm nằm trên ba cạnh của tam giác.

- C tam giác tù kể cả các điểm nằm trên ba cạnh của tam giác.
- D tam giác cân (không vuông) kể cả các điểm nằm trên ba cạnh của tam giác.

⇨ **Câu 44.** Miền nghiệm của bất phương trình  $|x + y| + |x - y| \leq 4$  là

- A một hình vuông (không kể biên).
- B một hình chữ nhật (không phải là hình vuông và không kể biên).
- C một hình chữ nhật (không phải là hình vuông và kể cả biên).
- D một hình vuông (kể cả biên).

**Dạng 2. Tìm cực trị của biểu thức  $F = ax + by$  trên một miền đa giác**

a) Bài toán:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $F = ax + by$  ( $a, b$  là hai số đã cho không đồng thời bằng 0) với  $x, y$  thỏa mãn hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (có miền nghiệm là miền đa giác  $A_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_n$ ).

b) Người ta chứng minh được: Biểu thức  $F = ax + by$  có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của đa giác  $A_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_n$ .

c) Phương pháp:

- Bước 1. Tìm miền đa giác  $A_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_n$  là miền nghiệm của hệ bất phương trình.
- Bước 2. Tìm tọa độ các đỉnh  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Bước 3. Tính  $F(x_i; y_i)$  trong đó  $A_i(x_i; y_i)$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Bước 4. Kết luận  
 Giá trị lớn nhất  $M = \max_{i=1,2,\dots,n} F(x_i; y_i)$ .  
 Giá trị nhỏ nhất  $m = \min_{i=1,2,\dots,n} F(x_i; y_i)$ .

**VÍ DỤ MINH HỌA**

⇨ **Ví dụ 1.** Cho cặp  $(x; y)$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y > 3 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $f(x; y) = 2x - 3y + 1$ .

**Lời giải.**




.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

🔗 **Ví dụ 2.** Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.

🗣 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

❖ **Bài 7.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1,5 kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

❖ **Bài 8.** Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

❖ **Bài 9.** Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

❖ **Bài 10.** Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin  $A$  và vitamin  $B$  đối với cơ thể con người. Kết quả như sau:

- Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin  $A$  và không quá 500 đơn vị vitamin  $B$ .
- Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả  $A$  lẫn  $B$ .
- Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày số đơn vị vitamin  $B$  phải nhiều hơn  $\frac{1}{2}$  số đơn vị vitamin  $A$  nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin  $A$ . Biết giá một đơn vị vitamin  $A$  là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin  $B$  là 7,5 đồng.

Tìm phương án dùng vitamin  $A$  và vitamin  $B$  thỏa mãn các điều kiện trên sao cho số tiền phải trả ít nhất.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 45.** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của biểu thức  $z = 3x + 2y$  biết rằng  $x, y$  thỏa mãn hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ x - y \leq 1. \end{cases}$$

- (A)  $M = 8$ .                      (B)  $M = 10$ .                      (C)  $M = 6$ .                      (D)  $M = 9$ .

❖ **Câu 46.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $F(x; y) = x - y - 1$  với  $x, y$  thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ 3x + 8y - 24 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

- (A) 5.                                  (B) 6.                                  (C) 7.                                  (D) 8.

❖ **Câu 47.** Tìm giá trị lớn nhất  $a$  và giá trị nhỏ nhất  $b$  của  $F(x; y) = 3x + 9y$  với  $(x; y)$  là nghiệm

$$\text{của hệ bất phương trình } \begin{cases} x - y + 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 4 \leq 0. \end{cases}$$

- (A)  $a = 21, b = 1$ .                      (B)  $a = 21, b = -3$ .                      (C)  $a = 36, b = 1$ .                      (D)  $a = 36, b = -3$ .

❖ **Câu 48.** Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 5x + 3y \geq 15 \\ -x + y \geq 2 \end{cases}$  và biểu thức  $P(x; y) = 2x - 2y + 3$  với  $(x; y)$

thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

- (A) -17.                                  (B) -34.                                  (C) -7.                                  (D) -14.

❖ **Câu 49.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $F = y - x$  trên miền xác định bởi hệ

$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5. \end{cases}$$

**A**  $\min F = 1$  khi  $x = 2, y = 3$ .

**B**  $\min F = 2$  khi  $x = 0, y = 2$ .

**C**  $\min F = 3$  khi  $x = 1, y = 4$ .

**D**  $\min F = -1$  khi  $x = 2, y = 1$ .

❖ **Câu 50.** Tìm giá trị nhỏ nhất  $T$  của biểu thức  $z = 5x + 7y$  biết rằng  $x, y$  là các số không âm

thỏa mãn hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 3x - y \leq 15 \\ -x + y \leq 4 \\ 2x + 5y \leq 27. \end{cases}$$

**A**  $T = 12$ .

**B**  $T = 14$ .

**C**  $T = 28$ .

**D**  $T = 18$ .

❖ **Câu 51.** Tìm các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn hệ bất phương trình dưới đây sao cho nó làm cho biểu thức  $S = 2x + y$  đạt giá trị lớn nhất.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \\ x + y \leq 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

**A**  $(x; y) = (4; 0)$ .

**B**  $(x; y) = (4; 1)$ .

**C**  $(x; y) = (3; 2)$ .

**D**  $(x; y) = (2; 2)$ .

❖ **Câu 52.** Khẩu phần dinh dưỡng hàng ngày cho người ăn kiêng cần cung cấp ít nhất 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một tách thức uống X có giá 5 nghìn đồng và cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một tách thức uống Y có giá 6 nghìn đồng và cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C. Mỗi ngày nên uống bao nhiêu tách mỗi loại để có được chi phí tối ưu và vẫn đáp ứng được yêu cầu dinh dưỡng hàng ngày?

**A** 1 tách loại X, 4 tách loại Y.

**B** 3 tách loại X, 2 tách loại Y.

**C** 2 tách loại X, 3 tách loại Y.

**D** 4 tách loại X, 1 tách loại Y.

❖ **Câu 53.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị prô-tê-in và 400 đơn vị li-pít trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kí-lô-gam thịt bò chứa 800 đơn vị prô-tê-in và 200 đơn vị li-pít. Mỗi kí-lô-gam thịt lợn chứa 600 đơn vị prô-tê-in và 400 đơn vị li-pít. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45000 đồng, 1 kg thịt lợn là 35000 đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kí-lô-gam thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

**A** 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn.

**B** 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn.

**C** 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn.

**D** 0,6 kg thịt lợn và 0,7 kg thịt bò.

❖ **Câu 54.** Một cửa hàng làm kệ sách và bàn làm việc. Mỗi kệ sách cần 5 giờ chế biến gỗ và 4 giờ hoàn thiện. Mỗi bàn làm việc cần 10 giờ chế biến gỗ và 3 giờ hoàn thiện. Mỗi tháng cửa hàng có 600 giờ lao động để chế biến gỗ và 240 giờ để hoàn thiện. Lợi nhuận của mỗi kệ sách là 400 nghìn đồng và mỗi bàn là 750 nghìn đồng. Có bao nhiêu sản phẩm mỗi loại cần được làm mỗi tháng để thu được lợi nhuận tối đa?

**A** 24000.

**B** 45000.

**C** 45600.

**D** 46000.

❖ **Câu 55.** Cho hệ bất phương trình  $\begin{cases} |x - 1| \leq 2 \\ |y + 1| \leq 3 \end{cases}$  và biểu thức  $P(x; y) = 3x + 2y - 5$  với  $(x; y)$  thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

(A) 16.                      (B) -16.                      (C) 8.                      (D) -8.

❖ **Câu 56.** Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II?

(A) 2,5 tấn loại I và 9 tấn loại II.                      (B) 10 tấn loại I và 9 tấn loại II.  
(C) 10 tấn loại I và 2 tấn loại II.                      (D) 5 tấn loại I và 4 tấn loại II.

❖ **Câu 57.** Giá trị nhỏ nhất  $F_{\min}$  của biểu thức  $F(x; y) = y - x$  trên miền xác định bởi hệ  $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$  là

(A)  $F_{\min} = 1$ .                      (B)  $F_{\min} = 2$ .                      (C)  $F_{\min} = 3$ .                      (D)  $F_{\min} = 4$ .

❖ **Câu 58.** Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

(A) Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B.  
(B) Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B.  
(C) Sản xuất  $\frac{45}{8}$  tấn sản phẩm A và  $\frac{81}{16}$  tấn sản phẩm B.  
(D) Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A.

# Chương 3

## HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### Bài 5

## GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN

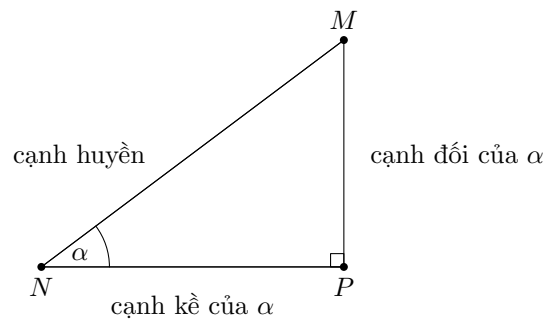
$180^\circ$

Ở cấp THCS, các em học sinh đã được học về tỷ số lượng giác của một góc nhọn.

Góc nhọn là góc có số đo lớn hơn  $0^\circ$  và nhỏ hơn  $90^\circ$ .

Xét một tam giác vuông với một góc nhọn có số đo  $\alpha$ . Dựa trên tỷ số giữa độ dài các cạnh trong tam giác vuông, người ta định nghĩa các tỷ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$  như sau

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\text{độ dài cạnh đối của } \alpha}{\text{độ dài cạnh huyền}} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{độ dài cạnh kề của } \alpha}{\text{độ dài cạnh huyền}} \\ \tan \alpha &= \frac{\text{độ dài cạnh đối của } \alpha}{\text{độ dài cạnh kề của } \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\text{độ dài cạnh kề của } \alpha}{\text{độ dài cạnh đối của } \alpha}\end{aligned}$$

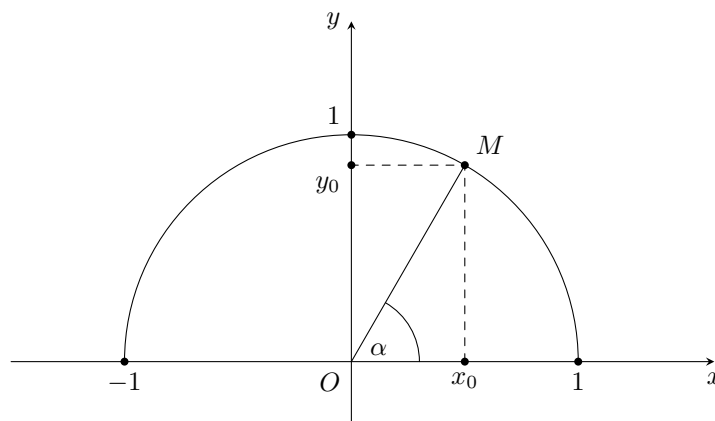


Nhiều bài toán được áp dụng trong lượng giác liên quan đến việc sử dụng các góc tù (góc có số đo lớn hơn  $90^\circ$  và nhỏ hơn  $180^\circ$ ). Do đó, chúng ta cần mở rộng khái niệm tỷ số lượng giác ở trên và gọi chúng là các giá trị lượng giác.

Để thực hiện việc mở rộng này, trước hết chúng ta xét hệ trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , nửa đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = 1$ , nằm trên trục hoành.

Bây giờ, xét tam giác vuông ở trên, với giả sử cạnh huyền có độ dài bằng 1 (điều này không ảnh hưởng đến số đo của góc  $\alpha$ ).

Đặt tam giác vuông này vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  đang xét, sao cho đỉnh góc  $\alpha$  tại  $O$ , cạnh kề của  $\alpha$  ở trên trục hoành và đỉnh  $M$  ở trên nửa đường tròn, như hình vẽ.



Giả sử  $M(x_0; y_0)$ . Khi đó, theo định nghĩa về các tỷ số lượng giác góc nhọn, ta có

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{1} = y_0; \quad \cos \alpha = \frac{x_0}{1} = x_0; \quad \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}; \quad \cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}. \quad (*)$$

Các tỷ số lượng giác này đều nhận giá trị dương và điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ I.

Bây giờ, chúng ta di chuyển điểm  $M$  trên đường tròn sao cho  $M$  thuộc góc phần tư thứ II ( $y_0 > 0$  và  $x_0 < 0$ ). Khi đó  $\alpha$  là góc tù và chúng ta gọi các kết quả ở (\*) là các giá trị lượng giác của góc tù  $\alpha$ .

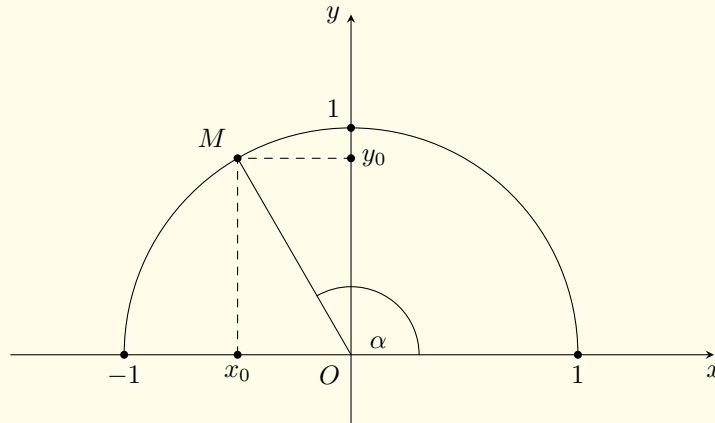
Một cách tổng quát, chúng ta định nghĩa các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  (với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) như dưới đây.

## A Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , nửa đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = 1$  nằm phía trên trục hoành được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*.

### Định nghĩa 1.1. Giá trị lượng giác

Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định được một điểm  $M$  duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$  và giả sử điểm  $M$  có tọa độ  $M(x_0; y_0)$ .



Khi đó ta có định nghĩa

- ☑ **sin** của góc  $\alpha$  là  $y_0$ , kí hiệu  $\sin \alpha = y_0$ .
- ☑ **cô-sin** của góc  $\alpha$  là  $x_0$ , kí hiệu là  $\cos \alpha = x_0$ .
- ☑ **tang** của góc  $\alpha$  là  $\frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ), kí hiệu là  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ .
- ☑ **cô-tang** của góc  $\alpha$  là  $\frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ), kí hiệu là  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ .

Các số  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi chung là các *giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .

### ⚠ Lưu ý:

a) Từ định nghĩa trên, ta có

- ☑  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , với  $\alpha \neq 90^\circ$ .
- ☑  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , với  $\alpha \neq 0^\circ$  và  $\alpha \neq 180^\circ$ .
- ☑  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ , với  $\alpha \notin \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$ .



b) Nếu  $\alpha$  là góc tù thì  $\cos \alpha < 0$ ,  $\tan \alpha < 0$ ,  $\cot \alpha < 0$ .

c) Sau đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//	0
$\cot \alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	//

**Ví dụ 1.** Tính các giá trị lượng giác của góc  $135^\circ$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 2.** Tính các giá trị lượng giác của góc  $150^\circ$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## B Mọi quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Ở lớp dưới ta đã biết hai góc **phụ nhau** thì các tỷ số lượng giác của chúng có mối liên hệ

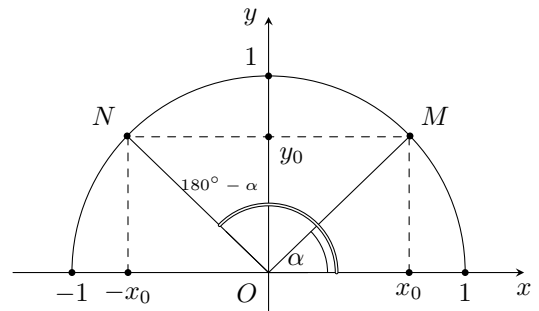
- ☑  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$
- ☑  $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha;$
- ☑  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$
- ☑  $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$

Sau đây ta sẽ tìm hiểu về mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc **bù nhau**.

Với mỗi góc  $\alpha$  (với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ): góc  $\alpha$  và góc  $180^\circ - \alpha$  là hai góc bù nhau.

Trên nửa đường tròn đơn vị, cho dây cung  $MN$  song song với trục  $Ox$ . Đặt  $\widehat{xOM} = \alpha$ . Ta có  $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$ .

Giả sử  $M(x_0; y_0)$ . Vì  $x_N = -x_M = -x_0$  và  $y_N = y_M = y_0$  nên ta có các tính chất sau:



Với mỗi góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , ta luôn có

- ☑  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$
- ☑  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$
- ☑  $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ );
- ☑  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$  ( $\alpha \neq 0^\circ$  và  $\alpha \neq 180^\circ$ ).

🔗 **Ví dụ 3.** Tính các giá trị lượng giác của các góc  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  và  $150^\circ$ .

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



# Bài 6

## HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

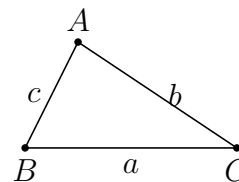
\*Mở đầu: Ngắm tháp Rùa từ bờ, chỉ với những công cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?

### A Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Định lý Cô-sin

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $AC = b$  và  $AB = c$ .

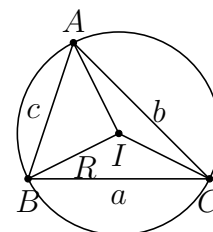
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ .
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ .



#### 2. Định lý Sin

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

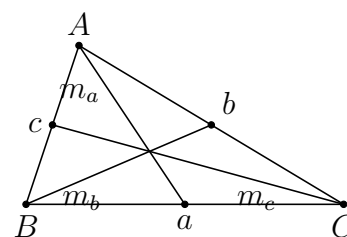


**⚠ Lưu ý:** Ghi nhớ: Tỷ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.

#### 3. Công thức tính độ dài đường trung tuyến

Cho tam giác  $ABC$  có  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  lần lượt là các trung tuyến kẻ từ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Ta có

- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .
- $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .
- $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .



#### 4. Công thức tính diện tích tam giác

Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ . Ta có

- ☑  $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ ,
- ☑  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ ,
- ☑  $S = \frac{abc}{4R}$ ,
- ☑  $S = p \cdot r$ ,
- ☑  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

Trong đó:

- $h_a, h_b, h_c$  là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh  $BC, CA, AB$ .
- $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a + b + c}{2}$  là nửa chu vi tam giác.

**Dạng 1. Áp dụng định lý cô-sin.**

**Nhận dạng định lý:**

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 5, c = 7$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $a$  và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

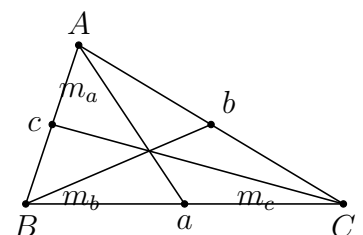
**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 10\text{cm}, BC = 16\text{cm}$  và  $C = 120^\circ$ , tính độ dài cạnh  $AB$ .

**Lời giải.**

.....	.....
-------	-------

**Lưu ý:** Cho tam giác  $ABC$  có  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các trung tuyến kẻ từ  $A, B, C$ . Ta có

- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .
- $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .
- $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .



↔ **Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $AC = 3$  cm và  $BC = 6$  cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $C$  của tam giác  $ABC$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 3$ ,  $CA = 4$  và  $AB = 6$ . Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 5.**  
 Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Tàu  $B$  chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu  $C$  chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 6.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c$ ;  $BC = a$ ;  $CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Tính số đo góc  $\widehat{BAC}$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇒ **Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $AC = 8$ . Tính  $BC$ .

⇒ **Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh  $BC = 6$ ,  $CA = 4\sqrt{2}$ ,  $AB = 2$ . Tính  $\cos A$  và góc  $\widehat{A}$ .

⇒ **Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$  cm;  $AC = 5$  cm và  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Tính  $BC$ .

⇒ **Bài 4.** Tam giác  $ABC$  có  $b = 6$ ,  $c = 8$  và  $m_a = 5$ . Tính  $a$ ,  $\widehat{A}$ .

⇒ **Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $l_a$  là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$ .

⇒ **Bài 6.** Hai lực  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$ . Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{s}$ .

**Dạng 2. Áp dụng định lý sin**

**Nhận dạng định lý:**

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh và số đo của hai góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh, số đo góc đối diện và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

⇒ **Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$  và  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

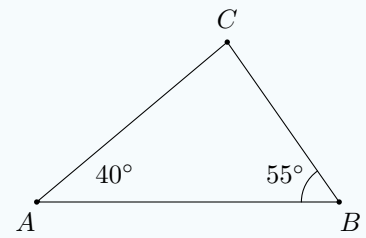
**Lời giải.**

.....

.....

❖ Ví dụ 2.

Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 40^\circ$ ,  $\widehat{B} = 55^\circ$  và  $AB = 100$ . Tính độ dài cạnh  $BC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



💬 Lời giải.

.....

.....

❖ Ví dụ 3. Cho tam giác  $ABC$  có  $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$  và  $\widehat{A} = 45^\circ$ . Tính các góc  $B, C$  của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

💬 Lời giải.

.....

.....

❖ Ví dụ 4. Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{B} = 50^\circ$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 10 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$  (làm tròn đến hàng phần mười).

💬 Lời giải.

.....

.....

❖ Ví dụ 5. Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\sin^2 A = \sin B \sin C$  khi và chỉ khi  $a^2 = bc$ .

💬 Lời giải.



.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 5$  cm,  $BC = 6$  cm và  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

❖ **Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 70^\circ$  và  $AC = 15$  cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

❖ **Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 65^\circ$  và  $BC = 50$ . Tính độ dài cạnh  $AB$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

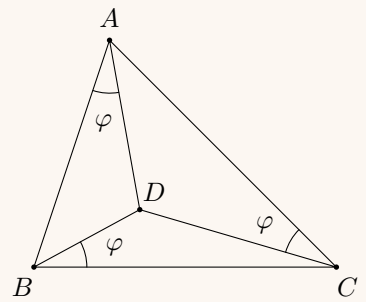
❖ **Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\frac{BC}{3} = \frac{AC}{5}$  và  $\widehat{A} = 30^\circ$ . Tính các góc  $B, C$  của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

❖ **Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $a \sin B = c \sin A$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  cân.

❖ **Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông.

❖ **Bài 12.**  
Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$  sao cho  $\widehat{BAD} = \widehat{CBD} = \widehat{ACD} = \varphi$ . Chứng minh rằng

$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi) \sin(B - \varphi) \sin(C - \varphi).$$

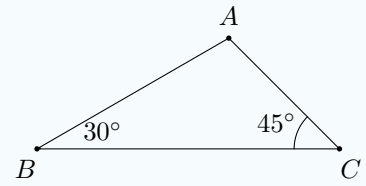


**Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng**

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 40$  cm,  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$ . Tính góc  $\widehat{A}$  và độ dài các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 25$ ,  $AC = 20$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Tính cạnh  $BC$  và các góc  $B, C$  của tam giác đó.

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

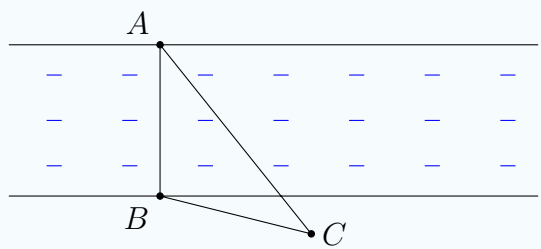
.....

.....

.....

**Ví dụ 3.**

Để đo chiều rộng  $AB$  của một khúc sông, người ta chọn điểm  $C$ . Sau đó, đo khoảng cách  $BC$ , các góc  $B$  và  $C$ . Biết rằng  $BC = 200$  m,  $\widehat{B} = 107^\circ$ ,  $\widehat{C} = 28^\circ$ . Tìm chiều rộng  $AB$  của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



**Lời giải.**

.....

.....

.....

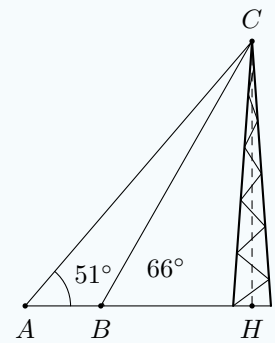
.....

.....

.....

🔗 Ví dụ 4.

Để đo chiều cao  $CH$  của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát  $A, B$  trên mặt đất (hình vẽ). Biết  $\widehat{CAH} = 51^\circ$ ,  $\widehat{CBH} = 66^\circ$  và  $AB = 75$  m, tính chiều cao của tháp.



🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

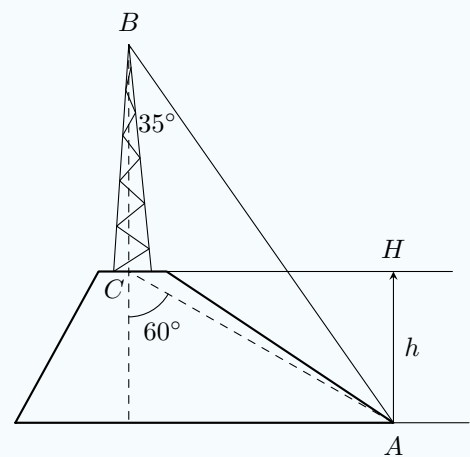
.....

.....

.....

🔗 Ví dụ 5.

Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp  $B$  và chân tháp  $C$  nhìn điểm  $A$  ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng  $35^\circ$  và  $60^\circ$  so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao  $HA$  của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)



🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

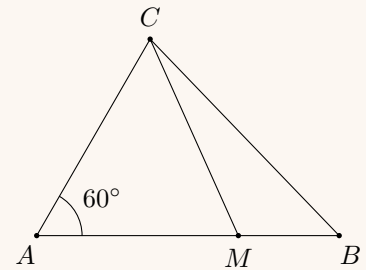
## BÀI TẬP TỰ LUẬN

✧ **Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 15$ . Tính  $\widehat{A} + 2\widehat{C}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

✧ **Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 15$  cm,  $AC = 21$  cm,  $\widehat{A} = 30^\circ$ . Tính cạnh  $BC$  và các góc  $B, C$  của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

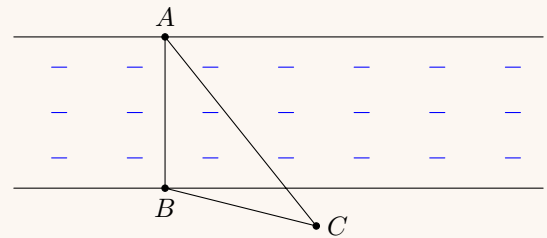
### ✧ Bài 15.

Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 15$ ,  $AC = 12$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ .  $M$  là điểm thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AM = 2BM$ . Tính cạnh  $CM$ , góc  $\widehat{BCM}$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCM$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



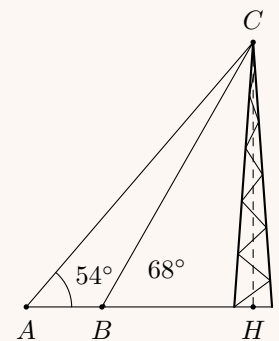
### ✧ Bài 16.

Để đo chiều rộng  $AB$  của một khúc sông, người ta chọn điểm  $C$ , đo khoảng cách  $BC$ , các góc  $B$  và  $C$ . Biết rằng  $BC = 250$  m,  $\widehat{B} = 104^\circ$ ,  $\widehat{C} = 31^\circ$ . Tìm chiều rộng  $AB$  của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



### ✧ Bài 17.

Để đo chiều cao  $CH$  của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát  $A, B$  trên mặt đất (hình vẽ). Biết  $\widehat{CAH} = 54^\circ$ ,  $\widehat{CBH} = 68^\circ$  và  $AB = 80$  m, tính chiều cao của tháp (Làm tròn đến hàng đơn vị).



## Dạng 4. Bài tập tổng hợp

### VÍ DỤ MINH HỌA

✧ **Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$  và  $AB = 8$  cm,  $AC = 5$  cm.

- a) Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .
- b) Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .
- c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

.....	.....
-------	-------

**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 6, BC = 8$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính diện tích hình bình hành  $ABCD$ .

**Lời giải.**

.....	.....
-------	-------

**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 30^\circ$ , diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $9\sqrt{3}$ . Tính các cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

.....	.....
-------	-------

.....

.....

.....

.....

⇨ **Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{7}$  và  $BC = 4$ .

- a) Tính góc  $B$  và diện tích tam giác  $ABC$ .
- b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc  $B$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇨ **Bài 18.** Cho tam giác với ba cạnh  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính diện tích của tam giác và độ dài đường cao  $h_c$ .

⇨ **Bài 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10, BC = 6$  và góc  $\widehat{B} = 120^\circ$ .

- a) Tính  $AC$  và diện tích tam giác  $ABC$ .
- b) Tính đường cao  $AH$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .
- c) Tính độ dài đường phân giác trong  $BD$  của tam giác  $ABC$ .

⇨ **Bài 20.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính độ dài  $BC$ , diện tích tam giác  $ABC$ , độ dài đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$ .

⇨ **Bài 21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, AC = b$ . Gọi  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh  $A, B, C$  và  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

Chứng minh  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ .

⇒ **Bài 22.** Cho tam giác  $ABC$  không vuông ở  $A$ , chứng minh  $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \tan A$ .

## B Câu hỏi trắc nghiệm

⇒ **Câu 1.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $BC = 7$ ,  $CA = 8$ . Số đo góc  $\hat{A}$  bằng  
 A  $90^\circ$ .       B  $45^\circ$ .       C  $60^\circ$ .       D  $30^\circ$ .

⇒ **Câu 2.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{3}$  và  $\hat{C} = 45^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .  
 A  $BC = \sqrt{5}$ .       B  $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ .       C  $BC = \sqrt{6}$ .       D  $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ .

⇒ **Câu 3.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 1$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .  
 A  $BC = \sqrt{2}$ .       B  $BC = \sqrt{3}$ .       C  $BC = 1$ .       D  $BC = 2$ .

⇒ **Câu 4.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 6$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác.  
 A  $h_a = 3\sqrt{3}$ .       B  $h_a = \sqrt{3}$ .       C  $h_a = \frac{3}{2}$ .       D  $h_a = 3$ .

⇒ **Câu 5.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $CA = \sqrt{2}$ . Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $\hat{A}$ . Khi đó góc  $\widehat{ADB}$  bằng  
 A  $90^\circ$ .       B  $45^\circ$ .       C  $60^\circ$ .       D  $75^\circ$ .

⇒ **Câu 6.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 2\sqrt{7}$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tính độ dài cạnh  $AM$ .  
 A  $AM = 4\sqrt{2}$ .       B  $AM = 3\sqrt{2}$ .       C  $AM = 2\sqrt{3}$ .       D  $AM = 3$ .

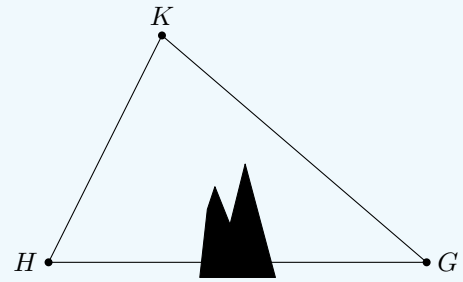
⇒ **Câu 7.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh bằng 1 cm và có  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .  
 A  $AC = 2$ .       B  $AC = \sqrt{3}$ .       C  $AC = 2\sqrt{3}$ .       D  $AC = \sqrt{2}$ .

⇒ **Câu 8.** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250$  m,  $CB = 120$  m. Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?  
 A 266 m.       B 255 m.       C 166 m.       D 298 m.

⇒ **Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 2\sqrt{3}$ ,  $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ .  $AD$  là tia phân giác của góc  $\widehat{BAD}$ . Tính góc  $\widehat{BAD}$ .  
 A  $60^\circ$ .       B  $90^\circ$ .       C  $45^\circ$ .       D  $75^\circ$ .

❖ **Câu 10.**

Một ô tô muốn đi từ địa điểm H đến địa điểm G, nhưng giữa H và G là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ H lên K (ô tô leo dốc lên núi) và từ K đến G (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác  $HKG$  với  $HK = 15$  km,  $KG = 20$  km và  $\widehat{HKG} = 120^\circ$ . Giả sử cứ chạy 1 km, ô tô tiêu thụ hết 0,3 lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 13050 đồng một lít xăng. Hỏi ô tô đi từ H đến G hết bao nhiêu tiền xăng?



- Ⓐ 137025 đồng.      Ⓑ 107025 đồng.      Ⓒ 12278 đồng.      Ⓓ 137000 đồng.

❖ **Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 28$ ,  $BC = 25$ . Tính số đo góc  $A$  của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- Ⓐ  $39,1^\circ$ .      Ⓑ  $40,2^\circ$ .      Ⓒ  $39,2^\circ$ .      Ⓓ  $40^\circ$ .

❖ **Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 75^\circ$ ,  $AB = 20$ . Độ dài cạnh  $AC$  là

- Ⓐ  $20(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ .      Ⓑ  $10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ .      Ⓒ  $10(\sqrt{6} - 1)$ .      Ⓓ  $5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

❖ **Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$  và  $BC = 30$  cm. Tính độ dài cạnh  $AB$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- Ⓐ  $15(\sqrt{3} + 1)$  cm.      Ⓑ  $15(\sqrt{3} - 1)$  cm.      Ⓒ  $30(2\sqrt{3} - 1)$  cm.      Ⓓ  $30(\sqrt{3} - 1)$  cm.

