LÊ HỒNG ĐỨC – VƯƠNG NGỌC
NGUYỄN TUẤN PHONG – LÊ VIẾT HOÀ – LÊ BÍCH NGỌC

CÁC BÀI GIẢNG TRỌNG TÂM THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

TOÁN 12

LỜI NÓI ĐẦU

Bộ giáo dục và Đào tạo đã công bố "*Hướng dẫn ôn tập thi môn Toán THPT*" và "*Cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT môn Toán, đề thi đại học và cao đẳng môn Toán*", cụ thể:

CẤU TRÚC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT

I. Phần chung cho tất cả các thí sinh (7 điểm)

Câu 1 (3 điểm):

- Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số.
- Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số: chiều biến thiên của hàm số, cực trị, tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng)…

Câu 2 (3 điểm):

- Hàm số, phương trình, bất phương trình mũ và logarit.
- Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tìm nguyên hàm, tính tích phân.
- Bài toán tổng hợp.

Câu 3 (1 điểm): Hình học không gian (tổng hợp): tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay; tính thể tích của khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

II. Phần riêng (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn:

Câu 4a (2 điểm):

- Xác định toạ độ của điểm, vectơ – Mặt cầu.
- Viết phương trình đường thẳng, mặt phẳng.
- Tính góc, tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu 5a (1 điểm):

- Số phức: môđun của số phức, các phép toán trên số phức. Căn bậc hai của số thực âm. Phương trình bậc hai hệ số thực có biệt thức Δ âm.
- Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

2. Theo chương trình nâng cao:

Câu 4b (2 điểm): Phương pháp toạ độ trong không gian

- Xác định toạ độ của điểm, vectơ – Mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.
- Tính góc, tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng.
- Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu 5b (1 điểm):

- Số phức: môđun của số phức, các phép toán trên số phức. Căn bậc hai của số phức. Phương trình bậc hai hệ số phức. Dạng lượng giác của số phức.
- Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất và một số yếu tố liên quan.
- Sự tiếp xúc của hai đường cong.
- Hệ phương trình mũ và logarit.
- Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

CẤU TRÚC CỦA MỘT ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

I. Phần chung cho tất cả các thí sinh (7 điểm)

Câu 1 (2 điểm):

- Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số.
- Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số: chiều biến thiên của hàm số, cực trị, tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng)…

Câu 2 (2 điểm):

- Phương trình, bất phương trình và hệ đại số.
- Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu 3 (1 điểm):

- Tìm giới hạn.
- Tìm nguyên hàm. Tính tích phân.
- Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu 4 (1 điểm): Hình học không gian (tổng hợp): quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay; tính thể tích của khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu 5 (1 điểm): Toán tổng hợp.

II. Phần riêng (3 điểm)

1. Theo chương trình chuẩn:

Câu 6a (2 điểm): Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian

- Xác định toạ độ của điểm, vectơ.
- Đường tròn, elíp, mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.
- Tính góc, tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu 7a (1 điểm):

- Số phức.
- Tổ hợp, xác suất, thống kê.
- Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao:

Câu 6b (2 điểm): Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian

- Xác định toạ độ của điểm, vectơ.
- Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.
- Tính góc, tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng. Khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu 7b (1 điểm):

- Số phức.
- Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất và một số yếu tố liên quan.
- Sự tiếp xúc của hai đường cong.
- Hệ phương trình mũ và logarit.
- Tổ hợp, xác suất, thống kê.
- Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Dựa vào đó Nhóm Cự Môn chúng tôi xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

Các bài giảng trọng tâm – Môn Toán (gồm 3 tập)

miêu tả chi tiết phương pháp giải cho các dạng toán thường gặp trong các đề thi tốt nghiệp THPT, đại học và cao đẳng môn Toán.

Với môn Toán 12 phần kiến thức trọng tâm:

- *Giải tích* bao gồm các chương I, một phần kiến thức của chương II (phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit), chương III, chương IV.
- *Hình học* có một phần kiến thức của chương I (tính thể tích của khối lăng trụ, khối chóp), một phần kiến thức của chương II (tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay; tính thể tích của khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu), chương III.

Từ đó, cuốn *Các bài giảng trọng tâm – Môn Toán* 12 được chia thành 2 phần:

Phần I: Giải tích, bao gồm các chủ đề:

A – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Chủ đề 1 - Tính đơn điệu của hàm số
Chủ đề 2 - Cực trị của hàm số
Chủ đề 3 - Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số
Chủ đề 4 - Phép tịnh tiến hệ toạ độ
Chủ đề 5 - Đường tiệm cận của đồ thị hàm số
Chủ đề 6 - Đồ thị hàm số và các bài toán liên quan

B – MŨ VÀ LÔGARIT

Chủ đề 7 - Hàm số mũ và lôgarit
Chủ đề 8 - Phương trình mũ và lôgarit
Chủ đề 9 - Hệ phương trình mũ và lôgarit
Chủ đề 10 - Bất phương trình mũ và lôgarit

C – NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chủ đề 11 - Nguyên hàm
Chủ đề 12 - Tích phân
Chủ đề 13 - Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng, thể tích vật thể

D – SỐ PHỨC

Phần II: Hình học, bao gồm các chủ đề:

Chủ đề 1 - Khối đa diện và thể tích của chúng
Chủ đề 2 - Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón
Chủ đề 3 - Tọa độ của điểm, vectơ và các yếu tố liên quan
Chủ đề 4 - Mặt phẳng và các bài toán liên quan
Chủ đề 5 - Đường thẳng và các bài toán liên quan
Chủ đề 6 - Mặt cầu và các bài toán liên quan

Mỗi chủ đề được chia thành ba phần:

A. ***Kiến thức cần nhớ***: Nhắc lại các nội dung kiến thức cơ bản mà các em học sinh cần nhớ.

B. ***Phương pháp giải các dạng toán liên quan***: Được trình bày theo phong cách thuật toán dưới dạng các bước thực hiện. Và ở mỗi dạng toán cơ bản đều có thí dụ minh hoạ cùng nhận xét để giúp các em học sinh củng cố kiến thức.

C. ***Các bài toán chọn lọc***: Bao gồm các ví dụ có tính tổng hợp cao và được trích ra từ các đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng.

Với phong cách trình bày như vậy, cuốn tài liệu sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các thầy, cô giáo và với các em học sinh nó sẽ cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.

Để cuốn tài liệu ngày càng hoàn hảo hơn Nhóm Cự Môn chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Hà nội, ngày 11 tháng 9 năm 2009

Chủ biên LÊ HỒNG ĐỨC

PHẦN I: GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1 – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên khoảng I thì:

a. Hàm số f(x) là đồng biến trên khoảng I khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc I, ta có:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0 \text{, với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ và } x + \Delta x \in I.$$

b. Hàm số f(x) là nghịch biến trên khoảng I khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc I, ta có:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0 \text{, với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ và } x + \Delta x \in I.$$

Từ đó, ta có kết quả:

Cho hàm số y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu hàm số* f(x) *đồng biến trên khoảng* I *thì* $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

b. *Nếu hàm số* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I *thì* $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

2. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

Định lí 1 *(Định lí Lagrange)*: *Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục trên* [a; b] *và có đạo hàm trên* (a; b) *thì tồn tại một điểm* $c \in (a; b)$ *sao cho*:

$$f(b) - f(a) = f'(c).(b - a) \qquad \text{hay} \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ỹ nghĩa của định lí Lagrăng: Xét cung AB của đồ thị hàm số y = f(x) với A(a; f(a)) và B(b; f(b)).

Hệ số góc của cát tuyến AB là:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Đẳng thức:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

có nghĩa là hệ số góc của tiếp tuyến của cung AB tại điểm (c; f(c)) bằng hệ số góc của cát tuyến AB. Vậy, nếu các giả thiết của định lí Lagrăng được thoả mãn thì tồn tại một điểm C của cung AB sao cho tiếp tuyến tại đó song song với cát tuyến AB.

Định lí 2: *Cho hàm số* y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu* f '(x) > 0, $\forall$x $\in$ I *thì* f(x) *đồng biến trên khoảng* I.

b. *Nếu* f '(x) < 0, $\forall$x $\in$ I *thì* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I.

c. *Nếu* f '(x) = 0, $\forall$x $\in$ I *thì* f(x) *không đổi trên khoảng* I.

Ta có mở rộng của định lí 2 như sau:

Định lí 3: *Cho hàm số* y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu* f '(x) $\geq$ 0, $\forall$x $\in$ I, *và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng* I, *thì* f(x) *đồng biến trên khoảng* I.

b. *Nếu* f '(x) $\leq$ 0, $\forall$x $\in$ I, *và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng* I, *thì* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I.

Ta tóm tắt định lí 3 trong các bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
y'			+		
y			$\nearrow$		

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
y'			–		
y			$\searrow$		

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. KHÁI NIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa: *Cho hàm số* y = f(x) *xác định trên tập hợp* D (D $\subset \mathbb{R}$) *và* $x_0 \in$ D.

a. x_0 *gọi là một* ***điểm cực đại*** *của hàm số* y = f(x) *nếu tồn tại một khoảng* (a; b) *chứa điểm* x_0 *sao cho* (a; b) $\in$ D *và*:

$$f(x) < f(x_0)\ ,\ \text{với mọi } x \in (a; b)\backslash\{x_0\}.$$

Khi đó f(x_0) được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số f(x).

b. x_0 *gọi là một* ***điểm cực tiểu*** *của hàm số* y = f(x) *nếu tồn tại một khoảng* (a; b) *chứa điểm* x_0 *sao cho* (a; b) $\in$ D *và*:

$$f(x) > f(x_0)\ ,\ \text{với mọi } x \in (a; b)\backslash\{x_0\}.$$

Khi đó f(x_0) được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số f(x).

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***cực trị***.

2. ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Xét hàm số y = f(x) liên tục trên khoảng (a, b) và $x_0 \in$ (a; b).

Định lí 1: *Giả sử hàm số* y = f(x) *đạt cực trị tại điểm* x_0. *Khi đó, nếu f(x) có đạo hàm tại điểm* x_0 *thì* f'(x_0) = 0.

3. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Định lí 2: *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên khoảng* $(a\ ;\ b)$ *chứa điểm* x_0 *và có đạo hàm trên các khoảng* $(a;\ x_0)$ *và* $(x_0;\ b)$. *Khi đó*:

a. *Nếu* $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a;\ x_0)$ *và* $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (x_0;\ b)$ *thì hàm số* $f(x)$ *đạt cực tiểu tại điểm* x_0.

b. *Nếu* $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a;\ x_0)$ *và* $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (x_0;\ b)$ *thì hàm số* $f(x)$ *đạt cực đại tại điểm* x_0.

Nói một cách vắn tắt: *Nếu khi* x *qua* x_0, *đạo hàm đổi dấu thì điểm* x_0 *là một điểm cực trị.*

Ta tóm tắt định lí 2 trong các bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y			$\searrow$	CT	$\nearrow$		

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y			$\nearrow$	CĐ	$\searrow$		

Từ định lí 2 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây:

Quy tắc 1: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3: Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3: *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp một trên khoảng* $(a;\ b)$ *chứa điểm* x_0, $f'(x_0) = 0$ *và* $f(x)$ *có đạo hàm cấp hai khác* 0 *tại điểm* x_0.

a. *Nếu* $f''(x_0) < 0$ *thì hàm số đạt cực đại tại điểm* x_0.

b. *Nếu* $f''(x_0) > 0$ *thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm* x_0.

Từ định lí 3 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây:

Quy tắc 2: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các nghiệm x_i $(i = 1, 2, ...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Với mỗi i ta tính $f''(x_i)$, khi đó:

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên tập* D.

a. *Nếu tồn tại một điểm* $x_0 \in D$ *sao cho*:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ với mọi } x \in D$$

thì số $M = f(x_0)$ *được gọi là* ***giá trị lớn nhất*** *của hàm số* $y = f(x)$ *trên tập* D *nếu, kí hiệu* $M = \max_{x \in D} f(x)$.

b. *Nếu tồn tại một điểm* $x_0 \in D$ *sao cho*:

$$f(x) \ge f(x_0) \text{ với mọi } x \in D$$

thì số $m = f(x_0)$ *được gọi là* ***giá trị nhỏ nhất*** *của hàm số* $y = f(x)$ *trên tập* D *nếu, kí hiệu* $m = \min_{x \in D} f(x)$.

IV. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

1. PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ VÀ CÔNG THỨC CHUYỂN HỆ TỌA ĐỘ

Cho điểm $I(x_0; y_0)$ và điểm $M(x; y)$ trong hệ toạ độ Oxy, khi đó trong hệ toạ độ IXY điểm $M(X; Y)$ sẽ có toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG CONG ĐỐI VỚI HỆ TỌA ĐỘ MỚI

Phương trình của đường cong $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ IXY có dạng:

$$Y = f(X + x_0) - y_0.$$

V. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Định nghĩa 1: *Đường thẳng* $y = y_0$ *được gọi là* ***đường tiệm cận ngang*** (gọi tắt là *tiệm cận ngang*) *của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu*:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0.$$

Định nghĩa 2: *Đường thẳng* $x = x_0$ *được gọi là* ***đường tiệm cận đứng*** (gọi tắt là *tiệm cận đứng*) *của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu*:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Định nghĩa 3: *Đường thẳng* $y = ax + b$ *được gọi là* ***đường tiệm cận xiên*** (gọi tắt là *tiệm cận xiên*) *của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu*:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Quy tắc: Giả sử khi $x \to \infty$ thì $f(x) \to \infty$.

Ta tìm $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ (1)

- Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc bằng 0 thì đồ thị không có tiệm cận xiên. Trái lại ta đi tìm tiếp $b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$. (2)
- Nếu giới hạn (2) không tồn tại thì đồ thị không có tiệm cận xiên. Trái lại ta kết luận đồ thị nhận đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ làm tiệm cận xiên.

VI. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đường lối tổng quát để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Phương pháp

Ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

a. Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực (nếu có) của hàm số. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

b. Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm:

- Tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có).
- Điền các kết quả vào bảng biến thiên:

x	
y'	
y	

Bước 3: Vẽ đồ thị hàm số:

a. Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

b. Xác định một số điểm đặc biệt của thường là các giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).

c. Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng và tâm đối xứng của đồ thị (nếu có, không yêu cầu chứng minh).

☞ ***Chú ý***: Khi vẽ đồ thị các em học sinh cần lưu ý rằng "*Dáng của đồ thị tương ứng với mũi tên trong bảng biến thiên*".

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dạng toán 1: Xét tính đơn điệu của hàm số

Phương pháp

Để xét tính đơn điệu của hàm số y = f(x), ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính đạo hàm y', rồi tìm các điểm tới hạn (thông thường là việc giải phương trình y' = 0).

Bước 3: Tính các giới hạn (nếu cần).

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số. Từ đó, đưa ra lời kết luận.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp phương trình f'(x) = 0 vô nghiêm, tức là hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến, ta có thể bỏ qua việc lập bảng biến thiên.

Thí dụ 1. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 6x^2 + 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy, ta có kết luận:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Khảo sát sự biến thiên của hàm số*". Và với dạng toán này các em cần đặc biệt chú ý tới tập xác định của hàm số thì mới chắc chắn nhận được một bảng biến thiên đúng.

☞ ***Nhận xét***: Hàm đa thức bậc ba tổng quát có dạng:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0.$$

Khi đó, nếu sử dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta có:
Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
Đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) = (\pm\infty)^3.a = (\pm\infty).a.$$

Bảng biến thiên: Dấu của y' phụ thuộc vào dấu của a ($a > 0$ hay $a < 0$) và dấu của $\Delta' = b^2 - 3ac$ ($\Delta' > 0$ hay $\Delta' \leq 0$), do đó ta có bốn trường hợp biến thiên khác nhau.

Thí dụ 2. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
Đạo hàm:

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right..$$

Giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [x^4(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-5	↘	-6	↗	$+\infty$

Vậy, ta có kết luận:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

☞ ***Nhận xét***: Hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương có phương trình:

$$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Khi đó, nếu sử dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta có:
Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
Đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b), \quad y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0.$$

Do đó, phương trình $y' = 0$ hoặc có một nghiệm ($a.b \geq 0$) hoặc có ba nghiệm phân biệt. , do đó ta có bốn trường hợp biến thiên khác nhau.

Giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} ax^4\left(1 + \frac{b}{ax^2} + \frac{c}{ax^4}\right) = \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } a > 0 \\ -\infty \text{ khi } a < 0 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên: Dấu của y' phụ thuộc vào dấu của a ($a > 0$ hay $a < 0$) và dấu của a.b, do đó ta có bốn trường hợp biến thiên khác nhau.

Và bắt dầu từ đây, việc đưa ra lời kết luận dựa theo bảng biến thiên được dành cho bạn đọc.

Thí dụ 3. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Giải

Miền xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in D \Rightarrow \text{hàm số luôn nghịch biến trên D.}$$

Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} y = 1 \ \text{ và } \ \lim_{x\to1^-} y = -\infty, \ \lim_{x\to1^+} y = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

Nhận xét: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất có dạng:

$$\text{(H): } y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ với } c \neq 0,\ D = ad - bc \neq 0.$$

Khi đó, nếu sử dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta có:

Miền xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{d}{c}\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{ad - bc}{cx+d},$$

Nếu $D = ad - bc > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Nếu $D = ad - bc < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.

Thí dụ 4. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = x + \dfrac{3}{x}$.

Giải

Miền xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Đạo hàm:

$y' = 1 - \dfrac{3}{x^2}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} y = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^-} y = -\infty, \ \lim_{x\to 0^+} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

☞ ***Nhận xét***: Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất có dạng:

$$(H):\ y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e},$$

với $ad \neq 0$, tử, mẫu không có nghiệm chung.

Khi đó, nếu sử dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta thường lại hàm số dưới dạng:

$$y = f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}.$$

Miền xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{e}{d}\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \alpha - \frac{\gamma d}{(dx+e)^2} = \frac{\alpha(dx+e)^2 - \gamma d}{(dx+e)^2},$$

Dấu của đạo hàm là dấu của tam thức $g(x) = \alpha(dx + e)^2 - \gamma d$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ và $\lim\limits_{x\to -e/d} y = \infty$.

Bảng biến thiên: Ta có các trường hợp:

<u>*Trường hợp* $\alpha > 0$</u>

Phương trình $y' = 0$ *có hai nghiệm* $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		$-e/d$		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*

x	$-\infty$		$-e/d$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

<u>Trường hợp $\alpha < 0$</u>

Phương trình $y' = 0$ *có hai nghiệm* $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		$-e/d$		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↘	CT	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	CĐ	↘	$-\infty$

Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*

x	$-\infty$		$-e/d$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\infty$

Thí dụ 5. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = \sqrt{2x - x^2}$.

✍ *Giải*

Ta có điều kiện:

$$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D = [0; 2].$$

Đạo hàm:

$$y' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y		0	↗	1	↘	0	

☞ ***Nhận xét***: Hàm vô tỉ dạng:

$$(H): y = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \text{ với } a \neq 0.$$

Khi đó, nếu sử dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta có:

Miền xác định $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \geq 0\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

Bảng biến thiên: có 4 trường hợp khác nhau về chiều biến thiên.

Thí dụ 6. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số* $y = x - \sqrt{x}$.

✍ *Giải*

Ta có điều kiện:

$$x \geq 0 \Rightarrow D = [0; +\infty).$$

Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \; y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1/4		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y		0	$\searrow$	$-1/4$ CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dạng toán 2: Xác định m để hàm số y = f(x, m) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng I

Phương pháp

Chúng ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính đạo hàm y'.

Bước 3: Lập luận cho các trường hợp (tương tự cho tính nghịch biến) như sau:

a. Hàm số đồng biến trên I khi:

$$\begin{cases} \text{Hàm số xác định trên I} \\ y' \ge 0,\ \forall x \in I, \text{ dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm} \end{cases}$$

b. Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng k

$$\begin{cases} y' \ge 0,\ \forall x\ [a\text{-}k;\ a], \text{ dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu} \\ \text{hạn điểm của } [a\text{-}k;\ a] \text{ và } x \in [a\text{-}k;\ a] \text{ không thoả mãn} \end{cases}$$

☞ ***Chú ý***: Để giải các biểu thức điều kiện của y' phương pháp được sử dụng phổ biến nhất là phương pháp tam thức bậc hai, tuy nhiên trong những trường hợp riêng biệt có thể sử dụng ngay phương pháp hàm số để giải.

Thí dụ 1. *Cho hàm số* $y = 4x^3 + (m + 3)x^2 + mx$. *Tìm m để*:

a. *Hàm số đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

b. *Hàm số đồng biến trên khoảng* $[0; +\infty)$.

c. *Hàm số nghịch biến trên đoạn* $[-1/2; 1/2]$.

d. *Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng* 1.

✍ *Giải*

Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 12x^2 + 2(m + 3)x + m,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 12x^2 + 2(m + 3)x + m = 0. \qquad (1)$$

a. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0$$

$\Leftrightarrow (m + 3)^2 - 12m \le 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$

Vậy, với m = 3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ khi:

$$y' \ge 0, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép} \\ \text{(1) có nghiệm } x_1 < x_2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-3)^2 \le 0 \\ \begin{cases} (m-3)^2 > 0 \\ -\dfrac{m+3}{6} < 0 \\ m/12 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ \begin{cases} m \ne 3 \\ m > -3 \\ m \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m \ge 0.$

Vậy, với m ≥ 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Nhận xét rằng phương trình (1) luôn có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = -\dfrac{m}{6}$.

Từ đó, hàm số đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ khi:

$$y' \ge 0, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(1) có nghiệm kép} \\ \text{(1) có nghiệm } x_1 < x_2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{m}{6} \le 0 \\ -\dfrac{m}{6} < -\dfrac{1}{2} \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ 0 \le m < 3 \\ m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 0.$$

Vậy, với m ≥ 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Hàm số đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ khi:

$$y' \ge 0, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow 12x^2 + 2(m + 3)x + m \ge 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(2x + 1) \ge -12x^2 - 6x, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow m \ge -6x, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \ge \operatorname*{Max}_{x \in [0; +\infty)} (-6x) = 0 \Leftrightarrow m \ge 0.$$

Vậy, với m ≥ 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Nhận xét rằng phương trình (1) luôn có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = -\dfrac{m}{6}$.

Từ đó, hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ khi:

$$y' \le 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow f(x) \le 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{m}{6} \Leftrightarrow m \ge 3.$$

Vậy, với m ≥ 3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

d. Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi:

$y' \le 0$, trên đoạn có độ dài bằng 1

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{12} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} = 6 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -3 \end{array}\right..$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi m = 9 hoặc m= –3.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

- Với nội dung câu b), các em có thể thấy rằng phương pháp hàm số thường được ưu tiên lựa chọn.
- Với nội dung câu c), ta nhớ lại rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ nếu có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \text{ hoặc } |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}.$$

Ngoài ra, vì phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = -\frac{m}{6}$ và y' nhận giá trị âm trong khoảng này nên ta có điều kiện là:

$$|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{1}{2} + \frac{m}{6}\right| = 1 \Leftrightarrow |m - 3| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -3 \end{array}\right..$$

Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y = \dfrac{x-1}{x-m}$.