❖ **Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 11$ ,  $\widehat{A} = 30^\circ$ . Độ dài cạnh  $AB$  lớn nhất bằng bao nhiêu?

- Ⓐ  $11\sqrt{3}$ .      Ⓑ  $\frac{22\sqrt{3}}{2}$ .      Ⓒ 22.      Ⓓ  $11(\sqrt{3} + 1)$ .

❖ **Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{C} = 30^\circ$  và  $AB = 30$  cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

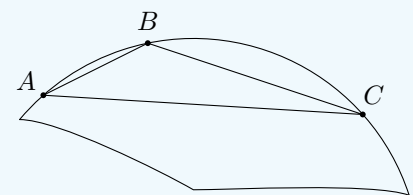
- Ⓐ  $30\sqrt{3}$  cm.      Ⓑ  $15\sqrt{3}$  cm.      Ⓒ 30 cm.      Ⓓ 15 cm.

❖ **Câu 16.** Cho tam giác  $MNK$  có  $MN = a$ ,  $MK = 3a$ ,  $\widehat{M} = 120^\circ$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác  $MNK$ .

- Ⓐ  $\frac{a\sqrt{39}}{3}$ .      Ⓑ  $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ .      Ⓒ  $\frac{a\sqrt{33}}{3}$ .      Ⓓ  $\frac{a\sqrt{42}}{3}$ .

❖ **Câu 17.**

Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết  $\widehat{A} = 33^\circ$ ,  $BC = 15,3$  cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



- Ⓐ 13,8cm.      Ⓑ 12,6cm.      Ⓒ 12,9cm.      Ⓓ 13,1cm.

❖ **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b^2 = a^2 + c^2 + ac$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$ .      Ⓑ  $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C$ .



**C**  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

**D**  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

❖ **Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A**  $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .

**B**  $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$ .

**C**  $\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}$ .

**D**  $\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$ .

❖ **Câu 20.**

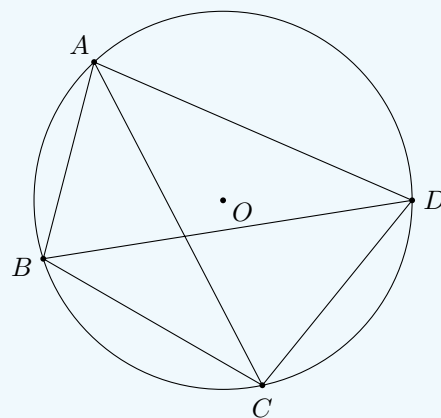
Cho tam giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Biết  $\widehat{ACB} = 32^\circ$ ,  $\widehat{ADC} = 75^\circ$  và  $BC = 8,8$  cm. Tính bán kính đường tròn đường tròn  $(O)$ . (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

**A** 7,8 cm.

**B** 7,5 cm.

**C** 6,6 cm.

**D** 6,5 cm.



❖ **Câu 21.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 12$ ,  $BC = 15$ ,  $AC = 18$ . Tính  $\widehat{A} + 2\widehat{C}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**A**  $129,3^\circ$ .

**B**  $142,7^\circ$ .

**C**  $118,4^\circ$ .

**D**  $138,6^\circ$ .

❖ **Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $AB = 25$ . Độ dài cạnh  $BC$  gần với giá trị nào nhất dưới đây?

**A** 22.

**B** 22,5.

**C** 24,5.

**D** 21,5.

❖ **Câu 23.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$ ,  $AC = 11$ ,  $\widehat{A} = 30^\circ$ . Số đo góc  $B$  gần với giá trị nào nhất dưới đây?

**A**  $50,5^\circ$ .

**B**  $45,8^\circ$ .

**C**  $65,3^\circ$ .

**D**  $55,2^\circ$ .

❖ **Câu 24.**

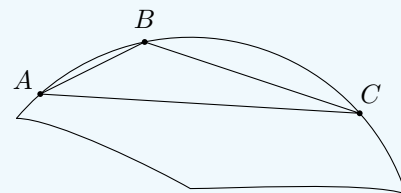
Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn ba điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết  $AB = 7,1$  cm,  $BC = 16,3$  cm,  $AC = 19,6$  cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**A** 11,1cm.

**B** 9,8cm.

**C** 10,3cm.

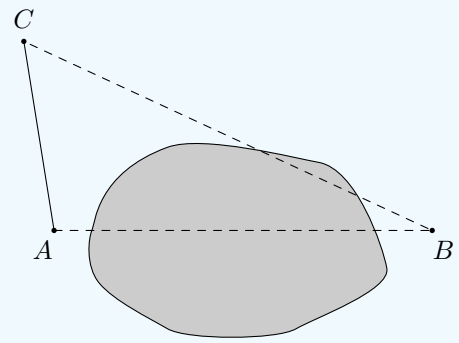
**D** 10,1cm.



❖ **Câu 25.**

Để đo khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  ngang qua một đầm lầy, người ta chọn điểm  $C$ , sau đó khoảng cách từ  $A$  đến  $C$  và các góc  $A$ ,  $C$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  biết  $AC = 115$  m,  $\widehat{A} = 98^\circ$ ,  $\widehat{C} = 52^\circ$ .

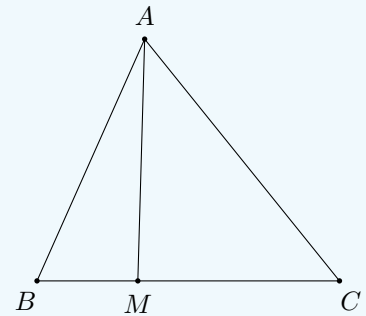
- A 188,1 m.    B 190,7 m.    C 181,2 m.    D 193,6 m.



❖ **Câu 26.**

Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$ ,  $AC = 10$ ,  $\widehat{A} = 75^\circ$ .  $M$  là điểm thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $CM = 2BM$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABM$  gần nhất với giá trị nào dưới đây?

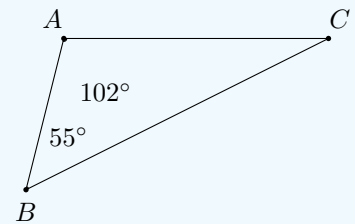
- A 3,8.    B 4,1.    C 3,6.    D 3,5.



❖ **Câu 27.**

Tàu  $A$  rời cảng vào lúc 6h00 và chuyển động với vận tốc 30 km/h. Tàu  $B$  rời cảng vào lúc 6h30. Vào lúc 9h30 tàu  $B$  gặp tàu  $A$  tại điểm  $C$  (hình vẽ). Giả sử hai tàu chuyển động thẳng và có vận tốc không đổi trong suốt quá trình di chuyển, tính vận tốc tàu  $B$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

- A 42,5 km/h.    B 44,8 km/h.    C 41,7 km/h.    D 45,4 km/h.



❖ **Câu 28.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau

- A  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .    B  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .    C  $S = \frac{1}{2}ab \sin B$ .    D  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .

❖ **Câu 29.** Cho  $\triangle ABC$  với các cạnh  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Gọi  $R$ ,  $r$ ,  $S$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác  $ABC$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A  $S = \frac{abc}{4R}$ .    B  $R = \frac{a}{\sin A}$ .  
 C  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .    D  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ .

❖ **Câu 30.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Khi đó diện tích tam giác  $ABC$  bằng

- A 3.    B  $4\sqrt{3}$ .    C  $6\sqrt{3}$ .    D 6.

❖ **Câu 31.** Tìm chu vi tam giác  $ABC$ , biết  $AB = 6$  và  $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$ .

- A 26.    B 13.    C  $5\sqrt{26}$ .    D  $10\sqrt{6}$ .

❖ **Câu 32.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 13$  m,  $b = 14$  m,  $c = 15$  m. Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

- (A)  $S = 84$  m<sup>2</sup>.      (B)  $S = 90$  m<sup>2</sup>.      (C)  $S = 76$  m<sup>2</sup>.      (D)  $S = 80$  m<sup>2</sup>.

❖ **Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC > 5$  và diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $3\sqrt{3}$ . Số đo góc  $\widehat{BAC}$  bằng

- (A)  $120^\circ$ .      (B)  $60^\circ$ .      (C)  $135^\circ$ .      (D)  $45^\circ$ .

❖ **Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ . Khi đó độ dài đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ  $A$  bằng

- (A)  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ .      (B)  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ .      (C)  $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ .      (D)  $3\sqrt{15}$ .

❖ **Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm và  $BC = 15$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $BM$  của tam giác  $ABC$  có độ dài là

- (A) 117 cm.      (B) 18,82 cm.      (C) 10,82 cm.      (D) 7,5 cm.

❖ **Câu 36.** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 10$ ,  $m_b = 8$  và  $m_c = 6$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

- (A)  $S = 32$ .      (B)  $S = 24$ .      (C)  $S = 48$ .      (D)  $S = 64$ .

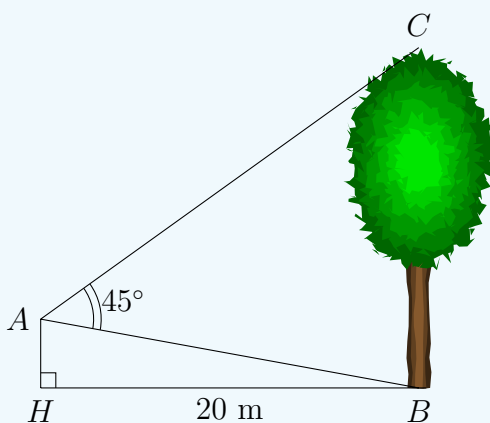
❖ **Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 26 cm và  $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$ . Tính diện tích của tam giác  $ABC$ .

- (A)  $2\sqrt{23}$  (cm<sup>2</sup>).      (B)  $6\sqrt{13}$  (cm<sup>2</sup>).      (C)  $3\sqrt{39}$  (cm<sup>2</sup>).      (D)  $5\sqrt{21}$  (cm<sup>2</sup>).

❖ **Câu 38.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  và  $BC = 6$ ,  $CA = 8$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ .

- (A) 2.      (B)  $2\sqrt{2}$ .      (C)  $\sqrt{2}$ .      (D) 4.

❖ **Câu 39.** Từ vị trí  $A$  người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết  $AH = 4$  m,  $HB = 20$  m,  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



- (A) 14 m.      (B) 15 m.      (C) 17 m.      (D) 16 m.

↔ **Câu 40.** Một miếng giấy hình tam giác  $ABC$  diện tích  $S$  có  $I$  là trung điểm  $BC$  và  $O$  là trung điểm của  $AI$ . Cắt miếng giấy theo một đường thẳng qua  $O$ , đường thẳng này đi qua  $M, N$  lần lượt trên các cạnh  $AB, AC$ . Khi đó diện tích miếng giấy chứa điểm  $A$  có diện tích thuộc đoạn  $[mS; nS]$ . Tính  $T = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ .

**A**  $T = \frac{7}{12}$ .

**B**  $T = 12$ .

**C**  $T = 7$ .

**D**  $T = \frac{12}{7}$ .

# Chương 4

## VÉCTƠ

### Bài 7

## CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

### A Tóm tắt lí thuyết

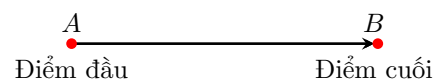
#### 1. Khái niệm véc-tơ

**Định nghĩa 1.1.** Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “véc-tơ  $AB$ ”.

Để vẽ véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  ta vẽ đoạn thẳng  $AB$  và đánh dấu mũi tên ở đầu mút  $B$  (Hình 1).

Đối với véc-tơ  $AB$ , ta gọi



Hình 1

☑ Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  là giá của véc-tơ  $AB$  (Hình 2).

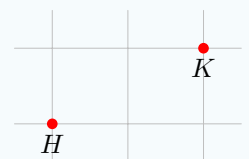


Hình 2

☑ Độ dài đoạn thẳng  $AB$  là độ dài của véc-tơ  $AB$ , kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ .

#### 🔗 Ví dụ 1.

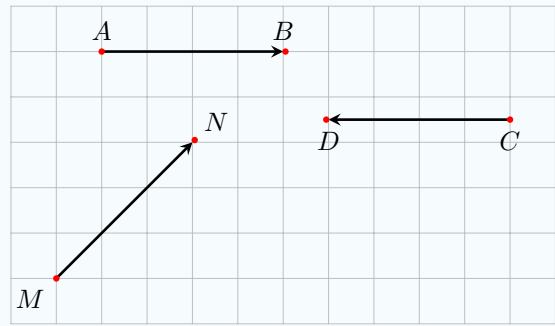
Cho hai điểm phân biệt  $H, K$  như hình bên. Viết hai véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là  $H$  hoặc  $K$ .



🗨️ Lời giải.

#### 🔗 Ví dụ 2.

Tính độ dài của các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{MN}$  ở Hình 3, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.



Hình 3

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

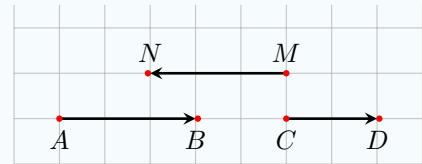
## 2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

**Định nghĩa 1.2.** Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

**Nhận xét:** Nếu hai véc-tơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

### Ví dụ 3.

Trong Hình 4, tìm véc-tơ cùng hướng với véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ; ngược hướng với véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .



Hình 4

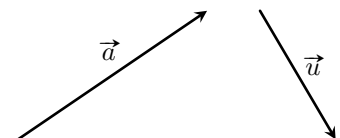
**Lời giải.**

.....

.....

**Định nghĩa 1.3.** Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, véc-tơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , ... (Hình 5). Độ dài của véc-tơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .



Hình 5

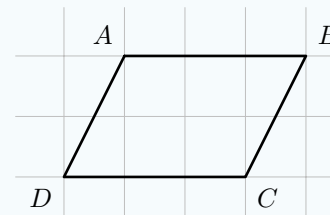
**Nhận xét**

- ☑ Hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là  $\vec{a} = \vec{b}$ .
- ☑ Khi cho trước véc-tơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

### ⇨ Ví dụ 4.

Cho hình bình hành  $ABCD$  (Hình 6).

- a) Véc-tơ nào bằng véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ?
- b) Véc-tơ nào bằng véc-tơ  $\overrightarrow{AD}$ ?



Hình 6

### 💬 Lời giải.

## 3. Véc-tơ không

**○ Định nghĩa 1.4.** Véc-tơ không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Với các điểm bất kì  $A, B, C$  ta có  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$ .

Véc-tơ  $\overrightarrow{AA}$  nằm trên mọi đường thẳng đi qua  $A$ . Ta quy ước  $\vec{0}$  (véc-tơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi véc-tơ; hơn nữa  $|\vec{0}| = 0$ .

**Nhận xét:** Hai điểm  $A, B$  trùng nhau khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

## B Các dạng toán

### 📁 Dạng 1. Xác định một véc-tơ, độ dài véc-tơ

- ☑ Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- ☑ Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

### 📌 VÍ DỤ MINH HỌA

⇨ **Ví dụ 1.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Hãy chỉ ra các véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

### 💬 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{BD}, \vec{DB}$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇔ **Ví dụ 3.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  tính độ dài véc-tơ  $\vec{AM}$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇔ **Bài 1.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có cạnh bằng  $a$ .

- a) Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?
- b) Tính độ dài các véc-tơ  $\vec{AD}$

⇔ **Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  tính độ dài véc-tơ  $\vec{AM}$ .

**Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau**

Sử dụng các định nghĩa

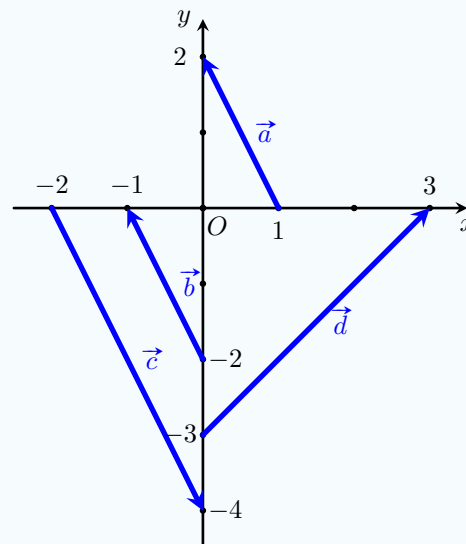
- ☑ Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☑ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ☑ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

**VÍ DỤ MINH HỌA**



### ⇔ Ví dụ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



### 🗨️ Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇔ Ví dụ 2. Cho hình vuông  $ABCD$ . Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ

a)  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ .

b)  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .

c)  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$ .

Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

### 🗨️ Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇔ Ví dụ 3. Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Hãy tìm các cặp vectơ khác  $\vec{0}$ , bằng nhau và

a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm  $A, B, C$  và  $D$ .

b) có điểm đầu là  $O$  hoặc điểm cuối là  $O$ .

 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 4.** Hai ca nô A và B chạy trên cùng khúc sông (khúc sông thẳng) với cùng độ lớn vận tốc là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng, ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc dòng nước là 5 km/h.

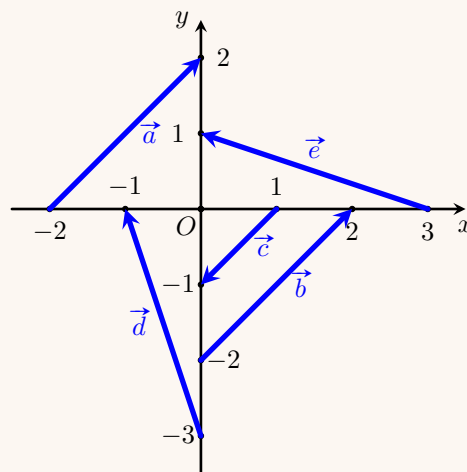
- a) Hãy thể hiện bằng hình vẽ, vectơ vận tốc  $\vec{v}$  dòng nước và vectơ vận tốc thực tế  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  của hai ca nô A và B.
- b) Trong các vectơ  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  những vectơ nào cùng phương, những cặp vectơ nào ngược hướng.

 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

 **BÀI TẬP TỰ LUẬN**⇨ **Bài 1.**

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau

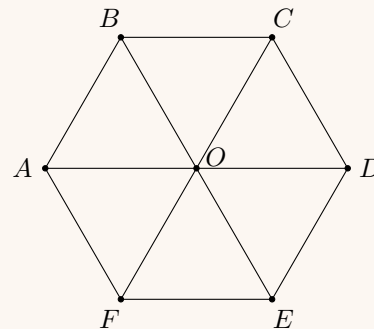


⇒ **Bài 2.** Cho tam giác đều  $ABC$ , hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ  $\vec{BA}$  và  $\vec{CA}$ . Hai vectơ có bằng nhau không?

⇒ **Bài 3.**

Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ .

- Hãy tìm các vectơ khác  $\vec{0}$  và bằng với  $\vec{AB}$ .
- Hãy vẽ vectơ bằng với  $\vec{AE}$  và có điểm đầu là  $B$ .
- Hãy vẽ vectơ bằng với  $\vec{AE}$  và có điểm đầu là  $C$ .



⇒ **Bài 4.** Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\vec{AB}, \vec{AC}$  cùng phương.

⇒ **Bài 5.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , hãy vẽ các vectơ  $\vec{OA}$  và  $\vec{MN}$  với  $A(1; 2)$ ,  $M(0; -1)$  và  $N(3; 5)$

- Chỉ ra một mối liên hệ giữa hai vectơ trên.
- Một vật thể khởi hành từ  $M$  và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ  $\vec{v} = \vec{OA}$ . Hỏi vật thể có đi qua  $N$  không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ đến  $N$ ?

⇒ **Câu 1.** Véc-tơ là một đoạn thẳng

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> A Có hướng.       | <input type="radio"/> B Có hướng dương và hướng âm. |
| <input type="radio"/> C Có hai đầu mút. | <input type="radio"/> D Thỏa mãn ba tính chất trên. |

⇒ **Câu 2.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
- Véc-tơ là một đoạn thẳng.
- Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
- Véc-tơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

❖ **Câu 3.** Véc-tơ có điểm đầu  $D$  và điểm cuối  $E$  được kí hiệu như thế nào là đúng?

A  $DE$ .

B  $ED$ .

C  $|\overrightarrow{DE}|$ .

D  $\overrightarrow{DE}$ .

❖ **Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  có thể xác định được bao nhiêu véc-tơ (khác véc-tơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh  $A, B, C$ ?

A 2.

B 3.

C 4.

D 6.

❖ **Câu 5.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Số véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B$  là

A 2.

B 6.

C 13.

D 12.

❖ **Câu 6.** Số véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước (3 điểm bất kì không thẳng hàng) là

A 42.

B 3.

C 9.

D 27.

❖ **Câu 7.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có thể xác định được bao nhiêu véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm  $A, B, C, D$ ?

A 4.

B 8.

C 10.

D 12.

❖ **Câu 8.** Cho véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A Được gọi là véc-tơ suy biến.

B Được gọi là véc-tơ có phương tùy ý.

C Được gọi là véc-tơ không, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

D Là véc-tơ có độ dài không xác định.

❖ **Câu 9.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .

B  $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$ .

C  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

D  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương  $\overrightarrow{BC}$ .

❖ **Câu 10.** Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A Mỗi véc-tơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

B Độ dài của véc-tơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

C  $|\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$ .

D  $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$ .

❖ **Câu 11.** Cho tam giác đều  $ABC$ , cạnh  $a$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A  $\overrightarrow{AC} = a$ .

B  $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$ .

C  $|\overrightarrow{AB}| = a$ .

D  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{BC}$ .

❖ **Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

B  $\overrightarrow{AM} = a$ .

C  $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

D  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .

❖ **Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A)  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$ .      (B)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .      (C)  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ .      (D)  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ .

❖ **Câu 14.** Cho hai véc-tơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
 (B) Có vô số véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
 (C) Có một véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
 (D) Có hai véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

❖ **Câu 15.** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A)  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.  
 (B)  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương.  
 (C)  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương.  
 (D)  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $AC = BC$ .

❖ **Câu 16.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.  
 (B) Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.  
 (C) Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.  
 (D) Không có véc-tơ nào cùng phương với mọi véc-tơ.

❖ **Câu 17.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.  
 (B) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.  
 (C) Véc-tơ không là véc-tơ không có giá.  
 (D) Điều kiện đủ để hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

❖ **Câu 18.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các véc-tơ khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- (A) 6.      (B) 7.      (C) 8.      (D) 4.

❖ **Câu 19.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Khi đó

- (A) Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .  
 (B) Điều kiện đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{CA}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .  
 (C) Điều kiện cần để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{CA}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ .  
 (D) Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-3; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Giá trị của  $x$  để  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương là

- (A)  $x = -\frac{3}{4}$ .      (B)  $x = -\frac{4}{3}$ .      (C)  $x = 0$ .      (D)  $x \in \emptyset$ .

❖ **Câu 21.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A** Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.      **B** Véc-tơ không cùng phương với mọi véc-tơ.  
**C** Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.      **D** Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng.

❖ **Câu 22.** Cho véc-tơ  $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ . Số véc-tơ cùng hướng với véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  là

- A** vô số.      **B** 1.      **C** 3.      **D** 2.

❖ **Câu 23.** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A**  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ .      **B**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.  
**C**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng.      **D**  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ .

❖ **Câu 24.** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp véc-tơ nào cùng hướng?

- A**  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      **B**  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      **C**  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ .      **D**  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

❖ **Câu 25.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chọn khẳng định đúng?

- A**  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$  là hai véc-tơ ngược hướng.      **B**  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$  là hai véc-tơ cùng hướng.  
**C**  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  là hai véc-tơ cùng phương.      **D**  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  là hai véc-tơ cùng hướng.

❖ **Câu 26.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai véc-tơ nào ngược hướng?

- A**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DB}$ .      **B**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .      **C**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ .      **D**  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ .

❖ **Câu 27.** Véc-tơ  $-2\vec{a}$  và véc-tơ  $\vec{a}$  với  $\vec{a} \neq \vec{0}$  là hai véc-tơ

- A** ngược hướng.      **B** bằng nhau.      **C** cùng hướng.      **D** đối nhau.

❖ **Câu 28.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- A**  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (3; 6)$  cùng hướng.      **B**  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (2; 1)$  đối nhau.  
**C**  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (-3; -6)$  cùng hướng.      **D**  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (-3; 0)$  cùng phương.

❖ **Câu 29.** Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi

- A** Cùng hướng và cùng độ dài.      **B** Cùng phương.  
**C** Cùng hướng.      **D** Có cùng độ dài.

❖ **Câu 30.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.  
**B** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.  
**C** Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.  
**D** Hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài.

❖ **Câu 31.** Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.  
 (B) Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.  
 (C) Hai véc-tơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.  
 (D) Hai véc-tơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

❖ **Câu 32.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) Hai véc-tơ cùng phương thì bằng nhau.  
 (B) Hai véc-tơ ngược hướng thì có độ dài không bằng nhau.  
 (C) Hai véc-tơ cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau.  
 (D) Hai véc-tơ cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

❖ **Câu 33.** Cho véc-tơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có vô số véc-tơ  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .  
 (B) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .  
 (C) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = -\vec{a}$ .  
 (D) Không có véc-tơ  $\vec{u}$  nào mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

❖ **Câu 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A)  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ .  
 (B)  $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$ .  
 (C)  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ .  
 (D)  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ .

❖ **Câu 35.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba véc-tơ bằng véc-tơ  $\vec{BA}$  là

- (A)  $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{OC}$ .  
 (B)  $\vec{CA}, \vec{OF}, \vec{DE}$ .  
 (C)  $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{CO}$ .  
 (D)  $\vec{OF}, \vec{ED}, \vec{OC}$ .

❖ **Câu 36.** Cho hình bình hành  $ABGE$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{BA} = \vec{EG}$ .  
 (B)  $\vec{AG} = \vec{BE}$ .  
 (C)  $\vec{GA} = \vec{BE}$ .  
 (D)  $\vec{BA} = \vec{GE}$ .

❖ **Câu 37.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó

- (A)  $\vec{BI} = \vec{AI}$ .  
 (B)  $\vec{BI}$  cùng hướng  $\vec{AB}$ .  
 (C)  $|\vec{BI}| = 2|\vec{IA}|$ .  
 (D)  $|\vec{BI}| = |\vec{IA}|$ .

❖ **Câu 38.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{BC} = \vec{DA}$ .  
 (B)  $\vec{AB} = \vec{AD}$ .  
 (C)  $\vec{BD} = \vec{AC}$ .  
 (D)  $|\vec{BD}| = a$ .

❖ **Câu 39.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

- (A)  $\vec{AB} = \vec{CD}$ .  
 (B)  $\vec{AD} = \vec{BC}$ .  
 (C)  $\vec{AC} = \vec{BD}$ .  
 (D)  $\vec{BC} = \vec{DA}$ .

❖ **Câu 40.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Khi đó  $\vec{GA}$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2}\vec{AM}$ .  
 (B)  $\frac{2}{3}\vec{GM}$ .  
 (C)  $2\vec{GM}$ .  
 (D)  $-\frac{2}{3}\vec{MA}$ .

# Bài 8

## TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VÉC-TƠ

### A Các dạng toán

#### Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai véc-tơ

- ☑ Ghép các véc-tơ lại thích hợp.
- ☑ Dùng các quy tắc cộng véc-tơ để tính.

✧ **Bài 1.** Tính tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

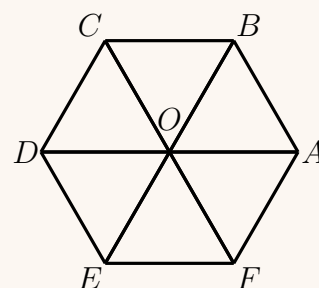
✧ **Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  với  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Tính tổng  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$ .

✧ **Bài 3.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}$ .

✧ **Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $D, E, F, G, H, I$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA, DF, DE, EF$ . Tính véc-tơ  $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$ ?

✧ **Bài 5.**

Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Rút gọn véc-tơ  $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ?



✧ **Bài 6.** Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

✧ **Bài 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các đoạn thẳng  $DC, AB$  theo thứ tự lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $DM = BN$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AM, DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN, DB$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB}$ .

✧ **Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  đều,  $G$  là trọng tâm, tính  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ .

✧ **Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  đều,  $G$  là trọng tâm, tính  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB}$ .



## Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức véc-tơ

### VÍ DỤ MINH HỌA

⇨ **Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.
- B  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.
- C  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- D  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .

🗨️ **Lời giải.**

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

⇨ **Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A  $M$  thuộc trung trực của  $AB$ .
- B  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- C  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.
- D  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.

⇨ **Bài 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $M$  đối xứng với  $A$  qua  $C$ .
- B  $M$  đối xứng với  $B$  qua  $C$ .
- C  $M$  đối xứng với  $D$  qua  $C$ .
- D  $M$  trùng với điểm  $C$ .

⇨ **Bài 12.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}|$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $M$  thuộc đường trung trực của cạnh  $AB$ .
- B  $M$  là trung điểm  $AB$ .
- C  $M$  là trung điểm  $CD$ .
- D  $M$  thuộc đường trung trực của cạnh  $CD$ .

## Dạng 3. Tính độ dài véc-tơ

### VÍ DỤ MINH HỌA

⇨ **Ví dụ 1.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh  $AB = a$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

b)  $\vec{y} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

**🗨️ Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  có cạnh  $AB = 2$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ  $\vec{v} = \vec{OA} - \vec{CD}$ .

**🗨️ Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**📁 BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇨ **Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 2, AC = 4$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

⇨ **Bài 14.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AC = 5, AB = 3$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{a} = \vec{AD} - \vec{AC}$ .

b)  $\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

✎ **Bài 15.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 3$ ,  $CD = 5$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

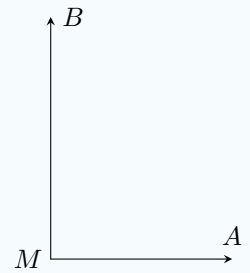
b)  $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ .

### 📁 Dạng 4. Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý

✎ **Ví dụ 1.**

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A 0 (N).       B 700 (N).       C 100 (N).       D 500 (N).



🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

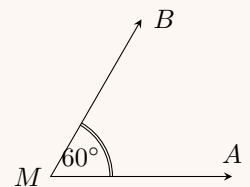
.....

### 📁 BÀI TẬP TỰ LUẬN

✎ **Bài 16.**

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A 0 (N).       B 300 (N).       C  $300\sqrt{3}$  (N).       D 500 (N).



## 1. Trắc nghiệm khách quan

✎ **Câu 1.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$ .       B  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ .       C  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$ .       D  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .

✎ **Câu 2.** Rút gọn biểu thức véc-tơ  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}$  ta được kết quả đúng là

- A  $\overrightarrow{MB}$ .       B  $\overrightarrow{BC}$ .       C  $\overrightarrow{CB}$ .       D  $\overrightarrow{AB}$ .

❖ **Câu 3.** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

A  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$ .

B  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$ .

C  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .

D  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ .

❖ **Câu 4.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt và  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $\vec{u} = \vec{0}$ .

B  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ .

C  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ .

D  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 5.**

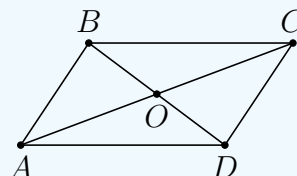
Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi véc-tơ  $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}$  bằng véc-tơ nào trong các véc-tơ sau?

A  $\overrightarrow{BA}$ .

B  $\overrightarrow{BC}$ .

C  $\overrightarrow{DC}$ .

D  $\overrightarrow{AC}$ .



❖ **Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$ . Tổng  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$  bằng véc-tơ nào?

A  $\overrightarrow{PA}$ .

B  $\overrightarrow{AM}$ .

C  $\overrightarrow{PB}$ .

D  $\overrightarrow{AP}$ .

❖ **Câu 7.**

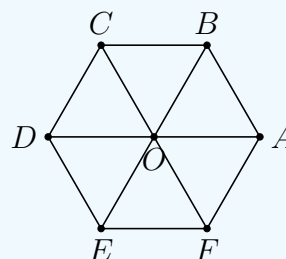
Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .

B  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$ .

C  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .

D  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ .



❖ **Câu 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$  bằng véc-tơ nào dưới đây?

A  $\overrightarrow{DB}$ .

B  $\overrightarrow{BD}$ .

C  $\overrightarrow{AC}$ .

D  $\overrightarrow{CA}$ .

❖ **Câu 9.**

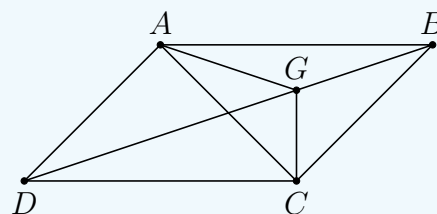
Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$ .

B  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$ .

C  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

D  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$ .



❖ **Câu 10.** Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

A Nếu  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  thì  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$ .

B  $\overrightarrow{FY} - \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{FB}$  với  $B, F, Y$  bất kì.

C Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

D  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH}$  với  $A, M, H$  bất kì.

❖ **Câu 11.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

- (A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ . (C)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ . (D)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

❖ **Câu 12.** Rút gọn biểu thức  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}$  ta được kết quả nào dưới đây?

- (A)  $\overrightarrow{MB}$ . (B)  $\overrightarrow{BC}$ . (C)  $\overrightarrow{CB}$ . (D)  $\overrightarrow{AB}$ .

❖ **Câu 13.** Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ . (C)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ . (D)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

❖ **Câu 14.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- (A)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . (C)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ . (D)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .

❖ **Câu 15.** Tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$  bằng

- (A)  $\overrightarrow{MR}$ . (B)  $\overrightarrow{MN}$ . (C)  $\overrightarrow{MP}$ . (D)  $\overrightarrow{MQ}$ .

❖ **Câu 16.** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ . (C)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$ . (D)  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ .

❖ **Câu 17.** Cho bốn điểm  $A, B, C$ . Tính  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{CA}$ . (B)  $2 \cdot \overrightarrow{AC}$ . (C)  $\vec{0}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

- (A)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ .  
(C)  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ . (D)  $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .

❖ **Câu 19.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ . Tổng của  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$  là

- (A)  $\vec{0}$ . (B)  $\overrightarrow{MN}$ . (C)  $\overrightarrow{NM}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 20.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Hãy tính  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

- (A)  $\overrightarrow{DC}$ . (B)  $\overrightarrow{AC}$ . (C)  $\vec{0}$ . (D)  $\overrightarrow{CD}$ .

❖ **Câu 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ . Tính  $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC}$  không bằng

- (A)  $\overrightarrow{DC}$ . (B)  $\overrightarrow{JI}$ . (C)  $\overrightarrow{AB}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 22.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  trùng với  $A$ . (B)  $M$  trùng với  $B$ . (C)  $M$  trùng với  $O$ . (D)  $M$  trùng với  $C$ .

⇨ **Câu 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  trùng với  $B$ . (B)  $M$  trùng với  $D$ .  
(C)  $M$  trùng với  $A$ . (D)  $M$  trùng với điểm  $O$ .

⇨ **Câu 24.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Biết điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trung điểm  $CD$ . (B)  $M$  là trung điểm  $AB$ .  
(C)  $M$  là trung điểm  $AD$ . (D)  $M$  là trung điểm  $BC$ .

⇨ **Câu 25.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Biết điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . (B)  $M$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ .  
(C)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . (D)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ .

⇨ **Câu 26.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E$  là trung điểm  $AB$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trung điểm  $AD$ . (B)  $M$  là trung điểm  $CD$ .  
(C)  $M$  là trung điểm  $AB$ . (D)  $M$  là trung điểm  $BC$ .

⇨ **Câu 27.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

- (A)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $A$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .  
(B)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $C$  bán kính  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  
(C)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $B$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .  
(D)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $C$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .

⇨ **Câu 28.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$ . Cho  $AB = 2a, CD = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó,

- (A)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$ . (B)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$ . (C)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$ . (D)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ .

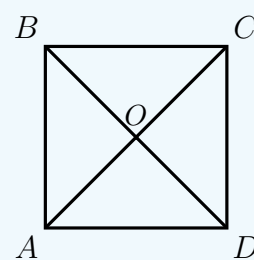
⇨ **Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$ . (B)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .  
(C)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

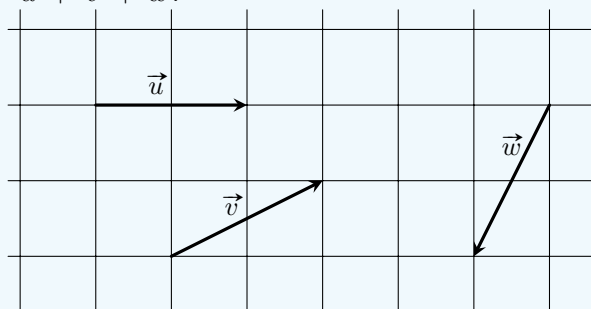
⇨ **Câu 30.**

Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  tâm  $O$ . Tính theo  $a$  độ dài của véc-tơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC}$ .

- Ⓐ  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      Ⓑ  $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ .      Ⓒ  $a\sqrt{2}$ .      Ⓓ  $a$ .



⚡ **Câu 31.** Cho ba véc-tơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  và  $\vec{w}$  như hình vẽ. Biết mỗi ô vuông có kích thước  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ , tính độ dài của véc-tơ  $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ .



- Ⓐ  $\sqrt{5}$  cm.      Ⓑ  $\sqrt{10}$  cm.      Ⓒ  $\sqrt{13}$  cm.      Ⓓ  $\sqrt{17}$  cm.

⚡ **Câu 32.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $|\vec{AD} + \vec{AB}|$  bằng

- Ⓐ  $2a$ .      Ⓑ  $a\sqrt{2}$ .      Ⓒ  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      Ⓓ  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

⚡ **Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $C$ ,  $AB = \sqrt{2}$ . Tính độ dài của  $\vec{AB} + \vec{AC}$

- Ⓐ  $\sqrt{5}$ .      Ⓑ  $2\sqrt{5}$ .      Ⓒ  $\sqrt{3}$ .      Ⓓ  $2\sqrt{3}$ .

⚡ **Câu 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $DA = 2\text{cm}$ ,  $AB = 4\text{cm}$  và đường chéo  $BD = 5\text{cm}$ . Tính  $|\vec{BA} - \vec{DA}|$ .

- Ⓐ 2cm.      Ⓑ 4cm.      Ⓒ 5cm.      Ⓓ 6cm.

⚡ **Câu 35.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy  $AB = a$ ,  $CD = 2a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là trung điểm của  $AD$ ,  $BC$ . Khi đó  $|\vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MN}|$  bằng

- Ⓐ  $\frac{a}{2}$ .      Ⓑ  $3a$ .      Ⓒ  $a$ .      Ⓓ  $2a$ .

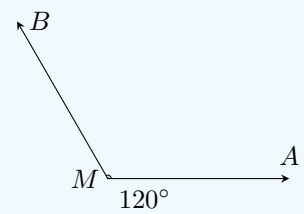
⚡ **Câu 36.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ ,  $d$  là đường thẳng qua  $A$ , song song với  $BD$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường thẳng  $d$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}|$  nhỏ nhất. Tính theo  $a$  độ dài véc-tơ  $\vec{MD}$ .

- Ⓐ  $a\sqrt{2}$ .      Ⓑ  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ .      Ⓒ  $a$ .      Ⓓ  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

⚡ **Câu 37.**

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\widehat{AMB} = 120^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

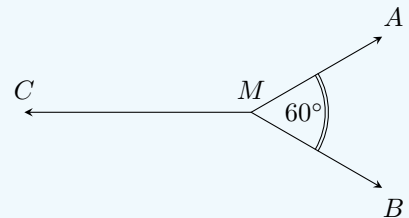
- A** 300 (N).      **B** 700 (N).      **C** 100 (N).      **D** 500 (N).



❖ **Câu 38.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 25 (N) và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là

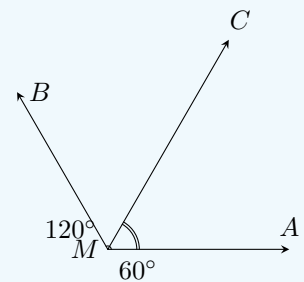
- A**  $25\sqrt{3}$  (N).      **B**  $50\sqrt{3}$  (N).      **C**  $50\sqrt{2}$  (N).      **D**  $100\sqrt{3}$  (N).



❖ **Câu 39.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\vec{F}_3 = 400$  (N). Lại có  $\widehat{AMB} = 120^\circ$  và  $\widehat{AMC} = 60^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

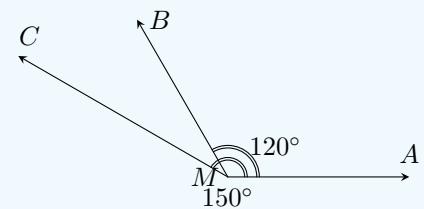
- A** 300 (N).      **B** 700 (N).      **C** 100 (N).      **D** 500 (N).



❖ **Câu 40.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\vec{F}_3 = 400$  (N). Lại có  $\widehat{AMB} = 120^\circ$  và  $\widehat{AMC} = 150^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A** 300 (N).      **B** 700 (N).      **C** 100 (N).      **D** 500 (N).





# Bài 9

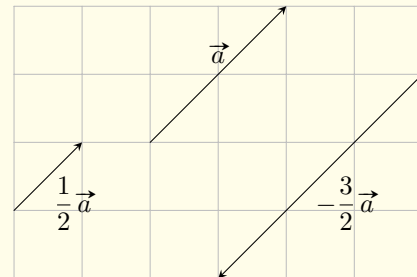
## TÍCH CỦA MỘT VEC-TƠ VỚI MỘT SỐ

### A Tóm tắt lí thuyết

#### 1. Tích của một vec-tơ với một số

##### ○ Định nghĩa 3.1.

- ☑ Tích của một vec-tơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số  $k > 0$  là một vec-tơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với vec-tơ  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $k|\vec{a}|$ .
- ☑ Tích của một vec-tơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số  $k < 0$  là một vec-tơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , ngược hướng với vec-tơ  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $(-k)|\vec{a}|$ .



**⚠ Lưu ý:** Ta quy ước  $k\vec{a} = \vec{0}$  nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

#### 2. Các tính chất của phép nhân vec-tơ với một số

Với hai vec-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  và hai số thực  $k, t$ , ta luôn có

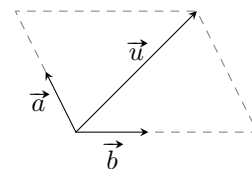
- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$ ;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$ ;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$ ;
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

**⚠ Lưu ý:**

- ☑ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .
- ☑ Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

**⚠ Lưu ý:**

Cho hai vec-tơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó, mọi vec-tơ  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x, y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .



### B Các dạng toán

#### 📁 Dạng 1. Xác định vec-tơ tích, tính độ dài vec-tơ

Vec-tơ  $k\vec{a}$  có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$  và

- cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k \geq 0$ ;
- ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ k < 0. \end{cases}$

### 1. Ví dụ minh họa

⇨ **Ví dụ 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau

a)  $\vec{AM} = k\vec{AB}$ .

b)  $\vec{MA} = k\vec{MB}$ .

c)  $\vec{MA} = k\vec{AB}$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng 1, trọng tâm  $G$ . Tính độ dài véc-tơ  $\vec{AG}$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính độ dài véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

## 2. Bài tập áp dụng

❖ **Bài 1.** Trên đoạn thẳng  $AB$ , gọi  $C$  là trung điểm  $AB$  và  $D$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $A$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau

a)  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ .

b)  $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ .

❖ **Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , cạnh  $BC = 2$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tính độ dài  $\overrightarrow{MN}$ .

❖ **Bài 3.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 2a, BD = a$ . Tính độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

## 3. Bài tập trắc nghiệm

❖ **Câu 1.**

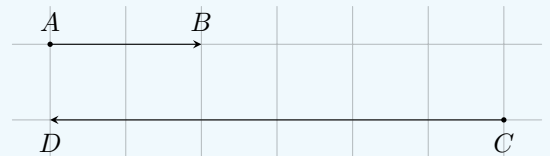
Cho hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$ .

B  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ .

C  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ .

D  $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$ .



❖ **Câu 2.** Cho véc-tơ  $\vec{a}$  (khác  $\vec{0}$ ) và véc-tơ  $\vec{b} = k\vec{a}$ , ( $k \neq 0$ ). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b}$  nếu  $k > 0$ .

B  $\vec{a}$  ngược hướng  $\vec{b}$  nếu  $k > 0$ .

C  $\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{b}$  nếu  $k < 0$ .

D  $\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{b}$  nếu  $k < 0$ .

❖ **Câu 3.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bất kì và số thực  $k$ . Ta có  $k(\vec{a} + \vec{b})$  bằng

A  $\vec{a} + k\vec{b}$ .

B  $k\vec{a} + k\vec{b}$ .

C  $k\vec{a} - k\vec{b}$ .

D  $k\vec{a} + \vec{b}$ .

❖ **Câu 4.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A  $|\vec{a}| = -\frac{1}{2}|\vec{b}|$ .

B  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ đối nhau.

C  $\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{b}$ .

D  $\vec{a}$  ngược hướng với  $\vec{b}$ .

❖ **Câu 5.** Cho véc-tơ  $\vec{u}$  có độ dài bằng 2 và véc-tơ  $\vec{v} = -3\vec{u}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Véc-tơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng  $-6$  và cùng hướng với  $\vec{u}$ .

B Véc-tơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng  $-6$  và ngược hướng với  $\vec{u}$ .

C Véc-tơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng 6 và cùng hướng với  $\vec{u}$ .

D Véc-tơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng 6 và ngược hướng với  $\vec{u}$ .

❖ **Câu 6.** Cho  $\vec{a} = -2\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ bằng nhau. (B)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ đối nhau.  
 (C)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng. (D)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

❖ **Câu 7.** Tích của véc-tơ  $\vec{a}$  và  $-3$  là véc-tơ  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{b}$  cùng hướng  $\vec{a}$ . (B)  $\vec{b} = 3\vec{a}$ .  
 (C)  $|\vec{b}| = -3|\vec{a}|$ . (D)  $\vec{b}$  ngược hướng  $\vec{a}$ .

❖ **Câu 8.** Cho véc-tơ  $\vec{q}$  có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của véc-tơ  $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$  là bao nhiêu?

- (A) 243. (B) 3. (C) 9. (D) -3.

❖ **Câu 9.** Cho véc-tơ  $\vec{a}$  có độ dài bằng 2022. Tính độ dài của véc-tơ  $\vec{b} = -2\vec{a}$ .

- (A)  $|\vec{b}| = 4044$ . (B)  $|\vec{b}| = -2022$ . (C)  $|\vec{b}| = 2022$ . (D)  $|\vec{b}| = -4044$ .

❖ **Câu 10.**

Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $I$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ . (B)  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{IB}$ .  
 (C)  $\vec{AI} = \frac{1}{5}\vec{BA}$ . (D)  $\vec{AI} = -\frac{1}{4}\vec{IB}$ .



❖ **Câu 11.** Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?

- (A)  $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$ . (B)  $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .  
 (C)  $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$ . (D)  $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ .



❖ **Câu 12.** Cho  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MB} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$ . (B)  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ . (C)  $\vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{MB}$ . (D)  $\vec{MB} = 2\vec{AM}$ .

❖ **Câu 13.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AB = 5AM$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB}$ . (B)  $\vec{MB} = \frac{4}{5}\vec{AB}$ . (C)  $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$ . (D)  $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ .

❖ **Câu 14.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là một điểm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{4}AB$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$ . (B)  $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$ . (C)  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ . (D)  $\vec{MB} = -3\vec{MA}$ .

❖ **Câu 15.** Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $I$  sao cho  $AB = 4AI$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A  $\vec{IB} = -3\vec{IA}$ .     
  B  $\vec{IB} = 3\vec{IA}$ .     
  C  $\vec{IB} = \frac{4}{3}\vec{AB}$ .     
  D  $\vec{IB} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$ .

⇨ **Câu 16.** Cho điểm  $B$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ , với  $AB = 2a$ ,  $AC = 6a$ . Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức đúng?

- A  $\vec{BC} = -2\vec{BA}$ .     
  B  $\vec{BC} = 4\vec{AB}$ .     
  C  $\vec{BC} = -2\vec{AB}$ .     
  D  $\vec{BC} = -4\vec{AB}$ .

⇨ **Câu 17.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A  $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{BD}$ .     
  B  $\vec{AC} = 2\vec{OC}$ .     
  C  $\vec{AC} = 2\vec{OA}$ .     
  D  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

⇨ **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Khi đó, véc-tơ  $\vec{GA}$  bằng với véc-tơ nào sau đây?

- A  $2\vec{GM}$ .     
  B  $-\frac{2}{3}\vec{AM}$ .     
  C  $\frac{2}{3}\vec{GM}$ .     
  D  $\frac{1}{2}\vec{AM}$ .

⇨ **Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$ .     
  B  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$ .  
 C  $\vec{GA} = 2\vec{GM}$ .     
  D  $\vec{MG} = -\frac{1}{3}\vec{MA}$ .

⇨ **Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A  $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ .     
  B  $\vec{MN} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$ .     
  C  $\vec{BC} = -2\vec{NM}$ .     
  D  $\vec{BC} = 2\vec{MN}$ .

⇨ **Câu 21.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và trung tuyến  $BM$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A  $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{CA}$ .     
  B  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .  
 C  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ , với mọi điểm  $O$ .     
  D  $\vec{GB} = \frac{2}{3}\vec{BM}$ .

⇨ **Câu 22.** Cho tam giác đều  $ABC$  với đường cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A  $\vec{AB} = \vec{AC}$ .     
  B  $|\vec{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{HC}|$ .     
  C  $\vec{HB} = \vec{HC}$ .     
  D  $|\vec{AC}| = 2|\vec{HC}|$ .

⇨ **Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Giá trị của  $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$  bằng

- A  $A\sqrt{2}$ .     
  B  $2a$ .     
  C  $2a\sqrt{2}$ .     
  D  $3a$ .

⇨ **Câu 24.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Khi đó, giá trị  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$  bằng

- A  $a\sqrt{3}$ .     
  B  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .     
  C  $2a$ .     
  D  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

❖ **Câu 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 4. Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  là

- (A)  $2\sqrt{3}$ . (B)  $\sqrt{5}$ . (C)  $\sqrt{6}$ . (D)  $4\sqrt{3}$ .

❖ **Câu 26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ . Độ dài của véc-tơ  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$  bằng

- (A) 5. (B) 40. (C)  $\sqrt{13}$ . (D)  $2\sqrt{10}$ .

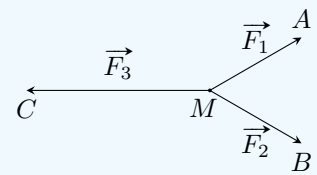
❖ **Câu 27.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}|$  theo  $a$ .

- (A)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ . (B)  $a$ . (C)  $a\sqrt{5}$ . (D)  $a\sqrt{3}$ .

❖ **Câu 28.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 100N và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó, cường độ lực của  $\vec{F}_3$  bằng

- (A)  $50\sqrt{2}$ N. (B)  $50\sqrt{3}$ N. (C)  $25\sqrt{3}$ N. (D)  $100\sqrt{3}$ N.



❖ **Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$  với  $G$  là trọng tâm. Tính  $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$ .

- (A)  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . (D)  $a\sqrt{3}$ .

❖ **Câu 30.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác vuông  $ABC$  với cạnh huyền  $BC = 12$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}$  có độ dài bằng bao nhiêu?

- (A) 4. (B)  $2\sqrt{3}$ . (C) 8. (D) 2.

❖ **Câu 31.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Độ dài véc-tơ tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  bằng

- (A)  $2a$ . (B)  $a\sqrt{3}$ . (C)  $a$ . (D)  $3a$ .

❖ **Câu 32.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$  bằng

- (A)  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ . (C)  $2a$ . (D)  $a\sqrt{3}$ .

❖ **Câu 33.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$  bằng

- (A)  $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ . (C)  $\frac{a}{2}$ . (D)  $\frac{3a}{2}$ .

❖ **Câu 34.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  với  $OA = OB = a$ . Tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$ .

- (A)  $2a$ . (B)  $14a$ . (C)  $16a$ . (D)  $10a$ .

⇒ **Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ . Tính độ dài vec-tơ  $\vec{u} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$ .

- (A)  $|\vec{u}| = 18$ .      (B)  $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$ .      (C)  $|\vec{u}| = 9$ .      (D)  $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$ .

⇒ **Câu 36.** Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  trong mặt phẳng chứa tam giác  $ABC$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$  là

- (A) đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .      (B) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 1.  
(C) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 2.      (D) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 6.

⇒ **Câu 37.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2a$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị  $|\vec{AB} - \vec{GC}|$  là

- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      (B)  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .      (C)  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .      (D)  $\frac{2a}{3}$ .

⇒ **Câu 38.** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có cùng điểm đặt tại  $O$ . Trong đó, có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có phương hợp với nhau một góc  $90^\circ$  và lực  $\vec{F}_3$  ngược hướng với lực  $\vec{F}_1$ . Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  là

- (A) 400 N.      (B)  $100\sqrt{2}$  N.      (C) 600 N.      (D)  $200\sqrt{2}$  N.

⇒ **Câu 39.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Độ dài của vec-tơ  $\vec{u} = 12\vec{AC} - 7\vec{AB}$  bằng

- (A)  $|\vec{u}| = 17$ .      (B)  $|\vec{u}| = 5$ .      (C)  $|\vec{u}| = 13$ .      (D)  $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$ .

⇒ **Câu 40.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Độ dài của vec-tơ  $\vec{u} = 3\vec{AC} - 7\vec{AB}$  là

- (A)  $|\vec{u}| = 5$ .      (B)  $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$ .      (C)  $|\vec{u}| = 17$ .      (D)  $|\vec{u}| = 13$ .

## 📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vec-tơ, thu gọn biểu thức

### Phương pháp giải

- ☑️ HƯỚNG 1. Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó
  - a) Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - b) Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vec-tơ.
- ☑️ HƯỚNG 2. Biến đổi cả hai vế thành một vec-tơ hoặc biểu thức vec-tơ.
- ☑️ HƯỚNG 3. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh tương đương với một đẳng thức vec-tơ đã biết đúng.
- ☑️ HƯỚNG 4. Xuất phát từ một đẳng thức vec-tơ đã biết đúng biến đổi thành đẳng thức vec-tơ cần chứng minh.

### Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

- a) Quy tắc ba điểm: Với ba điểm  $A, B, C$  bất kì ta luôn có  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ .
- b) Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành  $ABCD$  ta luôn có  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

c) *Quy tắc hiệu véc-tơ*: Với ba điểm  $A, B, O$  bất kì ta luôn có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

d) *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng*: Cho đoạn thẳng  $AB$  ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

e) *Tính chất trọng tâm tam giác*: Cho tam giác  $ABC$  ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

f) *Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.*

#### 4. Ví dụ minh họa

❖ **Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

❖ **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....









✧ **Bài 8.** Dựng bên ngoài tứ giác  $ABCD$  các hình bình hành  $ABEF$ ,  $BCGH$ ,  $CDIJ$ ,  $DAKL$ .

a) Chứng minh rằng  $\vec{KF} + \vec{EH} + \vec{GJ} + \vec{IL} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng  $\vec{EL} - \vec{HI} = \vec{FK} - \vec{GJ}$ .

✧ **Bài 9.** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  có  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Chứng minh rằng

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

✧ **Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  bất kì nằm trong tam giác  $ABC$ . Đặt  $S_{MBC} = S_a$ ,  $S_{MCA} = S_b$ ,  $S_{MAB} = S_c$ . Chứng minh rằng

$$S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

**⚠ Lưu ý:**

a) Cho  $M$  trùng với trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ , ta được  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

b) Cho  $M$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ , ta được kết quả

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

c) Nếu tam giác  $ABC$  đều thì với điểm  $M$  bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0},$$

trong đó  $x, y, z$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ .

d) Khi  $M$  nằm ngoài tam giác  $ABC$ , ta có các kết quả như sau

(a) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{BAC}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

(b) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ABC}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} - S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

(c) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ACB}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} - S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

## 6. Bài tập điền khuyết

✧ **Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Biết rằng  $\vec{AB} + 2\vec{AC} = x\vec{AM}$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

❖ **Câu 42.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$ . Biết rằng  $2\vec{AD} + \vec{BC} = x\vec{MN}$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

❖ **Câu 43.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ . Lấy  $M$  là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ . Biết rằng  $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = x\vec{MO}$ , tìm  $x$ .

Đáp án:

❖ **Câu 44.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$  và  $E$  là trung điểm  $AD$ . Tìm các số thực  $x$  và  $y$  biết rằng

a)  $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = x\vec{AB}$ .      Đáp án:

b)  $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = y\vec{EC}$ .      Đáp án:

❖ **Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành  $ABIF, BCPQ, CARS$ . Biết rằng  $\vec{RF} + \vec{IQ} + \vec{PS} = x(\vec{AB} + \vec{AC})$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

## 7. Bài tập trắc nghiệm

❖ **Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A  $\vec{CM} = -3\vec{MG}$ .

B  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AC}$ .

C  $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$ .

D  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ ,  $O$  là điểm bất kì.

❖ **Câu 47.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A  $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$ .     B  $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$ .     C  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$ .     D  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$ .

❖ **Câu 48.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có

A  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI}$ .

B  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

C  $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MI}$ .

D  $\vec{MA} + \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{MI}$ .

❖ **Câu 49.** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Với mọi điểm  $M$ , ta luôn có:

A  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MG}$ .

B  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$ .

C  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ .

D  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}$ .

❖ **Câu 50.** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Đẳng thức nào đúng?

A  $\vec{GA} = 2\vec{GI}$ .

B  $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$ .

C  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$ .

D  $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$ .

❖ **Câu 51.** Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $O$  là điểm bất kỳ?

**A**  $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .

**B**  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + 3\vec{OG} = \vec{0}$ .

**C**  $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$ .

**D**  $\vec{GM} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$ .

❖ **Câu 52.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với  $M$  là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức đúng.

**A**  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

**B**  $\vec{MA} + \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{MI}$ .

**C**  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI}$ .

**D**  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{IM}$ .

❖ **Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

**A**  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

**B**  $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM}$ .

**C**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .

**D**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ .

❖ **Câu 54.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M, Q, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Khi đó véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{BM} + \vec{NA} + \vec{BQ}$  là véc-tơ nào sau đây?

**A**  $\vec{0}$ .

**B**  $\vec{BC}$ .

**C**  $\vec{AQ}$ .

**D**  $\vec{CB}$ .

❖ **Câu 55.** Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} = 3\vec{IB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CA} - \frac{3}{2}\vec{CB}$ .

**B**  $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$ .

**C**  $\vec{CI} = \frac{3}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA}$ .

**D**  $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$ .

❖ **Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây sai?

**A**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$  với mọi điểm  $M$ .

**B**  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

**C**  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$ .

**D**  $3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

❖ **Câu 57.** Khẳng định nào sau đây sai?

**A** Nếu  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.

**B** Nếu  $O$  là trung điểm của  $AB$  thì với mọi  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MO}$ .

**C** Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AG}$ .

**D** Với 3 điểm bất kỳ  $I, J, K$  ta có  $\vec{IJ} + \vec{JK} = \vec{IK}$ .

❖ **Câu 58.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AB}$ .

**B**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$ .

**C**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AD}$ .

**D**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{BD}$ .

❖ **Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác,  $M$  là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định đúng.

**A**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$ .

**B**  $\vec{BI} + \vec{IC} = \vec{0}$ .

C  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ .

D  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

❖ **Câu 60.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

A  $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .     B  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .     C  $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$ .     D  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

❖ **Câu 61.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ .

B  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .

C  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$ .

D  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ .

❖ **Câu 62.** Cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ .

B  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ .

C  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .

D  $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ .

❖ **Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A  $BG = \frac{2}{3}BM$ .

B  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$ .

C  $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$ .

D  $GM = \frac{1}{2}GB$ .

❖ **Câu 64.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ .

B  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ .

C  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$ .

D  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

❖ **Câu 65.** Cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ .

B  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ .

C  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .

D  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

❖ **Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

A  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ .

B  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .

C  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .

D  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .

❖ **Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ .

B  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ .

C  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$ .

D  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

❖ **Câu 68.** Ba trung tuyến  $AM, BN, CP$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $G$ . Hỏi véc-tơ  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$  bằng véc-tơ nào?

A  $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ .

B  $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{PG})$ .

C  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$ .

D  $\vec{0}$ .

❖ **Câu 69.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Hệ thức nào sau đây **đúng**?

**A**  $\vec{AI} + \vec{AK} = 2\vec{AC}$ .

**B**  $\vec{AI} + \vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

**C**  $\vec{AI} + \vec{AK} = \vec{IK}$ .

**D**  $\vec{AI} + \vec{AK} = \frac{3}{2}\vec{AC}$ .

❖ **Câu 70.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Các điểm  $D, E$  thỏa mãn các đẳng thức:  $\vec{BD} = 4\vec{BA}$ ,  $\vec{AE} = 3\vec{AC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{DE}$ .

**B**  $\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{DE}$ .

**C**  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{DE}$ .

**D**  $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{DE}$ .

❖ **Câu 71.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $AB$  và  $DC$ . Lấy các điểm  $P, Q$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\vec{PA} = -2\vec{PD}$ ,  $\vec{QB} = -2\vec{QC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ .

**B**  $\vec{MN} = \vec{MP} + \vec{MQ}$ .

**C**  $\vec{MN} = -\frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ .

**D**  $\vec{MN} = \frac{1}{4}(\vec{MD} + \vec{MC} + \vec{NB} + \vec{NA})$ .

❖ **Câu 72.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào đúng?

**A**  $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$ .

**B**  $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}$ .

**C**  $\vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{CD}$ .

**D**  $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{CD}$ .

❖ **Câu 73.** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

**A**  $\vec{AB} + \vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AG}$ .

**B**  $\vec{BA} + \vec{BC} = 3\vec{BG}$ .

**C**  $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{CG}$ .

**D**  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{0}$ .

❖ **Câu 74.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

**A**  $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$ .

**B**  $\vec{AD} + \vec{DO} = -\frac{1}{2}\vec{CA}$ .

**C**  $\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ .

**D**  $\vec{AC} + \vec{DB} = 4\vec{AB}$ .

❖ **Câu 75.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó  $\vec{AC} + \vec{BD}$  bằng

**A**  $\vec{MN}$ .

**B**  $2\vec{MN}$ .

**C**  $3\vec{MN}$ .

**D**  $-2\vec{MN}$ .

❖ **Câu 76.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{MO}$ .

**B**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$ .

**C**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MO}$ .

**D**  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$ .

❖ **Câu 77.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Khẳng định nào đúng?

**A**  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = 2(\vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB})$ .

**B**  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = 3(\vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB})$ .

**C**  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \frac{\vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}}{4}$ .

**D**  $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}$ .



❖ **Câu 78.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}$  bằng

- (A)  $2\vec{MI}$ .                      (B)  $3\vec{MI}$ .                      (C)  $4\vec{MI}$ .                      (D)  $5\vec{MI}$ .

❖ **Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$  và  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó

- (A)  $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ .                      (B)  $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$ .  
 (C)  $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$ .                      (D)  $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ .

❖ **Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H, G$  lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A)  $\vec{OH} = 4\vec{OG}$ .                      (B)  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ .                      (C)  $\vec{OH} = 2\vec{OG}$ .                      (D)  $3\vec{OH} = \vec{OG}$ .

❖ **Câu 81.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  và  $CA$  lấy các điểm  $D, E, F$  sao cho  $DA = 2DB, EB = 2EC, FC = 2FA$ . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- (A)  $\vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .                      (B)  $\vec{AD} - \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .  
 (C)  $\vec{AD} + \vec{AE} - \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .                      (D)  $\vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{AB} - \vec{AC}$ .

❖ **Câu 82.** Cho tứ giác  $ABCD$  và điểm  $G$  thỏa mãn  $\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} + k\vec{GD} = \vec{0}$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm tam giác các  $ACD, BCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $CD, AB$ . Tìm  $k$  sao cho  $G$  là trung điểm của  $IJ$ .

- (A)  $k = 1$ .                      (B)  $k = 2$ .                      (C)  $k = 3$ .                      (D)  $k = 4$ .

❖ **Câu 83.** Cho ngũ giác  $ABCDE$  có  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $MP, NQ$ . Biết  $\vec{IJ} = k\vec{EA}$ , tìm  $k$ .

- (A)  $k = -\frac{1}{2}$ .                      (B)  $k = \frac{1}{2}$ .                      (C)  $k = -\frac{1}{4}$ .                      (D)  $k = \frac{1}{4}$ .

### Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

#### Phương pháp giải

**Bài toán:** Xác định điểm  $M$  thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

- ☑ Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...) về dạng:  $\vec{OM} = \vec{v}$ . Trong đó điểm  $O$  và véc-tơ  $\vec{v}$  cho trước.
- ☑ Bước 2. Nếu muốn dựng điểm  $M$ , ta lấy điểm  $O$  làm gốc, dựng một véc-tơ bằng véc-tơ  $\vec{v}$ , khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là điểm  $M$ .

**⚠ Lưu ý:**

- ☑ Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức  $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$  là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ  $\vec{a} = k\vec{b}$ , hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.
- ☑ Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.
  - Để chứng minh  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau
    - +  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .
    - +  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .
    - +  $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$ .
    - +  $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  ( $O$  bất kì).
  - Để chứng minh điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau
    - +  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .
    - + Với  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$  thì  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ .
    - + Với  $O$  là điểm bất kì trong mặt phẳng thì:  $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .
  - Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$ .
  - Để chứng minh hai điểm  $A_1$  và  $A_2$  trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau
    - +  $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$ .
    - +  $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$  với  $O$  là điểm bất kì.
  - Điều kiện cần và đủ để  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có cùng trọng tâm là
 
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$
  - Nếu  $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$  ( $k \neq 1$ ) thì  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1 - k}$  (hay điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k \neq 1$ ).