Với giá trị nào của m:

a. *Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó* ?

b. *Hàm số đồng biến trên khoảng* $(-\infty; 0)$?

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{1-m}{(x-m)^2}.$$

a. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi:

$y' \le 0, \forall x \in D$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy, với m > 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Trước hết là hàm số cần xác định trên $(0; +\infty)$, điều kiện là $m \ge 0$. (*)

Hàm số đồng biến với trên $(0; +\infty)$ khi:

$y' \ge 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 0 \le m < 1$.

Vậy, với $0 \le m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Rất nhiều học sinh khi thực hiện bài toán trên:

a. Ở câu a), đã nhận cả nghiệm m = 1, bởi thiết lập điều kiện là $1 - m \le 0$. Các em học sinh cần nhớ kỹ nội dung định lí 2.

b. Ở câu b), đã không kiểm tra điều kiện xác định của hàm số trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Ngoài ra, các em học sinh cũng cần nhớ rằng hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn đơn điệu trên miền xác định của nó.

Thí dụ 3. *Cho hàm số* $y = \dfrac{x^2 - x + m^2}{x - 1}$. *Với giá trị nào của* m:

a. *Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó* ?

b. *Hàm số nghịch biến trên các khoảng* (0; 1) và (2; 4) ?

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 1 - m^2}{(x-1)^2},\quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm m.$$

a. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi:

$y' \ge 0, \forall x \in D$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m^2 \ge 0, \forall x \in D$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy, với m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Nhận xét rằng y’ chỉ nhận giá trị âm trong khoảng $(x_1; x_2)\backslash\{1\}$.

Từ đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng (0; 1) và (2; 4) khi:

$$\left[\begin{array}{l} 1 - m \le 0 < 4 \le 1 + m \\ 1 + m \le 0 < 4 \le 1 - m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \text{ và } m \ge 3 \\ m \le -1 \text{ và } m \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m| \ge 3.$$

Vậy, với $|m| \ge 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý.*** Để hiểu được lập luận trong lời giải câu b) của ví dụ trên các em học sinh hãy phác thảo bảng biến thiên của hàm số, cụ thể:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

để đặt được các điểm x = 0, x = 2, x = 4 vào vị trí thích hợp.

Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y = -x^4 + 2mx^2 - m^2$. *Với giá trị nào của* m:

a. *Hàm số nghịch biến trên* $(1; +\infty)$?

b. *Hàm số nghịch biến trên* $(-1; 0)$ *và* $(2; 3)$?

✍ *Giải*

Miền xác định D = $\mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = -4x^3 + 4mx$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - m) = 0$.

a. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$ khi:

$y' \le 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow -4x(x^2 - m) \le 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow x(x^2 - m) \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - m \ge 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \ge 0 \Leftrightarrow 1 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 1$.

Vậy, với $m \le 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0) \cup (2; 3)$ khi:

$y' \le 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (2; 3) \Leftrightarrow -4x(x^2 - m) \le 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (2; 3)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m) \ge 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (2; 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - m) \ge 0, \forall x \in (-1; 0) \\ 4x(x^2 - m) \ge 0, \forall x \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - m \le 0, \forall x \in (-1; 0) \\ f(x) = x^2 - m \ge 0, \forall x \in (2; 3) \end{cases}$$

$$\overset{S(0,m)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \le 0 \\ 4 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 4.$$

Vậy, với $1 \le m \le 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý.*** Để hiểu được lập luận trong lời giải trên các em học sinh hãy lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Nhận thấy đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - m$ là một Parabol nhận trục Oy làm trục đối xứng và cắt Oy tại điểm $S(0; -m)$.

Cách 2: Sử dụng khái niệm đường tròn của hình học giải tích trong mặt phẳng.

Dạng toán 3: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

Phương pháp

Bằng việc xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, ta có:

a. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ là hàm hằng trên $[a; b]$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0)$ với $x_0 \in [a; b]$.

b. Nếu $f'(x) \ge 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$

$\Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$.

c. Nếu $f'(x) \le 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$

$\Rightarrow f(b) \le f(x) \le f(a)$.

Thí dụ 1. *Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào* x:

$$A = \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

✍ *Giải*

Xét hàm số

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Ta có:

$$A'_x = 2\sin(x - \frac{2\pi}{3}).\cos(x - \frac{2\pi}{3}) + 2\sin x.\cos x + 2\sin(x + \frac{2\pi}{3}).\cos(x + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sin(2x - \frac{4\pi}{3}) + \sin 2x + \sin(2x + \frac{4\pi}{3})$$

$$= 2\sin 2x.\cos\frac{4\pi}{3} + \sin 2x = -\sin 2x + \sin 2x = 0$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $A = A(0) = \frac{3}{2}$.

Vậy, ta có $A = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc vào x.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số chứng minh đẳng thức* ". Và ở đây, các em cần nhớ rằng cũng có thể sử dụng các phép biến đổi lượng giác thuần tuý để thực hiện yêu cầu trên, cụ thể ở đây ta sử dụng các công thức hạ bậc.

Thí dụ 2. *Chứng minh các bất đẳng thức sau*:

a. $\sin x < x$ *với mọi* $x > 0$. b. $\sin x > x$ *với mọi* $x < 0$.

✍ *Giải*

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Đạo hàm:

$f'(x) = \cos x - 1 < 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ hàm số f(x) nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

a. Do đó:

$f(x) < f(0)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\sin x - x < 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\sin x < x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b. Sử dụng kết quả trên với lập luận:

$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Rightarrow \sin(-x) < -x \Leftrightarrow -\sin x < -x \Leftrightarrow \sin x > x$, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: 1. Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số chứng minh bất đẳng thức*". Và ở đây, các em cần nhớ rằng phương pháp này thường được áp dụng cho những bất đẳng thức không mẫu mực.

2. Đôi khi chúng ta không thể khẳng định được ngay rằng $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$ (hoặc $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [a; b]$), trong các trường hợp như vậy, một thủ thuật thông thường được áp dụng là chúng ta liên tiếp tính đạo hàm để hạ bậc dần đa thức ẩn x.
3. Từ những bất đẳng thức đơn giản trên người ta có thể xây dựng ra những bất đẳng thức phức tạp hơn, cụ thể:
   - Với bất đẳng thức $\sin x < x$ chúng ta xây dựng được bài toán:
     "*Chứng minh rằng trong mọi* ΔABC *nhọn ta đều có*:
     $$\sin A + \sin B + \sin C < \pi"$$
   - Với bất đẳng thức $\tan x > x$ chúng ta xây dựng được bài toán:
     "*Chứng minh rằng trong mọi* ΔABC *nhọn ta đều có*:
     $$\tan A + \tan B + \tan C > \pi"$$

   Và khi đó, để chứng minh những bất đẳng thức dạng trên chúng ta cần thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Lựa chọn hàm đặc trưng ($y = \sin x - x$ hoặc $\tan x - x$).

   Bước 2: Chứng minh hàm số luôn đơn điệu trên D.

   Bước 3: Áp dụng.

Thí dụ 3. *Chứng minh các bất đẳng thức sau*:

a. $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$. b. $\sin x < x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$.

Giải

a. Xét hàm số $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$ với $x > 0$.

Đạo hàm:

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x, \qquad f''(x) = -x + \sin x,$$

$f'''(x) = -1 + \cos x < 0$ với $x > 0 \Leftrightarrow f''(x)$ nghịch biến với $x > 0$

$\Rightarrow f''(x) < f''(0)$ với $x > 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ với $x > 0 \Leftrightarrow f'(x)$ nghịch biến với $x > 0$

$\Rightarrow f'(x) < f'(0)$ với $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ với $x > 0 \Leftrightarrow f(x)$ nghịch biến với $x > 0$

$\Rightarrow f(x) < f(0)$ với $x > 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x < 0$ với $x > 0$

$\Leftrightarrow \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ với $x > 0$.

b. Sử dụng kết quả trên với lập luận:

$$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Rightarrow (-x) - \frac{(-x)^3}{6} < \sin(-x) \Leftrightarrow -x + \frac{x^3}{6} < -\sin x$$

$\Leftrightarrow \sin x < x - \dfrac{x^3}{6}$, đpcm.

☞ ***Chú ý***: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ một phương pháp khác, đó là sử dụng các phép biến đổi đại số để xác định dấu của y'.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng* $\sin x + \tan x > 2x$ *với mọi* $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

✍ *Giải*

Xét hàm số f(x) = sinx + tanx − 2x, có đạo hàm:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

Nhận xét rằng với $x \in D = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2 - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow f'(x) > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ hàm số f(x) đồng biến trên D

$\Leftrightarrow f(x) > f(0)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow \sin x + \tan x - 2x > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x + \tan x > 2x$ với mọi $x \in D$.

☞ ***Chú ý***: 1. Bất đẳng thức sát hơn so với bất đẳng thức trên là:

$$2\sin x + \tan x > 3x \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Và từ bất đẳng thức này người ta xây dựng được:

"*Chứng minh rằng trong mọi* ΔABC *nhọn ta đều có*:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C) > \pi"$$

Và để giải bài toán trên ta thực hiện như sau:

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$2(\sin A + \sin B + \sin C) + (\tan A + \tan B + \tan C) > 3\pi$$

$$\Leftrightarrow (2\sin A + \tan A - 3A) + (2\sin B + \tan B - 3B) +$$

$$+ (2\sin C + \tan C - 3C) > 0$$

Xét hàm số f(x) = 2sinx + tanx − 3x trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ − *Theo chứng minh trên.*

Vậy, ta được:

$2\sin A + \tan A - 3A > 0.$ (1)

$2\sin B + \tan B - 3B > 0.$ (2)

$2\sin C + \tan C - 3C > 0.$ (3)

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dạng toán 4: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ

Phương pháp

Sử dụng các tính chất đơn điệu hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc, ta có các hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = k. \qquad (1)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$, dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu.

Bước 3: Khi đó, phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = k$.
Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Bước 2: Xét các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
Dùng lập luận khẳng định hàm số $y = f(x)$ là đồng biến còn hàm số $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến.

Bước 3: Khi đó, phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.
Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(u) = f(v). \qquad (3)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu.

Bước 3: Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow u = v \text{ với } \forall u, v \in D_f.$$

Thí dụ 1. *Giải phương trình* $\tan x - x = 0$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$, ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \text{Hàm đồng biến trên } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Do đó, nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy:

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số giải phương trình*". Và ở đây, các em cần nhớ rằng phương pháp này thường được áp dụng cho những phương trình không mẫu mực.

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = 2x^3 + 6x$.

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1+x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow |x| \le 1.$$

Tới đây ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} - 2x^3 - 6x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} - 2x^3 - 6x$ trên $D = [-1; 1]$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 6x^2 - 6 < 0, \forall x \in D$$

$\Leftrightarrow$ Hàm nghịch biến trên D.

Do đó, nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta thấy:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2: Ta lần lượt:

- Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ trên $D = [-1; 1]$, ta có:

  $$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \text{Hàm số } f(x) \text{ nghịch biến trên } D.$$

- Xét hàm số $g(x) = 2x^3 + 6x$ trên $D = [-1; 1]$, ta có:

  $g'(x) = 6x^2 + 6 > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên D.

Do đó, nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Với $x = 0$, ta thấy:

$$1 - 1 = 0 + 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ đúng}$$

nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 3: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + (1-x)^3 = \sqrt{1+x} + (1+x)^3. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + t^3$ trên trên D = [0; +∞), ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + t^2 > 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{Hàm số luôn đồng biến trên D.}$$

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow f(1 - x) = f(1 + x) \Leftrightarrow 1 - x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

Thí dụ 3. Giải bất phương trình:

$$x^3 - |x^2 - 3x + 2| + 6x - 7 > 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - |x^2 - 3x + 2| + 6x - 7$.

- Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 9 \text{ nếu } x > 2 \vee x < 1 \\ 3x^2 + 2x + 3 \text{ nếu } 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên D.}$$

Mặt khác ta có f(1) = 0, suy ra bất phương trình có nghiệm là x > 1.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số giải bất phương trình*". Và ở đây, các em cần nhớ rằng phương pháp này thường được áp dụng cho những bất phương trình không mẫu mực.

Thí dụ 4. *Tìm* m *để phương trình* $\sin^m x + \cos^m x = 1$ *nghiệm đúng với mọi* x.

Giải

Đặt $f(x) = \sin^m x + \cos^m x$, khi đó yêu cầu bài toán được phát biểu dưới dạng:

$$f(x) = 1, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0, \forall x & (1) \\ f(\pi/4) = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): Ta được:

$$m.\cos x.\sin^{m-1}x - m\sin x.\cos^{m-1}x = 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow m.\sin x.\cos x(\sin^{m-2}x - \cos^{m-2}x) = 0, \forall x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \sin^{m-2}x = \cos^{m-2}x, \forall x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Ta xét từng trường hợp của m để giải (2):

- Với m = 0, ta được:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 = 2, \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = 2, tương tự ta được $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, thoả mãn.

Vậy, với m = 2 phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = y - x \\ x + 2y = \pi \end{cases}, \text{ với } x \in D = \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

✍ *Giải*

Viết phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$\sin x + x = \sin y + y. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sin t + t$ trên D, ta có:

$f'(t) = \cos t + 1 > 0$ với $x \in D \Leftrightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên D.

Vậy, phương trình (*) được viết dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x + 2y = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $x = y = \frac{\pi}{3}$.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số giải hệ phương trình*". Và ở đây, các em cần nhớ rằng phương pháp này thường được áp dụng cho những hệ phương trình không mẫu mực.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng toán 1: Tìm cực trị của hàm số

Phương pháp

Để tìm cực trị của hàm số y = f(x), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính đạo hàm y', rồi tìm các điểm tới hạn (thông thường là việc giải phương trình y' = 0), giả sử có $x = x_0$.

Bước 3: Lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Nếu xét dấu được y' thì lập bảng biến thiên rồi đưa ra kết luận dựa vào định lí:

Định lí 1: *Nếu hàm số* y = f(x) *có đạo hàm trong khoảng* (a; b) *và* $y'(x_0) = 0$ *với* $x_0 \in (a; b)$.

a. *Nếu qua* x_0 *đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số đạt cực tiểu tại* x_0.

b. *Nếu qua* x_0 *đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm thì hàm số đạt cực đại tại* x_0.

Hướng 2: Nếu không xét dấu được y' thì:

Tìm đạo hàm bậc hai y''.

Tính $y''(x_0)$ rồi đưa ra kết luận dựa vào định lí:

Định lí 2: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trong khoảng* $(a; b)$ *và* $y'(x_0) = 0$ *với* $x_0 \in (a; b)$.

a. *Nếu* $y''(x_0) < 0$ *thì hàm số đạt cực đại tại điểm* x_0.

b. *Nếu* $y''(x_0) > 0$ *thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm* x_0.

Thí dụ 1. *Tìm cực trị của hàm số* $y = \sqrt{8 - x^2}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng quy tắc 1*): Ta lần lượt có:

- Ta có điều kiện:

$$8 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le 2\sqrt{2} \Rightarrow D = [-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}].$$

- Đạo hàm:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{8 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'			+	0	−		
y		0	↗	CĐ $2\sqrt{2}$	↘	0	

Vậy, hàm số đạt cực đại tại x = 0 và giá trị cực đại của hàm số là $f(0) = 2\sqrt{2}$.

Cách 2: (*Sử dụng quy tắc 2*): Ta lần lượt có:

- Ta có điều kiện:

$$8 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le 2\sqrt{2} \Rightarrow D = [-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}].$$

- Đạo hàm:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{8 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Ta có:

$$y'' = -\frac{8}{(8 - x^2)^{3/2}} \Rightarrow y''(0) < 0.$$

Vậy, hàm số đạt cực đại tại x = 0 và giá trị cực đại của hàm số là $f(0) = 2\sqrt{2}$.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết hai cách trình bày dạng toán "*Tìm cực trị của hàm số*" dựa trên hai quy tắc tương ứng. Và ở đây, các em cần nhớ rằng quy tắc 2 thường chỉ được sử dụng khi gặp khó khăn trong việc xét dấu y’ hoặc với bài toán chứa tham số.

Và bắt dầu từ đây, việc đưa ra lời kết luận dựa theo bảng biến thiên được dành cho bạn đọc.

Thí dụ 2. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số*:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1.$$

✍ *Giải*

Miền xác định D = $\mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = x^2 + 4x + 3$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$.

Giới hạn:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ -1	↘	CT $-7/3$	↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

☞ ***Nhận xét***: Hàm đa thức bậc ba tổng quát có dạng:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

có đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Từ đó, suy ra hàm số có 2 cực trị hoặc không có cực trị.

Thí dụ 3. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số*:

$$y = x^4 - 2x^2 - 1.$$

✍ *Giải*

Miền xác định D = $\mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = 4x^3 - 4x$, $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1		0		1	2	$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$ ↘	7	CT -2	↗	CĐ -1	↘	CT -2	7 ↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

☞ ***Nhận xét***: Hàm đa thức dạng trùng phương có 3 hoặc 1 cực trị.

Thí dụ 4. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số* $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

✍ *Giải*

Miền xác định D = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to 1^-} y = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to 1^+} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ −3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1 CT	↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

☞ ***Nhận xét***: Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất tổng quát có 2 cực trị hoặc không có cực trị. Các em học sinh cần nhớ rằng giá trị cực trị của hàm phân thức $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ tại $x = x_0$ là $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Thật vậy:

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

$$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} = 0$$

$$\Leftrightarrow u'(x_0).v(x_0) = u(x_0).v'(x_0) \Leftrightarrow \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = y(x_0), \text{ đpcm.}$$

Kết quả trên được sử dụng để:

1. Xác định giá trị cực trị của các hàm phân thức hữu tỉ.
2. Lập phương trình đường thẳng, đường cong đi qua các điểm cực trị của các hàm phân thức hữu tỉ.

Ngoài ra, với hàm phân thức hữu tỉ có cực đại và cực tiểu thì $y_{CĐ} < y_{CT}$, điều này khẳng định sự khác biệt giữa khái niệm về cực đại, cực tiểu và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Để tìm cực trị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thực hiện theo các bước sau:

<u>Bước 1:</u> Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ với } x \in D_1 \\ \ldots \\ f_k(x) \text{ với } x \in D_k \end{cases}.$$

Bước 2: Tìm miền xác định của hàm số.
Bước 3: Tính đạo hàm:

$$y' = \begin{cases} f'_1(x) \text{ với } x \in D_1 \setminus \{x \mid f_1(x) = 0\} \\ \ldots \\ f'_k(x) \text{ với } x \in D_k \setminus \{x \mid f_k(x) = 0\} \end{cases},$$

$y' = 0 \Rightarrow$ nghiệm (nếu có).
Bước 4: Bảng biến thiên, từ đó đưa ra lời kết luận.

Thí dụ 5. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số* $y = |x|(x + 2)$.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} -x(x+2) \text{ với } x \le 0 \\ x(x+2) \text{ với } x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x-2 \text{ với } x \le 0 \\ 2x+2 \text{ với } x > 0 \end{cases}.$$

Giới hạn $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ 1	↘	CT 0	↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

☞ ***Chú ý***: Các ví dụ 2, 3, 4, 5 đã miêu tả cực trị của ba dạng hàm số cơ bản trong chương trình phổ thông. Các thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng dấu hiệu 2 cho các hàm lượng giác hoặc không mẫu mực.

Thí dụ 6. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị của các hàm số*:

a. $y = x - \sin 2x + 2$. b. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

✍ *Giải*

a. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
Đạo hàm:

$y' = 1 - 2\cos 2x$, $y'' = 4\sin 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có:

- Với $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ta nhận được:

$$y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Với $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ta nhận được:

$$y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = 2\sin x + 2\sin 2x$, $\quad y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2\cos x)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ hoặc $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ta có:

- Với $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ta nhận được:

$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Với $x = k\pi$ ta nhận được:

$y''(k\pi) = 2\cos(k\pi) + 4\cos(2k\pi) = 2\cos(k\pi) + 4 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

<u>**Dạng toán 2:**</u> Tìm m để hàm số y = f(x, m) có cực trị

Phương pháp

Để thực hiện các yêu cầu về điều kiện có cực trị của hàm số y = f(x) ta thực hiện theo các bước:

<u>*Bước 1:*</u> Miền xác định.

<u>*Bước 2:*</u> Tính đạo hàm y'.

<u>*Bước 3:*</u> Lựa chọn theo một trong hai hướng:

Hướng 1: Nếu xét được dấu của y' thì sử dụng dấu hiệu I với lập luận:

Hàm số có k *cực trị*

$\Leftrightarrow$ Phương trình y' = 0 có k nghiệm phân biệt và đổi dấu qua các nghiệm đó

Hướng 2: Nếu không xét được dấu của y' hoặc bài toán yêu cầu cụ thể về cực đại hoạc cực tiểu thì sử dụng dấu hiệu II, bằng việc tính thêm y''. Khi đó:

1. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm thuộc D

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' \neq 0 \end{cases}.$$

2. Hàm số có cực tiểu ⇔ hệ sau có nghiệm thuộc D

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases}.$$

3. Hàm số có cực đại ⇔ hệ sau có nghiệm thuộc D

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases}.$$

4. Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 điều kiện là:

$$\begin{cases} x_0 \in D \\ x_0 \text{ là điểm tới hạn} \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}.$$

5. Hàm số đạt cực đại tại x_0 điều kiện là:

$$\begin{cases} x_0 \in D \\ x_0 \text{ là điểm tới hạn} \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}.$$

Ngoài ra, với hàm đa thức y = f(x) thì điều kiện để "*Hàm số đạt cực trị tại điểm* x_0" là:

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi giá trị của* m, *hàm số*:

$$y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$$

luôn có cực đại và cực tiểu.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{m\}$.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x - m^2 + \frac{1}{x - m}.$$

Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-m)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-m)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = m \pm 1 \in D.$$

Tức là y' = 0 luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc D và đổi dấu qua hai nghiệm này, do đó hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết cách trình bày dạng toán "*Chứng minh hàm số luôn có cực trị*" dựa trên quy tắc 1.

Trong trường hợp bài toán trên được phát biểu dưới dạng "*Tìm* m *để hàm số có cực trị*" thì để tăng độ khó cho yêu cầu người ta thường đòi hỏi thêm như sau:

a. *Hoành độ* (*hoặc tung độ*) *các điểm cực trị thuộc khoảng* K, khi đó chúng ta chỉ cần thiết lập điều kiện :

$m \pm 1 \in K$

hoặc $y(m \pm 1) \in K \Leftrightarrow [2x - m(m+1)]_{(m \pm 1)} \in K$.

b. *Toạ độ các điểm cực trị thoả mãn điều kiện* K, khi đó chúng ta thực hiện:

- Toạ độ các điểm cực trị là:

  $(m + 1, 2 + m - m^2)$ và $(m - 1, -2 + m - m^2)$
- Thiết lập điều kiện K, từ đó nhận được giá trị của m.

c. *Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị thoả mãn điều kiện* K, khi đó chúng ta thực hiện:

- Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị là:

  (d): $y = 2x - m(m + 1)$
- Thiết lập điều kiện K, từ đó nhận được giá trị của m.

...

Và trong tất cả các đòi hỏi kèm theo chỉ cần các em học sinh biết cách phân tích, để từ đó đưa ra được một lược đồ thực hiện thích hợp.

Thí dụ 2. *Tìm các hệ số* a, b, c *sao cho hàm số* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *đạt cực trị bằng* 0 *tại điểm* $x = -2$ *và đồ thị của hàm số đi qua điểm* A(1; 0).

✍ *Giải*

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ và $f''(x) = 6x + 2a$.

Để hàm số đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; 0) điều kiện là:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(-2) \neq 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \\ -12 + 2a \neq 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}.$$

Vậy, với a = 3, b = 0 và c = –4 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết hai cách trình bày dạng toán "*Tìm điều kiện để hàm số có cực trị tại điểm* x_0" dựa trên quy tắc 2.

Thí dụ 3. *Tìm* m *để các hàm số sau có cực trị*:

a. $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m^2 - 3m + 2)x + 8$. b. $y = \sin x - mx$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$$y' = x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m + 2,$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Hàm số có cực trị khi phương trình y' = 0 có nghiệm và đổi dấu qua nghiệm đó:

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy, với $1 < m < 2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta lần lượt có:

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$$y' = \cos x - m, \qquad y'' = -\sin x.$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m.$$

Hàm số có cực trị khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} y'(x) = 0 \\ y''(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \le 1 \\ -\sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \le 1 \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \le 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m| < 1.$$

Vậy, với $|m| < 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã biết hai cách trình bày dạng toán "*Tìm điều kiện để hàm số có cực trị* " dựa trên hai quy tắc tương ứng. Và ở đây, các em cần nhớ rằng quy tắc 2 thường chỉ được sử dụng khi gặp khó khăn trong việc xét dấu y' hoặc yêu cầu cụ thể về cực đại, cực tiểu của hàm số.

Thí dụ 4. *Tìm các hệ số* a, b, c, d *của hàm số* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *sao cho hàm số đạt cực tiểu tại điểm* x = 0, f(0) = 0 *và đạt cực đại tại điểm* x = 1, f(1) = 1.

✍ *Giải*

Đạo hàm:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Để hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0, f(0) = 0 và đạt cực đại tại điểm x = 1, f(1) = 1 điều kiện là:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ và } f(1)=1 \\ f'(0) = 0 \text{ và } f'(1)=0 \\ f''(0) > 0 \text{ và } f''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2b > 0 \text{ và } 6a + 2b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = d = 0 \end{cases}.$$

Vậy, với a = −2, b = 3 và c = d = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho hàm số* $f(x) = x^3 + px + q$.

a. *Với điều kiện nào để hàm số có một cực đại và một cực tiểu ?*

b. *Chứng minh rằng nếu giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu thì phương trình*:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt.

c. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình* (1) *có ba nghiệm phân biệt là* $4p^3 - 27q^2 > 0$.

✍ *Giải*

a. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$f'(x) = 3x^2 + p, \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + p = 0. \qquad (*)$$

Để hàm số có một cực đại và một cực tiểu điều kiện là:

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow p < 0$.

Vậy, với $p < 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Với hàm số trên (liên tục trên $\mathbb{R}$), ta có ngay nhận xét $x_{CĐ} < x_{CT}$.

Khi đó:

$f(x_{CD}) > 0$ và $f(x_{CT}) < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, vậy tồn tại $c_1 < x_{CĐ}$ để $f(c_1) < 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, vậy tồn tại $c_2 > x_{CT}$ để $f(c_2) > 0$,

suy ra:

$f(c_1).f(x_{CD}) < 0$; $f(x_{CD}).f(x_{CT}) < 0$; $f(x_{CT}).f(c_2) < 0$.

Vậy phương trình (1) luôn có có ba nghiệm phân biệt.

c. Ta có:

$$f(x_{CD}).f(x_{CT}) < 0 \Leftrightarrow (x_{CĐ}^3 + px_{CĐ} + q)(x_{CT}^3 + px_{CT} + q) < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x_{CĐ}^3 + 3px_{CĐ} + 3q)(3x_{CT}^3 + 3px_{CT} + 3q) < 0$$

$$\Leftrightarrow [(3x_{CĐ}^2 + p)x_{CĐ} + 2px_{CĐ} + 3q][(3x_{CT}^2 + p)x_{CT} + 2px_{CT} + 3q] < 0$$

$$\Leftrightarrow (2px_{CĐ} + 3q)(2px_{CT} + 3q) < 0 \Leftrightarrow 4p^2x_{CĐ}.x_{CT} + 6q(x_{CĐ} + x_{CT}) + 9q^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4p^2\left(-\frac{p}{3}\right) + 9q^2 < 0 \Leftrightarrow 4p^3 - 27q^2 > 0.$$

☞ ***Chú ý***: 1. Các em học sinh cần ghi nhận phát biểu của câu b) như một phương pháp để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình bậc ba có ba nghiệm phân biệt.

2. Qua các thí dụ 2, 3, 4 chúng ta bước đầu làm quen với việc tìm cực trị của hàm đa tức bậc ba (là dạng hàm số cơ bản của chương trình toán THPT). Thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cách thực hiện khi bài toán ghép thêm tính chất K cho các điểm cực trị của dạng hàm số này.

Thí dụ 6. *Cho hàm số*:

$$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3.$$

Xác định m *để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng* y = x.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = 3x^2 - 6mx,$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2m \end{array}\right.$.

Trước hết, hàm số có cực đại và cực tiểu

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, toạ độ các điểm cực trị là $A(0, 4m^3)$ và $B(2m, 0)$.

Để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng với nhau qua đường thẳng (d): y = x điều kiện là:

$$\begin{cases} AB \perp (d) \\ \text{trung điểm I của AB thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{a_d} \\ I(m; 2m^3) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{m \neq 0}{\Leftrightarrow} m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy, với $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp nghiệm phương trình (1) chứa căn thức, ta nên chọn phương pháp sau:

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = 3x^2 - 6mx,$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx = 0$ (1)

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi (1) có hai nghiệm phân biệt, tức:

$\Delta' = 36m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

Khi đó, hoành độ các điểm cực đại , cực tiểu thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2m \\ x_A x_B = 0 \end{cases}.$$

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' (thực chất chia cho f(x)), ta được:

$y = (x^2 - 2mx)(x - m) - 2m^2x + 4m^3,$

nên nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của hàm số thì:

$y_0 = -2m^2x_0 + 4m^3 \Rightarrow A(x_A; -2m^2x_A + 4m^3)$ và $B(x_B; -2m^2x_B + 4m^3)$.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = m \Rightarrow y_I = -2m^2x_I + 4m^3 = 2m^3 \Rightarrow I(m;\ 2m^3).$$

Để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng với nhau qua đường thẳng (d): y = x điều kiện là:

$$\begin{cases} AB \perp (d) \\ \text{trung điểm I của AB thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{AB}.k_{(d)} = -1 \\ I(m; 2m^3) \in (d) \end{cases} \overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Thí dụ 7. *Cho hàm số*:

$$y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}.$$

Xác định các giá trị của tham số m *để hàm số có cực đại, cực tiểu và hai điểm đó nằm về hai phía đối với trục* Ox.

✍ *Giải*

Miền xác định D = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x-1)^2},\ \ y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0. \quad (1)$$

Hàm số có cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 6m^2 + m > 0 \\ -6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{6} \end{array}\right. . \quad (2)$$

Tới đây chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Với điều kiện (2) phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = -\frac{5m+1}{m} \end{cases}.$$

Ta có:

$$y(x_1) = \frac{\left(mx^2 + 3mx + 2m + 1\right)'}{\left(x - 1\right)'}(x_1) = 2mx_1 + 3m,\quad y(x_2) = 2mx_2 + 3m.$$

- Hai điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía đối với trục Ox

$\Leftrightarrow y(x_1)y(x_2) < 0 \Leftrightarrow (2mx_1 + 3m)(2mx_2 + 3m) < 0$

$\Leftrightarrow m^2[4x_1.x_2 + 6(x_1 + x_2) + 9] < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$ (3)

Kết hợp (2) và (3) ta được $0 < m < 4$.

Vậy, với $0 < m < 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: (*Sử dụng đồ thị*): Hai điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía đối với trục Ox

$\Leftrightarrow y = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 1 = 0$ vô nghiệm (*)

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 4m(2m + 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$ (3')

Kết hợp (2) và (3') ta được $0 < m < 4$.

Vậy, với $0 < m < 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Thực tế, để phương trình (*) vô nghiệm ta cần xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$, khi đó (*) vô nghiệm khi:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta < 0\\ \begin{cases}\Delta = 0\\ -\dfrac{b}{2a} = 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Tuy nhiên, với bài toán trên ta chỉ cần $\Delta < 0$ vì từ (2) dễ thấy:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \neq 1.$$

☞ ***Chú ý***: Thí dụ tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới tính chất cực trị của hàm trùng phương.

Thí dụ 8. *Cho hàm số*:

$$y = x^4 - 2mx^2 + 2m.$$

Xác định m *để hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu*:

a. *Lập thành một tam giác đều.*

b. *Lập thành một tam giác vuông.*

c. *Lập thành một tam giác có diện tích bằng* 16.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

- Miền xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m),\quad y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - m) = 0. \qquad (1)$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

(1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. (*)

Khi đó, (1) có ba nghiệm phân biệt $x = 0, x = \pm\sqrt{m}$ và toạ độ ba điểm cực trị:

$A(0; 2m)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 + 2m)$

a. Ta có ΔABC đều khi:

$$\begin{cases}AB = AC\ (ld)\\ AB = BC\end{cases} \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(-\sqrt{m}\right)^2 + \left(-m^2\right)^2 = \left(2\sqrt{m}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 3m = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} m^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}.$$

Vậy, với $m = \sqrt[3]{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Do tính đối xứng của hai điểm B, C qua Oy (A thuộc Oy) nên ΔABC chỉ có thể vuông tại A.

Khi đó, ta có điều kiện:

$$AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m}.\sqrt{m} - m^2.\left(-m^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} m^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Vì ΔABC cân tại A nên:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AO.BC \Leftrightarrow 16 = \frac{1}{2}|2m|.2\sqrt{m} = 2m\sqrt{m} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} m^3 = 64 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, với m = 4 thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong các đề thi đại học và cao đẳng một câu hỏi đơn lẻ có thể được đặt ra về điều kiện cực trị của các dạng hàm số khác (trị tuyệt đối, vô tỉ, …) khi đó chỉ cần các em nắm vững kiến thức đã được trình bày trong bài toán tổng quát.

Thí dụ 9. *Cho hàm số* $y = \dfrac{x + a}{\sqrt{x^2 + 1}}$. *Tìm a để*:

a. *Hàm số không có cực trị.* b *Hàm số có cực tiểu.*

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-ax + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - ax = 0. \qquad (1)$$

a. Hàm số không có cực trị khi:

Phương trình (1) vô nghiệm ⇔ a = 0.

Vậy, với a = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hàm số có cực tiểu khi:

(1) có nghiệm và qua đó y' đổi dấu từ âm sang dương ⇔ a < 0.

Vậy, với a < 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Dạng toán 1: Tìm giá trị lớn nhất (gtln), giá trị nhỏ nhất (gtnn) của hàm số

Phương pháp

Để tìm gtll, gtnn của hàm số y = f(x), ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp khảo sát trực tiếp*): Lập bảng biến thiên của hàm số trên D, rồi dựa vào đó để kết luận.

Cách 2: Với yêu cầu "*Tìm gtln, gtnn của hàm số* $y = f(x)$ *trên đoạn* $[a; b]$", ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính y' rồi giải phương trình $y' = 0$ với $x \in (a; b)$. Giả sử các nghiệm là $x_1, x_2, \ldots$

Bước 2: Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots$

Bước 3: So sánh các số vừa tính, từ đó:

- $\underset{x\in[a;b]}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots\}$.
- $\underset{x\in[a;b]}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots\}$.

Cách 3: (*Phương pháp khảo sát gián tiếp*): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt đối số mới $X = \varphi(x)$.

Tìm tập giá trị D_X cho X.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = F(X)$ trên D_X, rồi dựa vào đó để kết luận.

Thí dụ 1. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Rightarrow \text{Tập xác định } D = [2; 4].$$

Đạo hàm:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Leftrightarrow x = 3.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
y'			+	0	−		
y		$\sqrt{2}$	↗	CĐ 2	↘	$\sqrt{2}$	

Vậy, ta có:

- $\underset{x\in D}{\text{Max}}\, y = 2$, đạt được khi $x = 3$.
- $\underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = \sqrt{2}$, đạt được khi $x = 2$ hoặc $x = 4$.

Cách 2: Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Rightarrow \text{Tập xác định } D = [2; 4].$$

Đạo hàm:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, ta có:

- $\underset{x\in D}{\text{Max}}\, y$ = Max{f(2), f(3), f(4)} = Max{ $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ } = 2, đạt được khi x = 3.
- $\underset{x\in D}{\text{Min}}\, y$ = Min{f(2), f(3), f(4)} = Min{ $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ } = $\sqrt{2}$, đạt được khi x = 2 hoặc x = 4.

Cách 3: Điều kiện:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Rightarrow \text{Tập xác định } D = [2; 4].$$

Ta lần lượt có:

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\le} \sqrt{(1+1)(x-2+4-x)} = 2$$

$\Rightarrow \underset{x\in D}{\text{Max}}\, y = 2$, đạt được khi $\sqrt{x-2} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = 3$.

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \Leftrightarrow y^2 = x - 2 + 4 - x + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \ge 2 \Leftrightarrow y \ge \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = \sqrt{2}$, đạt được khi $\sqrt{(x-2)(4-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên các em học sinh đã được làm quen với ba phương pháp cơ bản đểt tìm gtln và gtnn của hàm số và:

1. ***Ở cách 1***, chúng ta đã sử dụng bảng biến thiên để nhận được gtln và gtnn của hàm số. Tuy nhiên, một câu hỏi thường được đặt ra ở đây là "*Bằng cách nào để có được dấu của* y’ *trong bảng biến thiên đó* ?", câu trả lời khá đơn giản là với $x = \frac{7}{4} \in (2; 3)$ ta được $y'\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{2}{3} > 0$ do đó trong khoảng (2; 3) đạo hàm y’ sẽ mang dấu dương.
2. ***Ở cách 2***, chính là phương pháp tìm gtln và gtnn của hàm số trên một đoạn.
3. ***Ở cách 3***, chúng ta đã sử dụng kiến thức về bất đẳng thức.

Thí dụ 2. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: (*Sử dụng đạo hàm*): Vì hàm số tuần hoàn với chu kì π và là hàm số chẵn nên ta xét trên $D = [0; \frac{\pi}{2}]$.

Đạo hàm:

$$y' = 4\cos x.\sin^3x - 4\sin x.\cos^3x = 2(\sin^2x - \cos^2x)\sin 2x = -\sin 4x,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = \frac{\pi}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0		π/4		π/2
y'		–	0	+	
y	1	↘	1/2 CT	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $y_{Min} = \frac{1}{2}$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{Max} = 1$, đạt được khi $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: (*Sử dụng cách đánh giá*): Ta có:

$$f(x) = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Từ đó, suy ra:

$f(x) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underset{x\in R}{\text{Min}}\, f(x) = \frac{1}{2}$, đạt được khi:

$$\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}.$$

$f(x) \leq 1 \Rightarrow \underset{x\in R}{\text{Max}}\, f(x) = 1$, đạt được khi:

$$\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}.$$

Thí dụ 3. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số*:

a. $y = 2\sin^2x + 2\sin x - 1$. b. $y = \cos^2 2x - \sin x.\cos x + 4$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \leq 1$.

Hàm số được viết lại dưới dạng:

$$y = 2t^2 + 2t - 1.$$

Đạo hàm:

$$y' = 4t + 2, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$y(-1) = -1,\ y(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2},\ y(1) = 3.$$

Vậy, ta nhận được:

- $\underset{x\in R}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{-1, -\frac{3}{2}, 3\} = 3$ đạt được khi:

$$t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- $\underset{x\in R}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{-1, -\frac{3}{2}, 3\} = -\frac{3}{2}$ đạt được khi:

$$t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b. Đặt t = sin2x, điều kiện $|t| \le 1$.
Hàm số được viết lại dưới dạng:

$$y = (1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5.$$

Đạo hàm:

$$y' = -2t - \frac{1}{2}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow -2t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$$

Ta có:

$$y(-1) = \frac{9}{2},\ y(-\frac{1}{4}) = \frac{81}{16},\ y(1) = \frac{7}{2}.$$

Vậy, ta nhận được:

- $\underset{x\in R}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{\frac{9}{2}, \frac{81}{16}, \frac{7}{2}\} = \frac{81}{16}$ đạt được khi:

$$t = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{4} = \sin 2\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- $\underset{x\in R}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{\frac{9}{2}, \frac{81}{16}, \frac{7}{2}\} = \frac{7}{2}$ đạt được khi:

$$t = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp, chúng ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để làm xuất hiện ẩn phụ cho hướng giải quyết gián tiếp.

Thí dụ 4. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $y = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$.

✍ *Giải*

Vì y > 0 với mọi x nên ta đi xét hàm số:

$$Y = y^2 = 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x.\cos x|$$

Đặt X = sinx + cosx điều kiện $|X| \le \sqrt{2} \Rightarrow 2\sin x.\cos x = X^2 - 1$.

Vậy, ta được:

$$Y = 6 + 4X + 2|1 + 2X + 2(X^2 - 1)|$$

$$= \begin{cases} 4X^2 + 8X + 4 \text{ khi } X \in [-\sqrt{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}] \cup [\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}] \\ -4X^2 + 8 \quad \text{ khi } X \in [\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}] \end{cases}.$$

- Miền xác định $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
- Đạo hàm:

$$Y' = \begin{cases} 8X + 8 \text{ khi } X \in [-\sqrt{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}] \cup [\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}] \\ -8X \quad \text{ khi } X \in [\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}] \end{cases}$$

- Bảng biến thiên: đặt $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		x_1		-1		0		x_2		$\sqrt{2}$	$+\infty$
Y'	//////		–		+	0	+	0	–		+	//////	
Y	//////		↘	CT		↗		CĐ	↘	CT	↗	//////	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\underset{X \in D}{\text{Min}}\, Y = \min\{Y(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}), Y(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2})\} = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \text{Miny} = \sqrt{3} - 1$.
- $\underset{X \in D}{\text{Max}}\, Y = \max\{Y(-\sqrt{2}), Y(0), Y(\sqrt{2})\} = 4(\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \text{Maxy} = 2(\sqrt{2} + 1)$.

Thí dụ 5. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $y = \dfrac{1 + \sin^6 x + \cos^6 x}{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}$.

✍ *Giải*

Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x}{2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{8 - 3\sin^2 2x}{8 - 2\sin^2 2x} = \frac{3\sin^2 2x - 8}{2\sin^2 2x - 8}.$$

Đặt $X = \sin^2 2x$ điều kiện $0 \le X \le 1$.

Khi đó:

$$y = F(X) = \frac{3X - 8}{2X - 8}.$$

Miền xác định D = [0; 1].
Đạo hàm:

$$y' = \frac{-8}{(2X-8)^2} < 0, \forall X \in D \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Ta có ngay:

- $\underset{X \in D}{\text{Min}}\, y = F(1) = \frac{5}{6}$ đạt được khi:

$$X = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

- $\underset{X \in D}{\text{Max}}\, y = F(0) = 1$ đạt được khi:

$$X = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

<u>**Dạng toán 2:**</u> Ứng dụng gtln, gtnn của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

Phương pháp

1. Giải phương trình: Để sử dụng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số vào việc giải phương trình:

$$f(x, m) = g(m). \qquad (1)$$

ta thực hiện theo các bước sau:

<u>***Bước 1:***</u> Lập luận số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): y = f(x, m) và đường thẳng (d): y = g(m).

<u>***Bước 2:***</u> Xét hàm số y = f(x, m)
- Tìm miền xác định D.
- Tính đạo hàm y', rồi giải phương trình y' = 0.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

<u>***Bước 3:***</u> Kết luận:
- Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x, m) \le g(m) \le \max_{x \in D} f(x, m)$.
- Phương trình có k nghiệm phân biệt khi (d) cắt (C) tại k điểm phân biệt.
- Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (C) = \varnothing$.

2. Giải bất phương trình: Để sử dụng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số vào việc giải bất phương trình:

$$f(x, m) \le g(m),$$

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hàm số y = f(x, m):
- Tìm miền xác định của hàm số.
- Tính đạo hàm y', rồi giải phương trình y' = 0.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 2: Kết luận cho các trường hợp như sau:

- Bất phương trình có nghiệm với $x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} y \le g(m)$.
- Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} y \le g(m)$.

Tương tự cho bất phương trình $f(x, m) \ge g(m)$ với lời kết luận:

- Bất phương trình có nghiệm với $x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} y \ge g(m)$.
- Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} y \ge g(m)$.

Thí dụ 1. *Tìm* m *để phương trình* $x^3 - 3x^2 + m = 0$ *có ba nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 - 3x^2 = -m.$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ với đường thẳng $y = -m$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên $D = \mathbb{R}$, ta có:

$y' = 3x^2 - 6x$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt điều kiện cần và đủ là:

$$-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Vậy, với $0 < m < 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong các đề thi đại học và cao đẳng để tăng độ khó cho người ta có thể hỏi thêm "*Hãy xét dấu các nghiệm*" hoặc "*Chứng tỏ rằng khi đó phương trình luôn có một nghiệm âm*" hoặc "*Chứng tỏ rằng khi đó phương trình luôn có hai nghiệm dương*", ..., và khi đó chúng ta sử dụng nhận xét rằng giả sử ba nghiệm là $x_1 < x_2 < x_3$, ta luôn có:

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3.$$

Ngoài ra, với câu hỏi "*Biện luận theo* m *số nghiệm của phương trình trên khoảng* (a; b) *hoặc đoạn* [a; b]" chúng ta sẽ nhúng khoảng hoặc đoạn đó vào bảng biến thiên để biện luận. Thí dụ với câu hỏi "*Biện luận theo* m *số nghiệm của phương trình trên* (–1; 4]", chúng ta sẽ có:

x	$-\infty$	-1	0		2	4	$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	-4 ↗	0	↘	-4	16 ↗	$+\infty$

Từ đó, ta có:

- Với $m < -4$, phương trình vô nghiệm trên $D = (-1; 4]$.
- Với $m = -4$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$ thuộc D.
- Với $-4 < m < 0$, phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $m = 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $0 < m \leq 16$, phương trình có một nghiệm thuộc D.
- Với $m > 16$, phương trình vô nghiệm trên D.

Thí dụ 2. *Tìm* m *để bất phương trình* $-x^3 + 3mx - 2 \leq -\dfrac{1}{x^3}$ *nghiệm đúng với mọi* $x \geq 1$.