## 8. Ví dụ minh họa

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

💬 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

.....  
.....

❖ **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$ , sao cho  $NC = 2NA$ . Hãy xác định  $K$  và  $D$  khi

a)  $3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 12\vec{AK} = \vec{0}$ .

b)  $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\vec{KD} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

❖ **Ví dụ 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

a) Hãy dựng các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{AD}$  và  $\vec{NC} + \vec{ND} - \vec{NA} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC}$ .

b) Chứng minh rằng  $\vec{MN} = \vec{BA}$ .

**Lời giải.**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 4.** Cho trước hai điểm  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\alpha + \beta \neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm  $I$  thỏa mãn  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ .

b) Từ đó suy ra với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có:  $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$ .

**💬 Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### **⚠ Lưu ý: Lời bình 3**

- ☑ Nếu  $\alpha = \beta = 1$  thì điểm  $I$  chính là trung điểm của  $AB$ .
- ☑ Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm  $A, B, C$  và bộ 3 số thực  $\alpha, \beta, \gamma$  cho trước thỏa mãn  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , nghĩa là:
  - Tồn tại điểm  $I$  duy nhất thỏa mãn  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
  - Từ đó suy ra với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$ .  
Khi  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  thì  $I$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .
- ☑ Bài toán trên vẫn đúng với  $n$  điểm  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) và bộ số thực  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$
- ☑ Kết quả trên dùng giải bài toán “Cho  $n$  điểm  $A_i, i = \overline{1, n}$  và bộ số thực  $\alpha_i, i = \overline{1, n}$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Tìm số thực  $k$  và điểm cố định  $I$  sao cho đẳng thức véc-tơ  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$  thỏa mãn với mọi điểm  $M$ ”.

## 9. Bài tập áp dụng

✎ **Bài 11.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ACEF$ .

- a) Dụng các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ .
- b) Chứng minh  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$ .

✎ **Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$ .

- a) Chứng minh với mọi điểm  $M$ , ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ .
- b) Hãy dựng điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ .

✎ **Bài 13.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số  $k$  và điểm cố định  $I, J, K$  sao cho đẳng thức véc-tơ sau thỏa mãn với mọi điểm  $M$ .

- a)  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ .
- b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$ .
- c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

✎ **Bài 14.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\triangle ANP$  và  $\triangle CMQ$  có cùng trọng tâm.

## 10. Bài tập trắc nghiệm

✎ **Câu 84.** Cho điểm  $A$  và véc-tơ  $\vec{u}$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ ?

- A** Duy nhất một.      **B** Hai.      **C** Không có.      **D** Vô số.

❖ **Câu 85.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ . Khi đó  $M$  là

(A) trung điểm  $AC$ .      (B) điểm  $C$ .      (C) trung điểm  $AB$ .      (D) trung điểm  $AD$ .

❖ **Câu 86.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và không cùng phương. Biết hai véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

(A)  $\frac{1}{2}$ .      (B)  $-\frac{3}{2}$ .      (C)  $-\frac{1}{2}$ .      (D)  $\frac{3}{2}$ .

❖ **Câu 87.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  khác 0 thỏa mãn  $\alpha + \beta = 0$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ?

(A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 3.

❖ **Câu 88.** Cho ba điểm không thẳng hàng  $A, B, C$  và  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ . Chọn khẳng định đúng.

(A)  $ABMC$  là hình bình hành.      (B)  $ABCM$  là hình bình hành.  
(C)  $M$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .      (D)  $CM$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$ .

❖ **Câu 89.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\alpha + \beta \neq 0$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ?

(A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 3.

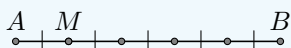
❖ **Câu 90.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Điều kiện cần và đủ để  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

(A)  $IA = IB$ .      (B)  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ .      (C)  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .      (D)  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ .

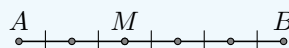
❖ **Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $I$  là trung điểm  $BC$ . Điểm  $G$  có tính chất nào sau đây thì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ?

(A)  $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ .      (B)  $GA = 2GI$ .  
(C)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ .      (D)  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .

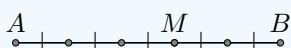
❖ **Câu 92.** Cho đoạn thẳng  $AB$ , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .



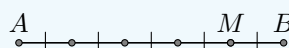
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình 1.      (B) Hình 2.      (C) Hình 3.      (D) Hình 4.

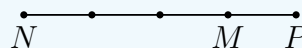
❖ **Câu 93.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn  $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

(A)  $M$  trùng với  $I$ .      (B)  $M$  là trung điểm của  $BI$ .  
(C)  $M$  là trung điểm của  $AI$ .      (D)  $M$  trùng với  $A$  hoặc  $M$  trùng với  $B$ .

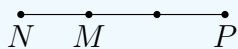
⇨ **Câu 94.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



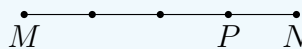
Hình 1



Hình 3



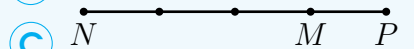
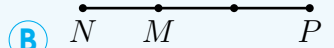
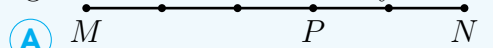
Hình 2



Hình 4

- A** Hình 1.                      **B** Hình 2.                      **C** Hình 3.                      **D** Hình 4.

⇨ **Câu 95.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



⇨ **Câu 96.** Cho tam giác  $ABC$  với  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A**  $M$  là trung điểm của  $IC$ .  
**B**  $M$  là trung điểm của  $IA$ .  
**C**  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$ .  
**D**  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

⇨ **Câu 97.**

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

- A**  $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .                      **B**  $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .  
**C**  $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ .                      **D**  $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .



⇨ **Câu 98.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  là điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$ . Vị trí của điểm  $M$  là

- A**  $M$  là trung điểm của  $AC$ .  
**B**  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
**C**  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .  
**D**  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

⇨ **Câu 99.** Cho tam giác  $ABC$ . Để điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  phải thỏa mãn

- A**  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
**B**  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.  
**C**  $M$  thuộc trung trực của  $AB$ .  
**D**  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.

❖ **Câu 100.** Cho tứ giác  $ABCD$  và  $M$  là điểm thoả  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ . Chọn khẳng định đúng.

- (A)  $M$  là giao điểm hai đường chéo của tứ giác  $ABCD$ .  
 (B)  $M$  là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác  $ABCD$ .  
 (C)  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ .  
 (D)  $M$  là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác  $ABCD$ .

❖ **Câu 101.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó,

- (A)  $ABCM$  là hình bình hành.  
 (B)  $ABMC$  là hình bình hành.  
 (C)  $ABCM$  là hình bình thang có đáy lớn  $AM$ .  
 (D)  $ABCM$  là hình bình thang có đáy lớn  $BC$ .

❖ **Câu 102.** Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Tìm điều kiện cần và đủ để  $G \equiv G'$ .

- (A)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ .  
 (B)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{G'G}$ .

❖ **Câu 103.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là trung điểm  $BC$ . Gọi  $M$  là điểm thoả mãn  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Xác định vị trí của điểm  $M$ .

- (A)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
 (B)  $M$  là trung điểm  $AI$ .  
 (C)  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $AI$  thoả  $MA = 2MI$ .  
 (D)  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $AI$  thoả  $MI = 2MA$ .

❖ **Câu 104.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thoả  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ . Khi đó điểm  $M$  là

- (A) trung điểm  $AC$ .      (B) điểm  $C$ .      (C) trung điểm  $AB$ .      (D) trung điểm  $AD$ .

❖ **Câu 105.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $DE$  và  $M$  xác định bởi  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ . Tìm giá trị thực của  $x$  sao cho  $A, K, M$  thẳng hàng.

- (A)  $\frac{3}{8}$ .      (B)  $-\frac{4}{3}$ .      (C)  $\frac{8}{3}$ .      (D)  $-\frac{3}{4}$ .

❖ **Câu 106.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là trung điểm cạnh  $AC$  và  $I$  là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $I$  là trực tâm tam giác  $BCD$ .  
 (B)  $I$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
 (C)  $I$  là trọng tâm tam giác  $CDB$ .  
 (D)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .



❖ **Câu 107.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đường thẳng  $AB$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A**  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ .      **B**  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ .      **C**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ .      **D**  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ .

❖ **Câu 108.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy xác định vị trí điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

- A**  $M$  thuộc cạnh  $AB$  và  $AM = 2MB$ .      **B**  $M$  trên  $AB$  và ngoài đoạn  $AB$ .  
**C**  $M$  là trung điểm  $AB$ .      **D**  $M$  không thuộc đoạn  $AB$ .

❖ **Câu 109.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . Kết luận nào dưới đây đúng?

- A**  $M$  đối xứng với  $C$  qua  $A$ .      **B**  $A$  đối xứng với  $M$  qua  $C$ .  
**C**  $C$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ .      **D**  $M$  là điểm tùy ý.

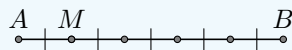
❖ **Câu 110.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ . Tìm vị trí điểm  $M$ .

- A**  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .  
**B**  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  
**C**  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
**D**  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

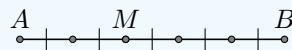
❖ **Câu 111.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $I$  là trung điểm  $AC$ . Vị trí điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$  xác định bởi hệ thức

- A**  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ .      **B**  $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ .      **C**  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ .      **D**  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$ .

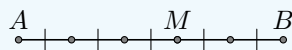
❖ **Câu 112.** Cho đoạn thẳng  $AB$ , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .



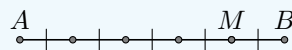
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A** Hình 1.      **B** Hình 2.      **C** Hình 3.      **D** Hình 4.

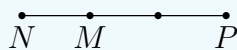
❖ **Câu 113.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn  $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

- A**  $M$  trùng với  $I$ .      **B**  $M$  là trung điểm của  $BI$ .  
**C**  $M$  là trung điểm của  $AI$ .      **D**  $M$  trùng với  $A$  hoặc  $M$  trùng với  $B$ .

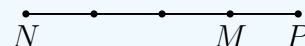
❖ **Câu 114.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



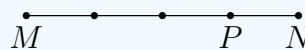
Hình 1



Hình 2



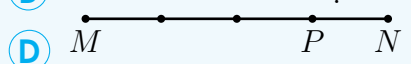
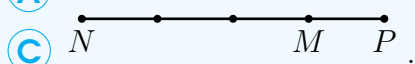
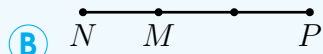
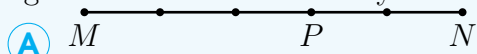
Hình 3



Hình 4

- (A) Hình 1.                      (B) Hình 2.                      (C) Hình 3.                      (D) Hình 4.

⇨ **Câu 115.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



⇨ **Câu 116.**

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

(A)  $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

(B)  $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

(C)  $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ .

(D)  $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .



⇨ **Câu 117.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  là điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$ . Vị trí của điểm  $M$  là

(A)  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

(B)  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

(C)  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .

(D)  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

#### Dạng 4. Biểu diễn véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

**Đặt vấn đề :** Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: “Cho trước hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và không cùng phương. Với mọi véc-tơ  $\vec{c}$  ta luôn tìm được một cặp số thực  $(\alpha, \beta)$  duy nhất sao cho  $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ ”.

**Phương pháp giải :** Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- ☑ **Hướng 1:** Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển véc-tơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- ☑ **Hướng 2:** Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ véc-tơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

## 1.1. Ví dụ minh họa

⇨ **Ví dụ 1.** Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác và  $B_1$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ

a)  $\overrightarrow{CB_1}$  và  $\overrightarrow{AB_1}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

b)  $\overrightarrow{MB_1}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .



Dotted lines for writing.

⇨ **Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$  và hai điểm  $D, E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC}$  (với  $k \neq 1$ ).

a) Biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Điểm  $F, I$  thỏa mãn  $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$ .

 **Lời giải.**

Dotted lines for writing.

## 12. Bài tập áp dụng

✦ **Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $N$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy tính các véc-tơ  $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

✦ **Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên hai cạnh  $AB$  và  $AC$  lấy hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$ . Gọi  $M, I$  lần lượt là trung điểm của  $DE$  và  $BC$ . Hãy tính véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

✦ **Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$ , lấy điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Phân tích  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

✦ **Bài 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Hãy tính các véc-tơ sau theo véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

- $\overrightarrow{AI}$  với  $I$  là trung điểm của  $\overrightarrow{BO}$ .
- $\overrightarrow{BG}$  với  $G$  là trọng tâm  $\triangle OCD$ .

✦ **Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến  $BN, CP$ . Hãy biểu thị các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ .

✦ **Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I, J$  nằm trên cạnh  $BC$  và  $BC$  kéo dài sao cho  $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$ .

- Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

✦ **Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác và  $I$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

✦ **Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm là  $G$  và các đường trung tuyến  $AM, BP$ . Gọi  $G'$  là điểm đối xứng với điểm  $G$  qua  $P$ .

- Hãy biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- Chứng minh hệ thức:  $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$ .

✦ **Bài 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CD$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ .

✦ **Bài 24.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AD, BC$ . Hãy biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  và theo  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ .

✦ **Bài 25.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm đối xứng của trọng tâm  $G$  qua  $B$ .

- Chứng minh  $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

b) Đặt  $\vec{AG} = \vec{a}$ ,  $\vec{AI} = \vec{b}$ . Tính  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  theo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

❖ **Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Tính các véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$  theo các véc-tơ  $\vec{BN}, \vec{CP}$ .

❖ **Bài 27.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  kéo dài sao cho  $IB = 3IC$ .

a) Tính  $\vec{AI}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

b) Gọi  $J$  và  $K$  lần lượt là các điểm thuộc cạnh  $AC, AB$  sao cho  $JA = 2JC$  và  $KB = 3KA$ . Tính  $\vec{JK}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

c) Tính  $\vec{BC}$  theo  $\vec{AI}$  và  $\vec{JK}$ .

### 13. Bài tập trắc nghiệm

❖ **Câu 118.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của đoạn  $BC$ . Tìm mệnh đề đúng.

A  $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

B  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

C  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

D  $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

❖ **Câu 119.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ , đặt  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{BI}$  theo các véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

A  $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

B  $\vec{BI} = \vec{a} + \vec{b}$ .

C  $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .

D  $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .

❖ **Câu 120.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{BM} = k\vec{BC}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{AM}$  theo các véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

A  $\vec{AM} = (1-k)\vec{AB} + k\vec{AC}$ .

B  $\vec{AM} = k\vec{AB} + k\vec{AC}$ .

C  $\vec{AM} = k\vec{AB} + (1-k)\vec{AC}$ .

D  $\vec{AM} = (1-k)\vec{AB} + (1-k)\vec{AC}$ .

❖ **Câu 121.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  được xác định bởi  $\vec{BI} = k\vec{BC}$  ( $k \neq 1$ ). Tìm hệ thức liên hệ giữa  $\vec{DI}, \vec{DB}, \vec{DC}$ .

A  $\vec{DI} = (k-1)\vec{DB} - k\vec{DC}$ .

B  $\vec{DI} = (1-k)\vec{DB} + k\vec{DC}$ .

C  $\vec{DI} = (1+k)\vec{DB} - k\vec{DC}$ .

D  $\vec{DI} = (1+k)\vec{DB} + k\vec{DC}$ .

❖ **Câu 122.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $\vec{AB}$  theo  $\vec{AM}$  và  $\vec{BC}$ .

A  $\vec{AB} = \vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ .

B  $\vec{AB} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AM}$ .

C  $\vec{AB} = \vec{AM} - \frac{1}{2}\vec{BC}$ .

D  $\vec{AB} = \vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AM}$ .

❖ **Câu 123.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AM$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .

B  $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} - \vec{AC})$ .

Ⓒ  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

Ⓓ  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

⚡ **Câu 124.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  chia cạnh  $BC$  theo ba phần bằng nhau  $BM = MN = NC$ . Tính  $\vec{AM}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

Ⓐ  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ .

Ⓑ  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ .

Ⓒ  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$ .

Ⓓ  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$ .

⚡ **Câu 125.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ  $\vec{GA} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$ .

Ⓑ  $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$ .

Ⓒ  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$ .

Ⓓ  $2\vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{AG}$ .

⚡ **Câu 126.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

Ⓐ  $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

Ⓑ  $2\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{BC}$ .

Ⓒ  $2\vec{AM} = 2\vec{AC} - \vec{BC}$ .

Ⓓ  $2\vec{AM} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$ .

⚡ **Câu 127.** Cho  $\triangle ABC$  và  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} = 3\vec{IB}$ . Phân tích  $\vec{CI}$  theo  $\vec{CA}$  và  $\vec{CB}$ .

Ⓐ  $\vec{CI} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - 3\vec{CB})$ .

Ⓑ  $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$ .

Ⓒ  $\vec{CI} = \frac{1}{2}(3\vec{CB} - \vec{CA})$ .

Ⓓ  $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$ .

⚡ **Câu 128.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $N$  là trung điểm  $AB$  và  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Phân tích  $\vec{GA}$  theo  $\vec{BD}$  và  $\vec{NC}$ .

Ⓐ  $\vec{GA} = -\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

Ⓑ  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{4}{3}\vec{NC}$ .

Ⓒ  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

Ⓓ  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

⚡ **Câu 129.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AK, BM$  là hai trung tuyến. Đặt  $\vec{AK} = \vec{a}, \vec{BM} = \vec{b}$ . Hãy biểu diễn  $\vec{BC}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

Ⓐ  $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

Ⓑ  $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$ .

Ⓒ  $\vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

Ⓓ  $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

⚡ **Câu 130.** Cho  $\triangle ABC$  với trọng tâm  $G$ . Đặt  $\vec{CA} = \vec{a}, \vec{CB} = \vec{b}$ . Biểu thị véc-tơ  $\vec{AG}$  theo hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ta được

Ⓐ  $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$ .

Ⓑ  $\vec{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$ .

Ⓒ  $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$ .

Ⓓ  $\vec{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$ .

⚡ **Câu 131.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 3MC$ . Khi đó, biểu diễn véc-tơ  $\vec{AM}$  theo véc-tơ  $\vec{AB}$  và véc-tơ  $\vec{AC}$  là

Ⓐ  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 3\vec{AC}$ .

Ⓑ  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$ .

**C**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ .

**D**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ .

❖ **Câu 132.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AG}$  bằng

**A**  $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$ .

**B**  $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$ .

**C**  $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$ .

**D**  $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$ .

❖ **Câu 133.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Điểm  $N$  trên  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\overrightarrow{AC}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{AG}$  và  $\overrightarrow{AN}$ .

**A**  $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**B**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**C**  $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**D**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

❖ **Câu 134.** Cho  $\triangle ABC$  với  $G$  là trọng tâm. Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AG}$  được biểu diễn theo hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

**A**  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ .

**B**  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

**C**  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .

**D**  $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

❖ **Câu 135.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Đặt  $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$ . Tìm các giá trị thực của  $m, n$  để  $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

**A**  $m = 1; n = 2$ .

**B**  $m = -1; n = -2$ .

**C**  $m = -2; n = -1$ .

**D**  $m = 2; n = 1$ .

❖ **Câu 136.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Hãy tìm  $m$  và  $n$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$ .

**A**  $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

**B**  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

**C**  $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

**D**  $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

❖ **Câu 137.** Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Đặt  $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$ . Hãy tìm  $m, n$  để có  $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

**A**  $m = 1, n = 2$ .

**B**  $m = -1, n = -2$ .

**C**  $m = 2, n = 1$ .

**D**  $m = -2, n = -1$ .

❖ **Câu 138.** Cho tứ giác  $ABCD$  (với  $AB, CD$  không song song). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Tìm  $m, n$  để  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$ .

**A**  $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

**B**  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

**C**  $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

**D**  $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

❖ **Câu 139.**

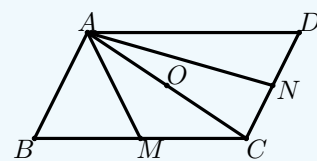
Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ . Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{AO}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

**B**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

**C**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ .

**D**  $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$ .





❖ **Câu 140.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Gọi  $K$  là điểm trên cạnh  $MN$  sao cho  $KN = 3KM$ . Kết quả nào dưới đây đúng?

- (A)  $\vec{AK} = -\frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{1}{12}\vec{AC}$ .      (B)  $\vec{AK} = -\frac{3}{8}\vec{AB} - \frac{1}{12}\vec{AC}$ .  
 (C)  $\vec{AK} = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{1}{12}\vec{AC}$ .      (D)  $\vec{AK} = \frac{3}{8}\vec{AB} - \frac{1}{12}\vec{AC}$ .

❖ **Câu 141.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Trên cạnh  $AB, CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $3\vec{AM} = 2\vec{AB}$  và  $3\vec{DN} = 2\vec{DC}$ . Tính véc-tơ  $\vec{MN}$  theo hai véc-tơ  $\vec{AD}, \vec{BC}$ .

- (A)  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .      (B)  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{BC}$ .  
 (C)  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{BC}$ .      (D)  $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

❖ **Câu 142.** Cho tam giác đều  $ABC$  và điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} = 2\vec{IB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} - 2\vec{CB}}{3}$ .      (B)  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{3}$ .  
 (C)  $\vec{CI} = -\vec{CA} + 2\vec{CB}$ .      (D)  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{-3}$ .

❖ **Câu 143.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $\vec{PA} = 2\vec{PB}$ ,  $3\vec{QA} + 2\vec{QC} = \vec{0}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{AG}$  theo các véc-tơ  $\vec{AP}, \vec{AQ}$ .

- (A)  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AP} + \frac{5}{6}\vec{AQ}$ .      (B)  $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{AP} + \frac{1}{6}\vec{AQ}$ .  
 (C)  $\vec{AG} = \frac{1}{6}\vec{AP} + \frac{5}{6}\vec{AQ}$ .      (D)  $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{AQ}$ .

❖ **Câu 144.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $2CI = 3BI$  và  $J$  thuộc  $BC$  kéo dài sao cho  $5JB = 2JC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{AG}$  theo các véc-tơ  $\vec{AI}, \vec{AJ}$ .

- (A)  $\vec{AG} = \frac{35}{48}\vec{AI} - \frac{1}{16}\vec{AJ}$ .      (B)  $\vec{AG} = \frac{35}{48}\vec{AI} + \frac{1}{16}\vec{AJ}$ .  
 (C)  $\vec{AG} = \frac{25}{16}\vec{AI} - \frac{3}{16}\vec{AJ}$ .      (D)  $\vec{AG} = \frac{25}{16}\vec{AI} + \frac{3}{16}\vec{AJ}$ .

❖ **Câu 145.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác và  $H$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{MH}$  theo các véc-tơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

- (A)  $\vec{MH} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .      (B)  $\vec{MH} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ .  
 (C)  $\vec{MH} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .      (D)  $\vec{MH} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ .

❖ **Câu 146.** Cho góc  $\widehat{xOy} = 60^\circ$ . Các điểm  $A, B$  nằm trên tia  $Ox$ , các điểm  $C, D$  nằm trên tia  $Oy$  sao cho  $AB = CD = 2$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $AC, BD$ . Biết  $A$  nằm giữa  $O$  và  $B, C$  nằm giữa  $O$  và  $D$ , tính  $IJ$ .

- (A)  $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      (B)  $IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      (C)  $IJ = \sqrt{3}$ .      (D)  $IJ = 2\sqrt{3}$ .

⇨ **Câu 147.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Hệ thức tính  $\overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AG}$  và  $\overrightarrow{AN}$  là

**A**  $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**B**  $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**C**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

**D**  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .

### Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

☑ Để chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, ta chứng minh:  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  (1).  
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi véc-tơ.
- Xác định (tính) véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  thông qua một tổ hợp trung gian.

#### Chú ý:

- Cho ba điểm  $A, B, C$ . Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là:  $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$  với điểm  $M$  tùy ý và số thực  $\alpha$  bất kỳ".  
Đặc biệt khi  $0 \leq \alpha \leq 1$  thì  $C \in AB$ . Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số  $k$  (hoặc  $m$ ) cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy  $k$  trong biểu thức  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , ta nên quy đồng biểu thức phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  để tìm ra số  $k$ .

☑ Để chứng minh  $AB \parallel CD$  ta cần chứng minh  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ .

## 14. Ví dụ minh họa

⇨ **Ví dụ 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, CD$  và  $P$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ . Chứng minh 3 điểm  $B, P, N$  thẳng hàng.

### Lời giải.


⇨ **Ví dụ 2.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$  thỏa:  $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh  $B, C, D$  thẳng hàng.

### Lời giải.

--	--

**Ví dụ 3.** Cho  $\triangle ABC$ , lấy điểm  $M, N, P$  sao cho  $\vec{MB} = 3\vec{MC}, \vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0}, \vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$ .

- a) Tính  $\vec{PM}, \vec{PN}$  theo  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .
- b) Chứng minh ba điểm:  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

--	--



.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇔ **Ví dụ 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $I$  là trung điểm của trung tuyến  $AM$  và  $D$  là điểm thỏa hệ thức  $3\vec{AD} = \vec{AC}$ . Biểu diễn véc-tơ  $\vec{BD}$ ,  $\vec{BI}$  theo  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  và chứng minh ba điểm  $B, I, D$  thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

## 15. Bài tập áp dụng

⇔ **Bài 28.** Cho  $\triangle ABC$ .

- Dựng các điểm  $K, L$  sao cho  $\vec{KA} + 2\vec{KB} + 3\vec{KC} = \vec{0}$ ,  $2\vec{LB} + 3\vec{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

⇔ **Bài 29.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $E$  là điểm thỏa hệ thức  $3\vec{IE} = \vec{ID}$ . Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

⇔ **Bài 30.** Cho  $\triangle ABC$ .

- Dựng các điểm  $K, L$  sao cho  $\vec{KA} + 2\vec{KB} + 3\vec{KC} = \vec{0}$  và  $2\vec{LB} + 3\vec{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

⇔ **Bài 31.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ,  $N$  và  $P$  là hai điểm thỏa mãn hệ thức  $\vec{NA} + 2\vec{NC} = \vec{0}$ ,  $\vec{PB} - 2\vec{PC} = \vec{0}$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

✧ **Bài 32.** Cho  $\triangle ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN$  đi qua trọng tâm  $\triangle ABC$ .

✧ **Bài 33.** Cho  $\triangle ABC$ .

- a) Dựng các điểm  $D, E$  thỏa các hệ thức  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ .
- b) Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

✧ **Bài 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $E$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $D, E, I$  thẳng hàng.

✧ **Bài 35.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$  và  $M$  là trung điểm  $AD$ . Điểm  $N$  được lấy trên  $AC$  sao cho  $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $B, M, N$  thẳng hàng.

✧ **Bài 36.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $O$  là trung điểm của  $AM$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $I, AC$  lấy điểm  $J$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $I, J, O$  thẳng hàng.

✧ **Bài 37.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ, G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, O, G$  thẳng hàng.

✧ **Bài 38.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm di động trên  $AB, CD$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$  và hai điểm  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{IJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ .
- b) Chứng minh trung điểm  $P$  của  $MN$  nằm trên  $IJ$ .

✧ **Bài 39.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $P, Q, R$  là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- a) Chứng minh rằng:  $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$ .
- b) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ .
- c) Tìm  $k$  sao cho  $P, Q, R$  thẳng hàng.

✧ **Bài 40.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

- a) Gọi  $I, F, K$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh điều kiện cần và đủ để  $I, F, K$  thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

b) Gọi  $M, N$  là hai điểm lần lượt trên đoạn  $AB, CD$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle MNB$ . Tính  $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Gọi  $H$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ . Tính  $\overrightarrow{AH}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  và  $k$ . Tìm  $k$  để đường thẳng  $AH$  đi qua điểm  $G$ .

## 16. Bài tập trắc nghiệm

✧ **Câu 148.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- A  $AB = AC$ .  B  $\exists k \in \mathbb{R}^* : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
 C  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .  D  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$ .

✧ **Câu 149.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .  
 B Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .  
 C Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$ .  
 D Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

✧ **Câu 150.** Phát biểu nào là **sai**?

- A Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  thì  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ .  
 B  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  thì  $A, B, C, D$  thẳng hàng.  
 C Nếu  $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng.  
 D  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$ .

✧ **Câu 151.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây là cùng phương?

- A  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ .  B  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$ .  
 C  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ .  D  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

✧ **Câu 152.** Biết rằng hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai véc-tơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- A  $\frac{1}{2}$ .  B  $-\frac{3}{2}$ .  C  $-\frac{1}{2}$ .  D  $\frac{3}{2}$ .

✧ **Câu 153.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương,  $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$ . véc-tơ cùng hướng với  $\vec{x}$  là

- A  $2\vec{a} - \vec{b}$ .  B  $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .  C  $4\vec{a} + 2\vec{b}$ .  D  $-\vec{a} + \vec{b}$ .

✧ **Câu 154.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- A  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .  B  $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .  
 C  $\frac{1}{2}\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}$  và  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .  D  $-3\vec{a} + \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 100\vec{b}$ .

❖ **Câu 155.** Cho điểm  $B$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ , với  $AB = 2a$ ,  $AC = 6a$ . Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức đúng?

- (A)  $\vec{BC} = -2\vec{AB}$ .      (B)  $\vec{BC} = 4\vec{AB}$ .      (C)  $\vec{BC} = -2\vec{AB}$ .      (D)  $\vec{BC} = -2\vec{BA}$ .

❖ **Câu 156.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- (A)  $-3\vec{a} + \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$ .      (B)  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $2\vec{a} + \vec{b}$ .  
 (C)  $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .      (D)  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .

❖ **Câu 157.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây là cùng phương?

- (A)  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ .      (B)  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$ .  
 (C)  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ .      (D)  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

❖ **Câu 158.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tổng các véc-tơ  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$  là

- (A)  $\vec{AC}$ .      (B)  $2\vec{AC}$ .      (C)  $3\vec{AC}$ .      (D)  $5\vec{AC}$ .

❖ **Câu 159.** Cho tam giác  $ABC$ , véc-tơ  $\vec{AB}$  được phân tích theo hai véc-tơ  $\vec{AC}$  và  $\vec{BC}$  bằng

- (A)  $\vec{AC} + \vec{BC}$ .      (B)  $\vec{AC} - \vec{BC}$ .      (C)  $-\vec{AC} + \vec{BC}$ .      (D)  $\vec{AC} - 2\vec{BC}$ .

❖ **Câu 160.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- (A)  $AB = AC$ .      (B)  $\exists k \neq 0: \vec{AB} = k\vec{AC}$ .  
 (C)  $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ .      (D)  $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MC}, \forall$  điểm  $M$ .

❖ **Câu 161.** Cho  $\Delta ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \vec{BC}$ ,  $\vec{b} = \vec{AC}$ . Các cặp véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- (A)  $2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} + 2\vec{b}$ .      (B)  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $2\vec{a} - \vec{b}$ .  
 (C)  $5\vec{a} + \vec{b}$ ,  $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ .      (D)  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ .

❖ **Câu 162.** Biết rằng hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai véc-tơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- (A)  $-7$ .      (B)  $7$ .      (C)  $5$ .      (D)  $6$ .

❖ **Câu 163.** Phát biểu nào là sai?

- (A) Nếu  $\vec{AB} = \vec{AC}$  thì  $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ .  
 (B)  $\vec{AB} = \vec{CD}$  thì  $A, B, C, D$  thẳng hàng.  
 (C) Nếu  $3\vec{AB} + 7\vec{AC} = \vec{0}$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng.  
 (D)  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{DC} - \vec{BA}$ .

❖ **Câu 164.** Biết rằng hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai véc-tơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- A  $\frac{1}{2}$ .     
  B  $-\frac{3}{2}$ .     
  C  $-\frac{1}{2}$ .     
  D  $\frac{3}{2}$ .

❖ **Câu 165.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  và  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB}$  thì giá trị của  $k$  bằng

- A 1.     
  B  $\frac{1}{2}$ .     
  C  $-\frac{1}{2}$ .     
  D -2.

❖ **Câu 166.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng véc-tơ  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ . Hãy xác định vị trí của điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ .

- A  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ .  
 B  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ .  
 C  $D$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .  
 D  $D$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

❖ **Câu 167.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A  $MN \perp AC$ .     
  B  $MN // AC$ .  
 C  $M$  nằm trên đường thẳng  $AC$ .     
  D Hai đường thẳng  $MN$  và  $AC$  trùng nhau.

❖ **Câu 168.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $7\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$ ;  $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB})$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A Đường thẳng  $MN$  đi qua  $G$ .     
  B Đường thẳng  $MN$  đi qua  $A$ .  
 C Đường thẳng  $MN$  đi qua  $B$ .     
  D Đường thẳng  $MN$  đi qua  $C$ .

❖ **Câu 169.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Các điểm  $A, B, C$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;  $\overrightarrow{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ . Khi  $A, B, C$  thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $m \in (2; 3)$ .     
  B  $m \in (1; 2)$ .     
  C  $m \in (-1; 0)$ .     
  D  $m \in (0; 1)$ .

❖ **Câu 170.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định  $I$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .  
 B  $I$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
 C  $I$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .  
 D Tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành.

❖ **Câu 171.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định  $I$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .     
  B  $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ .     
  C  $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .     
  D  $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ .

❖ **Câu 172.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định



I. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $I$  là trọng tâm của tam giác  $OBC$ .  
 B  $I$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
 C  $I$  là trung điểm của cạnh  $DC$ .  
 D Tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành.

⇨ **Câu 173.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $P, Q$  là các điểm sao cho  $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  với  $k \in \mathbb{R}$ . Tìm  $k$  để  $P, Q, G$  thẳng hàng.

- A  $k = \frac{2}{5}$ .       B  $k = \frac{2}{3}$ .       C  $k = -\frac{2}{5}$ .       D  $k = -\frac{2}{3}$ .

⇨ **Câu 174.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ . Tìm  $k$  để  $A, M, N$  thẳng hàng.

- A  $k = -\frac{3}{2}$ .       B  $k = -\frac{1}{2}$ .       C  $k = \frac{1}{2}$ .       D  $k = \frac{3}{2}$ .

⇨ **Câu 175.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$ ;  $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$ , với  $mnp \neq 0$ . Tìm điều kiện của  $m, n, p$  để  $M, N, P$  thẳng hàng.

- A  $mp = mn + np$ .       B  $2mn = mp + np$ .       C  $2np = mn + mp$ .       D  $2mp = mn + np$ .

⇨ **Câu 176.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ . Điểm  $K$  trên  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản) sao cho 3 điểm  $B, K, E$  thẳng hàng. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

- A  $P = 5$ .       B  $P = 13$ .       C  $P = 29$ .       D  $P = 10$ .

# Bài 10

## VÉC-TƠ TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

### A Tóm tắt lý thuyết

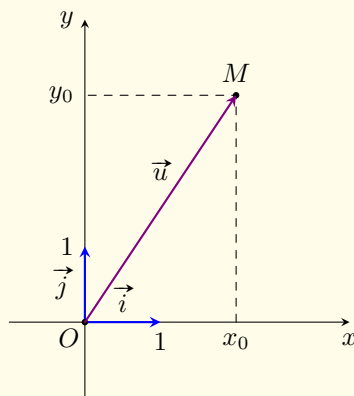
#### 1. Tọa độ của véc-tơ

##### ○ Định nghĩa 4.1.

- ☑ Trục tọa độ (còn gọi là *trục*, hay *trục số*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm  $O$  và một véc-tơ  $\vec{i}$  có độ dài bằng 1. Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*, véc-tơ  $\vec{i}$  gọi là *véc-tơ đơn vị* của trục. Điểm  $M$  trên trục biểu diễn số  $x_0$  nếu  $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{i}$ .



- ☑ Trên mặt phẳng, xét hai trục  $Ox, Oy$  có chung gốc  $O$  và vuông góc với nhau. Véc-tơ đơn vị trên trục  $Ox$  là  $\vec{i}$ , véc-tơ đơn vị của trục  $Oy$  là  $\vec{j}$ . Hệ gồm hai trục  $Ox, Oy$  như vậy được gọi là *hệ trục tọa độ*  $Oxy$ . Điểm  $O$  gọi là *gốc tọa độ*, trục  $Ox$  gọi là *trục hoành*, trục  $Oy$  gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ  $Oxy$  gọi là *mặt phẳng tọa độ*  $Oxy$  hay mặt phẳng  $Oxy$ .



- ☑ Với mỗi véc-tơ  $\vec{u}$  trên mặt phẳng  $Oxy$ , có duy nhất cặp số  $(x_0; y_0)$  sao cho  $\vec{u} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ . Ta nói véc-tơ  $\vec{u}$  có tọa độ  $(x_0; y_0)$  và viết  $\vec{u} = (x_0; y_0)$  hay  $\vec{u}(x_0; y_0)$ . Các số  $x_0, y_0$  tương ứng được gọi là *hoành độ*, *tung độ* của  $\vec{u}$ .

**Nhận xét.** Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

#### 2. Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ

○ **Định lý 4.1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$ . Khi đó

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$ ;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$ ;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$ , với  $k \in \mathbb{R}$ .

**Nhận xét.** Véc-tơ  $\vec{v}(x'; y')$  cùng phương với véc-tơ  $\vec{u}(x; y) \neq \vec{0}$  khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  sao cho  $x' = kx, y' = ky$  (hay là  $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$  nếu  $xy \neq 0$ ).

○ **Định lý 4.2.** Nếu điểm  $M$  có tọa độ  $(x; y)$  thì véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$  có tọa độ  $(x; y)$  và độ dài  $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Nhận xét.** Với véc-tơ  $\vec{u} = (x; y)$ , ta lấy điểm  $M(x; y)$  thì  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ . Do đó,  $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Chẳng hạn, véc-tơ  $\vec{u} = (2; -1)$  có độ dài là  $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ .

**Định lí 4.3.** Với hai điểm  $M(x; y)$  và  $N(x'; y')$  thì  $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$  và khoảng cách giữa hai điểm  $M, N$  là  $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

### Chú ý

- ☑ Trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .
- ☑ Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ là  $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ .

🔗 **Ví dụ 1.** Viết tọa độ các véc-tơ sau  $\vec{a} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$ ;  $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i} - 3\vec{j}$ ;  $\vec{c} = \frac{3}{4}\vec{i}$ ;  $\vec{d} = \pi\vec{j}$ .

🗨️ **Lời giải.**

..... | .....

..... | .....

🔗 **Ví dụ 2.** Viết véc-tơ  $\vec{u}$  dưới dạng  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  khi biết tọa độ của  $\vec{u}$  là  $(5; 3)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(0; -\sqrt{3})$ ,  $(0; 0)$ .

🗨️ **Lời giải.**

..... | .....

🔗 **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u} = (1; 2)$ ,  $\vec{v} = (-3; 4)$ ,  $\vec{a} = (4; 8)$

- a) Hãy biểu thị mỗi véc-tơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  theo các véc-tơ  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ .
- b) Tìm tọa độ  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $2\vec{u}$ .
- c) Tìm mối liên hệ giữa véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{u}$ .

🗨️ **Lời giải.**

..... | .....

..... | .....

..... | .....

..... | .....

🔗 **Ví dụ 4.** Cho  $\vec{u} = (2; -1)$ ,  $\vec{v} = (4; 5)$ . Tính tọa độ các véc-tơ  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $3\vec{u}$ ,  $5\vec{u} - 4\vec{v}$ .

🗨️ **Lời giải.**

..... | .....

..... | .....

⇔ **Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-5; 6)$ ,  $B(-4; -1)$ ,  $C(4; 3)$ .

- a) Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AC$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....	..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
--	--

⇔ **Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1; -1)$ ,  $B(0; 3)$  và  $G\left(\frac{1}{3}; 3\right)$  là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Lời giải.**

..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....	..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... .....
--	--

⇔ **Ví dụ 7.** Cho  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; -1)$ . Hãy phân tích véc-tơ  $\vec{c} = (-1; 5)$  theo hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

❖ Ví dụ 8. Cho ba điểm  $A(1; -1)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(2; 2)$ .

- a) Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- b) Tìm tọa độ điểm  $D$  trên  $Ox$  sao cho  $A, B, D$  thẳng hàng.

💬 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

💬 Lời giải.



❖ Ví dụ 9. Cho  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(2; -1)$ .

- a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- b) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

💬 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

## B Bài tập vận dụng

❖ Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các véc-tơ  $\vec{a} = (3; 1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2)$ . Tính  $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

❖ Bài 2. Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các véc-tơ  $\vec{a} = (2; -1)$ ,  $\vec{b} = (0; 4)$  và  $\vec{c} = (3; 3)$ . Tìm hai số thực  $m, n$  sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$ .

❖ Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 3)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(-1; -4)$ .

- a) Tìm tọa độ điểm  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tính chu vi tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ điểm  $K$  thuộc đoạn thẳng  $BC$  sao cho  $2KB = 3KC$ .

✧ **Bài 4.** Trong mặt phẳng hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-1; 3)$ ,  $B(-4; -5)$  và  $C(1; -2)$ .

- Chứng tỏ  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác và tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc trục hoành sao cho  $\left| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

✧ **Bài 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(3; 4)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(6; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA} = \vec{0}$ .

✧ **Bài 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $M(-1; 1)$ ,  $N(1; 3)$ ,  $P(-2; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $E$  biết  $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{MN}$ .

✧ **Bài 7.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(5; -1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.

✧ **Bài 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $M(3; -1)$ ,  $N(1; 2)$  và  $P(2; -4)$ .

- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $MNP$  và tọa độ điểm  $Q$  sao cho tứ giác  $MNGQ$  là hình bình hành.
- Tam giác  $ABC$  nhận các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CA$ . Tìm tọa độ các điểm  $A, B, C$ .

✧ **Bài 9.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-3; 5)$ ,  $B(-4; -3)$ ,  $C(1; 1)$ .

- Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm  $K$  thuộc trục hoành sao cho  $KA + KB$  nhỏ nhất.

## C

### Bài tập trắc nghiệm

✧ **Câu 1.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , biết  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ . Khi đó  $\vec{u}$  có tọa độ là

- (A)  $(2; -1)$ .       (B)  $(2; 1)$ .       (C)  $(1; 2)$ .       (D)  $(1; -2)$ .

✧ **Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tọa độ của  $\vec{i}$  là bao nhiêu?

- (A)  $\vec{i} = (0; 1)$ .       (B)  $\vec{i} = (-1; 0)$ .       (C)  $\vec{i} = (0; 0)$ .       (D)  $\vec{i} = (1; 0)$ .

✧ **Câu 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(1; 3)$ ,  $B(2; -5)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} = (2; -15)$ .       (B)  $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$ .       (C)  $\overrightarrow{AB} = (-1; 8)$ .       (D)  $\overrightarrow{AB} = (1; -8)$ .

❖ **Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(2; -3)$ ,  $C(-2; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MC}$ .

- A**  $M(3; 17)$ .      **B**  $M(-3; -17)$ .      **C**  $M(-9; -17)$ .      **D**  $M(9; 17)$ .

❖ **Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$ , biết  $B(9; 7)$ ,  $C(11; -1)$  và  $M(1; 2)$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm tọa độ trung điểm  $N$  của  $AC$ .

- A**  $N(2; -2)$ .      **B**  $N(-2; 8)$ .      **C**  $N(-2; 2)$ .      **D**  $N(2; -8)$ .

❖ **Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(0; 3)$ ,  $B(4; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ .

- A**  $(-8; 2)$ .      **B**  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .      **C**  $(-3; 3)$ .      **D**  $(8; -2)$ .

❖ **Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(2; 3)$ ,  $B(2; -5)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AI}$  có tọa độ là

- A**  $(1; -3)$ .      **B**  $(0; 5)$ .      **C**  $(0; -2)$ .      **D**  $(0; -4)$ .

❖ **Câu 8.** Cho  $A(1; 2)$  và  $I(3; 4)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Tọa độ của đỉnh  $B$  là

- A**  $(6; 5)$ .      **B**  $(3; 2)$ .      **C**  $(2; 3)$ .      **D**  $(5; 6)$ .

❖ **Câu 9.** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $G(2; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

- A**  $C(8; -11)$ .      **B**  $C(8; 11)$ .      **C**  $C(-8; -11)$ .      **D**  $C(12; 11)$ .

❖ **Câu 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-2; 3)$  và  $C(3; -2)$ . Điểm  $I(a; b)$  thuộc  $BC$  sao cho với mọi điểm  $M$  không nằm trên đường thẳng  $BC$  thì  $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$ . Tính  $S = a^2 + b^2$ .

- A** 1.      **B** 0.      **C** 4.      **D** 5.

❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; -1)$  và  $\vec{b} = (3; 4)$ . Tính tọa độ véc-tơ  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

- A**  $\vec{c} = (3; 3)$ .      **B**  $\vec{c} = (2; 7)$ .      **C**  $\vec{c} = (2; 1)$ .      **D**  $\vec{c} = (6; 3)$ .

❖ **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -2)$ ,  $B(0; -1)$ ,  $C(3; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $G$  sao cho với điểm  $M$  bất kì ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

- A**  $G\left(\frac{4}{3}; -2\right)$ .      **B**  $G\left(\frac{5}{3}; -1\right)$ .      **C**  $G\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ .      **D**  $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$ .

❖ **Câu 13.** Cho ba điểm  $A(2; 5)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(3; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

- A**  $E(-2; -3)$ .      **B**  $E(3; -3)$ .      **C**  $E(-3; 3)$ .      **D**  $E(-3; -3)$ .

❖ **Câu 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(1; -1)$ ,  $N(5; -3)$  và  $P$  thuộc trục  $Oy$ , trọng tâm  $G$  của tam giác  $MNP$  nằm trên trục  $Ox$ . Tìm tọa độ của điểm  $P$ .

- A**  $P(0; 2)$ .      **B**  $P(0; 10)$ .      **C**  $P(0; 4)$ .      **D**  $P(2; 0)$ .

❖ **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho  $A, B, M$  thẳng hàng với  $A(2; -3)$  và  $B(3; 4)$ .

- A**  $(1; 0)$ .      **B**  $\left(\frac{17}{7}; 0\right)$ .      **C**  $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ .      **D**  $(4; 0)$ .

❖ **Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2)$  và  $\vec{b} = (0; -2)$ . Xác định tọa độ của  $\vec{a} + \vec{b}$ .

- A**  $(-1; 0)$ .      **B**  $(2; 1)$ .      **C**  $(-1; 4)$ .      **D**  $(0; -4)$ .

❖ **Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2; -4)$  và  $B(-4; 2)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là

- A**  $I(-2; -2)$ .      **B**  $I(-1; -1)$ .      **C**  $I(2; 2)$ .      **D**  $I(1; 1)$ .

❖ **Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 3)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(-2; 0)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- A**  $G(5; 5)$ .      **B**  $G\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .      **C**  $G\left(1; \frac{5}{3}\right)$ .      **D**  $G\left(1; \frac{1}{3}\right)$ .

❖ **Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1; 2)$  và  $B(3; 7)$ . Tọa độ của  $\vec{AB}$  là

- A**  $(2; -1)$ .      **B**  $(2; 1)$ .      **C**  $(4; -3)$ .      **D**  $(2; 5)$ .

❖ **Câu 20.** Trong mặt phẳng với  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(-2; 1)$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{AB} - \vec{AC}$  là

- A**  $(-5; -3)$ .      **B**  $(1; 1)$ .      **C**  $(-1; 2)$ .      **D**  $(4; 0)$ .

❖ **Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$ . Biết  $A(1; -1)$ ,  $B(5; -3)$  và  $C \in Oy$ , trọng tâm  $G \in Ox$ . Tọa độ điểm  $C$  là

- A**  $(0; 2)$ .      **B**  $(2; 0)$ .      **C**  $(0; -4)$ .      **D**  $(0; 4)$ .

❖ **Câu 22.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các véc-tơ  $\vec{OA} = (1; 2)$  và  $\vec{OB} = (2; 1)$ , biết  $\vec{MA} = 2\vec{MB}$ . Khi đó độ dài véc-tơ  $\vec{OM}$  là

- A** 4.      **B** 1.      **C** 3.      **D** 2.

❖ **Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các véc-tơ  $\vec{a} = (-2; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -3)$  và  $\vec{c} = (0; 2)$ . Tính tọa độ của véc-tơ  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

- A**  $\vec{u} = (-1; 6)$ .      **B**  $\vec{u} = (3; 0)$ .      **C**  $\vec{u} = (-1; 0)$ .      **D**  $\vec{u} = (3; 6)$ .

❖ **Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $I(-3; 2)$ ,  $J(-1; 3)$ ,  $K(4; -3)$ . Tìm tọa độ điểm  $L$  để tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành.



- A  $L(2; -4)$ .     
  B  $L(0; 2)$ .     
  C  $L(6; -2)$ .     
  D  $L(-8; 8)$ .

❖ **Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(0; 7)$ ,  $A(-1; 4)$ ,  $B(2; 5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .

- A  $(1; 12)$ .     
  B  $(-1; 12)$ .     
  C  $(3; 1)$ .     
  D  $(2; 12)$ .

❖ **Câu 26.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (m; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

- A  $m = -6$ .     
  B  $m = 12$ .     
  C  $m = \frac{3}{4}$ .     
  D  $m = \frac{1}{4}$ .

❖ **Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(3; 4)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(2; -3)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A  $\left(3; \frac{2}{3}\right)$ .     
  B  $(7; 2)$ .     
  C  $(9; 2)$ .     
  D  $(-1; 1)$ .

❖ **Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $E(3; -2)$ ,  $F(-1; -3)$ . Tìm tọa độ điểm  $G$  thuộc trục hoành sao cho  $G$  thuộc đường thẳng  $EF$ .

- A  $G\left(-\frac{11}{5}; 0\right)$ .     
  B  $G(11; 0)$ .     
  C  $G\left(0; -\frac{11}{4}\right)$ .     
  D  $G\left(0; -\frac{11}{2}\right)$ .

❖ **Câu 29.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  biết  $A(1; -5)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(-3; 3)$ . Tọa độ tâm  $I$  của hình bình hành là

- A  $(1; 1)$ .     
  B  $(-1; 1)$ .     
  C  $(1; -1)$ .     
  D  $(-1; -1)$ .

❖ **Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; 3)$ ,  $I(1; -2)$ . Xác định tọa độ điểm  $B$  để  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

- A  $(0; -7)$ .     
  B  $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .     
  C  $(1; 2)$ .     
  D  $(-2; 1)$ .

❖ **Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $\triangle ABC$  có  $M(1; 0)$ ,  $N(2; 2)$ ,  $P(-1; 3)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Tọa độ của đỉnh  $A$  là

- A  $(4; -1)$ .     
  B  $(0; 1)$ .     
  C  $(0; 5)$ .     
  D  $(-2; 1)$ .

❖ **Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1; -2)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $\vec{CM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ .

- A  $(7; 27)$ .     
  B  $(11; 30)$ .     
  C  $(-7; 0)$ .     
  D  $(15; 6)$ .

❖ **Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tọa độ điểm  $N$  trên cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  có  $A(1; -2)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(-1; -2)$  sao cho  $S_{ABN} = 3S_{ANC}$  là

- A  $N\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ .     
  B  $N\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ .     
  C  $N\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .     
  D  $N\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

# Bài 11

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

### A Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Góc giữa hai véc-tơ

Cho  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì vẽ  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ . Khi đó số đo của góc  $\widehat{AOB}$  được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ .

#### ⚠ Lưu ý:

- ☑ Quy ước rằng góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có thể nhận một giá trị tùy ý từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ .
- ☑  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.
- ☑  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.
- ☑ Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ . Đặc biệt  $\vec{0}$  được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.

#### 2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

☉ **Định nghĩa 5.1.** Tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

#### ⚠ Lưu ý:

- ☑ Ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- ☑  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  còn được viết là  $\vec{a}^2$  được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ  $\vec{a}$ . Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

#### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

☉ **Định nghĩa 5.2.** Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được tính theo công thức sau  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ .

#### ⚠ Lưu ý:

- ☑ Hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ .
- ☑ Bình phương vô hướng của  $\vec{a}(a_1; a_2)$  là  $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$ .
- ☑ Nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  thì  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ .

## B Các dạng toán

### Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc

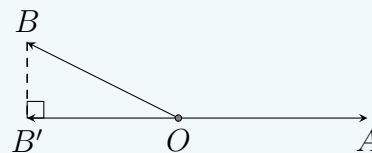
Để tính tích vô hướng của hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- ☑ Đưa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  về chung gốc để xác định chính xác góc giữa hai véc-tơ rồi áp dụng định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- ☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai véc-tơ.
- ☑ Sử dụng dạng tọa độ nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

- ☑ Sử dụng công thức hình chiếu

Cho hai véc-tơ  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ . Gọi  $B'$  là hình chiếu của  $B$  trên đường thẳng  $OA$ . Khi đó  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$ .



*Chứng minh:* Thật vậy, ta có  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OB}' + \vec{B'B}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$ .

Để xác định góc giữa hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- ☑ Đưa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  về chung gốc rồi xác định góc theo định nghĩa.
- ☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức để tính tích vô hướng của hai véc-tơ rồi sau đó áp dụng công thức  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- ☑ Sử dụng công thức tính theo tọa độ. Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Cần lưu ý một số kết quả đặc biệt sau:

- ☑  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- ☑ Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$  thì  $(\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - \alpha$ .
- ☑ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .
- ☑ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ .

### VÍ DỤ MINH HỌA









↔ **Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1; 3)$  và  $B(3; -1)$ . Tính góc giữa đường thẳng  $OA$  và  $AB$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

↔ **Ví dụ 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

↔ **Bài 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tính góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\vec{a} = (4; 3)$ ,  $\vec{b} = (1; 7)$ ;

c)  $\vec{a} = (6; -8)$ ,  $\vec{b} = (12; 9)$ ;

b)  $\vec{a} = (2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -7)$ ;

d)  $\vec{a} = (2; -6)$ ,  $\vec{b} = (-3; 9)$ .

↔ **Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân có  $AB = AC = a$  và  $AH$  là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ;

b)  $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$ ;

c)  $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$  và  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ .

↔ **Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  và  $AM$  là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

a)  $\vec{AC} \cdot (2\vec{AB} - 3\vec{AC})$ ;

c)  $\vec{AM} \cdot \vec{AB}$ ;

b)  $\vec{AC} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$ ;

d)  $(\vec{CA} + \vec{BC}) \cdot (\vec{CA} + \vec{CB})$ .



✧ **Bài 4.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AD = 2a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ .

a) Phân tích  $\overrightarrow{BK}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

b) Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

✧ **Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 7$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

✧ **Bài 6.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

✧ **Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Biết rằng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Hãy tính  $AB$ ,  $AC$ .

✧ **Bài 8.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

✧ **Bài 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và véc-tơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ . Tính góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

✧ **Bài 10.** Cho các véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Tính góc giữa véc-tơ  $\vec{a}$  và véc-tơ  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

✧ **Bài 11.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ .  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$ .

✧ **Bài 12.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ ,  $AD = b$ . Tính theo  $a, b$  các tích vô hướng sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ ;

b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$  với điểm  $M$  thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$ .

### Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- ☑ Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích véc-tơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành, ...).
- ☑ Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ . Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

### VÍ DỤ MINH HỌA





✧ **Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $AH$ , Chứng minh rằng

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}; \quad \text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

✧ **Bài 15.** Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$  ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .

✧ **Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $M$  ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

✧ **Bài 17.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ ,  $M$  là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

✧ **Bài 18.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Chứng minh rằng với mọi  $M$  thuộc đường tròn  $(O)$  ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 8R^2.$$

✧ **Bài 19.** Chứng minh rằng với mọi điểm  $A, B, C, M$  ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

✧ **Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  các đường trung tuyến  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

✧ **Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AI$ . Chứng minh rằng  $|AB^2 - AC^2| = 2BC \cdot HI$ .

### Dạng 3. Điều kiện vuông góc

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây

- ☑ Nếu đề bài không cho tọa độ, ta sử dụng tính chất tích vô hướng của hai véc-tơ. Đặc biệt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

- ☑ Nếu đề bài cho dạng tọa độ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

**VÍ DỤ MINH HỌA**

⇨ **Ví dụ 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau và  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$ . Chứng minh hai véc-tơ  $(2\vec{a} - \vec{b})$  và  $(\vec{a} + \vec{b})$  vuông góc với nhau.

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; 4), B(2; -2), C(-4; 1)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = c, AC = b$ . Tính  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$  theo  $b$  và  $c$ .

⇨ **Bài 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$  và  $\vec{v} = (k; -4)$ . Tìm  $k$  để  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

⇨ **Bài 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba véc-tơ  $\vec{u} = (4; 1), \vec{v} = (1; 4)$  và  $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v}$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Tìm  $m$  để  $\vec{a}$  vuông góc với trục hoành.

⇨ **Bài 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2; 4)$  và  $B(8; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc trục hoành sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

✎ **Bài 26.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và hai véc-tơ  $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

#### 📁 Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho  $A, B$  là các điểm cố định,  $M$  là điểm di động

- ☑ Nếu  $|\vec{AM}| = k$  với  $k$  là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = k$ .
- ☑ Nếu  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$ .
- ☑ Nếu  $\vec{MA} \cdot \vec{a} = 0$  với  $\vec{a} \neq \vec{0}$  cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{a}$ .

b) Các bất đẳng thức vectơ

- ☑  $\vec{a}^2 \geq 0 \forall \vec{a}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} = \vec{0}$ .
- ☑  $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} = k\vec{b}, k > 0$ .

✎ **Ví dụ 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có độ dài bằng  $a$ , vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

a)  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b)  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$

💬 Lời giải.



### BÀI TẬP TỰ LUẬN

✧ **Bài 27.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và số thực  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .      b)  $MA^2 + 2MB^2 = k, k > 0$ .      c)  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$ .

✧ **Bài 28.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$ .

✧ **Bài 29.** Cho tam giác  $ABC$ , góc  $A$  nhọn, trung tuyến  $AI$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  di động trong góc  $\widehat{BAC}$  sao cho  $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$ , trong đó  $H$  và  $K$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $AB$  và  $AC$ .

✧ **Bài 30.** Cho tam giác  $ABC$  và  $k$  là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

✧ **Bài 31.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

✧ **Bài 32.** Cho tam giác  $ABC$  và các số thực  $x, y, z$ . Chứng minh rằng

$$xy \cos A + yz \cos B + zx \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

✧ **Câu 1.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b})$  là góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A**  $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$ .
- B** Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$  thì  $\vec{a}, \vec{b}$  có giá trùng nhau.
- C**  $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$ .
- D**  $(k\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$  với mọi  $k \in \mathbb{R}^+$ .



❖ **Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Góc giữa  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  bằng

- (A)  $60^\circ$ .      (B)  $30^\circ$ .      (C)  $90^\circ$ .      (D)  $45^\circ$ .

❖ **Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , góc giữa  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  là

- (A)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$ .      (B)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$ .  
 (C)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$ .      (D)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$ .

❖ **Câu 4.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; 2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 4)$ . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ .      (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-6; 8)$ .      (C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -14$ .      (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ .

❖ **Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$ .      (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .      (C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ .      (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$ .

❖ **Câu 6.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 3)$  và  $\vec{c} = (2; 3)$ . Giá trị của biểu thức  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$  bằng bao nhiêu?

- (A) 18.      (B) 0.      (C) 28.      (D) 2.

❖ **Câu 7.** Cho  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; 1)$  và  $C(5; -1)$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- (A) 7.      (B) 5.      (C) -7.      (D) -5.

❖ **Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; -1)$  và  $B(2; 10)$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ .      (B)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .      (C)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$ .      (D)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$ .

❖ **Câu 9.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .  
 (C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .      (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

❖ **Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

- (A)  $\frac{3a^2}{4}$ .      (B)  $-\frac{3a^2}{4}$ .      (C)  $\frac{3a^2}{2}$ .      (D)  $-\frac{3a^2}{2}$ .

❖ **Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

- (A)  $\frac{a^2}{2}$ .      (B)  $-\frac{a^2}{2}$ .      (C)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      (D)  $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

❖ **Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

- (A)  $3a^2$ .      (B)  $-3a^2$ .      (C)  $3a$ .      (D) 0.

❖ **Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính tích vô hướng của hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$ .    (B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$ .    (C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ .    (D)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

❖ **Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ .    (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ .  
 (C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_1^2}}$ .    (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_1^2}}$ .

❖ **Câu 15.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- (A)  $\alpha = 180^\circ$ .    (B)  $\alpha = 0^\circ$ .    (C)  $\alpha = 90^\circ$ .    (D)  $\alpha = 45^\circ$ .

❖ **Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (-2; -1)$  và  $\vec{b} = (4; -3)$ . Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .    (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .  
 (C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .

❖ **Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 5)$  và  $\vec{b} = (3; -7)$ . Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

- (A)  $90^\circ$ .    (B)  $120^\circ$ .    (C)  $135^\circ$ .    (D)  $45^\circ$ .

❖ **Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có góc  $\widehat{B} = 50^\circ$ . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$  bằng  $140^\circ$ .    (B) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  bằng  $50^\circ$ .  
 (C) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$  bằng  $90^\circ$ .    (D) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$  bằng  $130^\circ$ .

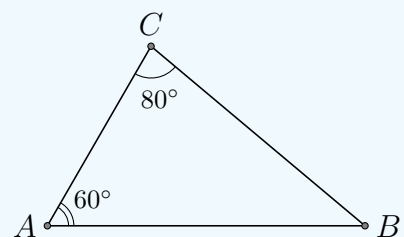
❖ **Câu 19.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có  $BC = 2AC$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ .

- (A)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$ .    (B)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$ .  
 (C)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    (D)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

❖ **Câu 20.**

Cho tam giác  $ABC$  như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$ .    (B)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$ .  
 (C)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$ .    (D)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$ .



❖ **Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ .

- (A)  $\frac{1}{2}$ .      (B)  $-\frac{1}{2}$ .      (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      (D)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

❖ **Câu 22.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ .

- (A)  $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      (B)  $P = \frac{3}{2}$ .      (C)  $P = -\frac{3}{2}$ .      (D)  $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

❖ **Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ .

- (A)  $-2a^2$ .      (B)  $a^2$ .      (C)  $2a^2$ .      (D)  $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ .

❖ **Câu 24.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $2AM = MB, NA = 2NC$ . Giá trị của tích vô hướng  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$  là

- (A)  $\frac{7}{2}$ .      (B)  $-\frac{7}{2}$ .      (C)  $\frac{11}{2}$ .      (D)  $-\frac{11}{2}$ .

❖ **Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a, BC = 2a$ . Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .

- (A)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$ .      (B)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$ .  
 (C)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$ .      (D)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$ .

❖ **Câu 26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có số đo góc  $B$  là  $60^\circ$  và  $AB = a$ . Kết quả nào sau đây là sai?

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      (B)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ .      (D)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$ .

❖ **Câu 27.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm mệnh đề sai.

- (A)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ .      (B)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ .      (D)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .

❖ **Câu 28.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AD = 6$ . Đặt  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$ . Tính  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

- (A) 18.      (B) 24.      (C) 36.      (D) 48.

❖ **Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = 6$  và đường cao  $AH$ .  $H$  ở trên cạnh  $BC$  sao cho  $BH = 2HC$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- (A) -24.      (B) 24.      (C) 18.      (D) -18.

❖ **Câu 30.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 12$ ,  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tính  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

- (A) 144.      (B) -144.      (C) 72.      (D) -72.

❖ **Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $BH$  ( $H$  ở trên cạnh  $AC$ ). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BH \cdot HC.$   
 (C)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot AC.$

(B)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot HC.$   
 (D)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = HC \cdot AC.$

❖ **Câu 32.** Cho 2 véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$  và có độ lớn bằng 1. Hãy tính  $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b})$ .

(A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

❖ **Câu 33.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

(A)  $-9a^2$ . (B)  $15a^2$ . (C) 0. (D)  $9a^2$ .

❖ **Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

(A) 9. (B) 81. (C) 3. (D) 5.

❖ **Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$ .

(A)  $P = b^2 - c^2$ . (B)  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ . (C)  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ . (D)  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

❖ **Câu 36.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

(A)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

❖ **Câu 37.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$ .

(A)  $P = 2\sqrt{2}a$ . (B)  $P = 2a^2$ . (C)  $P = a^2$ . (D)  $P = -2a^2$ .

❖ **Câu 38.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Tính  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

(A)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ . (B)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ . (C)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ . (D)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

❖ **Câu 39.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (-2; 3)$  và  $\vec{b} = (4; 1)$ . Tìm véc-tơ  $\vec{d}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$  và  $\vec{b} \cdot \vec{d} = -2$ .

(A)  $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$ . (B)  $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$ . (C)  $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$ . (D)  $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$ .

❖ **Câu 40.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; -1)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(6; 0)$ . Tính  $\cos \widehat{B}$ .

(A)  $\cos \widehat{B} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (B)  $\cos \widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $\cos \widehat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $\cos \widehat{B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

❖ **Câu 41.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -1)$ ,  $B(4; 2)$  và  $C(4; -2)$ . Hỏi góc  $\widehat{ABC}$  có số đo độ bằng bao nhiêu?

**A**  $30^\circ$ .

**B**  $45^\circ$ .

**C**  $60^\circ$ .

**D**  $90^\circ$ .

❖ **Câu 42.** Cho  $\vec{u} = (1; -2), \vec{v} = (-2; 1)$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ .

**B**  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

**C**  $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ .

**D**  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

❖ **Câu 43.** Biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**B**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $80^\circ$ .

**C**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**D**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ .

❖ **Câu 44.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(2; 1), B(2; -3)$  và  $C(3; 2)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

**A** Tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn.

**B** Tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**C** Tam giác  $ABC$  là tam giác tù.

**D** Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.

❖ **Câu 45.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(-8; 0), B(0; 4), C(2; 0)$  và  $D(-3; -5)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  phụ nhau.

**B** Góc  $\widehat{BCD}$  là góc nhọn.

**C**  $\cos(\widehat{AB}, \widehat{AD}) = \cos(\widehat{CB}, \widehat{CD})$ .

**D** Hai góc  $\widehat{BAD}$  và  $\widehat{BCD}$  bù nhau.

❖ **Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính cô-sin góc giữa hai véc-tơ  $\vec{MA}$  và  $\vec{BC}$ .