Giải

Với $x \geq 1$, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$3mx \leq x^3 + 2 - \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4} \geq 3m.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4}$ trên tập $D = [1; +\infty)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^3 - 1) + 4}{x^5} > 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{Hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên D.}$$

Vây, bất phương trình nghiệm đúng khi:

$$\min_{x \geq 1} F(x) \geq 3m \Leftrightarrow F(1) \geq 3m \Leftrightarrow 2 \geq 3m \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m \leq \dfrac{2}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3|x|x - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases}.$$

Giải

Giải (1) ta được $-1 \leq x \leq 4$.

Xét bài toán ngược "*Tìm m để hệ vô nghiệm*", tức:

$$x^3 - 3|x|x - m^2 - 15m < 0 \ \forall x \in [-1; 4] \Leftrightarrow x^3 - 3|x|x < m^2 + 15m \ \forall x \in [-1; 4].$$

Xét hàm số

$$y = x^3 - 3|x|x = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{khi } -1 \leq x < 0 \\ x^3 - 3x^2 & \text{khi } \ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

- Miền xác định $D = [-1, 4]$.
- Đạo hàm:

$$y' = \begin{cases} 3x^2 + 6x & \text{khi } -1 < x < 0 \\ 3x^2 - 6x & \text{khi } \ 0 < x < 4 \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên:

x	−2		−1		0		2		4
y'	0			−	0	−	0	+	
y				↘		↘		↗	

Vậy, hệ vô nghiệm khi

$$\underset{-1\le x\le 4}{\text{Max}}\, y < m^2 + 15m \Leftrightarrow \text{Max}\{f(-1), f(4)\} < m^2 + 15m$$

$$\Leftrightarrow 16 < m^2 + 15m \Leftrightarrow m^2 + 15m - 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -16 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $-16 \le m \le 1$.

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ
PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ

Dạng toán 1: Phép tịnh tiến hệ tọa độ

Phương pháp

Câu hỏi thường được đặt ra là:

"*Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ* $\overrightarrow{OI}$ *với* $I(x_0; y_0)$ *và viết phương trình của đường cong* (C): $y = f(x)$ *đối với hệ toạ độ* IXY".

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó trong hệ tọa độ IXY đường cong (C) có phương trình:

$$(C): Y = f(X + x_0) - y_0 \Leftrightarrow (C): Y = F(X). \quad (*)$$

☞ ***Nhận xét***: Ta có hai trường hợp đặc biệt:

- Nếu hàm số $Y = F(X)$ là hàm lẻ ta suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).
- Nếu hàm số $Y = F(X)$ là hàm chẵn ta suy ra rằng đường thẳng $x = x_0$ là trục đối xứng của đường cong (C).

Thí dụ 1. *Cho parabol* (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$.

a. *Xác định đỉnh* I *của parabol* (P).

b. *Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ* $\overrightarrow{OI}$ *và viết phương trình của parabol* (P) *đối với hệ toạ độ* IXY. *Từ đó, chỉ ra phương trình trục đối xứng của parabol* (P).

✍ *Giải*

a. Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

b. Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x - \frac{3}{4} \\ Y = y + \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \frac{3}{4} \\ y = Y - \frac{1}{8} \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY parabol (P) có phương trình:

$$(P): Y - \frac{1}{8} = 2\left(X + \frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(X + \frac{3}{4}\right) + 1 \Leftrightarrow (P): Y = 2X^2.$$

Nhận xét rằng, trong hệ tọa độ IXY hàm số $Y = 2X^2$ là hàm số chẵn dó đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = \frac{3}{4}$ làm trục đối xứng.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên, ta có:

a. Với hàm đa thức bậc hai (Parabol) (P): $y = ax^2 + bx + c$, ta có:

- Điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ chính là đỉnh của parabol.
- Đồ thị (P) luôn nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

b. Để chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X). \quad (*)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (*) là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

Thí dụ 2. *Cho đường cong* (C) *có phương trình* $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ *và điểm* $I(-2; 2)$.

Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ *và viết phương trình của đường cong* (C) *đối với hệ toạ độ* IXY. *Từ đó, suy ra rằng* I *là tâm đối xứng của đường cong* (C).

✍ *Giải*

Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY hàm số có phương trình:

$$Y + 2 = 2 - \frac{1}{(X-2)+2} \Leftrightarrow Y = -\frac{1}{X}. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng, trong hệ tọa độ IXY hàm số (*) là hàm số lẻ dó đó nó nhận điểm I làm tâm đối xứng.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên, ta có:

a. Với hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất (H): $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a \neq 0$, $c \neq 0$, ta có:
   - Điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ chính là giao điểm của hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cân ngang).
   - Đồ thị (H) luôn nhận điểm I làm tâm đối xứng.
   - Không tồn tại tiếp tuyến của đồ thị qua I.

b. Để chứng minh đồ thị hàm số y = f(x) nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

   hàm số có dạng:

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X). \qquad (*)$$

   Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (*) là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng.

Thí dụ 3. *Cho hàm số*:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

a. *Xác định điểm* I *thuộc đồ thị* (C) *của hàm số đã cho biết rằng hoành độ của điểm* I *là nghiệm của phương trình* $f''(x) = 0$.

b. *Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ* $\overrightarrow{OI}$ *và viết phương trình của đường cong* (C) *đối với hệ toạ độ* IXY. *Từ đó, suy ra rằng* I *là tâm đối xứng của đường cong* (C).

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong* (C) *tại điểm* I *đối với hệ tọa độ* Oxy. *Chứng minh rằng trên khoảng*$(-\infty; 1)$ *đường cong* (C) *nằm dưới tiếp tuyến tại* I *của* (C) *và trên khoảng* $(1; +\infty)$ *đường cong* (C) *nằm trên tiếp tuyến đó.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Miền xác định D = $\mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 2,\ f''(x) = 6x - 6,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1; -1).$$

b. Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY đường cong (C) có phương trình:

$$(C): Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 2(X + 1) - 1 \Leftrightarrow (C): Y = X^3 - X.$$

Nhận xét rằng, trong hệ tọa độ IXY hàm số $Y = X^3 - 3X$ là hàm số lẻ dó đó nó nhận điểm I làm tâm đối xứng.

c. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy, có dạng:

$$(d): y = f'(x_I)(x - x_I) + f(x_I) \Leftrightarrow (d): y = -5(x - 1) - 1 \Leftrightarrow (d): y = -5x + 4.$$

Xét hiệu:

$$H = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - (-5x + 4) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Từ đó, suy ra:

- Nếu $H > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 5) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Tức là, trên khoảng$(1; +\infty)$ đường cong (C) nằm trên tiếp tuyến (d).
- Nếu $H < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 5) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Tức là, trên khoảng$(-\infty; 1)$ đường cong (C) nằm dưới tiếp tuyến (d).

☞ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên, ta thấy với hàm đa thức bậc ba:

$$(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ta có:

- Điểm I thuộc đồ thị của hàm số với hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ được gọi là điểm uốn của đồ thị.
- Đồ thị (C) luôn nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.
- Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị cắt đồ thị.

  Ngoài ra, tiếp tuyến tại I sẽ có hệ số góc lớn nhất hoặc nhỏ nhất tuỳ thuộc vào dấu của a.

<u>Dạng toán 2:</u> Tìm tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong hai nhận xét của thí dụ 1 và thí dụ 2.

Thí dụ 1. *Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{2}{x-1} + 1$.

Giải

Gọi $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số, khi đó công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY hàm số có phương trình:

$$Y + y_0 = \frac{2}{X + x_0 - 1} + 1 \Leftrightarrow Y = \frac{2}{X + x_0 - 1} + 1 - y_0. \quad (*)$$

Để $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số điều kiện là hàm số trong (*) phải là hàm lẻ, suy ra:

$$\begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1).$$

Vậy, tâm đối xứng của đồ thị hàm số là I(1; 1).

Thí dụ 2. *Cho hàm số*:

$$y = x^4 + 4mx^3 - 2x^2 - 12mx.$$

Xác định m *để đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với* Oy.

Giải

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy là $x = a$ $(a \neq 0)$. Khi đó, với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY hàm số có phương trình:

$Y = (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a)$ là hàm số chẵn.

Ta có:

$$\begin{aligned} Y &= (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a) \\ &= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X + \\ &\qquad + 4m(X^3 + 3X^2a + 3X a^2 + a^3) - 2(X^2 + 2Xa + a^2) - 12m(X + a) \\ &= X^4 + 4(a + m)X^3 + 2(3a^2 + 6am - 1)X^2 + \\ &\qquad + 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m)X + a^4 + 4ma^3 - 2a^2 - 12ma. \quad (1) \end{aligned}$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn khi:

$$\begin{cases} 4(a + m) = 0 \\ 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -m \\ 4m^3 - 4m = 0 \end{cases} \overset{a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0}{\Leftrightarrow} m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ

<u>Dạng toán 1:</u> Tiệm cận của đồ thị hàm phân thức hữu tỉ

Phương pháp

1. Mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0$ và TS, MS không có nghiệm chung) đều có hai tiệm cận là:
   - Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ vì $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^{\pm}} y = \infty$.
   - Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \frac{a}{c}$.
   - Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
2. Mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0, d \neq 0$ và TS, MS không có nghiệm chung) đều có hai tiệm cận là:
   - Tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$ vì $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^{\pm}} y = \infty$.
   - Tiệm cận xiên được xác định bằng cách chia TS cho MS, giả sử:
     $$y = \ y = kx + m + \frac{A}{dx+e}$$
     thì đường thẳng y = kx + m là tiệm cận xiên vì:
     $$\lim_{x \to \pm\infty}\left[y - (kx+m)\right] = 0.$$
   - Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

<u>Thí dụ 1.</u> a. *Tìm tiệm cận đứng và tiệm cân xiên của đồ thị* (C) *của hàm số*:
$$y = \frac{x^2+x-4}{x+2}.$$

b. *Xác định giao điểm* I *của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ* $\overrightarrow{OI}$.

c. *Viết phương trình của đường cong* (C) *đối với hệ toạ độ* IXY. *Từ đó, suy ra rằng đồ thị* (C) *nhận điểm* I *làm tâm đối xứng.*

✍ *Giải*

a. Viết lại hàm số dưới dạng:
$$y = x - 1 - \frac{2}{x+2}.$$
Tập xác định D = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng x = –2 là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to -2} y = \infty$.
- Đường thẳng y = x – 1 là tiệm cận xiên vì $\lim\limits_{x \to \infty} [y - (x - 1)] = 0$.

b. Ta lần lượt có:

- Giao điểm I(−2; −3).
- Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y - 3 \end{cases}$$

c. Khi đó trong hệ tọa độ IXY (C) có phương trình:

$$(C): Y - 3 = (X - 2) - 1 - \frac{2}{(X-2)+2} \Leftrightarrow (H): Y = X - \frac{2}{X}.$$

Nhận xét rằng, trong hệ tọa độ IXY hàm số $Y = X - \dfrac{2}{X}$ là hàm số lẻ dó đó nó nhận gốc tọa độ I làm tâm đối xứng.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên, ta thấy với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất (H): $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ với $a \neq 0$, $d \neq 0$ và TS, MS không có nghiệm chung, ta có:

- Đồ thị (H) luôn nhận điểm giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Không tồn tại tiếp tuyến của đồ thị qua I.

Ngoài ra, với các hàm hữu tỉ khác chúng ta sử dụng định nghĩa để xác định tiệm cận đứng, tiệm cận xiên (hoặc tiệm cận ngang) cho đồ thị hàm số.

Thí dụ 2. *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$.

✍ *Giải*

Miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + 2 + \frac{4x + 2}{x^2 - 2x}.$$

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng x = 0 là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$.
- Đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 2} y = \infty$.
- Đường thẳng y = x + 2 là tiệm cận xiên vì $\lim\limits_{x \to \infty} [y - (x + 2)] = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

☞ ***Chú ý***: Thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ các yêu cầu thường dc đặt ra với tiệm cận của hàm phân thức hữu tỉ chứa tham số.

Thí dụ 3. *Cho hàm số* $y = \dfrac{mx+1}{x+1-m}$.

a. *Chứng tỏ rằng với mọi* m *đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận.*
b. *Tìm* m *để khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đến gốc toạ độ bằng* 1.
c. *Tìm* m *để khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đến gốc toạ độ nhỏ nhất.*
d. *Tìm* m *để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng* 2.

Giải

a. Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi TS và MS có nghiệm chung, tức là:

$\dfrac{m}{1} = \dfrac{1}{1-m} \Leftrightarrow m(1-m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, với mọi m đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận là:

- Đường thẳng (d_1): $x = m - 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to m-1} y = \infty$.
- Đường thẳng (d_2): $y = m$ là tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = m$.

b. Với tâm đối xứng $I(m - 1; m)$, ta có:

$OI = 1 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + m^2 = 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

Vậy, với m = 0 hoặc m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Với tâm đối xứng $I(m - 1; m)$, ta có:

$$OI^2 = (m-1)^2 + m^2 = 2m^2 - 2m + 1 = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

suy ra $\text{MinOI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, đạt được khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy, với m = 0 hoặc m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta có:

- (d_1) cắt Ox tại điểm $A(m - 1; 0)$.
- (d_2) cắt Oy tại điểm $B(0; m)$.

Khi đó, từ giả thiết ta có:

$OA.OB = 2 \Leftrightarrow |m - 1|.|m| = 2 \Leftrightarrow |m^2 - m| = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - m = 2 \\ m^2 - m = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - m - 2 = 0 \\ m^2 - m + 2 = 0, \text{ vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = −1 hoặc m = 2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*:

$$(C_m): y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}.$$

Tìm m *để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng* 18.

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + m + 1 + \frac{m}{x-1}.$$

Trước tiên, để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên điều kiện là $m \neq 0$. (*)

Khi đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là (d): $y = x + m + 1$.

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy, ta được:

$A(-m - 1; 0)$ và $B(0; m + 1)$.

Để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 18 điều kiện là:

$$S_{\Delta OAB} = 18 \Leftrightarrow 18 = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|-m-1\right|.\left|m+1\right| = \frac{1}{2}(m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -7 \end{array}\right.$$, thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, với $m = 5$ hoặc $m = -7$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên, các em học hinh cần ghi nhận việc xác định điều kiện để đồ thị hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất có tiệm cận xiên.

Dạng toán 2: Tiệm cận của đồ thị hàm vô tỉ

Phương pháp

Sử dụng định nghĩa và quy tắc tìm tiệm cận hai phía.

Với hàm số:

(C): $y = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$, với $A > 0$ và $B^2 - 4AC \neq 0$

để tìm các đường tiệm cận của (C) ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x} = -\sqrt{A}.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C} + x\sqrt{A}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C} - x\sqrt{A}} = -\frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên bên phải của đồ thị (C) là:

$$(d_1): y = -\sqrt{A}\,x - \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Bước 2: Giả sử (d): $y = ax + b$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x} = \sqrt{A}.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C} - x\sqrt{A}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}} = \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên bên trái của đồ thị (C) là:

$$(d_2): y = \sqrt{A}\,x + \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Phương pháp được mở rộng cho lớp hàm số:

$$y = cx + d \pm \sqrt{Ax^2+Bx+C}\,; \qquad y = \sqrt[n]{A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0}..$$

Thí dụ 1. *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số*

a. $y = \sqrt{x^2+x+1}$. b. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

Giải

a. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

- Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}[y - ax] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1} + x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = -x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên bên phải của (C).

- Giả sử (d_2): $y = a_2x + b_2$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}[y - ax] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): $y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên bên trái của (C).

b. Miền xác định $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

- Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}[y - a_1x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3} + x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = 2.$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên bên phải của (C).

- Giả sử (d_2): $y = a_2x + b_2$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}[y - a_2x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = -2.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): $y = x - 2$ là tiệm cận xiên bên trái của (C).

☞ ***Hoạt động***: Qua thí dụ trên, các em học hãy giải thích tại sao cần có điều kiện $A > 0$ của hàm số $y = \sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

Thí dụ 2. *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số*

a. $y = x + \sqrt{x^2+1}$. b. $y = x + \sqrt{x^2-1}$.

✍ *Giải*

a. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

- Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(y - ax) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải của (C).

- Giả sử (d_2): $y = a_2x + b_2$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(y - ax) = \lim_{x\to+\infty}(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): $y = 2x$ là tiệm cận xiên bên trái của (C).

b. Điều kiện:

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Miền xác định $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

- Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(y - ax) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải của (C).

- Giả sử (d_2): y = a_2x + b_2 *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(y-ax) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.\right.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): y = 2x là tiệm cận xiên bên trái của (C).

☞ ***Hoạt động***: Qua thí dụ trên, các em học hãy giải thích tại sao hai hàm số đó lại có cùng tiệm cận.

☞ ***Chú ý***: Với các đồ thị hàm số vô tỉ dạng khác, để xác định các đường tiệm cận ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm miền xác định D và miền giá trị I (nếu có thể) của hàm số, nếu D hoặc I có chứa ∞ thì thực hiện bước 2 còn trái lại kết luận đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Bước 2: Dựa vào D và I tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số. Nếu hàm số chứa căn bậc chẵn, nói chung ta thường phải tìm các tiệm cận bên trái và bên phải.

Thí dụ 3. *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số*:

a. $y = \sqrt{2-x^2}$. b. $y = \sqrt{\sqrt{x^2-x+1}-x}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$$2 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{2} \Rightarrow D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow D \text{ không chứa } \infty.$$

Miền giá trị I của hàm số được xác định như sau:

$$2 - x^2 \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{2-x^2} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow I = [0; \sqrt{2}] \Rightarrow I \text{ không chứa } \infty.$$

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

b. Ta có điều kiện:

$$\sqrt{x^2-x+1}-x \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} \ge x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x^2-x+1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x+1 \ge x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right. \Rightarrow D = (-\infty; 1].$$

Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\sqrt{x^2-x+1}-x} = +\infty.$$

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

☞ ***Chú ý***: Với các đồ thị hàm số vô tỉ dạng phân thức hữu tỉ, chúng ta có thể đánh giá được sự tồn tại của tiệm cận xiên hoặc tiệm cận ngang dựa trên việc đánh giá bậc của tử số và mẫu số.

Thí dụ 4. *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số*:

a. $(C): y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. b. $(C): y = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Rightarrow D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Ta lần lượt:

- Vì $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng bên phải là $x = -1$.
- Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng bên trái là $x = 1$.
- Tiệm cận ngang bên phải, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

Vậy, đồ thị (C) có tiệm cận ngang bên phải là $y = -1$.

- Tiệm cận ngang bên trái, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Vậy, đồ thị (C) có tiệm cận ngang bên trái là $y = 1$.

b. Điều kiện $\dfrac{x}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x < -1 \end{array}\right. \Rightarrow D = (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

Ta lần lượt:

- Vì $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng bên phải là $x = 1$.
- Tiệm cận xiên (d): $y = ax + b$, ta có:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{x}{x+1} - 1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x.\frac{-1}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $(d): y = x - \dfrac{1}{2}$.

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

Dạng toán 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm đa thức bậc ba

Phương pháp

Với hàm số:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

ta lần lượt có:

a. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right)\right] = a(\pm\infty)^3 = a(\pm\infty).$$

- Bảng biến thiên:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
y'	
y	

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

c. Đồ thị:

- Điểm uốn:

$$y'' = 6ax + 2b, \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

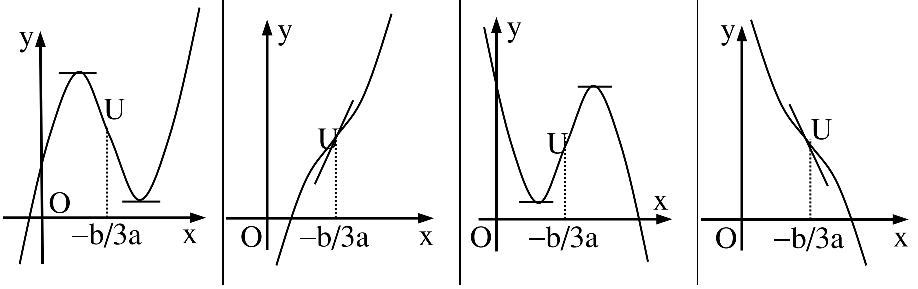
Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm $-\frac{b}{3a}$ nên đồ thị hàm số có một điểm uốn $U\left(-\frac{b}{3a}; f(-\frac{b}{3a})\right)$.

- Giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn U làm tâm đối xứng.

Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm bậc ba có bốn dạng sau đây:

Với a > 0		**Với a < 0**	
Có hai cực trị	Không có cực trị	Có hai cực trị	Không có cực trị



Thí dụ 1. *Cho hàm số*:

$$y = x^3 + 3x^2 - 4.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Tuỳ theo giá trị của* m *hãy biện luận số nghiệm của phương trình*:

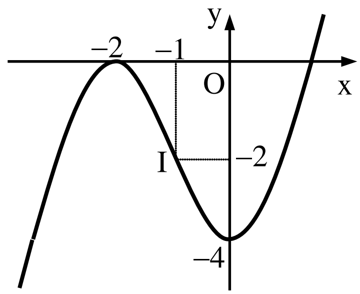
$$-x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0.$$

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.*

d. *Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:



1. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y\ y = \lim_{x\to\pm\infty} [x^3(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3})]$$

$$= \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{array}\right.$$

   - Bảng biến thiên:

$$y' = 3x^2 + 6x, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ 0	↘	-4 CT	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

– Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

– Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

– Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-2; 0)$ và cực tiêu tại điểm $(0; -4)$.

3. ***Đồ thị của hàm số***:

- Điểm uốn:

  $$y'' = 6x + 6, \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

  Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm −1 nên đồ thị hàm số có một điểm uốn là I(−1; −2).
- Giao của đồ thị hàm số với trục tung là A(0; −4).
- Giao của đồ thị hàm số với trục hoành:

  $$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow B(1; 0).$$

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^3 + 3x^2 - 4 = m.$$

Khi đó, số nghiệm của phương trình chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng y = m, do đó ta có kết luận:

- Với m < −4 hoặc m > 0 phương trình có nghiệm duy nhất.
- Với m = −4 hoặc m = 0 phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với −4 < m < 0 phương trình có ba nghiệm phân biệt.

c. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn I có dạng:

$$(d_I): y + 2 = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow (d_I): y = -3x - 5.$$

d. Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY (C) có phương trình:

$$(C): Y - 2 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 - 4 \Leftrightarrow (H): Y = X^3 - 3X.$$

Nhận xét rằng, trong hệ tọa độ IXY hàm số $Y = X^3 - 3X$ là hàm số lẻ dó đó nó nhận gốc tọa độ I làm tâm đối xứng.

Vậy, điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

Thí dụ 2. *Cho hàm số*:

$$y = (x+1)(x^2 + 2mx + m + 2).$$

a. *Tìm các giá trị của* m *để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.*

b. *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với* m = −1.

✍ *Giải*

a. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x+1)(x^2 + 2mx + m + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \ \ (1) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt điều kiện là:

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác −1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ 2 < m \neq 3 \end{cases}. \qquad (*)$$

Vậy, với m thỏa mãn (*) thì đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

b. *Bạn đọc tự giải.*

<u>Dạng toán 2:</u> Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm trùng phương

Phương pháp

Với hàm số:

$$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \text{ với } a \neq 0$$

ta lần lượt có:

a. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} ax^4\left(1 + \frac{b}{ax^2} + \frac{c}{ax^4}\right) = \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } a > 0 \\ -\infty \text{ khi } a < 0 \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
y'	
y	

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

c. Đồ thị:

- Điểm uốn:

$y'' = 12ax^2 + 2b$. (1)

Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số có hai điểm uốn: $U_1(x_1; f(x_1))$ và $U_2(x_2; f(x_2))$.

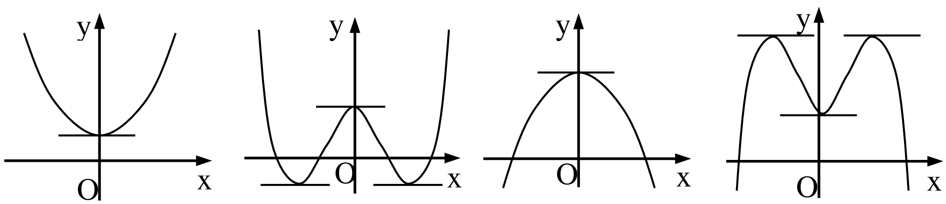
- Giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm bậc ba có bốn dạng sau đây:

Với a > 0 $\qquad\qquad$ **Với a < 0**

Có một cực trị | Có ba cực trị | Có một cực trị | Có ba cực trị



Thí dụ 1. *Cho hàm số*:

$$y = x^4 - 2mx^2 + 2m.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = \frac{1}{2}$. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại haiđiểm uốn.*
b. *Tìm các giá trị của* m *sao cho hàm số có ba cực trị.*

✍ *Giải*

a. Với $m = \frac{1}{2}$ hàm số có dạng:

$$y = x^4 - x^2 + 1.$$

Ta lần lượt có:

1. ***Hàm số xác định*** trên D = $\mathbb{R}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right] = (\pm\infty)^4 = +\infty.$$

   - Bảng biến thiên:

$$y' = 4x^3 - x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT 3/4	↗	CĐ 1	↘	CT 3/4	↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

3. ***Đồ thị của hàm số***:
   - Điểm uốn:

$$y'' = 12x^2 - 2, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

   Vì y'' đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{31}{36}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{31}{36}\right)$.

   - Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị A(–1; 1), B(1; 1).

   Bạn đọc tự vẽ hình.

Ta lần lượt nhận được hai tiếp tuyến là:

$$(d_1): y = -\frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12} \quad \text{và} \quad (d_2): y = \frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}.$$

b. Miền xác định D = $\mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 4x^3 - 4mx, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0. \qquad (1)$$

Để hàm số có ba cực trị điều kiện là:

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Vậy, với $m > 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y = x^4 - (m + 1)x^2 + m$.

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = -1$.

b. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua hai điểm cố định với mọi giá trị của* m.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m).

Khi đó:

$$y_0 = x_0^4 - (m + 1)x_0^2 + m, \forall m \Leftrightarrow (1 - x_0^2)m + x_0^4 - x_0^2 - y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0^2 = 0 \\ x_0^4 - x_0^2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 0)$.

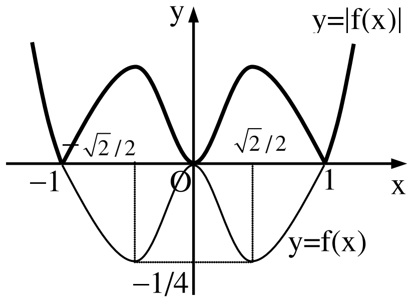
Thí dụ 3. *Cho hàm số*:

$$f(x) = x^4 - x^2.$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$.

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt có:

1. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [x^4(1 - \frac{1}{x^2})] = +\infty.$$

   - Bảng biến thiên:

$$y' = 4x^3 - 2x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}/2 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT $-1/4$	↗	CĐ 0	↘	CT $-1/4$	↗	$+\infty$

Bạn đọc tự kết luận dựa theo bảng biến thiên.

3. ***Đồ thị của hàm số***:
   - Điểm uốn:

$$y'' = 12x^2 - 2,\quad y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

   Vì y'' đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{5}{36}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{5}{36}\right)$.
   - Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị A(–1; 0), B(1; 0).

b. Đồ thị $y = |f(x)|$ gồm:
   1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
   2. Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

<u>Dạng toán 1:</u> Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Phương pháp

Với hàm số:

$$(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ với } c \neq 0,\ D = ad - bc \neq 0$$

ta lần lượt có:

a. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \frac{a}{c} \text{ nên } y = \frac{a}{c} \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}^{\pm}} y = \infty \text{ nên } x = -\frac{d}{c} \text{ là đường tiệm cận đứng.}$$

   - Bảng biến thiên:

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

   - Nếu $D = ad - bc > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.
   - Nếu $D = ad - bc < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.

Lập bảng biến thiên:

<u>Trường hợp D > 0</u>

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{a}{c}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{a}{c}$

<u>Trường hợp D < 0</u>

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	$\frac{a}{c}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{a}{c}$

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng nghịch biến của hàm số và hàm số không có cực trị.

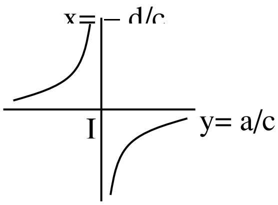
c. Đồ thị:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).

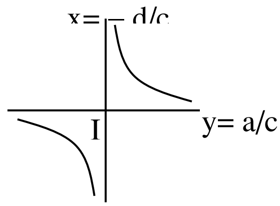
Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Do có hai trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm số có hai dạng sau đây:

Với D > 0



Với D < 0



<u>Thí dụ 1.</u> *Cho hàm số* $y=\frac{x+1}{x-2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó, suy ra đồ thị hàm số* $y=\frac{x+1}{2-x}$.

b. *Chứng minh rằng giao điểm* I *của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của nó.*

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm* A *của đồ thị với trục tung.*

d. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm* A. *Giả sử tiếp tuyến này tiếp xúc với* (H) *tại* A’, *chứng tỏ rằng* A *và* A’ *đối xứng với nhau qua giao điểm* I *của hai đường tiệm cận.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

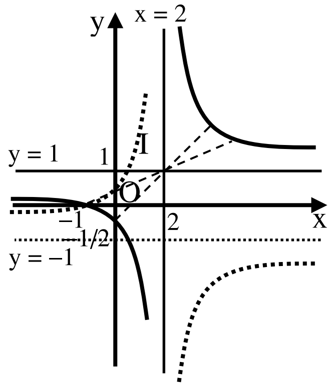
1. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

     $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ nên y = 1 là đường tiệm cận ngang.

     $\lim\limits_{x\to 2} y = \infty$ nên x = 2 là đường tiệm cận đứng.
   - Bảng biến thiên:

     $y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \in D$

     $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.



x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1

3. ***Đồ thị của hàm số***: Lấy thêm các điểm:

   $A\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$ và B(−1; 0).

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$ được viết lại dưới dạng $y = -\dfrac{x+1}{x-2}$, nên đồ thị của nó được suy ra bằng cách lấy đối xứng đồ thị (H) qua trục Ox (đường nét đứt).

b. *Bạn đọc tự thực hiện bằng phép tịnh tiến toạ độ.*

c. Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$$(d_A): y + \frac{1}{2} = y'_{(0)}.x \Leftrightarrow (d_A): y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

d. Tiếp tuyến song song với (d_A) nên có hệ số góc $k = -\dfrac{3}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm A' của tiếp tuyến với đồ thị (H) là nghiệm của phương trình:

$$\frac{-3}{(x-2)^2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \text{ loại} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A'\left(4; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \text{A và A' đối xứng với nhau qua I.}$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm A' có dạng:

$$(d_{A'}): y - \frac{5}{2} = y'_{(4)}.(x-4) \Leftrightarrow (d_{A'}): y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Các em học sinh khi quan sát hình vẽ trên sẽ rút ra được phương pháp để vẽ đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất, cụ thể vì các dạng hàm số này luôn đơn điệu trên miền xác định của nó và luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng nên để vẽ đúng đồ thị của nó các em học sinh hãy thực hiện như sau:

a. Trong phần 3 (Đồ thị của hàm số) chúng ta lấy hai điểm A, B thuộc một nhánh của đồ thị (có hoành độ lớn hơn hoặc nhỏ hơn giá trị của tiệm cận đứng).
b. Vẽ hệ toạ độ cùng với hai đường tiệm cận với lưu ý để tâm đối xứng I ở giữa hình.
c. Vẽ nhánh đồ thị chứa hai điểm A, B tựa theo hai tiệm cận.
d. Lấy hai điểm A', B' theo thứ tự đối xứng với A, B qua I, rồi thực hiện vẽ nhánh đồ thị chứa A', B'.

Thí dụ 2. *Cho hàm số* (H_m): $y = \dfrac{x-4m}{2(mx-1)}$.

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = 1$.
b. *Chứng minh rằng với mọi* $m \neq \pm\dfrac{1}{2}$, *các đường cong* (H_m) *đều đi qua hai điểm cố định* A *và* B.
c. *Chứng minh rằng tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với* (H_m) *tại hai điểm* A *và* B *là một hằng số khi* m *biến thiên.*

✍ *Giải*

a. Với m = 1 hàm số có dạng:

$$y = \frac{x-4}{2(x-1)}.$$

1. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:
     $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ nên y = 1 là đường tiệm cận ngang.
     $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$ nên x = 1 là đường tiệm cận đứng.
   - Bảng biến thiên:
     $y' = \dfrac{3}{2(x-1)^2} > 0$ với mọi $x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1/2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1/2

3. ***Đồ thị của hàm số*** – *Bạn đọc tự vẽ hình.*

b. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (H_m). Khi đó:

$$y_0 = \frac{x_0-4m}{2(mx_0-1)}, \forall m \Leftrightarrow 2(x_0y_0+2)m - x_0 - 2y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0y_0 + 2 = 0 \\ -x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2y_0 \\ (-2y_0)y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-2;1) \\ B(2;-1) \end{array}\right.$$

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A(−2; 1) và $M_2(2; -1)$.

c. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{4m^2 - 1}{2(mx - 1)^2}.$$

Khi đó, tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với (H_m) tại hai điểm A và B được cho bởi:

$$k_A.k_B = y'(-2).y'(2) = \frac{4m^2 - 1}{2(-2m - 1)^2}.\frac{4m^2 - 1}{2(2m - 1)^2} = \frac{(4m^2 - 1)^2}{4(2m + 1)^2.(2m - 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

__Dạng toán 2:__ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất

Phương pháp

Với hàm số:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \text{ với } ad \neq 0, \text{ tử, mẫu không có nghiệm chung}$$

ta lần lượt có:

Viết lại hàm số dưới dạng $y = f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{dx + e}$.

a. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\frac{e}{d}^{\pm}} y = \infty$ nên $x = -\dfrac{e}{d}$ là đường tiệm cận đứng.

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (\alpha x + \beta)] = 0$ nên $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên.

- Bảng biến thiên:

  $$y' = \alpha - \frac{\gamma d}{(dx + e)^2} = \frac{\alpha(dx + e)^2 - \gamma d}{(dx + e)^2}.$$

  Dấu của đạo hàm là dấu của tam thức $g(x) = \alpha(dx + e)^2 - \gamma d$.

  Vậy phương trình y' = 0 hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số hoặc không có cực trị hoặc có hai cực trị.

  Lập bảng biến thiên:

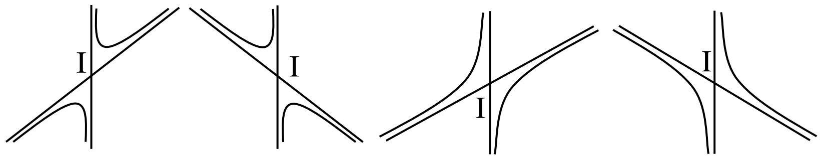
x	$-\infty$	$-e/d$	$+\infty$
y'		||	
y		||	

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến và cực trị (nếu có) của hàm số.

d. Đồ thị:
   - Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).

   Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

   Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm số có bốn dạng.



Thí dụ 1. *Cho hàm số* (H): $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

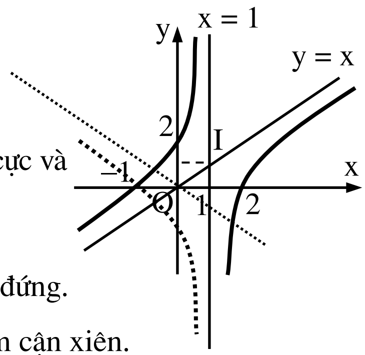
a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó, suy ra đồ thị hàm số* (H'): $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 1|}$.

b. *Chứng minh rằng giao điểm* I *của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của nó.*

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm* A(3; 3).

✍ *Giải*

a. Viết lại hàm số dưới dạng $y = x - \dfrac{2}{x - 1}$.



1. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. ***Sự biến thiên của hàm số***:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

     $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

     $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$ nên x = 1 là đường tiệm cận đứng.

     $\lim\limits_{x \to \infty} (y - x) = 0$ nên y = x là đường tiệm cận xiên.
   - Bảng biến thiên:

     $y' = 1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0\ \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. ***Đồ thị của hàm số***: Lấy thêm hai điểm A(0; 2) và B(−1; 0).
Ta có:

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-1} & \text{với } x>1 \\ -\dfrac{x^2 - x - 2}{x-1} & \text{với } x<-1 \end{cases}.$$

Từ đó, đồ thị hàm số (H’) gồm hai phần:

- Phần đồ thị (H) với x > 1.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (H) với x < 1 qua trục Ox.

b. *Bạn đọc tự thực hiện bằng phép tịnh tiến toạ độ.*

c. Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \Leftrightarrow (d): y = \left[1 + \frac{2}{(x_0-1)^2}\right].(x - x_0) + x_0 - \frac{2}{x_0 - 1}.$$

Điểm $A \in (d)$ nên:

$$3 = \left[1 + \frac{2}{(x_0-1)^2}\right].(3 - x_0) + x_0 - \frac{2}{x_0 - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 - x_0 + \frac{2}{(x_0-1)^2}.[2 + (1 - x_0)] + x_0 - \frac{2}{x_0-1} \Leftrightarrow \frac{4}{(x_0-1)^2} = \frac{4}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow x_0 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có dạng:

$(d): y = y'(2).(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow (d_A): y = 3(x - 2).$

☞ ***Nhận xét***: Các em học sinh khi quan sát hình vẽ trên sẽ rút ra được phương pháp để vẽ đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất, cụ thể vì các dạng hàm số này luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng nên để vẽ đúng đồ thị của nó các em học sinh hãy thực hiện như sau:

Khả năng 1: Nếu hàm số có cực trị thì trong phần 3 (Đồ thị của hàm số) chúng ta lấy hai điểm A, B đối xứng với nhau qua I, từ đó:

a. Vẽ hệ toạ độ cùng với hai đường tiệm cận với lưu ý để tâm đối xứng I ở giữa hình.
b. Vẽ nhánh đồ thị chứa điểm A và cực trị tương ứng tựa theo hai tiệm cận.
c. Vẽ nhánh đồ thị chứa điểm B và cực trị tương ứng tựa theo hai tiệm cận.

Khả năng 2: Nếu hàm số không có cực trị chúng ta lấy hai điểm A, B thuộc một nhánh của đồ thị (có hoành độ lớn hơn hoặc nhỏ hơn giá trị của tiệm cận đứng):

a. Vẽ hệ toạ độ cùng với hai đường tiệm cận với lưu ý để tâm đối xứng I ở giữa hình.
b. Vẽ nhánh đồ thị chứa hai điểm A, B tựa theo hai tiệm cận.

c. Lấy hai điểm A', B' theo thứ tự đối xứng với A, B qua I, rồi thực hiện vẽ nhánh đồ thị chứa A', B'.

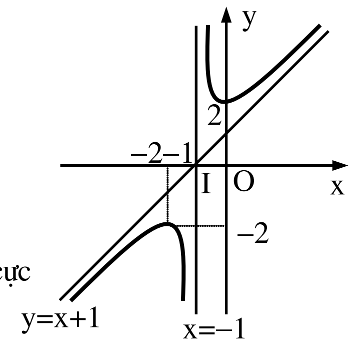
Thí dụ 2. *Cho hàm số*:

$$(C_m):\ y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 1.

b. *Tìm* m *để hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng* x + y + 2 = 0 *bằng nhau*.

✍ *Giải*



a. Với m = 1, hàm số có dạng:

$$y = \frac{x^2+2x+2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Ta lần lượt có:

1. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

     $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

     $\lim\limits_{x\to-1} y = \infty$ nên x = –1 là đường tiệm cận đứng.

     $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(x+1)] = 0$ nên y = x + 1 là đường tiệm cận xiên.
   - Bảng biến thiên:

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2},\quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	–	||	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ -2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	CT 2	↗	$+\infty$

3. Đồ thị của hàm số.

b. Hàm số có đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2},\qquad y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0.\quad (1)$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

(1) có hai nghiệm phân biệt khác –1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \neq 0 \\ 3-2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.\qquad (*)$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 2m - 2 \end{cases}$$

và toạ độ hai điểm cực trị là $A(x_1, 2x_1 + 2m)$ và $B(x_2, 2x_2 + 2m)$.

Gọi d_1, d_2 theo thứ tự là khoảng cách từ các điểm cực trị A và B đến đường thẳng $x + y + 2 = 0$, ta có:

$$d_1 = \frac{|3x_1 + 2m + 2|}{\sqrt{2}} \text{ và } d_2 = \frac{|3x_2 + 2m + 2|}{\sqrt{2}}.$$

Do đó:

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \ \ (\text{loai vi } x_1 \neq x_2) \\ 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}, \text{ thoả mãn (*)}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

Dạng toán 1: (*Ứng dụng của đồ thị giải phương trình*): Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $F(x, m) = 0$ (1)

Phương pháp

Giả sử ta đã có đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của hàm số (C): $y = f(x)$, ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$f(x) = h(m) \qquad (2)$$

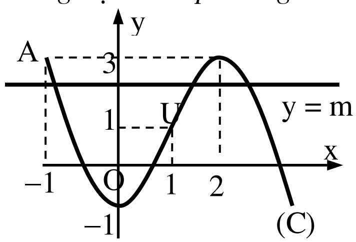
Bước 2: Khi đó, số nghiệm phân biệt phương trình của (1) là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = h(m)$.

- Bằng việc tịnh tiến (d) theo Oy và song song với Ox, ta biện luận được số nghiệm của phương trình (1).

Thí dụ 1. a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số* $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

b. *Tuỳ theo giá trị của* m *hãy biện luận số nghiệm của phương trình*:

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = m.$$



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

1. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [-x^3(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3})] = \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } x \to -\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to +\infty \end{array}\right..$$

- Bảng biến thiên:

  $y' = -3x^2 + 6x$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	-1 CT	↗	CĐ 3	↘	$-\infty$

3. Đồ thị của hàm số:
   - Điểm uốn:

     $y'' = -6x + 6$, $\qquad y'' = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

     Vì y'' đổi dấu khi qua điểm $x = 1$ nên đồ thị hàm số có một điểm uốn là U(1; 1).
   - Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị A(−1; 3), B(3; −1).

   Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn U(1; 1) làm tâm đối xứng.

b. Nhận xét rằng số nghiệm của phương trình chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = m$, do đó ta có kết luận:

- Với $m < -1$ hoặc $m > 3$ phương trình có nghiệm duy nhất.
- Với $m = -1$ hoặc $m = 3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với $-1 < m < 3$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên:

1. Ở câu a), các em học sinh có thể kiểm nghiệm được tính đúng đắn của nội dung chú ý sau dạng toán 1. Từ đó, tiến trình để vẽ được đồ thị trên có thể được giải thích như sau:
   - Từ bảng biến thiên và phần tìm điểm uốn, chúng ta mới có được ba điểm thuộc đồ thị là điểm cực đại (ĐCĐ), điểm cực tiểu (ĐCT), điểm uốn (ĐU) và ba điểm này luôn thẳng hàng (theo tính chất của hàm đa thức bậc ba), nên chỉ tạo ra được nhánh giữa của đồ thị (ứng với bảng biến thiên).
   - Để vẽ được nhành phía trái cần lấy một điểm A có hoành độ $x < 0$.
   - Để vẽ được nhành phía phải cần lấy một điểm B có hoành độ $x > 2$.
   - Từ tính đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba (nhận điểm uốn làm tâm đối xứng) chúng ta lấy hai điểm A, B có hoành độ đối xứng qua điểm U.
   - Nối bằng đường thẳng mờ A → CT → U → CĐ → B. Sau đó lượn một đường cong đi qua các điểm đó.

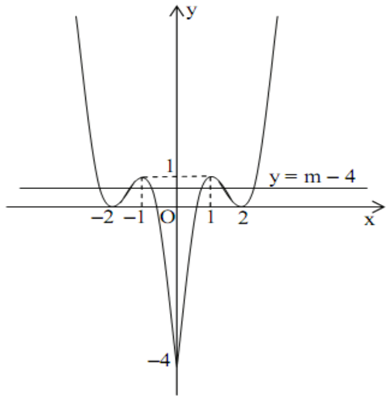
   Lưu ý rằng trong phần đồ thị hàm số, chúng ta bỏ qua:
   - Việc tìm giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy bởi đó chính là điểm CT.
   - Việc tìm giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox bởi phương trình $-x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ không có nghiệm nguyên.
2. Để tăng độ khó cho câu hỏi biện luận số nghiệm của phương trình, người ta có thể thay nó bằng "*Tìm điều kiện của* m *để phương trình có nghiệm* $x > 3$", khi đó dựa vào đồ thị câu trả lời là $m < -1$.

Thí dụ 2. (Đề thi đại học khối A – 2006):

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số* $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

b. *Tìm* m *để phương trình* $2|x^3| - 9x^2 + 12|x| = m$ *có* 6 *nghiệm phân biệt*.

Giải



a. Ta lần lượt có:

1. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{array}\right.$$

   - Bảng biến thiên:

$y' = 6x^2 - 18x + 12$,

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	CT 0	↗	$+\infty$

3. Đồ thị của hàm số:
   - Điểm uốn:

$y'' = 12x - 18$, $\qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vì y'' đổi dấu khi qua $x = \frac{3}{2}$ nên đồ thị hàm số có một điểm uốn là $U\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Đồ thị nhận điểm uốn U làm tâm đối xứng.

   - Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị A(0; –4), B(3; –1).

b. Hàm số $y = 2|x^3| - 9x^2 + 12|x| - 4$ là hàm số chẵn, nên đồ thị (T) của nó gồm hai phần:

- Phần của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ với $x \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần của đồ thị trên qua Oy.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$2|x^3| - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$.