**A**  $\cos(\vec{MA}, \vec{BC}) = \frac{1}{2}$ .

**B**  $\cos(\vec{MA}, \vec{BC}) = -\frac{1}{2}$ .

**C**  $\cos(\vec{MA}, \vec{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**D**  $\cos(\vec{MA}, \vec{BC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

❖ **Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Tính tổng  $(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA}) + (\vec{CA}, \vec{AB})$ .

**A**  $180^\circ$ .

**B**  $360^\circ$ .

**C**  $270^\circ$ .

**D**  $120^\circ$ .

❖ **Câu 48.** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  bằng  $100^\circ$  và có trực tâm  $H$ . Tính tổng  $(\vec{HA}, \vec{HB}) + (\vec{HB}, \vec{HC}) + (\vec{HC}, \vec{HA})$ .

**A**  $360^\circ$ .

**B**  $180^\circ$ .

**C**  $80^\circ$ .

**D**  $160^\circ$ .

❖ **Câu 49.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Tính tổng  $(\vec{AB}, \vec{DC}) + (\vec{AD}, \vec{CB}) + (\vec{CO}, \vec{DC})$ .

**A**  $45^\circ$ .

**B**  $405^\circ$ .

**C**  $315^\circ$ .

**D**  $225^\circ$ .

❖ **Câu 50.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , góc  $\hat{A} = 20^\circ$ . Gọi  $BM$  là đường phân giác trong của góc  $\widehat{ABC}$ . Tính  $\cos(\vec{BM}, \vec{MC})$ .

- A  $\frac{1}{2}$ .     
  B  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
  C  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
  D  $-\frac{1}{2}$ .

⇨ **Câu 51.** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , vuông tại  $A$  và  $D$ , biết  $AB = AD = a, CD = 2a$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB})$ .

- A  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
  B  $-\frac{1}{2}$ .     
  C  $0$ .     
  D  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

⇨ **Câu 52.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$ , góc  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  và  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $DA$  và  $BG$ . Tính  $\sin \alpha$ .

- A  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ .     
  B  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .     
  C  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
  D  $\sin \alpha = 1$ .

⇨ **Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh bằng  $a, b, c$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a, b, c$ .

- A  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ .     
  B  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$ .  
 C  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$ .     
  D  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ .

⇨ **Câu 54.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .     
  B  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$ .  
 C  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$ .     
  D  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

⇨ **Câu 55.** Cho hai điểm  $M, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2r$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Tính theo  $r$  giá trị biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ .

- A  $P = 4r^2$ .     
  B  $P = 2r^2$ .     
  C  $P = r^2$ .     
  D  $P = \frac{r^2}{4}$ .

⇨ **Câu 56.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; x - 1), \vec{b} = (x + 2; x + 1)$ . Điều kiện của  $x$  để  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 3$  là

- A  $-2 < x < 3$ .     
  B  $-2 < x < 1$ .     
  C  $0 < x < 1$ .     
  D  $-2 < x$ .

⇨ **Câu 57.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ . Giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$  là

- A  $0$ .     
  B  $2a^2$ .     
  C  $-2a^2$ .     
  D  $-2\sqrt{2}a^2$ .

⇨ **Câu 58.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $2$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$ .

- A  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ .     
  B  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .     
  C  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ .     
  D  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .

⇒ **Câu 59.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
 A  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .     B  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .     C  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .     D  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .

⇒ **Câu 60.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Tính  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
 A  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .     B  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .  
 C  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .     D  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

⇒ **Câu 61.** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u} = (2; 5)$  và  $\vec{v} = (-3; 1)$ . Tìm số thực  $m$  để  $\vec{a} = m\vec{u} + \vec{v}$  tạo với  $\vec{b} = (1; 1)$  một góc  $45^\circ$ .  
 A  $m = \frac{3}{2}$ .     B  $m = -1$ .     C  $m = -\frac{1}{5}$ .     D  $m = 2$ .

⇒ **Câu 62.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau tại  $M$  và  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $AD$ . Góc giữa hai đường thẳng  $MP$  và  $BC$  là  
 A  $90^\circ$ .     B  $60^\circ$ .     C  $45^\circ$ .     D  $30^\circ$ .

⇒ **Câu 63.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NA})$ .  
 A  $\frac{4}{5}$ .     B  $-\frac{4}{5}$ .     C  $\frac{3}{5}$ .     D  $-\frac{3}{5}$ .

⇒ **Câu 64.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ .  
 A  $45^\circ$ .     B  $30^\circ$ .     C  $135^\circ$ .     D  $90^\circ$ .

⇒ **Câu 65.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên cạnh  $AD, AB$  lần lượt lấy hai điểm  $E, F$  sao cho  $AE = AF$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên đường thẳng  $BE$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$ .  
 A  $0$ .     B  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .     C  $-\frac{1}{2}$ .     D  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

⇒ **Câu 66.** Để  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$  thì  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  phải là hai véc-tơ  
 A cùng phương.     B cùng hướng.     C ngược hướng.     D vuông góc.

⇒ **Câu 67.** Để  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$  thì  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  phải là hai véc-tơ  
 A cùng phương.     B cùng hướng.     C ngược hướng.     D vuông góc.

⇒ **Câu 68.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , đẳng thức nào **sai**?  
 A  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ .     B  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .  
 C  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ .     D  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .

⇒ **Câu 69.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  khẳng định nào sau đây là **sai**?  
 A  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ .     B  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OD}$ .



C  $\vec{AO} \cdot \vec{OB} = \vec{DO} \cdot \vec{OC}$ .

D  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$ .

❖ **Câu 70.** Cho hình thoi  $ABCD$ , khẳng định nào sau đây là đúng?

A  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{DA} \cdot \vec{DC}$ .

B  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{CD}$ .

C  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .

D  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{DA} \cdot \vec{DC}$ .

❖ **Câu 71.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $E$  tùy ý, khi đó  $\vec{AB} \cdot \vec{EA} + \vec{AD} \cdot \vec{EA} + \vec{CE} \cdot \vec{EA}$  bằng

A  $AE^2$ .

B  $-AE^2$ .

C  $AE \cdot CE$ .

D  $-AE \cdot DE$ .

❖ **Câu 72.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là điểm tùy ý, biết rằng  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 + kOA^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $k = 1$ .

B  $k = -1$ .

C  $k = 2$ .

D  $k = -2$ .

❖ **Câu 73.** Cho  $I$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\vec{MI} \cdot \vec{AB} = k(MB^2 - MA^2)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A  $k = 2$ .

B  $k = \frac{1}{2}$ .

C  $k = -1$ .

D  $k = -\frac{1}{2}$ .

❖ **Câu 74.** Cho  $I$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 + kAB^2$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A  $k = 2$ .

B  $k = \frac{1}{2}$ .

C  $k = -1$ .

D  $k = -\frac{1}{4}$ .

❖ **Câu 75.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$ .

B  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ .

C  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

D  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

❖ **Câu 76.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .

B  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .

C  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ .

D  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .

❖ **Câu 77.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ , điểm  $M$  tùy ý. Biết rằng  $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = ka^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $k = 1$ .

B  $k = 2$ .

C  $k = 4$ .

D  $k = 6$ .

❖ **Câu 78.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = MO^2 + kBD^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $k = -\frac{1}{2}$ .

B  $k = 2$ .

C  $k = -\frac{1}{4}$ .

D  $k = 4$ .



❖ **Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $H$  là trực tâm của tam giác và  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A**  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}BC^2$ .       **B**  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}BC^2$ .  
 **C**  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$ .       **D**  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{5}BC^2$ .

❖ **Câu 80.** Cho điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$  cho trước. Biết rằng  $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = kR^2$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A**  $k = 2$ .       **B**  $k = 3$ .       **C**  $k = 4$ .       **D**  $k = 6$ .

❖ **Câu 81.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 4$  và  $AD = 3$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  bằng

- A** 0.       **B** 12.       **C** 5.       **D** -1.

❖ **Câu 82.** Cặp véc-tơ nào sau đây vuông góc với nhau?

- A**  $\vec{a}_1 = (-4; -6)$  và  $\vec{a}_2 = (3; 2)$ .       **B**  $\vec{b}_1 = (3; -4)$  và  $\vec{b}_2 = (-3; 4)$ .  
 **C**  $\vec{c}_1 = (-4; -6)$  và  $\vec{c}_2 = (-3; 2)$ .       **D**  $\vec{d}_1 = (5; -3)$  và  $\vec{d}_2 = (3; -5)$ .

❖ **Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

- A**  $H\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .       **B**  $H(2; 4)$ .       **C**  $H\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ .       **D**  $H(1; 3)$ .

❖ **Câu 84.** Trong mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2), \vec{b} = (3; -5)$ . Tìm số thực  $m$  sao cho  $m\vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với  $\vec{i} + \vec{j}$ .

- A**  $m = -2$ .       **B**  $m = 2$ .       **C**  $m = 3$ .       **D**  $m = \frac{5}{2}$ .

❖ **Câu 85.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; -2), B(5; 2)$  và trực tâm  $H(5; 0)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .

- A**  $C(6; -2)$ .       **B**  $C(4; -2)$ .       **C**  $C(5; -2)$ .       **D**  $C(4; -1)$ .

❖ **Câu 86.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0), B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Tính  $a + 6b$ .

- A**  $a + 6b = 5$ .       **B**  $a + 6b = 6$ .       **C**  $a + 6b = 7$ .       **D**  $a + 6b = 8$ .

❖ **Câu 87.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1; 3), B(-6; 2)$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$  (với  $O$  là gốc tọa độ) là

- A** 6.       **B** 5.       **C**  $\sqrt{50}$ .       **D**  $\frac{\sqrt{50}}{2}$ .

❖ **Câu 88.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho  $\vec{a} = (4; -8)$ . Véc-tơ nào sau đây không vuông góc với  $\vec{a}$

- A**  $\vec{b} = (-1; 2)$ .       **B**  $\vec{b} = (-2; -1)$ .       **C**  $\vec{b} = (2; 1)$ .       **D**  $\vec{b} = (4; 2)$ .

❖ **Câu 89.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $M(1; 2)$ ,  $N(3; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $P$  trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ ?

- (A)**  $P(0; 3)$ .      **(B)**  $P(-1; 0)$ .      **(C)**  $P(3; 0)$ .      **(D)**  $P(0; -1)$ .

❖ **Câu 90.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho véc-tơ  $\vec{u} = (2; -4)$  và  $\vec{v} = (x; 3)$ . Tìm giá trị của  $x$  để  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

- (A)** 6.      **(B)** -2.      **(C)** 0.      **(D)** -1.

❖ **Câu 91.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 1)$ ,  $B(1; 3)$  và  $C(1; -1)$ . Hãy chọn phát biểu đúng.

- (A)** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .      **(B)** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .  
**(C)** Tam giác  $ABC$  có ba góc đều nhọn.      **(D)** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

❖ **Câu 92.** Cho hai điểm  $A(-6; 3)$ ,  $B(4; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

- (A)**  $(0; 7)$ .      **(B)**  $(7; 0)$ .      **(C)**  $(0; -3)$ .      **(D)**  $(0; -3)$  và  $(0; 7)$ .

❖ **Câu 93.** Tìm  $m$  để hai véc-tơ  $\vec{a} = (1; -3)$ ,  $\vec{b} = (m^2; 4)$  vuông góc với nhau.

- (A)**  $m = 12$ .      **(B)**  $m = 2\sqrt{3}$ .      **(C)**  $m = -2\sqrt{3}$ .      **(D)**  $m = \pm 2\sqrt{3}$ .

❖ **Câu 94.** Cho tam giác  $ABC$ , với  $A(0; 3)$ ,  $B(x; 1)$ ,  $C(4; 1)$ . Tìm  $x$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- (A)**  $x = -2$ .      **(B)**  $x = 1$ .      **(C)**  $x = 0$ .      **(D)**  $x = -1$ .

❖ **Câu 95.** Trong mặt phẳng tọa độ ( $Oxy$ ), cho  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(2; -2)$ . Tìm mệnh đề sai.

- (A)**  $A, B, C$  không thẳng hàng.      **(B)** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .  
**(C)**  $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{3}{5}$ .      **(D)** Độ dài  $AB = AC = 3\sqrt{5}$ .

❖ **Câu 96.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2; 3)$ ,  $B(-2; 1)$ . Điểm  $C$  thuộc trục  $Ox$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có thể nhận tọa độ là

- (A)**  $C(3; 0)$ .      **(B)**  $C(-3; 0)$ .      **(C)**  $C(-1; 0)$ .      **(D)**  $C(2; 0)$ .

❖ **Câu 97.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có trục tâm là gốc tọa độ  $O$ , hai đỉnh  $A$  và  $B$  có tọa độ là  $A(-2; 2)$ ,  $B(3; 5)$ . Tọa độ của đỉnh  $C$  là

- (A)**  $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ .      **(B)**  $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ .      **(C)**  $\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$ .      **(D)**  $\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$ .

❖ **Câu 98.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(0; -2)$ . Tìm tọa độ trục tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

- (A)**  $H(-1; 3)$ .      **(B)**  $H(-9; 7)$ .      **(C)**  $H(9; -7)$ .      **(D)**  $H(3; -1)$ .

❖ **Câu 99.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $A(-1; 0)$  và  $B(-3; 0)$ . Tọa độ điểm  $C$  là:

- A  $(-3; -1)$ .     
  B  $(-2; -2)$ .     
  C  $(-2; 0)$ .     
  D  $(-1; -3)$ .

❖ **Câu 100.** Cho hình vuông  $ABCD$ , biết đỉnh  $A(1; -1)$ ,  $B(3; 0)$  và đỉnh  $C$  có tọa độ dương. Tìm tọa độ  $C$ .

- A  $C(4; -2)$ .     
  B  $C(4; 2)$ .     
  C  $C(2; 4)$ .     
  D  $C(2; 2)$ .

❖ **Câu 101.** Cho  $A(1; -2)$ ,  $B(-1; -1)$ . Tìm  $M$  trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABM$  vuông tại  $A$ .

- A  $M(-3; 0)$ .     
  B  $M(-2; 0)$ .     
  C  $M(2; 0)$ .     
  D  $M(3; 0)$ .

❖ **Câu 102.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  có  $(\vec{a} + 2\vec{b})$  vuông góc với véc-tơ  $(5\vec{a} - 4\vec{b})$  và  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Khi đó

- A  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .     
  B  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .     
  C  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .     
  D  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .

❖ **Câu 103.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} \cdot \vec{BC} = 0$  là

- A Đường trung trực đoạn  $BC$ .  
 B Đường tròn có tâm  $A$ .  
 C Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
 D Đường thẳng đi qua  $A$  song song với  $BC$ .

❖ **Câu 104.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  là

- A Đường trung trực đoạn  $AB$ .  
 B Đường tròn.  
 C Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $AB$ .  
 D Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AB$ .

❖ **Câu 105.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $(\vec{MA} - \vec{MB})(2\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$  là

- A Đường thẳng vuông góc với  $AB$ .     
  B Đường thẳng vuông góc với  $AC$ .  
 C Đường thẳng vuông góc với  $BC$ .     
  D Đường tròn.

❖ **Câu 106.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $(\vec{MA} + 2\vec{MB})(\vec{MB} + 2\vec{MC}) = 0$  là

- A Đường thẳng vuông góc với  $AB$ .     
  B Đoạn thẳng.  
 C Đường thẳng song song với  $AB$ .     
  D Đường tròn.

❖ **Câu 107.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $2MA^2 + \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MC}$  là

- A Đường thẳng.     
  B Đường tròn đường kính  $BC$ .  
 C Đường tròn đi qua  $A$ .     
  D Đường tròn đi qua  $B$ .

⇨ **Câu 108.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$

- A** Đường thẳng vuông góc với  $BC$ .                       **B** Đường thẳng song song với  $BC$ .  
 **C** Đường tròn đường kính  $AB$ .                       **D** Đường tròn đường kính  $AC$ .

⇨ **Câu 109.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2 \cos A + 6 \cos B + 3 \cos C$  bằng

- A** 11.                       **B** 10.                       **C** 7.                       **D** 6.

# Chương 5

## CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

### Bài 12

### SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

#### A Tóm tắt lý thuyết

##### 1. Số gần đúng

**Định nghĩa 1.1.** Số gần đúng Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là  $\bar{a}$ ) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là số gần đúng, kí hiệu là  $a$ .

##### 2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối.

Giá trị  $|a - \bar{a}|$  phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng  $\bar{a}$  và số gần đúng  $a$ , được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng  $a$ , kí hiệu là  $\Delta_a$ , tức là

$$\Delta_a = |a - \bar{a}|.$$

**Lưu ý:** Trên thực tế, nhiều khi ta không biết  $\bar{a}$  nên cũng không biết  $\Delta_a$ . Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được  $\Delta_a$  không vượt quá một số dương  $d$  nào đó.

Nếu  $\Delta_a \leq d$  thì  $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$ , khi đó ta viết  $\bar{a} = a \pm d$  và hiểu là số đúng  $\bar{a}$  nằm trong đoạn  $[a - d; a + d]$ . Do  $d$  càng nhỏ thì  $a$  càng gần  $\bar{a}$  nên  $d$  được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

b) Sai số tương đối.

Sai số tương đối của số gần đúng  $a$ , kí hiệu là  $\delta_a$ , là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và  $|a|$ , tức là

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

**Nhận xét.** Nếu  $\bar{a} = a \pm d$  thì  $\Delta_a \leq d$ , do đó  $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$ . Nếu  $\frac{d}{|a|}$  càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

##### 3. Quy tròn số gần đúng

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là số quy tròn. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.


Quy tắc quy tròn số

- a) Đối với chữ số hàng làm tròn:
- Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
  - Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.
- b) Đối với chữ số sau hàng làm tròn:
- Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
  - Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

### Nhận xét.

- Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- Cho số gần đúng  $a$  với độ chính xác  $d$ . Khi được yêu cầu làm tròn số  $a$  mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số  $a$  đến hàng thấp nhất mà  $d$  nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

## B Các dạng toán

 Dạng 1. Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước, đánh giá độ chính xác

### VÍ DỤ MINH HỌA

↔ **Ví dụ 1.** Đỉnh Everest được mệnh danh là "nóc nhà của thế giới", bởi đây là đỉnh núi cao nhất trên Trái Đất so với mực nước biển. Có rất nhiều con số khác nhau đã từng được công bố về chiều cao của đỉnh Everest

8848 m; 8848,13 m; 8844,43 m; 8850 m;...

Các con số này đều là số gần đúng chiều cao của đỉnh Everest.

↔ **Ví dụ 2.** Điền dấu "X" vào ô tương ứng

Thông tin	Số đúng	Số gần đúng
Bán kính đường Xích Đạo của Trái Đất là 6 378 km		
Khoảng cách từ Mặt Trăng đến Trái Đất là 384 400 km		
1 m=100 cm		

### Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

↔ **Ví dụ 3.** Gọi  $d$  là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 1. Trong hai số  $\sqrt{2}$  và 1,41 số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của  $d$ ?

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 4.** Giả sử khối lượng đúng của một hộp kẹo là 0,85 kg. Bình và An cân hộp kẹo này và ghi nhận kết quả lần lượt là 0,8 kg và 1 kg.

- a) Tìm sai số tuyệt đối của kết quả cân của mỗi bạn.
- b) Kết quả cân của bạn nào chính xác hơn? Vì sao?

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 5.** Người ta dùng một đồng hồ bấm giờ với độ chia nhỏ nhất là 0,1 giây và đo được thời gian hoàn thành phần thi bơi của một vận động viên là 27,2 giây.

- a) Tìm độ chính xác  $d$  của phép đo.
- b) Nếu thời gian đúng là  $a$  giây thì hãy tìm khoảng giá trị mà  $a$  có thể nhận được.

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Một bao gạo ghi thông tin khối lượng là  $5 \pm 0,2$  kg.

- a) Xác định khối lượng đúng, khối lượng gần đúng và độ chính xác của bao gạo.
- b) Khối lượng thực của bao gạo nằm trong đoạn nào?

**Bài 2.** Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là  $5 \pm 0,3 \mu\text{m}$ . Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

**Bài 3.** Chiều dài một cái cầu là  $l = 1745,25\text{m} \pm 0,01\text{m}$ .

- a) Xác định chiều dài đúng, chiều dài gần đúng và độ chính xác của của cái cầu.
- b) Chiều dài thực của cái cầu nằm trong đoạn nào?

⇨ **Bài 4.** Biết  $\sqrt{7} = 2,6457513\dots$

- Làm tròn kết quả đến phần mười và ước lượng sai số tuyệt đối.
- Làm tròn kết quả đến phần nghìn và ước lượng sai số tuyệt đối.

## Dạng 2. Xác định sai số tương đối của số gần đúng

### VÍ DỤ MINH HỌA

⇨ **Ví dụ 1.**  $a = 3,14$  là số gần đúng của  $\bar{a} = \pi$ .

Ta có  $\Delta_a = |\pi - 3,14| < |3,15 - 3,14| = 0,01$ .

Ta nói  $a = 3,14$  là giá trị gần đúng của  $\pi$  với độ chính xác  $d = 0,01$ .

⇨ **Ví dụ 2.** Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là  $0,8$  m. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích  $S$  của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của  $\pi$  là  $3,1$  và được kết quả là  $S_1$ . Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của  $\pi$  là  $3,14$  và được kết quả là  $S_2$ . So sánh sai số tuyệt đối  $\Delta_{S_1}$  của số gần đúng  $S_1$  và sai số tuyệt đối  $\Delta_{S_2}$  của số gần đúng  $S_2$ . Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

### Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là  $29,7$  cm và  $21$  cm. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

### Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

⇨ **Bài 1.** Ở Babylon, một tấm đất sét có niên đại khoảng  $1900 - 1600$  trước Công nguyên đã ghi lại một phát biểu hình học, trong đó ám chỉ ước lượng số  $\pi$  bằng  $\frac{25}{8} = 3,1250$ . Hãy ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối của giá trị gần đúng này, biết  $3,141 < \pi < 3,142$ .



✎ **Bài 2.** Cho số gần đúng  $a = 6547$  với độ chính xác  $d = 100$ .  
Hãy viết số quy tròn của số  $a$  và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

✎ **Bài 3.** Cho số gần đúng  $a = 23748023$  với độ chính xác  $d = 101$ .  
Hãy viết số quy tròn của số  $a$  và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

✎ **Bài 4.** Cho biết  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ . Hãy quy tròn  $\sqrt{3}$  đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

✎ **Bài 5.** Cho  $\bar{a} = \frac{1}{1+x}$ , ( $0 < x < 1$ ). Giả sử ta lấy  $a = 1 - x$  làm giá trị gần đúng của  $\bar{a}$ . Hãy tính sai số tương đối của  $a$  theo  $x$ .

 **Dạng 3.** Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

### **VÍ DỤ MINH HỌA**

✎ **Ví dụ 1.** Quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

 **Lời giải.**

.....

.....

✎ **Ví dụ 2.** a) Làm tròn số 2395,3 đến hàng chục, số 18,693 đến hàng phần trăm và số đúng  $d \in [5,5; 6,5)$  đến hàng đơn vị. Đánh giá sai số tuyệt đối của phép làm tròn số đúng  $d$ .

b) Cho số gần đúng  $a = 2,53$  với độ chính xác  $d = 0,01$ . Số đúng  $\bar{a}$  thuộc đoạn nào? Nếu làm tròn số  $a$  thì nên làm tròn đến hàng nào? Vì sao?

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

✎ **Ví dụ 3.** Cho số gần đúng  $a = 581\ 268$  với độ chính xác  $d = 200$ . Hãy viết số quy tròn của số  $a$ .

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....

↔ Ví dụ 4. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác  $d$ .

- a) 2 841 331 với  $d = 400$ ;      b) 4,1463 với  $d = 0,01$ ;      c) 1,4142135 với  $d = 0,001$ .

 Lời giải.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

 **BÀI TẬP TỰ LUẬN**

↔ Bài 1. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng chục

- |              |             |             |              |               |
|--------------|-------------|-------------|--------------|---------------|
| a) 199.      | b) 999.     | c) 9999.    | d) 2683.     | e) 1099.      |
| f) 12345.    | g) 123456.  | h) 43781.   | i) 454995.   | j) 14350.     |
| k) 99999.    | l) 987698.  | m) 3400065. | n) 1000587.  | o) 987654.    |
| p) 28051989. | q) 2602283. | r) 123,45.  | s) 12345,67. | t) 98765,432. |

↔ Bài 2. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng trăm

- |             |               |              |             |            |
|-------------|---------------|--------------|-------------|------------|
| a) 199.     | b) 999.       | c) 9999.     | d) 1099     | e) 2683.   |
| f) 12345.   | g) 43781.     | h) 14350.    | i) 1234567. | j) 454995. |
| k) 99999.   | l) 987698.    | m) 3400065.  | n) 987654.  | o) 260283. |
| p) 23456,7. | q) 12345,678. | r) 8765,432. | s) 9999,99. |            |

↔ Bài 3. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng nghìn

- |             |               |               |              |             |
|-------------|---------------|---------------|--------------|-------------|
| a) 12 345.  | b) 43 781.    | c) 28 634.    | d) 21 999.   | e) 22 999.  |
| f) 9999.    | g) 12 099.    | h) 454 995.   | i) 14 350.   | j) 99 999.  |
| k) 987 698. | l) 3 400 065. | m) 1 000 587. | n) 987 654.  | o) 260 283. |
| p) 23456,7. | q) 1 234 567  | r) 12345,678. | s) 8765,432. | t) 9999,99. |

↔ **Bài 4.** Làm tròn các số sau đến hàng phần mười

- a) 10,00905.      b) 60,991.      c) 999,994.      d) 10,0456.      e) 23,0009.  
f) 99,999.      g) 90,0909.      h) 9876,1.      i) 1234,56.      j) 98765,43.

↔ **Bài 5.** Làm tròn các số sau đến hàng phần trăm

- a) 3,0468.      b) 12,3475.      c) 0,31069.      d) 12,516.      e) 0,999.  
f) 7,923.      g) 17,418.      h) 79,1364.      i) 50,401.      j) 0,155.  
k) 60,996.      l) 12,349.      m) 2,9999.      n) 123,456.      o) 98,7654.

↔ **Bài 6.** Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác  $d$

- a) 1 234 567 với  $d = 400$ .  
b) 8,7654 với  $d = 0,01$ .  
c) 28,4156 với  $d = 0,001$ .  
d) 1,7320508... với  $d = 0,0001$ .

↔ **Bài 7.** Hãy viết số quy tròn của

- a)  $a$  biết  $\bar{a} = 1\,951\,890 \pm 200$ .  
b)  $b$  biết  $\bar{b} = 1,236 \pm 0,002$ .  
c)  $c$  biết  $\bar{c} = 3,1463 \pm 0,002$ .

↔ **Bài 8.** Chiều dài một cái cầu là  $l = 1745,25 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$ . Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

#### Dạng 4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với số gần đúng

#### VÍ DỤ MINH HỌA

↔ **Ví dụ 1.** Sử dụng máy tính cầm tay, tính  $3^7 \cdot \sqrt{14}$  (trong kết quả lấy bốn chữ số ở phần thập phân).

 Lời giải.

.....

.....

.....

⇨ **Ví dụ 2.** Dùng máy tính cầm tay, tính kết quả của phép tính  $\sqrt[3]{15} : 5 - 2$  (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

**Lời giải.**

.....

.....

.....

⇨ **Ví dụ 3.** Gọi  $P$  là chu vi của đường tròn bán kính 1cm. Hãy tìm giá trị gần đúng của  $P$  (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

⇨ **Bài 1.** Sử dụng máy tính bỏ túi tính gần đúng các số sau (kết quả lấy 4 chữ số thập phân).

- a)  $3^7 \cdot \sqrt{14}$ .                      b)  $\sqrt[3]{15} \cdot 12^4$ .                      c)  $\sqrt[3]{15} \cdot 14^4$ .

⇨ **Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau trên máy tính cầm tay (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

- a)  $4^6 \cdot \sqrt{0,1}$ .                      b)  $\sqrt[8]{2,1^{18} + 1} - \sqrt{2,1^{12} + 1}$ .                      c)  $\frac{1,5^3}{\sqrt[3]{6,8}}$ .

**C Câu hỏi trắc nghiệm**

⇨ **Câu 1.** Cho  $a$  là số gần đúng của số đúng  $\bar{a}$ . Khi đó  $\Delta_a = |\bar{a} - a|$  được gọi là

- A số quy tròn của  $\bar{a}$ .                       B sai số tương đối của số gần đúng  $a$ .  
 C sai số tuyệt đối của số gần đúng  $a$ .                       D số quy tròn của  $a$ .

⇨ **Câu 2.** Cho số  $a$  là số gần đúng của số  $\bar{a}$ . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A  $a > \bar{a}$ .                       B  $a < \bar{a}$ .                       C  $|\bar{a} - a| > 0$ .                       D  $-a < \bar{a} < a$ .

⇨ **Câu 3.** Cho số  $a$  là số gần đúng của  $\bar{a}$  với độ chính xác  $d$ . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A  $\bar{a} = a + d$ .                       B  $\bar{a} = a - d$ .                       C  $\bar{a} = a$ .                       D  $\bar{a} = a \pm d$ .

⇒ **Câu 4.** Kết quả làm tròn số  $b = 500\sqrt{7}$  đến chữ số thập phân thứ hai là  
 (A)  $b \approx 132,88$ . (B)  $b \approx 1322,87$ . (C)  $b \approx 1322,8$ . (D)  $b \approx 1322,9$ .

⇒ **Câu 5.** Kết quả làm tròn của số  $c = 76324753,3695$  đến hàng nghìn là  
 (A)  $c \approx 76324000$ . (B)  $c \approx 76325000$ . (C)  $c \approx 76324753,369$ . (D)  $c \approx 76324753,37$ .

⇒ **Câu 6.** Viết số quy tròn của số gần đúng  $a = 505360,996$  biết  $\bar{a} = 505360,996 \pm 100$ .  
 (A)  $a \approx 505$ . (B)  $a \approx 5054$ . (C)  $a \approx 505400$ . (D)  $a \approx 505000$ .

⇒ **Câu 7.** Viết số quy tròn số gần đúng  $b = 3257,6254$  với độ chính xác  $d = 0,01$ .  
 (A)  $b \approx 3257,63$ . (B)  $b \approx 3257,62$ . (C)  $b \approx 3257,6$ . (D)  $b \approx 3257,7$ .

⇒ **Câu 8.** Cho giá trị gần đúng của số  $\pi$  là  $x = 3,141592653589$  với độ chính xác  $10^{-10}$ . Hãy viết số quy tròn của  $x$ .  
 (A)  $x \approx 3,141592654$ . (B)  $x \approx 3,1415926535$ . (C)  $x \approx 3,1415926536$ . (D)  $x \approx 3,141592653$ .

⇒ **Câu 9.** Cho  $\bar{a} = 1,7059 \pm 0,001$ , kết quả làm tròn số  $a = 1,7059$  là  
 (A) 1,71. (B) 1,706. (C) 1,7. (D) 1,705.

⇒ **Câu 10.** Cho  $\bar{a} = 123564 \pm 100$ . Kết quả làm tròn số  $x = 123564$  là  
 (A) 12360. (B) 123000. (C) 123570. (D) 124000.

⇒ **Câu 11.** Số gần đúng  $a = 173,4592$  có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,01. Số quy tròn của  $a$  là  
 (A) 173,45. (B) 173,46. (C) 173,5. (D) 173.

### ➤ Dạng 5. Xác định sai số của số gần đúng

⇒ **Câu 12.** Trong các số dưới đây, giá trị gần đúng của  $\sqrt{30} - 5$  với sai số tuyệt đối bé nhất là  
 (A) 0,476. (B) 0,477. (C) 0,478. (D) 0,479.

⇒ **Câu 13.** Nếu lấy 3,14 làm giá trị gần đúng cho số  $\pi$  thì sai số tuyệt đối không vượt quá  
 (A) 0,01. (B) 0,02. (C) 0,03. (D) 0,04.

⇒ **Câu 14.** Nếu lấy 3,1416 làm giá trị gần đúng cho  $\pi$  thì sai số tuyệt đối không vượt quá  
 (A) 0,0002. (B) 0,0003. (C) 0,0001. (D) 0,0004.

⇒ **Câu 15.** Cho giá trị gần đúng của  $\frac{8}{17}$  là 0,47 thì sai số tuyệt đối không vượt quá  
 (A) 0,01. (B) 0,02. (C) 0,03. (D) 0,04.

⇨ **Câu 16.** Cho giá trị gần đúng của  $\frac{3}{7}$  là 0,429 thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- (A) 0,002.                      (B) 0,001.                      (C) 0,003.                      (D) 0,004.

⇨ **Câu 17.** Một vật có thể tích  $V = 180,37 \text{ cm}^3 \pm 0,05 \text{ cm}^3$ . Nếu lấy  $180,37 \text{ cm}^3$  làm giá trị gần đúng cho  $V$  thì sai số tương đối của giá trị gần đúng đó không vượt quá

- (A) 0,03%.                      (B) 0,01%.                      (C) 0,02%.                      (D) 0,001%.