Số nghiệm của phương trình chính bằng số giao điểm của đồ thị (T) với đường thẳng $y = m - 4$, do đó để nó có 6 nghiệm phân biệt điều kiện là:

$0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Vậy, với $4 < m < 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 2: Giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp

Với yêu cầu thường gặp là "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *có hệ số góc* k *đi qua điểm* $M(x_0; y_0)$, *biện luận theo* k *số giao điểm của* (d) *và đồ thị hàm số* (C): $y = f(x)$", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

Bước 3: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$f(x) = k(x - x_0) + y_0. \quad (1)$$

Khi đó số giao điểm của (d) và (C) là số nghiệm phân biệt thuộc tập D của phương trình (1).

Thí dụ 1. (Đề thi đại học khối D – 2006): *Cho hàm số*:

$$(C): y = x^3 - 3x + 2.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Gọi* (d) *là đường thẳng đi qua điểm* A(3; 20) *và có hệ số góc* m. *Tìm m để đường thẳng* (d) *cắt đồ thị* (C) *tại ba điểm phân biệt.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Đường thẳng (d) có phương trình $y = m(x - 3) + 20$.

Hoành dộ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x + 2 = m(x - 3) + 20 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ g(x) = x^2 + 3x + 6x - m = 0 \end{array}\right. . \quad (I)$$

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt điều kiện là hệ (I) có ba nghiệm phân biệt, tức:

Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 15 > 0 \\ 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{15}{4} < m \neq 24.$$

Vậy, với $\Leftrightarrow \frac{15}{4} < m \neq 24$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho hàm số*:

$$(C): y = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Tìm các giao điểm của đường cong* (C) *với parabol* (P): $y = 2x^2 + 1$.

c. *Viết phương trình các tiếp tuyến của* (C) *và* (P) *tại các giao điểm của chúng.*

d. *Xác định các khoảng trên đó* (C) *nằm phía trên hoặc phía dưới* (P).

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm có dạng:

$$2x^3 + 3x^2 + 1 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, ta được (C) $\cap$ (P) = $\{A(0; 1), B(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})\}$.

c. Vì A là giao điểm kép (x = 0 là nghiệm kép) nên phương trình tiếp tuyến tại A của (C) và (P) giống nhau, cụ thể:

(d_A): $y - 1 = y'(0).x \Leftrightarrow (d_A)$: $y = 1$.

Tại giao điểm B lần lượt với (C) và (P):

- Với (C) ta có $y' = 6x^2 + 6x$ do đó phương trình tiếp tuyến tại B có dạng:

$$(d^1{}_B): y - \frac{3}{2} = y'(-\frac{1}{2}).(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (d^1{}_A): y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

- Với (P) ta có $y' = 4x$ do đó phương trình tiếp tuyến tại B có dạng:

$$(d^2{}_B): y - \frac{3}{2} = y'(-\frac{1}{2}).(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (d^2{}_B): y = -2x + \frac{1}{2}.$$

d. Bằng việc xét dấu biểu thức ở VT của (1), ta có kết luận:

- (C) nằm dưới (P) khi x thuộc $(-\infty; -\frac{1}{2})$.
- (C) nằm trên (P) khi x thuộc $(-\frac{1}{2}; +\infty)\backslash\{0\}$.

Thí dụ 3. a. *Vẽ đồ thị* (P) *của hàm số* $y = x^2 - x + 1$ *và đồ thị* (H) *của hàm số* $y = \frac{1}{x+1}$.

b. *Tìm giao điểm của hai đường cong* (P) *và* (H). *Chứng minh rằng hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.*

c. *Xác định các khoảng trên đó* (P) *nằm phía trên hoặc phía dưới của* (H).

✍ *Giải*

c. *Bạn đọc tự giải.*

d. Hoành dộ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^3}{x+1} = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A(0; 1)$.

Vậy, hai đồ thị (P) và (H) cắt nhau tại điểm A(0; 1).

Ta lần lượt có:

- Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A có dạng:

$$(d_1): y - 1 = y'_{(P)}(0).x \Leftrightarrow (d_1): y = -x + 1.$$

- Phương trình tiếp tuyến của (H) tại A có dạng:

$$(d_2): y - 1 = y'_{(H)}(0).x \Leftrightarrow (d_2): y = -x + 1.$$

Nhận thấy $(d_1) \equiv (d_2)$, tức là (P) và (H) có tiếp tuyến chung tại A.

e. Bằng việc xét dấu biểu thức ở VT của (1), ta có kết luận:
- (H) nằm dưới (P) khi x thuộc $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.
- (H) nằm trên (P) khi x thuộc $(-1; 0)$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*:

$$y = \frac{2x-1}{x+1}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Với các giá trị nào của* m *đường thẳng* (d_m) *đi qua điểm* $A(-2; 2)$ *và có hệ số góc* m *cắt đồ thị của hàm số đã cho*:
- *Tại hai điểm phân biệt ?*
- *Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?*

Giải

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): y = m(x + 2) + 2 \Leftrightarrow (d_m): y = mx + 2m + 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_m) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{2x-1}{x+1} = mx + 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0 \text{ với } x \neq -1. \quad (1)$$

- Đường thẳng (d_m) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 4m(2m+3) > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 12m > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 12$.

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m > 12$ đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d_m) tại hai điểm phân biệt.

- Đường thẳng (d_m) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị:

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$

$\Leftrightarrow af(-1) < 0 \Leftrightarrow m.3 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy, với $m < 0$ đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d_m) tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Thí dụ 5. *Cho hàm số*:

$$(H): y = \frac{x+2}{2x+1}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Chứng minh rằng đường thẳng* $y = mx + m - 1$ *luôn đi qua một điểm cố định của đường cong* (H) *khi* m *biến thiên.*

c. *Tìm các giá trị của* m *sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong* (H) *tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của* (H).

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng.

Khi đó:

$$y_0 = mx_0 + m - 1, \forall m \Leftrightarrow (x_0 + 1)m - 1 - y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ -1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -1) \in (H).$$

Vậy, họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $M(-1; -1)$ của đường cong (H) khi m biến thiên.

c. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng với đồ thị hàm số là:

$$\frac{x+2}{2x+1} = mx + m - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2mx^2 + 3(m - 1)x + m - 3 = 0 \text{ với } x \neq -\frac{1}{2}. \quad (1)$$

Đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm thuộc một nhánh của đồ thị:

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 về một phía của $-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 < -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < x_1 < x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ m.f(-1/2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \neq m < 0.$$

Vậy, với $-3 \neq m < 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 6. *Cho hàm số* (H): $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Với giá trị nào của* m *thì đường thẳng* $y = m - x$ *cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt ?*

c. *Gọi* A *và* B *là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm* M *của đoạn thẳng* AB *khi* m *biến thiên.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng với đồ thị hàm số là:

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = m - x \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0 \text{ với } x \neq 1. \quad (1)$$

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ f(1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 8m - 8 > 0\\ 2 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m > 4 + 2\sqrt{6}\\ m < 4 - 2\sqrt{6}\end{array}\right. . \quad (2)$$

Vậy, với $m > 4 + 2\sqrt{6}$ hoặc $m < 4 - 2\sqrt{6}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Với kết quả trong b), phương trình (1) có hai nghiệm x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases}x_A + x_B = \dfrac{m+2}{3}\\ x_A x_B = \dfrac{m+1}{3}\end{cases} \Rightarrow A(x_A, m - x_A), B(x_B, m - x_B).$$

Khi đó, tọa độ trung điểm M(x; y) của AB được cho bởi:

$$\begin{cases}x = \dfrac{x_A + x_B}{2}\\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{x_A + x_B}{2}\\ y = m - \dfrac{x_A + x_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{m+2}{6}\\ y = m - \dfrac{m+2}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x = m + 2\\ 6y = 5m - 2\end{cases}$$

$\Rightarrow 30x - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow 5x - y - 2 = 0.$

Vậy, tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên thuộc đường thẳng $5x - y - 2 = 0$.

Thí dụ 7. *Cho hàm số* $y = x^4 - (m + 1)x^2 + m$.

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = 2$.

b. *Tìm các giá trị của* m *sao cho đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải*.

b. Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau tức là đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$y = x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, khi đó (1) có dạng:

$$t^2 - (m + 1)t + m = 0. \quad (2)$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ -b/a > 0\\ c/a > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2 - 4m > 0\\ m + 1 > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1,$$

và khi đó bốn nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}=-2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1. \quad (3)$$

Theo định lí Vi - ét ta có:

$$\begin{cases} t_1+t_2=m+1 \\ t_1t_2=m \end{cases} \quad (I)$$

Thay (3) vào (I) được:

$$\begin{cases} t_1+9t_1=m+1 \\ t_1.(9t_1)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1=m+1 \\ 9t_1^2=m \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2-82m+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9 \\ m=\frac{1}{9} \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = 9$ hoặc $m = \frac{1}{9}$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Dạng toán 3: Sự tiếp xúc của hai đồ thị

Phương pháp

Sử dụng mệnh đề:

"*Hai đồ thị hàm số y = f(x) và y = g(x) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm*:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}"$$

Khi đó, nghiệm của hệ phương trình chính là hoành độ tiếp điểm.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số*:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \text{ và } g(x) = \frac{3x}{x+2}$$

tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

✍ *Giải*

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=\frac{3x}{x+2} \\ x+\frac{3}{2}=\frac{6}{(x+2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Suy ra, đồ thị hai hàm số y = f(x) và y = g(x) tiếp xúc với nhau tại gốc O.

- Phương trình tiếp tuyến chung có dạng:

$$(d): y = g'(0).x \Leftrightarrow (d): y = \frac{3}{2}x.$$

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số*:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 6,\ g(x) = x^3 - x^2 + 4 \text{ và } h(x) = x^2 + 7x + 8$$

tiếp xúc với nhau tại điểm A(−1; 2).

✍ *Giải*

Ta lần lượt thực hiện:

- Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x + 6 = x^3 - x^2 + 4 \\ -2x + 3 = 3x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2.$$

Suy ra, đồ thị hai hàm số y = f(x) và y = g(x) tiếp xúc với nhau tại điểm A(−1; 2).

- Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f'(x) = h'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x + 6 = x^2 + 7x + 8 \\ -2x + 3 = 2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2.$$

Suy ra, đồ thị hai hàm số y = f(x) và y = h(x) tiếp xúc với nhau tại điểm A(−1; 2).

Thí dụ 3. *Tìm các hệ số* a *và* b *sao cho parabol* $y = 2x^2 + ax + b$ *tiếp xúc với hypebol* $y = \frac{1}{x}$ *tại điểm* $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

✍ *Giải*

Để (P) tiếp xúc với (H) điều kiện là hệ sau có nghiệm $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 2x^2 + ax + b = \dfrac{1}{x} \\ 4x + a = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + a.\dfrac{1}{2} + b \\ 4.\dfrac{1}{2} + a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = -6 \text{ và } b = \frac{9}{2}.$$

Vậy, với a = −6 và $b = \frac{9}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Phương pháp

Với hàm số:

(C): y = f(x)

1. Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ của (C) có phương trình:

   (d): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

2. Với yêu cầu "*Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số đi qua điểm* $A(x_A; y_A)$", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Bước 2: Điểm $A(x_A; y_A) \in (d)$, ta có:

$$y_A - y(x_0) = f'(x_0)(x_A - x_0) \Rightarrow \text{Tiếp điểm } x_0$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phương trình (d) đi qua $A(x_A; y_A)$ có dạng:

$$(d): \ y = k(x - x_A) + y_A.$$

Bước 2: (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ số góc k}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

3. Với yêu cầu "*Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng* k", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hàm số, ta tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 2: Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình:

$$f'(x) = k \Rightarrow \text{Hoành độ tiếp điểm } x_0.$$

Bước 3: Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phương trình với hệ số góc k có dạng:

$$(d): \ y = kx + b.$$

Bước 2: Để (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases} \Rightarrow \text{Giá trị b}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

☞ ***Chú ý***: Khi sử dụng cách 1 ngoài việc có được phương trình tiếp tuyến chúng ta còn nhận được toạ độ tiếp điểm.

Thí dụ 1. (Đề thi đại học khối B – 2004): *Cho hàm số* (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*

b. *Viết phương trình tiếp tuyến* (d) *của* (C) *tại điểm uốn và chứng minh rằng* (d) *là tiếp tuyến của* (C) *có hệ số góc nhỏ nhất*.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm uốn của (C) là:

$$(d): y = y'_{(2)}(x-2) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow (d): y = -x + \frac{8}{3}.$$

Ta có:

$$y' = x^2 - 4x + 3,$$

suy ra hệ số góc cuả tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thuộc đồ thị hàm số (C) là:

$$k = y'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3 = (x_0-2)^2 - 1 \geq -1,$$

tức là $k_{min} = -1$ đạt được khi $x_0 = 2 = x_U$, đpcm.

Thí dụ 2. (Đề thi đại học khối D – 2005): *Cho hàm số*:

$$(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}, \text{ với m là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* $m = 2$.

b. *Gọi* M *là điểm thuộc* (C_m) *có hoành độ bằng* -1. *Tìm* m *để tiếp tuyến của* (C_m) *tại điểm* M *song song với đường thẳng* $5x - y = 0$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Ta có:

$$y' = x^2 - mx.$$

Từ giả thiết, suy ra $M(-1, -\frac{m}{2})$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có phương trình:

$$(d): y = y'_{(-1)}(x+1) - \frac{m}{2} \Leftrightarrow (d): (1+m)x - y + 1 + \frac{m}{2} = 0.$$

Để (d) song song với đường thẳng $5x - y = 0$ điều kiện là:

$$\begin{cases} 1 + m = 5 \\ 1 + \dfrac{m}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, với $m = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. *Cho hàm số* $y = \dfrac{ax^2 - bx}{x - 1}$.

a. *Tìm* a *và* b *biết rằng đồ thị* (C) *của hàm số đã cho đi qua điểm* $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ *và tiếp tuyến của* (C) *tại điểm* O *có hệ số góc bằng* -3.

b. *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của* a *và* b *đã tìm được ở trong câu* a).

✍ *Giải*

a. Trước tiên ta có:

$$y' = \frac{ax^2 - 2ax + b}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm O là } k_O = y'(0)$$

$\Leftrightarrow -3 = b \Leftrightarrow b = -3.$

Vì điểm A thuộc đồ thị hàm số nên:

$$\frac{5}{2} = \frac{a(-1)^2 - (-3)(-1)}{(-1) - 1} \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, với a = –2 và b = –3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Thí dụ 4. *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

a. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm* A *của đồ thị với trục tung.*

b. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đi qua điểm* B(3; 4).

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm* A.

✍ *Giải*

a. Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x+1}{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A\left(0; -\frac{1}{2}\right).$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$$(d_A): y = y'(0).x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d_A): y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (d): y = -\frac{3}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-2}.$$

Tiếp tuyến (d) đi qua điểm B nên:

$$4 = -\frac{3}{(x_0-2)^2}(3 - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-2} \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y = -3(x-3) + 4 \Leftrightarrow (d): y = -3x + 13.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua điểm B(3; 4) nên có phương trình y = k(x – 3) + 4.

Để (d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} = k(x-3)+4 \\ \dfrac{-3}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{3}{(x-2)^2}(x-3)+4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow k = -3.$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến (d) có dạng: $y = -3x + 13$.

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Tiếp tuyến song song với (d_A) nên có hệ số góc $k = -\dfrac{3}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$\dfrac{-3}{(x-2)^2} = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \text{ loại} \end{array}\right..$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x = 4 có dạng:

$$(d): y = y'(4).(x-4) + y(4) \Leftrightarrow (d): y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{2}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) song song với (d_A) nên có phương trình $y = -\dfrac{3}{4}x + b$.

Để (d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{3}{4}x+b \\ \dfrac{-3}{(x-2)^2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{3}{4}x+b \\ \left[\begin{array}{l} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{3}{4}x+b \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b = \dfrac{11}{2}.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến (d) có dạng: $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{2}$.

Thí dụ 3. (Đề thi đại học khối B – 2006): *Cho hàm số*:

$$(C): y = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*
b. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C), *biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của* (C).

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự thực hiện.*

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên (d_A): y = x – 1.

Tiếp tuyến vuông góc với (d_A) nên có hệ số góc k = –1.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$1-\frac{1}{(x+2)^2}=-1 \Leftrightarrow (x+2)^2=2 \Leftrightarrow x=-2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó:

- Với $x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$, ta được tiếp tuyến:

$$(d_1): y = y'_{\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(x+2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'_{\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \Leftrightarrow (d_1): y=-x+2\sqrt{2}-5.$$

- Với $x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ta được tiếp tuyến:

$$(d_2): y = y'_{\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(x+2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'_{\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \Leftrightarrow (d_2): y=-x-2\sqrt{2}-5.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 5: Điểm và đồ thị

Phương pháp

1. Với yêu cầu "*Tìm điểm cố định của họ* (C_m): $y = f(x, m)$ *với* $m\in\mathbb{R}$", ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m).

   Bước 2: Khi đó:

   $$y_0 = f(x_0, m), \forall m.$$

   Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0 ta nhận được cặp giá trị $(x_0; y_0)$.

   Bước 3: Kết luận.

2. Với yêu cầu "*Tìm điểm* M *thuộc đồ thị hàm số* (C): $y = f(x)$ *thỏa mãn điều kiện* K", ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0) = M(x_0; f(x_0))$.

   Bước 2: Thiết lập điều kiện K cho điểm M.

   Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 1. (Đề thi đại học khối D – 2004): *Cho hàm số*:

$$(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1, \text{ m là tham số.}$$

a. Kh*ảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m* = 2.

b. *Tìm* m *để điểm uốn của* (C_m) *thuộc đường thẳng* $y = x + 1$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta lần lượt có các đạo hàm:

$y' = 3x^2 - 6mx + 9, \quad y'' = 6x - 6m,$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6m = 0 \Leftrightarrow x = m,$

tức là với mọi m hàm số luôn có điểm uốn $U(m, -2m^3 + 9m + 1)$.

Để U thuộc đường thẳng $y = x + 1$, điều kiện là:

$-2m^3 + 9m + 1 = m + 1 \Leftrightarrow m^3 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = \pm 2$.

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = \pm 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho hàm số* (C_m): $y = \dfrac{mx - m - 2}{x + 1}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = 1$.
b. *Chứng minh rằng họ* (C_m) *luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.*

Giải

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m), khi đó:

$$y_0 = \frac{mx_0 - m - 2}{x_0 + 1}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 \neq 0 \\ (x_0 - 1)m - 2 - x_0y_0 - y_0 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ x_0 - 1 = 0 \\ -2 - x_0y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(1; -1).$$

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua một điểm cố định $M(1; -1)$.

Thí dụ 3. *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*
b. *Tìm trên đồ thị hàm số tất cả những điểm có các toạ độ là nguyên.*
c. *Tìm hai điểm* A, B *thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị để khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất.*

Giải

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Viết lại hàm số dưới dang $y = 1 - \dfrac{3}{x + 2}$.

Điểm $A(x_0; y_0)$ $(x_0 \neq -2)$ thuộc đồ thị hàm số có hoành độ nguyên khi:

$x_0 + 2$ là ước của 3.

Ta có bảng liệt kê sau:

$x_0 + 2$	-3	-1	1	3
x_0	-5	-3	-1	1
y_0	2	4	-2	0
Điểm	$A_1(-5; 2)$	$A_2(-3; 4)$	$A_3(-1; -2)$	$A_4(1; 0)$

Vậy, các điểm $A_1(-5; 2)$, $A_2(-3; 4)$, $A_3(-1; -2)$, $A_4(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số có toạ độ nguyên.

c. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

Xét hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị, ta có:

$A(-2 - x_1; f(-2 - x_1))$, $B(-2 + x_2; f(-2 + x_2))$ với $x_1, x_2 > 0$.

Suy ra:

$$AB^2 = [(-2 - x_1) - (-2 + x_2)]^2 + [f(-2 - x_1) - f(-2 + x_2)]^2$$

$$= (x_2 + x_1)^2 + \left[\left(1 - \frac{3}{-2 - x_1 + 2}\right) - \left(1 - \frac{3}{-2 + x_2 + 2}\right)\right]^2$$

$$= (x_2 + x_1)^2 + 9\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^2 = (x_2 + x_1)^2\left(1 + \frac{9}{x_1^2x_2^2}\right) \geq 12$$

Vậy, ta được $AB_{Min} = 12$, đạt được khi:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 1 = \dfrac{9}{x_1^2x_2^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{3}.$$

Vậy, hai điểm A, B cần tìm có hoành độ tương ứng là $-2 - \sqrt{3}$, $-2 + \sqrt{3}$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*:

$$(C):\ y = -x^3 + 3x^2 - 2.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Tìm các điểm thuộc đồ thị* (C) *mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị* (C).

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Xét điểm $A(a; -a^3 + 3a^2 - 2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Tiếp tuyến qua A tiếp xúc với đồ thị hàm số tại $M(x_0, y(x_0))$ có dạng

$$(d): y = (-3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2.$$

Điểm $A \in (d)$ khi:

$$-a^3 + 3a^2 - 2 = (-3x_0^2 + 6x_0)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow (-3x_0^2 + 6x_0)(a - x_0) + a^3 - 3a^2 - x_0^3 + 3x_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3x_0^2 + 6x_0 + a^2 + ax_0 + x_0^2 - 3a - 3x_0)(a - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x_0^2 + 3x_0 + a^2 + ax_0 - 3a)(a - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2x_0 - 3)(a - x_0)(a - x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = a \text{ hoặc } x_0 = \frac{3 - a}{2}.$$

Để qua A kẻ được một tiếp tuyến với (C) ta phải có:

$$a = \frac{3 - a}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, điểm $A(1; 0)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho hàm số*:

$$(C):\ y = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Tìm những điểm trên đồ thị* (C) *có hoành độ lớn hơn* 1 *sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Ta có:

- Tiệm cận đứng x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$.
- Tiệm cận xiên y = x + 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty}(y - x - 1) = 0$.
- Toạ độ giao điểm I của hai tiệm cận là I(1; 2)
- Đạ hàm $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

Điểm $M(a, y(a)) \in (C)$ với a > 1, khi đó phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d):\ y = y'(a)(x-a) + y(a) \Leftrightarrow (d):\ y = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a^2}{a-1}.$$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến (d) và tiệm cận đứng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{a^2-2a}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{a^2}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{2a}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow A(1; \frac{2a}{a-1}).$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến (d) và tiệm cận xiên là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \dfrac{a^2-2a}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{a^2}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow B(2a - 1; 2a).$$

Ta có:

$$AI = |x_A - x_I| = |\frac{2a}{a-1} - 2| = \frac{2}{|a-1|},$$

$$BI^2 = (x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 = (2a-2)^2 + (2a-2)^2 = 8(a-1)^2 \Rightarrow BI = 2\sqrt{2}\,|a-1|,$$

$$AI.BI = \frac{2}{|a-1|}.2\sqrt{2}\,|a-1| = 4\sqrt{2},$$

$$AB^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI.BI.\cos\frac{\pi}{4} = AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}\,AI.BI.$$

Chu vi ΔABI được cho bởi:

$$CV = AI + BI + \sqrt{AB^2} = AI + BI + \sqrt{AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}AI.BI}$$
$$\geq 2\sqrt{AI.BI} + \sqrt{2AI.BI - \sqrt{2}AI.BI} = 4\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

Suy ra $CV_{min} = 4\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$, đạt được khi:

$$AI = BI \Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|} = 2\sqrt{2}\,|a-1| \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Vây, toạ độ của điểm M cần tìm là $M(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Trong phần này, để thuận tiện cho việc ôn tập, các bài toán chọn lọc sẽ được phân loại theo các dạng hàm số cơ bản.

I. HÀM ĐA THỨC BẬC BA

Một số tính chất của hàm đa thức bậc ba:

Tích chất 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}.$$

Tích chất 2: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}.$$

Tích chất 3: Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

$$\Delta' = b^2 - 3ac > 0.$$

Để tìm giá trị cực trị của hàm số tại điểm x_0 trong trường hợp x_0 là số lẻ, thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được $y = y'.g(x) + h(x)$.

Suy ra:

$$y_0 = y(x_0) = y'(x_0).g(x_0) + h(x_0) = h(x_0).$$

Khi đó "*Phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng y = h(x)*".

Tích chất 4: Đồ thị nhận điểm uốn U làm tâm đối xứng.

Thật vậy, dời trục bằng tịnh tiến về gốc $U(x_0, y_0)$, trong đó:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{3a} \\ y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \end{cases}.$$

theo công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Thay x, y vào phương trình hàm số ta được:

$$Y + y_0 = a(X + x_0)^3 + b(X + x_0)^2 + c(X + x_0) + d$$

$$\Leftrightarrow Y = aX^3 + g(x_0)X.$$

Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận U làm tâm đối xứng.

Tích chất 5: Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và hệ số góc lớn nhất nếu $a < 0$ trong các tiếp tuyến của đồ thị.

Thật vậy, ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$

suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = x_0$ là:

$$k = y'(x_0) = 3a\,x_0^2 + 2bx_0 + c = 3a\left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{3ac - b^2}{3a}.$$

- Với $a > 0$, thì $k_{Min} = \dfrac{3ac - b^2}{3a}$ đạt được khi $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.
- Với $a < 0$, thì $k_{Max} = \dfrac{3ac - b^2}{3a}$ đạt được khi $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.

Mà $y'' = 6ax + 2b$ nên $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ chính là hoành độ điểm uốn, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Tích chất 6: Nếu đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

Thật vậy, hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với Ox là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (1)$$

- Đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm A, B, C cách đều nhau khi:

  (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thoả mãn $\dfrac{x_1 + x_3}{2} = x_2$

  $\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$. (2)
- Mặt khác theo định lí Vi - ét ta có:

  $$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \quad (3)$$
- Từ (2) và (3) suy ra

  $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ và vì $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(-\dfrac{b}{3a}) = 0$.
- Ta có:

  $y' = 3ax^2 + 2bx;$

  $y'' = 6ax + 2b$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$,

đó là hoành độ điểm uốn U của đồ thị hàm số, mà $f(-\dfrac{b}{3a}) = 0$, suy ra $U(-\dfrac{b}{3a}; 0) \in Ox$.

☞ ***Chú ý***: Kết quả trên cho ta điều kiện cần để đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau (hoặc *"đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng"*). Khi áp dụng điều kiện cần đã nêu trên, ta cần thử lại để có điều kiện cần và đủ.

Tích chất 7: Với phương trình bậc ba:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0. \quad (1)$$

a. Dự đoán nghiệm và phân tích thành nhân tử

- Nếu a + b + c + d = 0 thì (1) có nghiệm x = 1.
- Nếu a − b + c − d = 0 thì (1) có nghiệm x = −1.
- Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.
- Nếu (1) có nghiệm x_0, thì

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0.$$

b. Các phương pháp xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc ba có k nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt Ox tại k điểm phân biệt

***Phương pháp 1*: Đại số**

Đoán nghiệm x_0 của (1).

Phân tích (1) thành:

$$(x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b_1x + c_1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- (1) có nghiệm duy nhất (khi đó, đồ thị hàm số cắt Ox tại một điểm) khi:

$$\left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép } x_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_g < 0 \\ \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

- (1) có đúng hai nghiệm phân biệt (khi đó, đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox) khi:

$$\left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm kép khác } x_0 \\ (2) \text{ có hai nghiệm và một nghiệm là } x_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

- (1) có ba nghiệm phân biệt (khi đó, đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt) khi:

$$(2) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} .$$

***Phương pháp 2*: Hàm số dạng I**

Biến đổi (1) về dạng g(x) = h(m).

Lập bảng biến thiên của hàm số y = g(x).

Dựa vào bảng biến thiên biện luận vị trí tương đối của đường thẳng y = h(m) với đồ thị hàm số y = g(x).

Phương pháp 3: **Hàm số dạng II**

Xét hàm số (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- (1) có nghiệm duy nhất khi (C) cắt Ox tại một điểm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Hàm số luôn đơn điệu}\\ \text{Hàm số có CĐ, CT thoả mãn } y_{CĐ}.y_{CT} > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{y'} \le 0\\ \begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0\end{cases}\end{array}\right..$$

- (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi:

(C) cắt Ox tại hai điểm ((C) tiếp xúc với Ox)

$\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt}\\ y(x_1).y(x_2) = 0\end{cases}.$$

- (1) có ba nghiệm phân biệt khi:

(C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt}\\ y(x_1).y(x_2) < 0\end{cases}.$$

<u>Ví dụ 1:</u> (Đề thi đại học khối B – 2003): *Cho hàm số*:

(C_m): $y = x^3 - 3x^2 + m$, *với* m *là tham số.*

a. *Tìm* m *để đồ thị hàm số* (C_m) *có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc toạ độ.*

b. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 2.

✍ *Giải*

a. Hai điểm:

$A(x_A, y_A)$ với $y_A = x_A^3 - 3x_A^2 + m$, (1)

$B(x_B, y_B)$ với $y_B = x_B^3 - 3x_B^2 + m$. (2)

thuộc đồ thị hàm số.

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 0 & (3)\\ y_A + y_B = 0 & (4)\end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được:

$3x_A^2 = m$. (5)

Để tồn tại hai điểm A và B thì phương trình (5) phải có nghiệm và do $x_A^2 > 0$ nên điều kiện là m > 0.

Vậy, m > 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. *Bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối A – 2002): *Cho hàm số*:

$$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* $m = 1$.
b. *Tìm* k *để phương trình* $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt.*
c. *Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.*

✍ *Giải*

a. Với $m = 1$ hàm số có dạng:

$$(C): y = -x^3 + 3x^2.$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

b. Có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2. \quad (1)$$

Vậy số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -k^3 + 3k^2$, do đó phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$0 < -k^3 + 3k^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} k^3 - 3k^2 < 0 \\ k^3 - 3k^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ -1 < k \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-1, 3) \backslash \{0, 2\}.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 - k^3 - 3x^2 + 3k^2 = 0 \Leftrightarrow (x - k)[x^2 + (k - 3)x + k^2 - 3k] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - k = 0 \\ f(x) = x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(k) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k^2 + 6k + 9 > 0 \\ 3k^2 - 6k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-1, 3) \backslash \{0, 2\}.$$

c. Có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2),\ y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = 0. \quad (2)$$

Nhận xét rằng $\Delta_{(2)} = 1 > 0, \forall m \Leftrightarrow$ hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Khi đó thực hiện phép chia y cho y', ta được:

$$y = y'.(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}) + 2x - m^2 + m.$$

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm cực đại hoặc cực tiểu của đồ thị thì $y'(x_0) = 0$. Do đó:

$$y_0 = y(x_0) = y'(x_0).(\frac{1}{3}x_0 - \frac{m}{3}) + 2x - m^2 + m.$$

Các điểm cực đại và cực tiểu cùng thoả phương trình:

$$y = 2x - m^2 + m. \quad (*)$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng $y = 2x - m^2 + m$.

Cách 2: Ta có:

$$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = 0 \overset{\Delta'=1>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{array}\right..$$

Tức là, hàm số luôn có cực đại và cực tiểu, và toạ độ của chúng là:

$A(m - 1; - m^2 + 3m - 2)$ và $B(m + 1; - m^2 + 3m + 2)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số chính là đường thẳng (AB), có phương trình cho bởi:

$$(AB): \frac{x-(m-1)}{m+1-(m-1)} = \frac{y-(-m^2+3m-2)}{-m^2+3m+2-(-m^2+3m-2)}$$

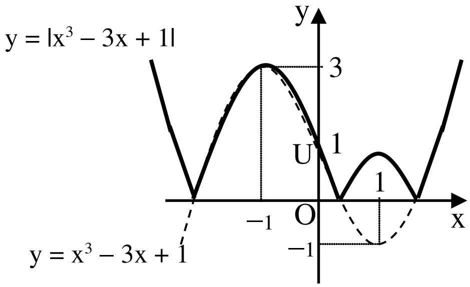
$\Leftrightarrow$ (AB): $y = 2x - m^2 + m$.

<u>Ví dụ 3:</u> *Cho hàm số* (C): $y = x^3 - 3x + 1$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $|x^3 - 3x + 1| - m = 0$.

c. *Lập phương trình các tiếp tuyến của* (C) *biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm* $A\left(\frac{14}{9}; -1\right)$.



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

(1). Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.

(2). Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right] = \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{array}\right..$$

- Bảng biến thiên:

$y' = 3x^2 - 3$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ 3	↘	CT -1	↗	$+\infty$

(3). Đồ thị của hàm số:

- Điểm uốn:

$y'' = 6x$, $\qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm 0 nên đồ thị hàm số có một điểm uốn là U(0; 1).

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn U làm tâm đối xứng.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$|x^3 - 3x + 1| = m$.

Do vậy số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = |x^3 - 3x + 1|$ với đường thẳng $y = m + 1$.

Đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 3x + 1|$ gồm:

- Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị (C).
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) qua trục hoành.

Suy ra:

- Với $m < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 0$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt.
- Với $0 < m < 1$, phương trình có 6 nghiệm phân biệt.
- Với $m = 1$, phương trình có 5 nghiệm.
- Với $1 < m < 3$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- Với $m = 3$, phương trình có 3 nghiệm.
- Với $m > 3$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$ khi đó tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (d): y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1.$$

Điểm $A \in (d)$ suy ra:

$$-1 = (3x_0^2 - 3)(\frac{14}{9} - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1 \Leftrightarrow 3x_0^3 - 7x_0^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(3x_0^2 - 4x_0 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ hoặc } x_0 = 2 \text{ hoặc } x_0 = -\frac{2}{3}.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = -1$.
- Với $x_0 = 2$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = 9x - 15$.
- Với $x_0 = -\frac{2}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{43}{27}$.

Vậy, qua A kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

Cách 2: Phương trình (d) đi qua A với hệ số góc k có dạng $y = k\left(x - \frac{14}{9}\right) - 1$.

Để (d) tiếp xúc với (C), thì hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = k(x - \frac{14}{9}) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 - 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}.$$

Khi đó:

- Với $x = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} k = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = -1$.
- Với $x_0 = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} k = 9$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = 9x - 15$.
- Với $x_0 = -\frac{2}{3} \overset{(2)}{\Rightarrow} k = -\frac{5}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{43}{27}$.

Vậy, qua A kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

Ví dụ 4: *Cho hàm số* (C_m): $y = -\frac{1}{3}mx^3 + mx^2 - x$.

a. *Tìm các điểm cố định mà* (C_m) *luôn đi qua khi* m *thay đổi.*
b. *Tìm* m *để hàm số luôn nghịch biến.*
c. *Tìm* m *để hàm số có cực đại và cực tiểu.*
d. *Tìm* m *để hàm số có cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục* Ox.
e. *Tìm* m *để* (C_m) *nhận điểm* $U\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ *làm điểm uốn.*
f. *Xác định* m *khác* 0 *để* (C_m) *cắt* Ox *tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng.*

✍ *Giải*

a. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m), khi đó:

$$y_0 = -\frac{1}{3}m x_0^3 + m x_0^2 - x_0, \forall m \Leftrightarrow (x_0^3 - 3x_0^2)m + 3x_0 + y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 = 0 \\ 3x_0 + 3y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0;0) \\ M_2(3;-3) \end{array}\right.$$

Vậy, họ (C_m) có hai điểm cố định $M_1(0; 0)$ và $M_2(3; -3)$.

b. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = -mx^2 + 2mx - 1$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = -mx^2 + 2mx - 1 = 0$. (1)

Hàm số luôn nghịch biến khi:

$y' \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m = 0 thì:

$y' = -1 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến.

Trường hợp 2: Nếu $m \ne 0$ thì điều kiện là:

$$\begin{cases} -m < 0 \\ \Delta'_f \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 1.$$

Vậy, hàm số luôn nghịch biến khi $0 \le m \le 1$.

c. Hàm số có cực đại và cực tiểu khi:

(1) có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta'_f > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$$

Vậy, hàm số có cực đại và cực tiểu khi $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

d. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox có dạng:

$$-\frac{1}{3}mx^3 + mx^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(mx^2 - 3mx + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = mx^2 - 3mx + 3 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục Ox khi:

Hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 12m > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{4}{3} \\ m < 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Ta có y" = –2mx + 2m.

Đồ thị hàm số nhận điểm U làm điểm uốn khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ y''(1) = 0 \\ y(1) = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m + 2m = 0 \\ -\dfrac{1}{3}m + m - 1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 đồ thị hàm số nhận điểm U làm điểm uốn.

f. Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Để (C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì điểm uốn U của đồ thị hàm số thuộc Ox, tức là $y_U = 0$. (2)

Ta có

$$y'' = -2mx + 2m, \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow -2mx + 2m = 0 \Leftrightarrow x_U = 1$$

do đó, điều kiện (2) trở thành:

$$-\frac{1}{3}m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Thử lại: Với $m = \frac{3}{2}$ hàm số có dạng $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 - x$.

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

nhận thấy x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

Vậy, với $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là:

$$-\frac{1}{3}mx^3 + mx^2 - x = 0 \Leftrightarrow mx^3 - 3mx^2 + 3x = 0. \qquad (3)$$

Để đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì phương trình (3) có ba nghiệm $x_0 - d, x_0, x_0 + d$. Khi đó:

$$mx^3 - 3mx^2 + 3x = m[x - (x_0 - d)](x - x_0)[x - (x_0 + d)] = m(x - x_0)[(x - x_0)^2 - d^2]$$
$$= mx^3 - 3mx_0x^2 + m(3x_0^2 - d^2)x - x_0^3 + md^2x_0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m = -3mx_0 \\ 3 = m(3x_0^2 - d^2) \\ 0 = -x_0^3 + d^2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ d = \pm 1 \\ m = 3/2 \end{cases}.$$

Vậy, với m = $\frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng khi:

(3) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thoả mãn $\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$.

Mặt khác theo định lí viét ta có:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

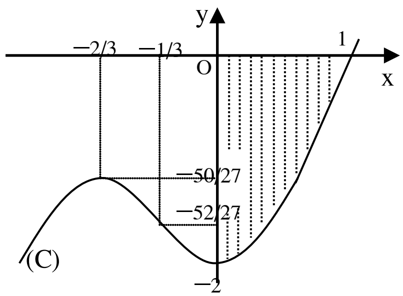
Để $x_2 = 1$ là nghiệm của (3) thì $m - 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Thử lại: Tương tự như trong cách 1.

Vậy, với m = $\frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 5:</u> *Cho hàm số* (C_m): $y = (x - 1)(x^2 + mx + m)$.

1. *Với* m = 2:
   a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị* (C) *của hàm số.*
   b. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi* (C), *trục hoành và các đường thẳng* x = 0, x = 1.
   c. *Viết phương trình tiếp tuyến với* (C) *biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng* x − 5y + 4 = 0.
2. *Tìm các giá trị của* m *để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành. Xác định toạ độ tiếp điểm trong mỗi trường hợp tìm được.*



✍ *Giải*

1. Với m = 2 hàm số có dạng:

(C): $y = x^3 + x^2 - 2$.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Diện tích S phải tìm được cho bởi:

$$S = \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2|\,dx = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2)dx = -(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x)\Big|_0^1 = \frac{17}{12} \text{ (đvdt)}.$$

c. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x − 5y + 4 = 0 nên có hệ số góc k = 5.

Tới đây, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y' = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ hoặc } x_0 = -\frac{5}{3}.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến:

  (d_1): $y - y(1) = 5(x - 1) \Leftrightarrow (d_1)$: $y = 5x - 5$.

- Với $x_0 = -\frac{5}{3}$, ta được tiếp tuyến:

  (d_2): $y - y(-\frac{5}{3}) = 5(x + \frac{5}{3}) \Leftrightarrow (d_2)$: $y = 5x + \frac{121}{27}$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Phương trình (d) với hệ số góc k = 5 có dạng y = 5x + m.

Để (d) tiếp xúc với (C), thì hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 5x + m \\ 3x^2 + 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 + x^2 - 5x - 2 \\ x = 1 \text{ hoặc } x = -5/3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 121/27 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với m = 5, ta được tiếp tuyến (d_1): y = 5x − 5.
- Với $m = \frac{121}{27}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = 5x + \frac{121}{27}$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

2. Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + mx + m) = 0 \\ 3x^2 + 2(m-1)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ và } m = 4 \\ x = 0 \text{ và } m = 0 \\ x = 1 \text{ và } m = -1/2 \end{array}\right..$$

Vậy, ta được:

- Với m = 4, đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox tại tiếp điểm $M_1(-2; 0)$.
- Với m = 0, đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox tại tiếp điểm $M_2(0; 0)$.
- Với $m = -\frac{1}{2}$, đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox tại tiếp điểm $M_3(1; 0)$.

<u>Ví dụ 6:</u> *Cho hàm số* (C_m): $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với* m = 0.
b. *Chứng minh rằng với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu.*
c. *Lập phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu.*
d. *Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng* $(1; +\infty)$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*
b. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$y' = x^2 - 2mx - 1$, $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx - 1 = 0.$ (1)

Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$, $\forall m$ do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại, cực tiểu.

c. Toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3} - mx^2 - x + m + 1 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y'.\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{m}{3}\right) - \dfrac{2}{3}(m^2+1)x + \dfrac{2}{3}m + 1 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu cùng thoả mãn (2), nên phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng:

$$(d): y = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1.$$

d. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi:

$$y' \geq 0\ \forall x > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 \geq 0\ \forall x > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x} \geq m,\ \forall x > 1. \qquad (*)$$

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{2x}$ có tập xác định D = $(1; +\infty)$ và:

$$y = \frac{x^2+1}{2x^2} > 0,\ \forall x > 1 \Leftrightarrow \text{hàm số luôn đồng biến trên D.}$$

Từ đó, ta được (*) $\Leftrightarrow m \leq y(1) = 0$.

Vậy, với $m \leq 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 7:</u> *Cho hàm số* (C_m): $y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (m + 3)x - 2m + 1$.

1. *Với* $m = -1$:
   a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị* (C) *của hàm số.*
   b. *Tìm* a *để* (C) *cắt đường thẳng* (d): $y = ax + 3$ *tại ba điểm phân biệt.*
2. *Chứng minh rằng họ đồ thị hàm số* (C_m) *luôn đi qua ba điểm cố định, và ba điểm đó cùng nằm trên một đường thẳng.*
3. *Tìm* m *để hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

✍ *Giải*

1. Với $m = -1$ hàm số có dạng (C): $y = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$.

a *Bạn đọc tự giải.*

b Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số (C) là:

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = ax + 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - (a + 2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = x^2 + 2x - a - 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0:

$$\begin{cases} \Delta'_f > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + 2 > 0 \\ -a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -3 \\ a \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a \neq -2.$$

Vậy, với $-3 < a \neq -2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

2. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử M(x; y) là điểm cố định của họ (C_m), khi đó:

$$y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (m + 3)x - 2m + 1, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 - x - 2)m + 2x^3 + 4x^2 - 3x - \ + 1 - y = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-1) = 0 \\ y = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(-2;7) \\ M_2(1;4) \\ M_3(-1;6) \end{array}\right. .$$

Vậy, họ (C_m) có ba điểm cố định $M_1(-2; 7)$, $M_2(1; 4)$ và $M_3(-1 ; 6)$.

Suy ra:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,(3; -3) \text{ và } \overrightarrow{M_1M_3}\,(1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 3.\overrightarrow{M_1M_3} .$$

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm đó cùng nằm trên một đường thẳng.

Cách 2: Giả sử M(x; y) là điểm cố định của họ (C_m), khi đó:

$$y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 - (m + 3)x - 2m + 1, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 - x - 2)m + 2x^3 + 4x^2 - 3x - \ + 1 - y = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-1) = 0 \\ y = 2(x^3 + 2x^2 - x - 2) - x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-1) = 0 & (1) \\ y = -x + 5 & (2) \end{cases}$$

Khi đó:

- Vì (1) có ba nghiệm phân biệt nên họ (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định.
- Tọa độ các điểm cố định đề thỏa mãn (2) – là phương trình đường thẳng.

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định và ba điểm đó cùng nằm trên đường thẳng $y = -x + 5$.

3. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 3(m + 2)x^2 + 4(m + 2)x - m - 3. \qquad (1)$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3(m + 2)x^2 + 4(m + 2)x - m - 3 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta được:

$$y' = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: Với $m + 2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -2$, điều kiện là:

$$\Delta'_f \le 0 \Leftrightarrow 4(m + 2)^2 + 3(m + 2)(m + 3) \le 0 \Leftrightarrow (m + 2)(7m + 17) \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{17}{7} \le m \le -2 .$$

Vậy, với $-\frac{17}{7} \le m \le -2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: *Cho hàm số* $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với* $m = 1$.
b. *Chứng minh rằng với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu. Hãy xác định m sao cho khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu là nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a *Bạn đọc tự giải.*

b Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = x^2 - 2mx - 1, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0, \qquad (1)$$

Ta có:

$\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \Leftrightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại , cực tiểu và hoành độ các điểm cực đại , cực tiểu thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}.$$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được:

$$y = y'.(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}m) - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1.$$

Vậy, tung độ các điểm cực đại, cực tiểu là:

$$y_1 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1 \text{ và } y_2 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1.$$

Vậy, toạ độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$.

Do đó khoảng cách giữa các điểm cực đại, cực tiểu được cho bởi:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + [\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2]^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2] = (4m^2 + 4)[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2].$$

Đặt $t = m^2 + 1$, $t \geq 1$, ta được:

$$AB^2 = 4t(1 + \frac{4}{9}t^2) = \frac{4}{9}(4t^3 + 9t)$$

Do đó AB nhỏ nhất khi $4t^3 + 9t$ nhỏ nhất.

Xét hàm số $y = 4t^3 + 9t$.

- Miền xác định $D = [1, +\infty)$.
- Đạo hàm:

$$y' = 12t^2 + 9 > 0, \forall t \geq 1 \Leftrightarrow \text{hàm số luôn đồng biến trên D.}$$

Suy ra $y_{min} = y(1) = 13$.