⇨ **Câu 18.** Số  $\bar{a}$  được cho bởi giá trị gần đúng  $a = 5,7824$  với sai số tương đối không vượt quá 0,05%. Khi đó, sai số tuyệt đối của  $a$  không vượt quá

- (A) 0,0028912.                      (B) 0,0027912.                      (C) 0,0026912.                      (D) 0,0025912.

⇨ **Câu 19.** Cho  $\bar{a} = \frac{1}{1+x}$  ( $0 < x < 1$ ). Giả sử ta lấy  $a = 1 - x$  làm giá trị gần đúng của  $\bar{a}$ . Khi đó, sai số tương đối của  $a$  theo  $x$  bằng

- (A)  $\frac{x^2}{1-x^2}$ .                      (B)  $\frac{x}{1-x}$ .                      (C)  $\frac{x^2}{1-x}$ .                      (D)  $\frac{x}{1-x^2}$ .

⇨ **Câu 20.** Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số  $\frac{22}{7}$  để xấp xỉ số  $\pi$ . Hãy đánh giá sai số tuyệt đối  $\Delta$  của giá trị gần đúng này, biết  $3,1415 < \pi < 3,1416$ .

- (A)  $\Delta < 0,0012$ .                      (B)  $\Delta < 0,0014$ .                      (C)  $\Delta < 0,0013$ .                      (D)  $\Delta < 0,0011$ .

⇨ **Câu 21.** Hình chữ nhật có các cạnh là  $x = 2 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$  và  $y = 5 \text{ m} \pm 2 \text{ cm}$ . Diện tích của hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó là

- (A)  $10 \text{ m}^2$  và  $\delta \leq 0,91\%$ .                      (B)  $10 \text{ m}^2$  và  $\delta \leq 0,9\%$ .  
(C)  $10 \text{ m}^2$  và  $\delta \leq 0,92\%$ .                      (D)  $10 \text{ m}^2$  và  $\delta \leq 0,93\%$ .

# Bài 13

## CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

### A Tóm tắt lý thuyết

#### THUẬT NGỮ

- ✔ Số trung bình cộng.
- ✔ Trung vị.
- ✔ Tứ phân vị.
- ✔ Mốt.

#### KIẾN THỨC, KỸ NĂNG

- ✔ Lựa chọn và tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của một mẫu số liệu: số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị, mốt.
- ✔ Giải thích ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng trong mẫu dữ liệu thực tiễn.
- ✔ Rút ra kết luận từ ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm.

### 1. Số trung bình cộng (số trung bình)

**Định nghĩa 2.1.** Số trung bình cộng của mẫu số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kí hiệu là  $\bar{x}$ , được tính bằng công thức

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

#### ⚠ Lưu ý:

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là

Giá trị	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
Tần số	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n},$$

trong đó  $n_i$  tương ứng là tần số của giá trị  $x_i$  ( $i = 1; 2; \dots; k$ ) và  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối

Giá trị	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
Tần số tương đối	$f_1$	$f_2$	...	$f_k$

được tính theo công thức

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k,$$

trong đó  $f_1 = \frac{n_1}{n}$ ,  $f_2 = \frac{n_2}{n}$ , ...,  $f_k = \frac{n_k}{n}$  với  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

**Ý nghĩa** Số trung bình cộng cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu. Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng ta có thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

### 2. Trung vị

**Định nghĩa 2.2.** Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm  $n$  số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- ✔ Nếu  $n$  là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ  $\frac{n+1}{2}$  (số đứng chính giữa) gọi là trung vị.

- ☑ Nếu  $n$  là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ  $\frac{n}{2}$  và  $\frac{n}{2} + 1$  gọi là trung vị.

Trung vị kí hiệu là  $M_e$ .

### ⚠ Lưu ý:

- ☑ Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu.
- ☑ Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

### Ý nghĩa

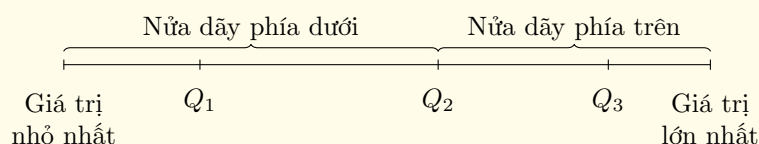
- ☑ Trung vị là giá trị chia đôi trong mẫu số liệu. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi đó số trung bình cộng bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.
- ☑ Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

## 3. Tứ phân vị

🟢 **Định nghĩa 2.3.** Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm  $n$  số liệu thành một dãy không giảm.

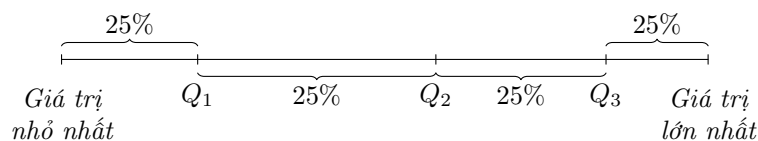
Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba, ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số phần tử bằng nhau.

- ☑ Tứ phân vị  $Q_2$  bằng trung vị.
- ☑ Nếu  $n$  là chẵn thì tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- ☑ Nếu  $n$  là lẻ thì tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm  $Q_2$ ) và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm  $Q_2$ ).



### ⚠ Lưu ý:

- ☑  $Q_1$  còn được gọi là tứ phân vị dưới,  $Q_3$  còn được gọi là tứ phân vị trên.
- ☑ Các điểm  $Q_1, Q_2, Q_3$  chia dãy dữ liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành 4 phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.



### Ý nghĩa

- ☑ Trong thực tế, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.



- ☑ Bộ ba giá trị  $Q_1, Q_2, Q_3$  trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị  $Q_1, Q_2, Q_3$  lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

### 4. Một

**Định nghĩa 2.4.** Một của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là  $M_o$ .

**Lưu ý:** Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều một

#### Ý nghĩa

- ☑ Một của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào một, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.
- ☑ Có thể dùng một để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

## B

### Các ví dụ

#### 1. Số trung bình

**Ví dụ 1.** Trong một cuộc thi tìm hiểu lịch sử địa phương (thang điểm 10), một lớp học tham gia cuộc thi và đạt được số điểm như sau:

Số học sinh	5	12	10	3
Số điểm	5	6	7	9

Hỏi trung bình mỗi học sinh trong lớp đạt bao nhiêu điểm trong cuộc thi?

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

**Ví dụ 2.** Khi nghiên cứu tuổi thọ của một loại bóng đèn, người ta đã chọn tùy ý 10 bóng đèn trong một lô hàng và bật sáng liên tục cho đến khi nó tự tắt. Tuổi thọ của các bóng đèn (tính theo giờ) của các bóng đèn được ghi lại trong bảng sau:

Số bóng đèn	2	3	4	1
Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180

Hỏi tuổi thọ trung bình của các bóng đèn trong lô hàng là bao nhiêu?

**Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 3.** Trong đợt kiểm tra quân sự thường niên tại một đơn vị, ở bộ môn bắn súng AK mỗi người phải bắn 5 phát súng vào bia. Thang điểm bắn là: 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ở 4 lần bắn trước đó, anh Nam đã đạt được số điểm như sau:

Lần bắn	1	2	3	4	5
Số điểm	8	7	0	9	10

Biết rằng để vượt qua bài kiểm tra, mỗi người phải đạt điểm trung bình trong các lần bắn từ 6.5 điểm trở lên. Tính số điểm ít nhất mà anh Nam cần đạt được trong lần bắn thứ 5 để vượt qua bài kiểm tra.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

## 2. Số trung vị

⇨ **Ví dụ 4.** Một nhóm gồm 7 học sinh tham gia một cuộc thi và đạt được số điểm như sau: 89, 69, 65, 0, 80, 0, 90. Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 5.** Số áo bán được trong một cửa hàng trong một quý được ghi lại trong bảng sau:

Cỡ số	36	37	38	39	40	41	42
Số áo bán được	13	45	126	110	126	40	5

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

💬 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### 3. Tứ phân vị

⇔ **Ví dụ 6.** Số tấn hàng bán ra được trong 6 tháng đầu năm của một công ty được cho như sau: 4, 7, 9, 11, 12, 20. Tìm tứ phân vị dưới của mẫu số liệu trên.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇔ **Ví dụ 7.** Số buổi nghỉ học trong một năm của một nhóm học sinh được cho như sau: 5, 8, 10, 11, 15, 18, 23. Tìm tứ phân vị trên của mẫu số liệu đã cho.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### 4. Một

⇔ **Ví dụ 8.** Giá thành của một sản phẩm (tính theo đơn vị nghìn đồng) của 20 cơ sở sản xuất được cho bởi bảng sau:

15	25	25	30	20	25	35	30	25	30
25	20	35	30	15	25	25	20	25	25

Tìm một của mẫu số liệu trên.

 **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 9.** Số cân nặng của 20 học sinh được ghi lại như sau:

28	35	29	37	30	35	37	30	35	29
30	37	35	35	42	28	35	29	37	20

Tìm một của mẫu số liệu trên.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## C Bài tập tự luận

### 1. Bài tập vận dụng

⇨ **Bài 1.** Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

<b>Khối lượng (gam)</b>	250	300	350	400	450	500	Cộng
<b>Tần số</b>	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình  $\bar{x}$  (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

⇨ **Bài 2.** Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt mới trong các điều kiện khác nhau

<b>Thời gian(phút)</b>	420	440	450	480	500	540
<b>Tần số</b>	8	17	18	16	11	10

Tính giá trị trung bình  $\bar{x}$  (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

⇨ **Bài 3.** Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau:

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tính số trung vị của bảng nói trên.

⇨ **Bài 4.** Điều tra số học sinh của 30 lớp học, ta được bảng số liệu như sau:

35	39	39	40	40	41	41	41	41	44	44	45	45	45	46
48	48	48	48	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	51

Tính số trung vị của bảng nói trên.

❖ **Bài 5.** Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150	1190	1180	1170	1170	1170
1190	1170	1170	1170	1180	1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính một của bảng số liệu thống kê trên.

❖ **Bài 6.** Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

<b>Điểm</b>	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	<b>Tổng</b>
<b>Tần số</b>	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính một của bảng số liệu thống kê trên.

❖ **Bài 7.** Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ  $I$  ở lớp 10A lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

- a) Số trung bình    b) Trung vị.                      c) Một.                      d) Tứ phân vị.  
cộng.

❖ **Bài 8.** Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

<b>Cỡ giày</b>	37	38	39	40	41	42	43	44
<b>Tần số (Số đôi giày bán được)</b>	40	48	52	70	54	47	28	3

- a) Một của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?  
b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

❖ **Bài 9.** Cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

<b>Tháng</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Nhiệt độ (°C)</b>	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(Nguồn: Tập bản đồ Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020)

- a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?  
b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C?

❖ **Bài 10.** Cho biết tổng diện tích rừng từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tổng diện tích rừng (triệu ha)	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(Nguồn: <https://baodantoc.vn>)

- Diện tích rừng trung bình của nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?
- Từ năm 2008 đến năm 2019, diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu triệu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu triệu héc-ta?
- So với năm 2008, tỉ lệ tổng diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?
- Hãy tìm hiểu số liệu về tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

## 2. Bài tập về nhà

❖ **Bài 11.** Tìm số trung bình, trung vị, một và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

- Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu"

9 8 15 8 20

- Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250

- Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35

❖ **Bài 12.** Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

- Số mặt trăng đã biết của các hành tinh:

Hành tinh	Thủy tinh	Kim tinh	Trái đất	Hỏa tinh	Mộc tinh	Thổ tinh	Thiên vương tinh	Hải vương tinh
Số mặt trăng	0	0	1	2	63	34	27	13

(Theo NASA)

- Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23.

- Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

- Các sai số trong một phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

✎ **Bài 13.** Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 – 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau:

0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

- Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
- Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

✎ **Bài 14.** Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hóa	Mỹ Đình
Số chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

(Theo *vov.vn*)

Các giá trị số trung bình, trung vị, mốt bị ảnh hưởng thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

✎ **Bài 15.** Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20	15	12	18	17	25
17	21	15	12	18	16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Tính mốt  $M_O$  của bảng số liệu đã cho.

✎ **Bài 16.** Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp 11A1 được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n - 8$	$2n + 4$	3	2	4	5	40

Trong đó  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ . Tính mốt của bảng số liệu thống kê đã cho.

✎ **Bài 17.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Tần số	12	5	$n^2$	16	$6n - 5$

Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $M_O = x_3$  là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

✎ **Bài 18.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Tần số	5	2	$n$	$20 - n$	8

Tìm các số tự nhiên  $n$  để  $M_O = x_4$  là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho.

❖ **Bài 19.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
Tần số	5	$n^2 + 3$	3	$7n - 9$	$n + 1$	7

Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số  $n$  nguyên dương sao cho  $M_O = x_2$  và  $M_O = x_4$  là hai mốt của bảng phân bố tần số đã cho. Tính số phần tử của tập hợp  $S$ .

❖ **Bài 20.** Quan sát 9 con chuột chạy qua một mê hồn trận và ghi lại thời gian (tính bằng phút) của chúng trong bảng sau:

Con chuột	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thời gian chạy	1	2,5	3	1,5	2	1,25	1	0,9	30

- Tính số trung bình, số trung vị và mốt của thời gian chuột ra khỏi mê hồn trận?
- Trong trường hợp này nên chọn đại lượng nào để thể hiện xu thế trung bình của mẫu?

## D Bài tập trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Điều tra về số con của 40 gia đình ở khu vực, kết quả thu được như sau:

Giá trị (số con)	0	1	2	3	4	Tổng
Tần số	5	9	19	5	2	$N = 40$

Số trung bình  $\bar{x}$  của mẫu số liệu trên là

- A**  $\bar{x} = 2,75$ .      **B**  $\bar{x} = 1$ .      **C**  $\bar{x} = 1,75$ .      **D**  $\bar{x} = 3$ .

❖ **Câu 2.** Kết quả điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 10A được trình bày ở bảng sau:

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	8	7	10	8	3	2	40

Tính số trung bình cộng của bảng trên. (làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân).

- A** 68.      **B** 64.      **C** 70.      **D** 67.

❖ **Câu 3.** Tiền thưởng (triệu đồng) của cán bộ và nhân viên trong một công ty được cho ở bảng sau:

Tiền lương	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	4	40

Tính tiền thưởng trung bình.

- A** 3725000 đồng.      **B** 3745000 đồng.      **C** 3715000 đồng.      **D** 3625000 đồng.

❖ **Câu 4.** Để được cấp chứng chỉ A- Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ, học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm, thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100, và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên. Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?



**A** 97,5.

**B** 96,5.

**C** 94,5.

**D** 93,5.

❖ **Câu 5.** Học sinh tỉnh A (gồm lớp 11 và lớp 12) tham dự kì thi học sinh giỏi Toán của Tỉnh (thang điểm 20) và điểm trung bình của họ là 10. Biết rằng số học sinh lớp 11 nhiều hơn số học sinh lớp 12 là 50% và điểm trung bình của khối 12 cao hơn điểm trung bình của khối 11 là 50%. Điểm trung bình của khối 12 là

**A** 10.

**B** 11,25.

**C** 12,5.

**D** 15.

❖ **Câu 6.** Điểm thi học kì của một học sinh như sau 4; 6; 2; 7; 3; 5; 9; 8; 7; 10; 9. Số trung bình và số trung vị lần lượt là

**A** 7 và 6.

**B** 6,(36) và 7.

**C** 6,22 và 7.

**D** 6 và 6.

❖ **Câu 7.** Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong một năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

Số trung vị của bảng số liệu thống kê trên là

**A** 113.

**B** 114.

**C** 116.

**D** 115.

❖ **Câu 8.** Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9
---	---	---	---	---	---	---	-----	---

Số trung vị của bảng trên là

**A** 7.

**B** 8.

**C** 9.

**D** 11.

❖ **Câu 9.** Thống kê điểm kiểm tra môn Lịch sử của 45 học sinh lớp 10A như sau

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	2	11	9	16	4	3

Số trung vị trong điểm các bài kiểm tra đó là

**A** 7,5 điểm.

**B** 7,4 điểm.

**C** 8 điểm.

**D** 8,5 điểm.

❖ **Câu 10.** Cho bảng số liệu thống kê chiều cao của một nhóm học sinh như sau

151	152	153	154	155	160	160	162	163	165	165	165	166	167	167
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Số trung vị của bảng số liệu nói trên là

**A** 160.

**B** 162.

**C** 167.

**D** 161.

❖ **Câu 11.** Cho mẫu số liệu 5; 13; 5; 7; 10; 2; 3. Tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

**A** 3; 5; 10.

**B** 5; 3; 10.

**C** 10; 3; 5.

**D** 10; 5; 3.

❖ **Câu 12.** Cho mẫu số liệu 2; 3; 10; 13; 5; 15; 5; 7. Tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

- (A) 11,5; 6; 4.      (B) 4; 6; 11,5.      (C) 6; 4; 11,5.      (D) 6; 11,5; 4.

❖ **Câu 13.** Cho mẫu số liệu 21; 35; 17; 43; 8; 59; 72; 119. Tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

- (A) 19; 39; 65,5.      (B) 26; 43; 65,5.      (C) 39; 19; 65,5.      (D) 43; 26; 65,5.

❖ **Câu 14.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu dữ liệu được gọi là

- (A) Mốt.      (B) Số trung vị.      (C) Số trung bình.      (D) Độ lệch chuẩn.

❖ **Câu 15.** Cho bảng phân bố tần số

Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ty

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Mốt của bảng phân bố tần số đã cho là

- (A) 5 triệu đồng.      (B) 6 triệu đồng.      (C) 3 triệu đồng.      (D) 2 triệu đồng.

❖ **Câu 16.** Tiền thưởng (triệu đồng) của cán bộ và nhân viên trong một công ty được cho ở bảng sau:

Tiền lương	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	10	12	11	15	2	50

Tính một  $M_O$ .

- (A)  $M_O = 4$ .      (B)  $M_O = 5$ .      (C)  $M_O = 15$ .      (D)  $M_O = 11$ .

❖ **Câu 17.** Điểm kiểm tra môn Toán của 35 học sinh lớp 10A được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (thang điểm 10):

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	1	2	1	2	3	$x$	5	$y$	4	3	$n = 35$

Biết rằng mẫu số liệu trên có 2 mốt. Giá trị của  $x \cdot y$  là

- (A) 36.      (B) 35.      (C) 27.      (D) 32.

❖ **Câu 18.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Tần số	3	5	$n + 6$	$20 - n$	9

Trong đó  $n$  là số tự nhiên và giá trị  $x_4$  là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho. Hãy tìm số  $n$ ?

- (A)  $n \in [0; 7)$ .      (B)  $n \in [0; 8)$ .      (C)  $n \in (0; 7)$ .      (D)  $n \in (0; 7]$ .

❖ **Câu 19.** Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Tần số	2	$x + y$	$2x - y$	5	6

với  $x, y$  là các số tự nhiên. Có tất cả các cặp số  $(x; y)$  để  $x_5$  là một của bảng số liệu đã cho?

- A 13.                     
 B 12.                     
 C 14.                     
 D 16.

⇒ **Câu 20.** Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
Tần số	6	$3x + y$	$3y - 3x$	$x + y$	4

với  $x, y$  là các số tự nhiên. Có bao nhiêu cặp số  $(x; y)$  để bảng số liệu thống kê đã cho có một là 3 giá trị khác nhau?

- A 2.                             
 B 1.                             
 C 3.                             
 D 4.

# Bài 14

## CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

### A Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

🟢 **Định nghĩa 3.1.** Khoảng biến thiên **Khoảng biến thiên**, kí hiệu là  $R$ , là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

- ☑ Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

🟢 **Định nghĩa 3.2.** Khoảng biến thiên **Khoảng tứ phân vị**, kí hiệu là  $\Delta Q$ , là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là:  $\Delta Q = Q_3 - Q_1$ .

- ☑ Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- ☑ Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.
- ☑ Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ và khoảng tứ phân vị là độ trải giữa.

#### 2. Phương sai và độ lệch chuẩn

🟢 **Định nghĩa 3.3.** Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mẫu số liệu (bỏ qua thông tin của tất cả các giá trị khác), còn khoảng tứ phân vị chỉ sử dụng thông tin của 50% số liệu chính giữa. Có một vài số đặc trưng khác đo độ phân tán sử dụng thông tin của tất cả các giá trị trong mẫu số liệu. Hai trong số đó là phương sai và độ lệch chuẩn.

Cụ thể là với mẫu số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , nếu gọi số trung bình là  $\bar{x}$  thì với mỗi giá trị  $x_i$ , độ lệch của nó so với giá trị trung bình là  $x_i - \bar{x}$ .

- ☑ Phương sai là giá trị  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ .

- ☑ Căn bậc hai của phương sai,  $s = \sqrt{s^2}$ , được gọi là độ lệch chuẩn.

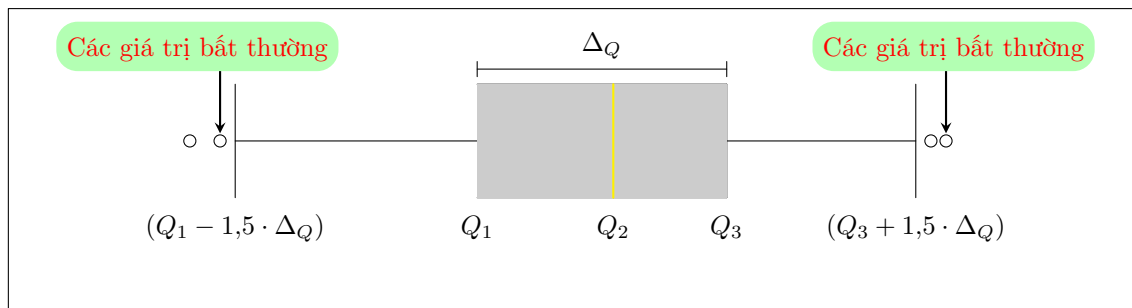
Chú ý. Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Ý nghĩa. Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

#### 3. Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp

- ☑ Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là **giá trị bất thường**.
- ☑ Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện các giá trị bất thường này.



- ☑ Các số liệu **lớn hơn**  $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$  hoặc **bé hơn**  $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$  được xem là giá trị bất thường. Hay các số liệu **không** thuộc đoạn  $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$  là các số liệu bất thường.

## B Các dạng toán

### 📁 Dạng 1. Tìm khoảng biến thiên và so sánh độ phân tán của một hoặc nhiều mẫu số liệu

Để tìm khoảng biến thiên của một mẫu số liệu ta thực hiện các bước giải như sau:

- ☑ **Bước 1** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu.
- ☑ **Bước 2** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được tính bằng hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tìm được ở trên.
- ☑ **Bước 3** Nếu bài toán cho nhiều mẫu số liệu và yêu cầu so sánh độ phân tán của chúng dựa vào khoảng biến thiên thì hãy chú ý rằng khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

### 📌 VÍ DỤ MINH HỌA

🔗 **Ví dụ 1.** Cân nặng (tính theo đơn vị kg) của 10 học sinh được ghi lại như sau:

49      57      66      45      50      41      57      42      55      52

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 2.** Chiều cao (tính theo đơn vị m) của các bạn học sinh trong một lớp học được thống kê và ghi lại trong bảng dưới đây:

Chiều cao	1,6	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65
Số lượng	3	5	8	9	7	6

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên

💬 **Lời giải.**

.....

.....

❖ Ví dụ 3. Điểm kiểm tra môn Toán của các bạn học sinh Tổ 1 và Tổ 2 lớp 10C như sau:

Tổ 1:	6	9	4	2	7	9	6	10
Tổ 2:	4	5	6	3	9	5	8	4

Hãy tìm các khoảng biến thiên trong hai mẫu số liệu. Căn cứ vào số liệu này, hãy chỉ ra tổ nào học đồng đều hơn.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

### 📁 Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn

a) Tính phương sai: để tính phương sai  $s^2$  của một mẫu số liệu  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  ta thực hiện một trong các cách sau:

Cách 1:

☑ Tính số trung bình:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ .

☑ Tính các độ lệch:  $x_i - \bar{x} (i = \overline{1, n})$ .

☑ Tính các phương sai theo công thức:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Cách 2:

☑ Tính  $\sum_{i=1}^n x_i$  và  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ;

☑ Tính phương sai theo công thức:  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ .

b) Tính độ lệch chuẩn: Độ lệch chuẩn  $s$  bằng căn bậc 2 của phương sai:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây

Sản lượng ( $x$ )	20	21	22	23	24	
Tần số ( $n$ )	5	8	11	10	6	$n = 40$

- a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.
- b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 2.** 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$n = 100$

- a) Tính số trung bình.
- b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

**Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

**Dạng 3. Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu**

Để tìm các số liệu bất thường của một mẫu số liệu ta thực hiện các bước giải như sau:

- ✔ **Bước 1** Tìm các tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai, tứ phân vị thứ 3 và khoảng tứ phân vị  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$  của mẫu số liệu.
- ✔ **Bước 2** Tìm ra đoạn  $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$ .
- ✔ **Bước 3** Tìm các số liệu **không** thuộc đoạn  $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$  là các số liệu bất thường.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

⇨ **Ví dụ 1.** Điểm kiểm tra môn Toán của 10 học sinh sau:

1      7      10      7      7      6      9      8      10      8

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

**Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**



⇒ **Bài 1.** Hai chữ số cuối số điện thoại của 10 người được thống kê như sau:

23      58      42      11      69      50      13      57      61      72

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

⇒ **Bài 2.** Tuổi thọ trung bình người dân của 11 nước được thống kê như sau:

69      77      75      83      65      75      74      68      73      72      71

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

⇒ **Bài 3.** Thời gian làm câu đầu tiên trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tại một trường của các bạn học sinh được thống kê và ghi lại trong bảng sau

Thời gian	9	10	11	12	13	14	15
Số lượng học sinh	45	46	57	63	70	61	50

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê trên.

⇒ **Bài 4.** Điểm thi học kì 2 môn Toán và Ngữ văn của một nhóm học sinh được ghi lại như sau

Toán	9	8,5	7	6,3	5	9,5	8
Ngữ văn	6	6,5	8	7,3	5,5	8,3	6,5

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu trên. Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

⇒ **Bài 5.** Số giờ nắng và độ ẩm (tính theo đơn vị %) trung bình hàng tháng của Hà Nội được thống kê và ghi lại ở bảng sau

Số giờ nắng	74	47	47	90	183	172	195	174	176	167	137	124
Độ ẩm	83,4	87,9	89,4	86,5	82,9	82,2	85,9	87,2	84,2	81,9	81,3	82

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu “Số giờ nắng” và “Độ ẩm”. Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

⇒ **Bài 6.** Một xạ thủ tập bắn, xạ thủ đó đã bắn 30 viên đạn vào bia. Kết quả được cho trong bảng sau

Điểm	6	7	8	9	10	
Tần số	3	4	8	9	6	$n = 30$

- Tính điểm trung bình của xạ thủ.
- Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

❖ **Bài 7.** Hai lớp 10A1, 10A2 của một trường Trung học phổ thông X đồng thời làm bài thi môn Toán theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm thi Toán của lớp 10A1

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

Điểm thi Toán của lớp 10A2

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	8	18	10	4	40

- a) Tính phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số đã cho.  
b) Xét xem kết quả làm bài thi của môn Toán ở lớp nào đồng đều hơn?

❖ **Bài 8.** Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) có kết quả như trong bảng sau:

1180	1179	1187	1190	1187	1198	1568	1178	1185	1184
1178	1180	1185	1179	1180	1198	1179	1198	1569	1191
1185	1184	1179	1180	1184	1198	1180	1178	1179	1178

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

❖ **Bài 9.** Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút)

7	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	29

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

❖ **Bài 10.** Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 10A có 21 học sinh, thể hiện ở bảng dưới đây

10	6	7	7	1	7	6	9	9	10	8	8	7	8	6	7	5	6	7	8	9
----	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

❖ **Bài 11.** Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 25 chiếc xe qua trạm như sau:

20 41 41 80 40 52 52 52 60 55 60 60 62  
60 65 60 65 135 70 70 65 75 75 70 55

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

❖ **Bài 12.** Thống kê điểm thi môn Toán của 450 học sinh trong một kì thi ở một trường trung học phổ thông. Người ta được bảng số liệu như sau

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	1	1	1	120	200	119	5	1	1

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

# Bài 15

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê sau:

22      26      31      15      12      4      18      93      17      64      10

- Ⓐ 33.                      Ⓑ 83.                      Ⓒ 89.                      Ⓓ 97.

C

❖ **Câu 2.** Hai chữ số cuối giải đặc biệt Xổ số miền Bắc trong 9 ngày được ghi lại như sau:

16      11      25      28      45      42      24      33      11

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

- Ⓐ 18.                      Ⓑ 34.                      Ⓒ 56.                      Ⓓ 27.

B

❖ **Câu 3.** Mẫu số liệu nào dưới đây có khoảng biến thiên là 13?

- Ⓐ 11, 28, 56, 12.      Ⓑ 6, 12, 33, 23, 11.      Ⓒ 25, 9, 13, 10.      Ⓓ Tất cả đều sai.

D

❖ **Câu 4.** Mẫu số liệu nào dưới đây có khoảng biến thiên là 53?

- Ⓐ 18, 57, 11, 26.      Ⓑ 44, 2, 55, 46, 27.      Ⓒ 21, 3, 55, 89.      Ⓓ 4, 16, 23, 20.

B

❖ **Câu 5.** Số lượng học sinh có điểm Toán tổng kết cuối học kì I trên 8 ở mỗi lớp của một trường được tổng kết như trong bảng dưới đây

16	11	15	18	21	12	24	23	11
8	9	11	6	27	22	20	35	18

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên

- Ⓐ 11.                      Ⓑ 29.                      Ⓒ 37.                      Ⓓ 25.

B

❖ **Câu 6.** Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê được cho ở bảng sau

Giá trị	6	7	8	9	10
Tần số	15	18	11	32	19

- Ⓐ 4.                      Ⓑ 5.                      Ⓒ 6.                      Ⓓ 7.

A

↔ **Câu 7.** Sải cánh (tính theo đơn vị cm) của 90 con chim sẽ được thống kê và ghi lại trong bảng dưới đây:

Sải cánh	18	19	20	21	22	23	24
Số lượng	6	11	19	20	15	12	7

**A** 5.

**B** 6.

**C** 7.

**D** 8.

B

↔ **Câu 8.** Trong một tuần, nhiệt độ cao nhất trong ngày (đơn vị °C) tại hai thành phố Hà Nội và TP Hồ Chí Minh được cho như sau:

Hà Nội:	28	27	30	29	27	24	25
TP Hồ Chí Minh:	31	33	32	33	29	32	34

Dựa vào khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu, hãy chỉ ra mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn.

**A** Mẫu số liệu “Hà Nội” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “TP Hồ Chí Minh”.

**B** Mẫu số liệu “TP Hồ Chí Minh” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “Hà Nội”.

**C** Hai mẫu số liệu có độ phân tán bằng nhau.

**D** Tất cả đều sai.

A

↔ **Câu 9.** Tuổi và giới tính của những đứa trẻ trong một khu trung cư được cho bởi bảng sau

Nam:	10	4	1	6	2	8	5
Nữ:	2	3	6	4	1	7	

Dựa vào khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu “Nam” và “Nữ”, hãy chỉ ra mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn.

**A** Mẫu số liệu “Nam” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “Nữ”.

**B** Mẫu số liệu “Nam” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “Nữ”.

**C** Hai mẫu số liệu có độ phân tán bằng nhau.

**D** Tất cả đều sai.

A

↔ **Câu 10.** Chỉ số IQ và EQ tương ứng của một nhóm học sinh được đo và ghi lại ở bảng sau

IQ:	95	110	90	105	88	100	111
EQ:	90	105	98	100	93	96	103

Dựa vào khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu “IQ” và “EQ”, hãy chỉ ra mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn.

- A Mẫu số liệu “IQ” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “EQ”.  
 B Mẫu số liệu “IQ” có độ phân tán lớn hơn mẫu số liệu “EQ”.  
 C Hai mẫu số liệu có độ phân tán bằng nhau.  
 D Tất cả đều sai.

A

❖ **Câu 11.** Độ lệch chuẩn là

- A Bình phương của phương sai.  B Một nửa của phương sai.  
 C Căn bậc hai của phương sai.  D Căn bậc ba của phương sai.

C

❖ **Câu 12.** Đại lượng đo mức độ biến động, chênh lệch giữa các giá trị trong mẫu số liệu thống kê gọi là

- A Độ lệch chuẩn.  B Số trung vị.  C Phương sai.  D Tần số.

C

❖ **Câu 13.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê gần bằng

- A 2,30.  B 3,30.  C 4,30.  D 5,30.

A

❖ **Câu 14.** Cho mẫu số liệu {10, 8, 6, 2, 4}. Độ lệch chuẩn của mẫu là

- A 2,8.  B 8.  C 6.  D 2,4.

A

❖ **Câu 15.** Cho mẫu số liệu thống kê {2, 4, 6, 8, 10}. Phương sai của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

- A 6.  B 8.  C 10.  D 40.

B

❖ **Câu 16.** Số ô tô đi qua một cây cầu trong một tuần đếm được như sau: 83; 74; 71; 79; 83; 69; 92. Phương sai và độ lệch chuẩn lần lượt là

- A 78,71 – 8,87.  B 52,99 – 7,28.  C 61,82 – 7,86.  D 55,63 – 7,46.

D

❖ **Câu 17.** Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong công ty được trình bày trong bảng tần số sau đây

Tiền thưởng ( $x$ )	2	3	4	5	6	
Tần số ( $n$ )	5	15	10	6	7	$n = 43$

Phương sai là

- A 1,59.  B 1,58.  C 1,61.  D 1,57.

A

❖ **Câu 18.** Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong công ty được trình bày trong bảng tần số sau đây

Tiền thưởng ( $x$ )	2	3	4	5	6	
Tần số ( $n$ )	5	15	10	6	7	$n = 43$

Độ lệch chuẩn là

A 1,26.

B 1,27.

C 1,25.

D 1,24.

A

❖ **Câu 19.** Điểm thi toán lớp 10A được trình bày trong bảng tần số sau đây

Điểm thi ( $x$ )	6	7	8	9	
Tần số ( $n$ )	8	18	10	4	$n = 40$

Độ lệch chuẩn là

A 0,89.

B 0,88.

C 0,87.

D 0,86.

A

❖ **Câu 20.** Cho dãy số liệu thống kê 38; 18; 20; 25; 18; 15; 20; 22; 31.

Phương sai của dãy số liệu trên là

A 47,3.

B 50.

C 42.

D 43.

A

❖ **Câu 21.** Trên con đường A, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ của 30 chiếc ô tô được trình bày trong bảng tần số sau đây

Vận tốc	60	62	63	65	68	69	70	73	75	76	80	82	83	84	85	88	90
Tần số	2	2	1	2	3	1	2	2	3	2	3	1	1	2	1	1	1

Phương sai của tốc độ ô tô trên con đường A là

A 74,77.

B 75,36.

C 73,63.

D 72,1.

D

❖ **Câu 22.** Trên con đường A, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ của 30 chiếc ô tô được trình bày trong bảng tần số sau đây

Vận tốc	60	62	63	65	68	69	70	73	75	76	80	82	83	84	85	88	90
Tần số	2	2	1	2	3	1	2	2	3	2	3	1	1	2	1	1	1

A 8,68.

B 8,65.

C 8,58.

D 8,49.

D

❖ **Câu 23.** Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng như sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

Độ lệch chuẩn là

A 567,56.

B 163,84.

C 171,13.

D 147,30.

B

❖ **Câu 24.** Một mẫu số liệu thống kê có các tứ phân vị lần lượt là  $Q_1 = 22$ ,  $Q_2 = 27$ ,  $Q_3 = 32$ . Giá trị nào sau đây là giá trị bất thường của mẫu số liệu?

- (A) 30.                      (B) 8.                      (C) 6.                      (D) 46.

C

❖ **Câu 25.** Hãy tìm các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau

7    19    6    12    5    17    6    13

- (A) 5; 6.                      (B) 5; 6; 19.  
(C) Không có số liệu bất thường.                      (D) 5; 19.

C

❖ **Câu 26.** Hãy tìm các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau

20    52    86    80    44    49    57    41    44    55

- (A) 80; 86.                      (B) 41; 80; 86.                      (C) 80; 20; 86.                      (D) 86.

C

❖ **Câu 27.** Một mẫu số liệu thống kê có các tứ phân vị lần lượt là  $Q_1 = 53$ ,  $Q_2 = 55$ ,  $Q_3 = 61$ . Giá trị nào sau đây **không** phải là giá trị bất thường của mẫu số liệu?

- (A) 40.                      (B) 80.                      (C) 73.                      (D) 73,5.

C

❖ **Câu 28.** Một mẫu số liệu thống kê có các tứ phân vị lần lượt là  $Q_1 = 3$ ,  $Q_2 = 7$ ,  $Q_3 = 12$ . Giá trị nào sau đây là giá trị bất thường của mẫu số liệu?

- (A) 22.                      (B) -8,5.                      (C) 26.                      (D) 25,5.

C

❖ **Câu 29.** Hãy tìm các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau

10    59    67    72    73    76    88    92    106    111    115    169

- (A) 169.                      (B) 115; 169.                      (C) 111; 169.                      (D) 10; 169.

D

❖ **Câu 30.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

-3    5    10    12    14    18    24    26    49    60

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) -3 là giá trị bất thường duy nhất.  
(B) 60 là giá trị bất thường duy nhất.  
(C) Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.  
(D) Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

B

❖ **Câu 31.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

10 21 21 23 25 26 28 42

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A 10 là giá trị bất thường duy nhất.
- B 42 là giá trị bất thường duy nhất.
- C Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
- D Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

D

⇨ **Câu 32.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

52 47 55 81 61 49 59

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A 81 là giá trị bất thường duy nhất.
- B 47 là giá trị bất thường duy nhất.
- C Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
- D Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

A

⇨ **Câu 33.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

8 10 13 13 14 16 27

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A 8 là giá trị bất thường duy nhất.
- B 27 là giá trị bất thường duy nhất.
- C Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
- D Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

B

⇨ **Câu 34.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

44 51 36 19 40 69 49 46

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A 19 là giá trị bất thường duy nhất.
- B 69 là giá trị bất thường duy nhất.
- C Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
- D Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

D

⇨ **Câu 35.** Cho mẫu số liệu thống kê sau

20 22 22 25 28 32 34 43

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A 20 là giá trị bất thường duy nhất.
- B 43 là giá trị bất thường duy nhất.
- C Không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
- D Mẫu số liệu có nhiều giá trị bất thường.

C



## Bài tập tự luận (bổ sung)

✧ **Bài 1.** Cho mẫu số liệu gồm 15 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu

- Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 3.
- Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 3.

✧ **Bài 2.** Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Số thửa ruộng	5	8	11	10	6

- Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

✧ **Bài 3.** Số máy tính bán được trong 7 tháng liên tiếp của một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau:

83	79	92	71	69	83	74
----	----	----	----	----	----	----

- Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

✧ **Bài 4.** Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

✧ **Bài 5.** Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số ngày	0	1	2	3	4	5
Số xe bán	2	13	15	12	7	3

- Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

✧ **Bài 6.** Bảng sau đây ghi lại tốc độ (km/h) của 20 chiếc ô tô.

40	65	70	68	62	75	80	83	82	69
73	75	85	72	67	88	110	85	72	63

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

✧ **Bài 7.** Trên hai con đường  $A$  và  $B$ , trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau:

Con đường  $A$ :

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường  $B$ :

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79	74	60
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70	69	63

- Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ô tô trên mỗi con đường  $A, B$ .
- Theo em thì chạy xe trên con đường nào an toàn hơn?

✧ **Bài 8.** Hai lớp 10A và 10B của một trường THPT cùng làm bài thi môn Toán, chung một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm	3	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10A	7	9	3	3	7	12	4	45

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10B	6	6	7	8	9	5	4	45

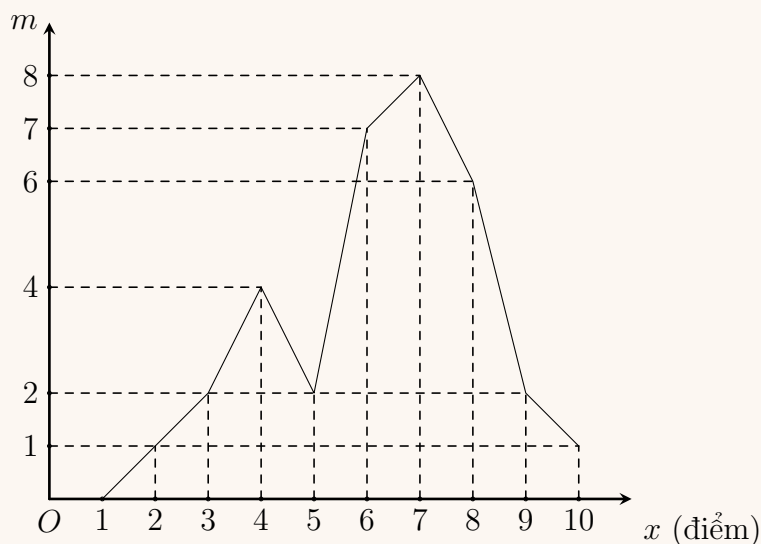
- Hãy tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn từ các bảng phân bố tần số đã cho (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- Xét xem kết quả bài thi môn Toán của lớp nào đồng đều hơn?

✧ **Bài 9.** Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng  $A$  trong năm 2006 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

✧ **Bài 10.** Cho biểu đồ biểu diễn kết quả học tập của học sinh trong một lớp qua một bài kiểm tra.



Từ biểu đồ trên hãy

- Viết mẫu số liệu thống kê kết quả học tập của học sinh một lớp nhận được từ biểu đồ đã cho.
- Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.
- Tìm khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu đó.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

### Câu hỏi trắc nghiệm (bổ sung)

❖ **Câu 36.** Cho dãy số liệu thống kê: 1,2,3,4,5,6,7. Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là.

- A** 1.                      **B** 2.                      **C** 3.                      **D** 4.

❖ **Câu 37.** Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Sản lượng	20	21	22	23	24	
Số thửa ruộng	5	8	11	10	6	$N = 40$

Tính độ lệch chuẩn.

- A**  $s \approx 1,34$  (tạ).                      **B**  $s \approx 1,24$  (tạ).                      **C**  $s \approx 1,54$  (tạ).                      **D**  $s \approx 1,64$  (tạ).

❖ **Câu 38.** Tiền thưởng (đơn vị là triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ty được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây.

Tiền thưởng (triệu đồng)	2	3	4	5	6	Cộng
Số cán bộ và nhân viên	5	15	10	6	7	43

Tính độ lệch chuẩn.

**A**  $s \approx 1,23$  (triệu đồng).

**B**  $s \approx 1,24$  (triệu đồng).

**C**  $s \approx 1,25$  (triệu đồng).

**D**  $s \approx 1,26$  (triệu đồng).

❖ **Câu 39.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu.

**A**  $R = 7$ .

**B**  $R = 4$ .

**C**  $R = 8$ .

**D**  $R = 6$ .

❖ **Câu 40.** Cho biết giá trị thành phẩm quy ra tiền (nghìn đồng) trong một tuần lao động của 7 công nhân là

$$180, 190, 190, 200, 210, 210, 220.$$

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

**A** 190.

**B** 20.

**C** 210.

**D** 200.

❖ **Câu 41.** Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ty cho bởi bảng phân bố tần số sau

Tiền thưởng	2	8	4	5	6
Số cán bộ và nhân viên	5	15	10	6	7

Phương sai của bảng số liệu trên thuộc khoảng nào dưới đây?

**A** (4,1; 4,2).

**B** (4,2; 4,3).

**C** (4,3; 4,4).

**D** (4,4; 4,5).

❖ **Câu 42.** Khách đến tham quan một điểm du lịch trong mỗi tháng được thống kê trong bảng sau đây.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Khách	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950

Tính độ lệch chuẩn  $s$  của bảng trên.

**A**  $s \approx 211$ .

**B**  $s \approx 209,3$ .

**C**  $s \approx 403,54$ .

**D**  $s \approx 207,51$ .

❖ **Câu 43.** Độ lệch chuẩn bằng

**A** bình phương của phương sai.

**B** căn bậc hai số học của phương sai.

**C** một nửa của phương sai.

**D** hai lần phương sai.

❖ **Câu 44.** Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây

Sản lượng	20	21	22	23	24
Số thửa ruộng	5	8	11	10	6

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

**A** 3.

**B** 4.

**C** 1.

**D**  $s^2$ .

❖ **Câu 45.** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

**A** Phương sai luôn là một số không âm.

- B Phương sai không có đơn vị.
- C Phương sai càng lớn thì độ phân tán càng lớn.
- D Độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.

❖ **Câu 46.** Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau đây.

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Số học sinh	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Tính độ lệch chuẩn.

- A  $s \approx 1,76$  (điểm).
- B  $s \approx 1,77$  (điểm).
- C  $s \approx 1,78$  (điểm).
- D  $s \approx 1,79$  (điểm).

❖ **Câu 47.** Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21 17 22 18 20 17 15 13 15 20 15 12 18 17 25 17 21 15 12 18 16 23 14 18 19 13 16 19 18 17.

Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu.

- A 25.
- B 13.
- C 26.
- D 12.

❖ **Câu 48.** Điểm trung bình từng môn học của hai học sinh An và Bình trong năm học vừa qua được cho trong bảng sau.

Môn	Điểm của An	Điểm của Bình
Toán	8	8,5
Vật Lý	7,5	9,5
Hóa học	7,8	9,5
Sinh học	8,3	8,5
Ngữ văn	7	5
Lịch sử	8	5,5
Địa lý	8,2	6
Tiếng Anh	9	9
Thể dục	8	9
Công nghệ	8,3	8,5
Giáo dục công dân	9	10

Hỏi ai “học lệch” hơn?

- A An.
- B Bình.
- C Mức độ học lệch của hai người như nhau.
- D Chưa đủ cơ sở kết luận.

❖ **Câu 49.** Bảng sau đây cho ta biết số cuốn sách mà học sinh của một lớp ở trường Trung học phổ thông đã đọc trong năm 2016.

Số sách	1	2	3	4	5	6	Cộng
Số học sinh	10	$x$	8	6	$y$	3	40

Tính  $x$  và  $y$ , biết rằng phương sai của bảng số liệu  $s^2 \approx 2,52$ .

- A  $x = 7, y = 6$ .     
 B  $x = 6, y = 7$ .     
 C  $x = 8, y = 5$ .     
 D  $x = 5, y = 8$ .

↔ **Câu 50.** Cho dãy số liệu thống kê:  $x, 21, 22, 23, 24, y$ . Tìm  $x, y$  biết số trung bình cộng bằng 22,5 và khoảng biến thiên của mẫu số liệu bằng 5.

- A  $x = -25$  và  $y = -20$ .     
 B  $x = -20$  và  $y = -25$ .  
 C  $x = 20$  và  $y = 25$ .     
 D  $x = 25$  và  $y = 20$ .

# Chương 6

## HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

### Bài 16

### HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

#### A Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Ước tính số cá thể trong quần thể

Trong nghiên cứu về những quần thể động vật, một vấn đề quan trọng là ước tính số cá thể trong quần thể. Một phương pháp được sử dụng là đánh dấu và bắt lại.

Phương pháp:

- Chọn  $M$  cá thể từ quần thể, đánh dấu và thả chúng trở lại quần thể.
- Sau một thời gian, chọn ngẫu nhiên  $n$  cá thể trong quần thể. Gọi  $k$  là số cá thể được đánh dấu trong  $n$  cá thể đó.

Khi đó, xét phép thử: Chọn ngẫu nhiên một cá thể từ quần thể và xét biến cố  $A$ : “Cá thể có được đánh dấu”. Gọi  $N$  là số cá thể trong quần thể, khi đó xác suất của  $A$  là  $P(A) = \frac{M}{N}$ .

Trong  $n$  cá thể được chọn số cá thể được đánh dấu là  $k$  xấp xỉ với  $n \cdot P(A) = n \cdot \frac{M}{N}$ . Do đó  $N$  được tính bởi công thức

$$N \approx M \cdot \frac{n}{k}.$$

#### 2. Hoạt động trải nghiệm nội dung hình học

Trong trải nghiệm nội dung hình học, ta thường sử dụng các định lý sau

- Định lý sin “Trong tam giác  $ABC$  có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .”
- Định lý Cô-sin “Trong tam giác  $ABC$  có các khẳng định sau

☑  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ .

☑  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ .

☑  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$ .”

#### 3. Tiết kiệm & đầu tư

Gửi  $A$  đồng vào ngân hàng với lãi suất kép  $r\%/năm$ , sau  $n$  năm, số tiền nhận được tính theo công thức:

$$T = A(1 + r\%)^n$$

## 4. Thuế thu nhập cá nhân

- ☑ Thuế thu nhập cá nhân là khoản tiền (thuế) mà người có thu nhập phải trích nộp một phần vào ngân sách nhà nước sau khi đã tính các khoản được giảm trừ. Các khoản giảm trừ thông thường bao gồm:
  - Giảm trừ bản thân;
  - Giảm trừ người phụ thuộc.
- ☑ Thuế suất thuế thu nhập cá nhân là tỉ lệ phần trăm dùng để tính số thuế phải nộp căn cứ vào phần thu nhập tính thuế của mỗi người.
- ☑ Thu nhập tính thuế = Thu nhập chịu thuế – Các khoản giảm trừ.
- ☑ Thuế thu nhập cá nhân = Thu nhập tính thuế × Thuế suất.

## B Các ví dụ minh họa

### Dạng 1. Ước tính số cá thể

Dựa vào công thức ước tính số cá thể để xác định số cá thể trong quần thể ở một số trường hợp nhất định

$$N \approx M \cdot \frac{n}{k},$$

trong đó  $M$  là số cá thể đánh dấu,  $n$  là số cá thể bắt lại,  $k$  là số cá thể có đánh dấu trong  $n$  cá thể bắt lại.

### VÍ DỤ MINH HỌA

🔗 **Ví dụ 1.** Ước tính số lượng cá trong hồ. Biết rằng, lần thứ nhất người ta đánh bắt được 1500 con và đánh dấu chúng, sau đó thả lại xuống hồ. Lần thứ hai người ta đánh bắt được 1800 con và nhận thấy trong 1800 con đó có 100 con được đánh dấu.

### Lời giải.

.....

.....

🔗 **Ví dụ 2.** Ước tính số lượng lạc có trong túi. Biết rằng:

- a) Lấy ra một cốc lạc trong túi, thấy có 85 hạt và đánh dấu chúng.
- b) Đổ số lạc đã được đánh dấu vào lại trong túi và xáo trộn đều.
- c) Lấy ra nửa cốc lạc, thấy có 43 hạt lạc và số hạt lạc có đánh dấu là 6.

### Lời giải.

.....

.....



🔗 **Ví dụ 3.** Trong tiết thực hành trải nghiệm của lớp 10A, tổ của Hà đã thực hiện các bước để ước lượng số lạc có trong túi. Tuy nhiên, lại lặp lại bước 3 thêm hai lần: lần hai lấy 1 cốc lạc, lần ba lấy 1,5 cốc lạc và thu được kết quả như sau:

Lần thứ	Số hạt ( $n$ )	Số hạt có đánh dấu ( $k$ )
1	51	4
2	103	11
3	155	16

Giả sử số hạt lạc trong túi đựng là  $N = 1000$  và số hạt được đánh dấu là  $M = 100$ . Kí hiệu  $\widehat{N}$  là số quy tròn đến hàng đơn vị của đại lượng  $M \cdot \frac{n}{k}$ .

a) Dựa vào dữ liệu, hãy hoàn thành bảng tính theo mẫu sau:

Lần	$N$	$M$	$n$	$k$	$\widehat{N}$	Sai số tuyệt đối	Sai số tương đối
1	1000	100	51	4	?	?	?
2	1000	100	?	?	?	?	?
3	1000	100	?	?	?	?	?

b) Em có nhận xét gì về sai số của việc tính xấp xỉ số hạt lạc trong túi khi  $n$  càng lớn?

### 🗨️ Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	--

### 📄 Dạng 2. Kiểm tra tính đúng đắn của một kết quả hình học thông qua những ví dụ cụ thể

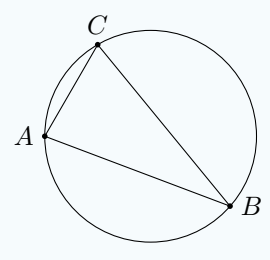
Sử dụng các thước đo độ dài, góc và máy tính bỏ túi, có thể kiểm tra:

- 🕒 Định lý sin đối với một tam giác nội tiếp trong một đường tròn.
- 🕒 Định lý cô-sin đối với một tam giác.
- 🕒 Đẳng thức  $ah_a = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  đối với tam giác  $ABC$  với  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh tam giác,  $p$  là nửa chu vi.

### 📝 VÍ DỤ MINH HỌA

◊ Ví dụ 1.

Cho tam giác  $ABC$  như hình vẽ, có  $AC = 1,9\text{cm}$ ,  $BC = 3,9\text{cm}$ ,  $\widehat{BCA} = 69^\circ$ .



- a) Tính độ dài cạnh  $AB$  và kiểm tra tính chính xác bằng thước đo độ dài.
- b) Tính số đo góc  $\widehat{BAC}$  và kiểm tra tính chính xác bằng thước đo độ.
- c) Tính chiều cao  $h_a$  của tam giác  $ABC$  và kiểm tra tính chính xác bằng thực đồ.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

**Dạng 3.** Sử dụng kết quả hình học để tính toán trong đo đạc thực tế

Sử dụng các định lý, hệ thức lượng trong tam giác khi tính toán số đo thực tế.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

◊ Ví dụ 1. Đo chiều cao của một cái tháp mà không thể đến được chân tháp.

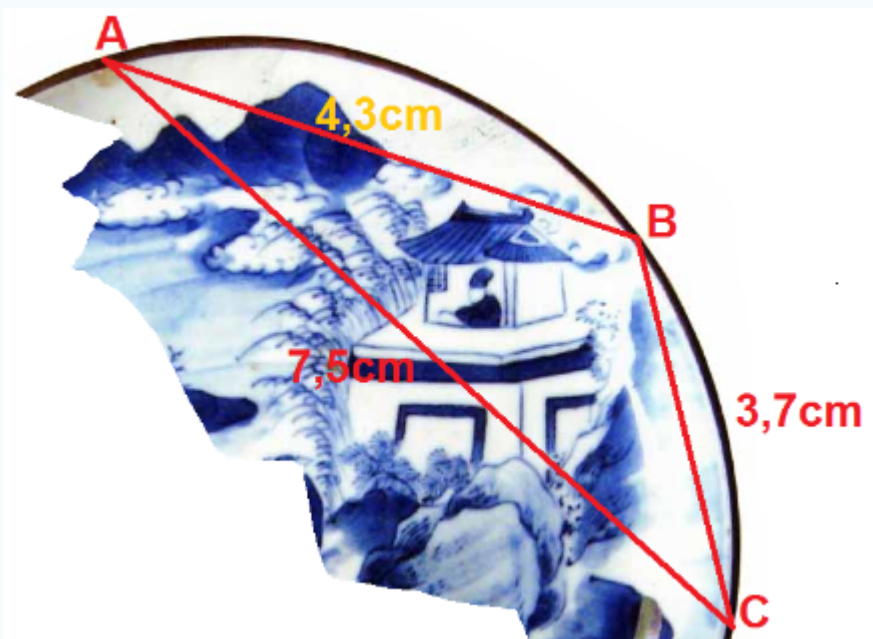
💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--



Two large sections of dotted lines for student writing, separated by a vertical line.

❖ Ví dụ 3. Bài toán khảo cổ học.



Khi khai quật một ngôi mộ cổ, người ta tìm được một mảnh của 1 chiếc đĩa phẳng hình tròn bị





.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

⇨ **Ví dụ 2.** Cô Lan có 511 000 000 đồng và dự định đầu tư vào chứng khoán của công ty A. Giá cổ phiếu và số cổ phiếu cô Lan mua ở một số thời điểm được cho trong bảng sau

Thời gian	10-06-2020	27-07-2020	30-12-2020	10-05-2021
Giá mỗi cổ phiếu (đồng)	102 000	86 000	108 800	91 000
Số cổ phiếu	5 000	5 000	5 000	5 000

- a) Nếu cô Lan bán 5000 cổ phiếu của công ty A vào các thời điểm 27-07-2020, 30-12-2020 và 10-05-2021 thì tổng số tiền tương ứng cô Lan thu được là bao nhiêu?
- b) Nếu ngày 10-06-2020 cô Lan dùng số tiền 511 000 000 để gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm cho kì hạn một tháng thì vào ngày 10-05-2021, tổng số tiền cô Lan nhận được là bao nhiêu?

🗨️ **Lời giải.**

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

### 📁 **Dạng 5. Thuế thu nhập cá nhân**

Ta sử dụng hai kết quả sau đây

- 👉 Thu nhập tính thuế = Thu nhập chịu thuế – Các khoản giảm trừ.
- 👉 Thuế thu nhập cá nhân = Thu nhập tính thuế × Thuế suất.

📝 **VÍ DỤ MINH HỌA**

⇨ **Ví dụ 1.** Thuế suất biểu lũy tiến từng phần được phân loại chi tiết trong bảng sau

Bậc thuế	Phần thu nhập tính thuế/tháng (triệu đồng)	Thuế suất (%)
1	Đến 05	5
2	Trên 05 đến 10	10
3	Trên 10 đến 18	15
4	Trên 18 đến 32	20
5	Trên 32 đến 52	25
6	Trên 52 đến 80	30
7	Trên 80	35

- a) Hãy lập công thức hàm số bậc nhất mô tả sự phụ thuộc của thuế thu nhập cá nhân vào phần thu nhập tính thuế/tháng với mức thu nhập tính thuế/tháng không quá 5 triệu đồng và vẽ đồ thị hàm số này.
- b) Hãy lập công thức hàm số bậc nhất mô tả sự phụ thuộc của thuế thu nhập cá nhân vào phần thu nhập tính thuế/tháng với mức thu nhập tính thuế/tháng trên 5 triệu đồng và không quá 10 triệu đồng. Vẽ đồ thị hàm số này.
- c) Anh Nam làm việc ở một ngân hàng với mức thu nhập chịu thuế đều đặn là 28 triệu đồng/tháng và có một người phụ thuộc (một con nhỏ dưới 18 tuổi). Hãy giúp anh Nam tính số thuế thu nhập cá nhân mà anh phải nộp trong một năm, biết rằng các khoản giảm trừ được tính bao gồm giảm trừ bản thân cho anh Nam (11 triệu đồng/tháng) và giảm trừ người phụ thuộc (4,4 triệu đồng/tháng cho mỗi người phụ thuộc).

### Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### **C** Câu hỏi trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Để ước lượng số cá thể cá chép trong một ao nuôi, người ta tiến hành bắt 50 cá thể, sau đó đánh dấu và thả nó lại xuống ao. Một thời gian sau, người ta bắt 40 cá thể và thấy có 20 cá thể được đánh dấu. Kết quả ước lượng số cá thể cá chép trong ao là

**(A)** 125.                      **(B)** 25.                      **(C)** 100.                      **(D)** 85.

❖ **Câu 2.** Một người lần đầu giăng lưới và bắt được một số cá, sau đó đánh dấu số cá bắt được và thả trở lại vào hồ. Sau một thời gian ổn định thì người này lại giăng lưới và bắt được 52 con trong đó có thấy có 18 con được đánh dấu. Biết rằng người này ước lượng trong hồ có khoảng 130 con cá, hỏi số cá được đánh dấu sau khi giăng được ở lần đầu tiên là bao nhiêu?

**(A)** 45.                      **(B)** 375.                      **(C)** 4.                      **(D)** 65.

❖ **Câu 3.** Để nghiên cứu kích thước quần thể của loài chuột đồng ở bãi cỏ thì ở lần thứ nhất, các nhà khoa học bắt được 250 con và sau đó đánh dấu, thả lại vào bãi cỏ. Hai ngày sau, ở lần thứ hai các nhà khoa học bắt được 288 con và thấy có 80% số con được đánh dấu. Hỏi số lượng chuột đồng trong bãi cỏ khoảng bao nhiêu con?

**(A)** 200.                      **(B)** 900.                      **(C)** 265.                      **(D)** 313.

❖ **Câu 4.** Trong lần bắt đầu tiên ông A thu được 8 cá thể, sau đó đánh dấu và thả lại vào quần thể. Sau vài ngày ông A quay lại và bắt lần thứ hai và thu được 11 cá thể. Sau khi tính toán, ông A cho rằng quần thể này có khoảng 29 cá thể. Khoảng cách giữa 2 lần bắt là ngắn, không đủ cho số lượng cá thể thay đổi. Hỏi số lượng cá thể bị bắt có đánh dấu ở lần bắt thứ hai là bao nhiêu?

**(A)** 7.                      **(B)** 3.                      **(C)** 21.                      **(D)** 40.

❖ **Câu 5.** Sử dụng phương pháp bắt, đánh dấu - thả - bắt lại để xác định số lượng cá thể chim trong khu rừng, người ta ghi lại trong bảng sau

Lần nghiên cứu	Lần 1	Lần 2	Lần 3	Lần 4
Số cá thể được bắt và đánh dấu	13	9	12	10
Số cá thể bắt lại	6	12	7	9
Số cá thể có đánh dấu	3	4	3	3

Kết luận nào sau đây là đúng?

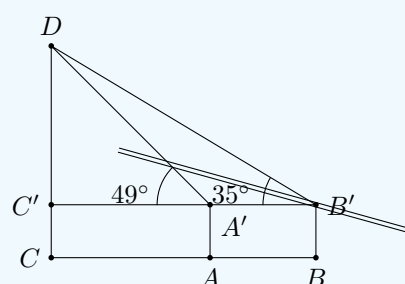
- A** Ở lần thứ nhất, số lượng cá thể của quần thể là 39.
- B** Ở lần thứ hai, số lượng cá thể của quần thể là 160.
- C** Số lượng cá thể của quần thể đang tăng lên.
- D** Ở lần thứ tư, số lượng cá thể của quần thể là 270.

❖ **Câu 6.** Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: " Một người có chiều cao từ chân đến mắt là  $1.6m$ . Người ta dùng thước dây và giác kế đo được khoảng cách từ người này đứng cách cây  $10m$  và nhìn ngọn cây và gốc cây một góc  $30^\circ$ ". Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây?

- A**  $5,78m$ .
- B**  $6,22m$ .
- C**  $3,42m$ .
- D**  $5,42m$ .

❖ **Câu 7.**

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm  $A, B$  trên mặt đất có khoảng cách  $AB = 12m$  cùng thẳng hàng với chân  $C$  của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao  $h = 1,3m$ . Gọi  $D$  là đỉnh tháp và hai điểm  $A', B'$  cùng thẳng hàng với điểm  $C'$  thuộc chiều cao  $CD$  của tháp. Người ta đo được góc  $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$  và góc  $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$ . Hãy tính chiều cao  $CD = C'D + C'C$  của tháp đó.



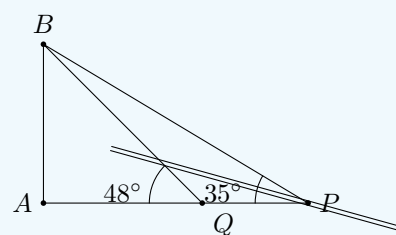
- A**  $30,7m$ .
- B**  $25,7m$ .
- C**  $32m$ .
- D**  $31,7m$ .

❖ **Câu 8.** Một cây cột điện cao  $20m$  được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc  $17^\circ$ . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cọc đến cuối dốc bằng  $72m$ .

- A**  $83,4m$ .
- B**  $34,7m$ .
- C**  $75,3m$ .
- D**  $71,7m$ .

❖ **Câu 9.**

Hai chiếc tàu thủy  $P$  và  $Q$  cách nhau  $300m$ . Từ  $P$  và  $Q$  thẳng hàng với chân  $A$  của tháp hải đăng  $AB$  ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao  $AB$  của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 35^\circ$ ,  $\widehat{BQA} = 48^\circ$ . Tính chiều cao của tháp.



- A**  $568,5m$ .
- B**  $445,7m$ .
- C**  $375,2m$ .
- D**  $398,5m$ .

❖ **Câu 10.** Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao  $10\text{ km}$  nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là  $28^\circ$  và  $55^\circ$  (hình vẽ). Tính

khoảng cách giữa hai thị trấn.

- A** 11,79km.      **B** 15,7km.      **C** 21,9km.      **D** 8,5km.

❖ **Câu 11.** Ông Hùng dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Số tiền  $x$  (triệu đồng,  $x \in \mathbb{N}$ ) nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm (mới rút lãi) thì số tiền lãi có thể mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là

- A** 280.      **B** 289.      **C** 300.      **D** 308.

❖ **Câu 12.** Một bác nông dân vừa bán trâu được số tiền là 32 000 000 đồng. Do chưa cần dùng đến số tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 5,7% một năm (lãi kép) thì sau 4 năm 6 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi? (Biết rằng bác nông dân đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kì trước).

- A** 41 208 674 đồng.      **B** 40 208 000 đồng.      **C** 48 416 000 đồng.      **D** 52 701 729 đồng.

❖ **Câu 13.** Kể từ ngày 1/1/2021, cứ vào ngày mùng 1 hàng tháng, ông A ra gửi ngân hàng số tiền là  $x$  (đồng) với lãi suất 0,5%/ tháng. Biết tiền lãi của tháng trước được cộng vào tiền gốc của tháng sau. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $x$  để đến ngày 1/1/2022 khi ông A rút cả gốc và lãi thì được số tiền lãi hơn 10 triệu đồng? (Kết quả lấy làm tròn đến nghìn đồng).

- A** 25173000.      **B** 21542000.      **C** 21541000.      **D** 25174000.

❖ **Câu 14.** Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút ra 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi trong ngân hàng (làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

- A** 420.      **B** 410.      **C** 400.      **D** 390.

❖ **Câu 15.** Ông X gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông X tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông X đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông X gửi tiền).

- A** 217,695 (triệu đồng).      **B** 231,815 (triệu đồng).  
**C** 190,271 (triệu đồng).      **D** 197,201 (triệu đồng).