Vậy, ta được:

$$AB^2_{min} = \frac{52}{9} \Leftrightarrow AB_{min} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ đạt được khi } t = 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

II. HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Một số tính chất của hàm trùng phương:

Tích chất 1: Hàm số có cực trị với mọi giá trị của tham số sao cho $a \neq 0$.

Tích chất 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

$$y' = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0.$$

Tích chất 3: Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu khi:

$$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Tích chất 4: Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu khi:

$$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

Tích chất 5: Hàm số có hai điểm uốn khi:

$$y'' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0.$$

Tích chất 6: Hàm số không có điểm uốn khi:

$$y'' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} \geq 0.$$

Tích chất 7: Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

Tích chất 8: Phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ với } a \neq 0. \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2$ với $t \geq 0$, phương trình có dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (2)$$

- Nếu (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.
- (1) có nghiệm duy nhất khi (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 = t_2$.
- (1) có hai nghiệm phân biệt khi (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $0 < t_1 = t_2$.
- (1) có ba nghiệm phân biệt khi (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.
- (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2$.
- (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi:
  (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$ và $t_2 = 9t_1$.

Tích chất 9: Phương pháp tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ tiếp xúc với Ox tại hai điểm phân biệt

***Phương pháp 1*: Đại số**

Điều kiện là (1) có hai nghiệm kép phân biệt khi:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \text{ với } x_1 \neq x_2. \qquad (3)$$

Sử dụng phương pháp hằng số bất định ta xác định được giá trị của tham số.

***Phương pháp 2*: Hàm số**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b),\ \ y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0. \quad (4)$$

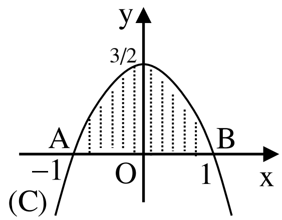
Điều kiện là

$$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} < 0 \\ y(\pm\sqrt{-b/2a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 4ac - b^2 = 0 \end{cases}.$$

<u>Ví dụ 1:</u> *Cho hàm số* (C): $y = -\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*
b. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong* (C) *và trục* Ox.
c. *Lập phương trình các tiếp tuyến của* (C) *biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm* M(0; 4).

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt có:
1. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^4}\right)\right] = -\infty.$$

   - Bảng biến thiên:

$$y' = -2x^3 - 2x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗	CĐ 3/2	↘	$-\infty$

1. Đồ thị của hàm số:
   - Điểm uốn:

$y'' = -6x^2 - 2 < 0$, đồ thị hàm số không có điểm uốn và lồi trên D.

   - Giao của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm A(–1; 0), B(1; 0).

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

b. Do tính đối xứng nên diện tích S phải tìm được cho bởi:

$$S = 2\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}\right)dx = 2\left(-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{32}{15} \text{ (đvdt).}$$

c. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$ khi đó tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (d): y = (-2x_0^3 - 2x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}x_0^4 + x_0^2 - \frac{3}{2}.$$

Điểm M∈(d) suy ra:

$$4 = (-2x_0^3 - 2x_0)(-x_0) + \frac{1}{2}x_0^4 + x_0^2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 5x_0^4 + 6x_0^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 4x + 4$
- Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -4x + 4$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C).

Cách 2: Phương trình (d) đi qua A với hệ số góc k có dạng $y = kx + 4$.

Để (d) tiếp xúc với (C), thì hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2} = kx + 4 & (1) \\ -2x^3 - 2x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$-\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2} = x(-2x^3 - 2x) + 4 \Leftrightarrow 3x^4 + 2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 - 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}$$

Khi đó:

- Với $x = -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} k = 4$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 4x + 4$.
- Với $x = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} k = -4$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -4x + 4$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C).

<u>Ví dụ 2:</u> *Cho hàm số* (C): $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*

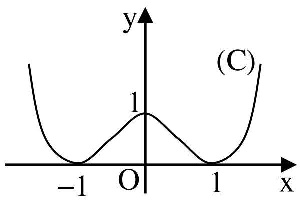
b. *Dựa vào đồ thị* (C) *biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

1. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)\right] = +\infty.$$



   - Bảng biến thiên:

$y' = 4x^3 - 4x$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT 0	↗	CĐ 1	↘	CT 0	↗	$+\infty$

3. Đồ thị của hàm số:
   - Điểm uốn:

$$y'' = 12x^2 - 4, \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vì y" đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{9}\right)$.

- Ta lấy thêm điểm $A(\sqrt{3}\,; 4)$, $B(-\sqrt{3}\,; 4)$ trên đồ thị.

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^4 - 2x^2 + 1 = m$.

Do vậy số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y = m. Suy ra:

- Với m < 0, phương trình vô nghiệm.
- Với m = 0, phương trình có hai nghiệm nghiệm kép $x = \pm 1$.
- Với 0 < m < 1, phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- Với m = 1, phương trình có 3 nghiệm.
- Với m > 1, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

<u>Ví dụ 3:</u> *Cho hàm số* (C_m): $y = x^4 + mx^2 - m - 1$

a. *Chứng minh rằng* (C_m) *đi qua hai điểm cố định* A *và* B. *Tìm* m *để các tiếp tuyến tại* A *và* B *với đồ thị vuông góc với nhau.*

b. *Xác định* m *để đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng* (d): $y = 2(x - 1)$ *tại điểm có hoành độ* x = 1. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m *tìm được.*

c. *Sử dụng đồ thị ở câu* b), *biện luận theo* k *số nghiệm của phương trình* $4x^2(1 - x^2) = 1 - k$.

✍ *Giải*

a. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m). Khi đó:

$$y_0 = x_0^4 + m x_0^2 - m - 1, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)m + x_0^4 - y_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 = 0 \\ x_0^4 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;0) \\ B(-1;0) \end{array}\right.$$

Vậy, họ (C_m) có hai điểm cố định A(1; 0) và B(−1; 0).

Ta có:

$$y' = 4x^3 + 2mx \Rightarrow \begin{cases} y'(x_A) = 4 + 2m \\ y'(x_B) = -4 - 2m \end{cases}.$$

Để các tiếp tuyến tại A và B với đồ thị vuông góc với nhau điều kiện là:

$$y'(x_A).\ y'(x_B) = -1 \Leftrightarrow (4 + 2m)(-4 - 2m) = -1$$

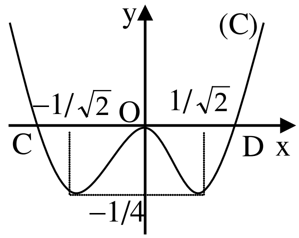
$$\Leftrightarrow (m+2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ hoặc } m = -\frac{7}{4}.$$

b. Đặt:

$$f(x) = x^4 + mx^2 - m - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2mx,$$
$$g(x) = 2(x - 1) \Rightarrow g'(x) = 2.$$

Khi đó, để (C_m) tiếp xúc với (d) tại điểm có hoành độ x = 1 điều kiện là:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4 + 2m - m - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$



Với m = −1 hàm số có dạng (C): $y = x^4 - x^2$.

1. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = +\infty.$$

   - Bảng biến thiên:

$y' = 4x^3 - 2x$,

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT $-1/4$	↗	CĐ 0	↘	CT $-1/4$	↗	$+\infty$

3. Đồ thị của hàm số:
   - Điểm uốn:

$y'' = 12x^2 - 2$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Vì y'' đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}; -\dfrac{5}{36}\right)$ và $U_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}; -\dfrac{5}{36}\right)$.

   - Giao của đồ thị hàm số với trục hoành:

$$x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow C(-1; 0) \text{ và } D(1; 0).$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

c. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^4 - x^2 = \frac{k-1}{4}.$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = \dfrac{k-1}{4}$, ta có:

- Nếu $\dfrac{k-1}{4} < -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow k < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\dfrac{k-1}{4} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow k = 0$, phương trình có hai nghiệm.

- Nếu $-\frac{1}{4} < \frac{k-1}{4} < 0 \Leftrightarrow 0 < k < 1$, phương trình có bốn nghiệm.
- Nếu $\frac{k-1}{4} = 0 \Leftrightarrow k = 1$, phương trình có ba nghiệm.
- Nếu $\frac{k-1}{4} > 0 \Leftrightarrow k > 1$, phương trình có hai nghiệm.

Ví dụ 4: (Đề thi đại học khối B – 2002): *Cho hàm số*:

$$y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10, \text{ với m là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 1.

b. *Tìm* m *để hàm số có ba cực trị.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Ta có:

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \quad (1) \end{array}\right..$$

Hàm số có 3 cực trị ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right..$$

Vậy, hàm số có 3 cực trị khi $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

Ví dụ 5: *Cho hàm số* (C_m): $y = mx^4 + (m - 1)x^2 - 2m + 1$.

a. *Với* $m = \frac{1}{2}$, *viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ gốc toạ độ* O *tới đồ thị* $(C_{1/2})$.

b. *Tìm* m *để đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị.*

✍ *Giải*

a. Với $m = \frac{1}{2}$, hàm số có dạng $(C_{1/2})$: $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$.

Đường thẳng (d) đi qua O với hệ số góc k có phương trình y = kx.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của $(C_{1/2})$ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = kx \\ 2x^3 - x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = (2x^3 - x)x \\ k = 2x^3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - x^2 = 0 \\ k = 2x^3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1/3\sqrt{3} \\ k = -1/3\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với k = 0, ta được tiếp tuyến (d_1): y = 0.

- Với $k = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -\frac{1}{3\sqrt{3}}x$.
- Với $k = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, ta được tiếp tuyến (d_3): $y = \frac{1}{3\sqrt{3}}x$.

Vậy, qua O kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) , (d_3) tới đồ thị ($C_{1/2}$).

b. Ta có:

$$y' = 4mx^3 + 2(m-1)x = 2x(2mx^2 + m - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 2mx^2 + m - 1 = 0 \ \ (*) \end{array}\right..$$

Hàm số chỉ có một điểm cực trị khi:

$$\left[\begin{array}{l} (*) \text{ vô nghiệm} \\ f(0) = 0 \end{array}\right.. \qquad \text{(I)}$$

Trường hợp 1: Nếu f(x) = 0 vô nghiệm

- Với m = 0, ta có:

  $(*) \Leftrightarrow -1 = 0$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

- Với $m \neq 0$, để (*) vô nghiệm điều kiện là:

  $$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8m(m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Nếu f(0) = 0, tức là:

$$m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, hàm số có đúng một điểm cực trị khi $m \geq 1$ hoặc $m \leq 0$.

Ví dụ 6: *Cho hàm số* (C_m): $y = x^4 - 4x^2 + m$.

1. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 3.
2. *Xác định m để đồ thị* (C) *cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.*
3. *Với kết quả trong* 2) *hãy xác định* m *sao cho*:
   a. *Bốn điểm phân biệt đó có hành độ lập thành một cấp số cộng.*
   b. *Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị* (C) *và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau.*

✍ *Giải*

1. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*
2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - 4x^2 + m = 0$. (1)

   Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, khi đó:

   $(1) \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + m = 0$ (2)

   Đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi:

   (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm thoả mãn $0 < t_1 < t_2$. (*)

   Tới đây ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng định lí Vi–ét điều kiện (*) được chuyển thành:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - m > 0\\ 4 > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Vậy, với $0 < m < 4$ đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Cách 2: Số nghiệm dương của phương trình (2) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị hàm số $y = -t^2 + 4t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có:

- Tập xác định trên $D = (0; +\infty)$.
- Sự biến thiên của hàm số:

$$y' = -2t + 4, \quad y' = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

x	0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	0	↗	CĐ 4	↘	$-\infty$

Suy ra điều kiện là $0 < m < 4$.

Vậy, với $0 < m < 4$ đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

3. Với kết quả trong 2) thì đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ tương ứng là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

a Bốn hoành độ trên lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases}-\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1}\\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1}\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \quad (3)$$

Theo định lí Vi–ét ta có:

$$\begin{cases}t_1 + t_2 = 4\\ t_1 t_2 = m\end{cases}. \quad (I)$$

Thay (3) vào (I) được:

$$\begin{cases}t_1 + 9t_1 = 4\\ t_1.(9t_1) = m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5t_1 = 2\\ 9t_1^2 = m\end{cases} \Rightarrow m = \frac{36}{25}.$$

Vậy, với $m = \frac{36}{25}$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng.

b Nhận xét rằng hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ là hàm chẵn (nhận Oy làm trục đối xứng) nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành có phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau khi:

$$\int_0^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 4x^2 + m)dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + mx\right)\Big|_0^{\sqrt{t_2}} = 0$$

$$\frac{1}{5}(\sqrt{t_2})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{t_2})^3 + m(\sqrt{t_2}) = 0 \Leftrightarrow 3t_2^2 - 20t_2 + 15m = 0. \quad (4)$$

Mặt khác, do t_2 là nghiệm của (2), nên $t_2^2 - 4t_2 + m = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} m = \frac{20}{9}$.

Vậy, với $m = \frac{20}{9}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. HÀM PHÂN THỨC BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT

Một số tính chất của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất:

Tích chất 1: Hàm số luôn đơn điệu trên tập xác định của nó.

Tích chất 2: Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Hướng dẫn chứng minh

Bước 1: Thật vậy, điểm $I(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận, ta dời trục bằng tịnh tiến về gốc I. Công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Thay x, y vào hàm số ta được:

$$Y + y_0 = \frac{a(X + x_0) + b}{c(X + x_0) + d} \Leftrightarrow Y = F(X).$$

Bước 2: Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

Tích chất 3: Không có bất cứ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua tâm đối xứng I.

Hướng dẫn chứng minh

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (H)$, khi đó $y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$(d): \; y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

Bước 2: Giả sử $I \in (d)$, khi đó:

$$\frac{a}{c} - y_0 = y'(x_0)(-\frac{d}{c} - x_0) \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra điều mâu thuẫn.

Bước 3: Vậy không có bất cứ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua I.

Tích chất 4: M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị hàm số. Nếu tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B thì:

a. M là trung điểm AB.

b. ΔIAB có diện tích không đổi.

c. Tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận là một hằng số.

Hướng dẫn chứng minh

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (H)$, khi đó $y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$(d): \; y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Bước 2: Xác định toạ độ của A, B theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng (d) với tiệm cận đứng (tcđ) $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang (tcn) $y = \frac{a}{c}$.

Bước 3: Ta có:

a. Nhận xét rằng $x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow$ M là trung điểm AB.

b. $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB = const.$

c. Gọi các khoảng cách:

$$d_1 = d(I, tcđ) = |x_0 + \frac{d}{c}|, \quad d_2 = d(I, tcn) = |y_0 - \frac{a}{c}|.$$

Khi đó:

$$d_1.d_2 = const.$$

Trường hợp đặc biệt: Cho hàm số (C): $y = \frac{1}{x}$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$.

a. Tìm điều kiện của a, b để đường thẳng (d) tiếp xúc với (C) ?

b. Giả sử điều kiện trên được thoả mãn. Khi đó (d) cắt Ox, Oy tại A, B
   - Chứng tỏ rằng tam giác OAB có diện tích không đổi.
   - Chứng tỏ rằng trung điểm của AB là tiếp điểm của (d) với (C).
   - Khi nào thì khoảng cách từ gốc toạ độ O đến (d) là lớn nhất ?

Chứng minh

a. Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = ax + b \\ -\frac{1}{x^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + b \\ -\frac{1}{x^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{b}{2} \\ -\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a = -\frac{b^2}{4} \end{cases}. \qquad (*)$$

b. Với điều kiện (*), (d) cắt Ox, Oy tại $A(-\frac{b}{a}; 0)$, $B(0; b)$ (lưu ý $A(\frac{4}{b}; 0)$).

- Diện tích tam giác OAB được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|x_A y_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\left|\frac{4}{b}.b\right|\right| = 2 \text{ không đổi.}$$

- Gọi I là trung điểm của AB, ta có $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$, đây chính là nghiệm kép của phương trình. Vậy, trung điểm của AB là tiếp điểm của (d) với (C).
- Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến (d) được xác định bởi:

$$h = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{16} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{16}\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h^2 \leq 2 \Leftrightarrow h \leq \sqrt{2}.$$

Vậy, $h_{max} = \sqrt{2}$, đạt được khi:

$$\frac{b^2}{16} = \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2, \text{ khi đó } a = -1.$$

Trường hợp đặc biệt: Hai tiếp tuyến của Hyperbol (H): $y = \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng:

a. Hai tiếp tuyến của (H) không bao giờ vuông góc với nhau.
b. Hai tiếp tuyến song song của (H) có các tiếp điểm đối xứng nhau qua tâm của (H).

Chứng minh

Với $A(x_1; \frac{1}{x_1}) \in (H)$, ta được phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$$(d_A): y = -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1) + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \text{hệ số góc của } (d_A) \text{ là } k_A = -\frac{1}{x_1^2}.$$

Với $B(x_2; \frac{1}{x_2}) \in (H)$, ta được phương trình tiếp tuyến tại B có dạng:

$$(d_B): y = -\frac{1}{x_2^2}(x - x_2) + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \text{hệ số góc của } (d_B) \text{ là } k_B = -\frac{1}{x_2^2}.$$

a. Ta có:

$$(d_A) \perp (d_B) \Leftrightarrow k_A.k_B = -1 \Leftrightarrow (-\frac{1}{x_1^2}).(-\frac{1}{x_2^2}) = -1 \Leftrightarrow x_1^2.x_2^2 = -1 \text{ (MT)}.$$

Vậy hai tiếp tuyến của (H) không bao giờ vuông góc với nhau.

b. Ta có:

$$(d_A) // (d_B) \Leftrightarrow k_A = k_B \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1^2} = -\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Suy ra $A(x_1; \frac{1}{x_1})$ và $B(-x_1; -\frac{1}{x_1}) \Rightarrow$ A, B đối xứng qua tâm O của (H).

☞ ***Chú ý***: Với phép dời trục bằng tịnh tiến về gốc I, theo công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} \end{cases},$$

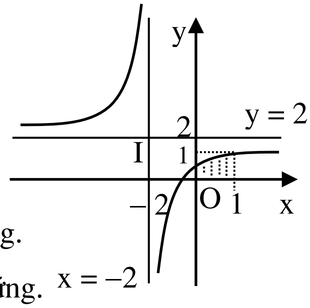
ta đưa phương trình của Hyperbol (H): $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ về dạng $Y = \frac{k}{X}$.

<u>**Ví dụ 1:**</u> *Cho hàm số* (C): $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*
b. *Tìm các điểm trên* (C) *có tọa độ nguyên.*

c. *Tìm* m *để phương trình* $\dfrac{2\sin x+1}{\sin x+2}$ = m *có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng* [0; π].

d. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi* (C), *trục hoành và đường thẳng* x = 1.



Giải

a. Ta lần lượt có:

1. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
2. Sự biến thiên của hàm số:
   - Giới hạn và các đường tiệm cận:

     $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$ nên y = 2 là đường tiệm cận ngang.

     $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}} y = \infty$ nên x = –2 là đường tiệm cận đứng.
   - Bảng biến thiên:

     $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x\in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

x	–∞		–2		+∞
y'		+	||	+	
y	2	↗	+∞ || –∞	↗	2

3. Đồ thị: Giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ là $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ và $B\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

   Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(–2; 2) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

b. Viết lại hàm số dưới dang $y = 2 - \dfrac{3}{x+2}$.

Điểm $M(x_0; y_0)$ $(x_0 \neq -2)$ thuộc đồ thị hàm số có tọa độ nguyên khi $x_0 + 2$ là ước của 3. Ta có bảng liệt kê sau:

$x_0 + 2$	–3	–1	1	3
x_0	–5	–3	–1	1
y_0	3	5	–1	1
Điểm	$M_1(-5; 3)$	$M_2(-3; 5)$	$M_3(-1; -1)$	$M_4(1; 1)$

Vậy, các điểm $M_1(-5; 3)$, $M_2(-3; 5)$, $M_3(-1; -1)$ và $M_4(1; 1)$ thuộc đồ thị hàm số có toạ độ nguyên.

c. Đặt t = sinx, $0 \le t \le 1$, phương trình có dạng $\dfrac{2t+1}{t+2} = m$. (1)

Phương trình (1) có nghiệm thuộc đoạn [0; π] khi:

Đường thẳng y = m cắt đồ thị (C) phần [0;1] ⇔ $\dfrac{1}{2} \le m \le 1$.

- Với $\frac{1}{2} \le m < 1$ phương trình (1) có nghiệm $t_0 \in [0; 1)$

  $\Leftrightarrow \sin x = t_0$ phương trình này có 2 nghiệm thuộc khoảng $[0; \pi]$.
- Với m = 1, phương trình (1) có nghiệm t = 1, ta được:

  $\sin x = 1$ phương trình này có 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ thuộc khoảng $[0; \pi]$

Vậy, với $\frac{1}{2} \le m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Diện tích S phải tìm được cho bởi:

$$S = \int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{x+2} = \int_0^1 (2 - \frac{3}{x+2})dx = (2x - 3\ln|x + 2|)\Big|_0^1 = 2 - 3\ln\frac{2}{3} \text{ (đvdt).}$$

<u>Ví dụ 2:</u> (Đề thi đại học khối D – 2002): *Cho hàm số*:

$$y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị* (C) *hàm số với* m = –1.
b. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong* (C) *và hai trục toạ độ.*
c. *Tìm* m *để đồ thị hàm số* (1) *tiếp xúc với đường thẳng* y = x.

Giải

a. Với m = –1, ta được:

$$(C): y = \frac{-3x-1}{x-1}$$ – *Bạn đọc tự thực hiện tiếp.*

b. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai trục toạ độ.
Ta có:

$$S = \int_{-1/3}^{0} \left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|.dx = \int_{-1/3}^{0} \left(\frac{-4}{x-1} - 3\right).dx = (-4\ln|x - 1| - 3x)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0} = 4\ln\frac{4}{3} - 1.$$

c. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = 2m - 1 - \frac{m^2 - 2m + 1}{x-1}.$$

Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng y = x

$\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2m - 1 - \dfrac{m^2 - 2m + 1}{x-1} = x & (1) \\ \dfrac{m^2 - 2m + 1}{(x-1)^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

Viết lại (1) dưới dạng:

$$2m - 1 - \frac{m^2 - 2m + 1}{x-1} = (x - 1) + 1 \qquad (3)$$

Thay (2) vào (3), ta được:

$$2m-1-\frac{m^2-2m+1}{x-1}=(x-1).\frac{m^2-2m+1}{(x-1)^2}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{m-1}{m^2-2m+1}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (2), ta được:

$$\frac{(m-1)^2}{m^2-2m+1}=1 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Vậy, với mọi $m \neq 1$ đồ thị (1) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Ví dụ 3: *Cho hàm số* (C): $y=\frac{2x}{x+1}$.

1. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số, từ đó suy ra đồ thị hàm số* (C_1): $y=-\frac{2x}{x+1}$.
2. *Gọi* I *là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Chứng minh rằng*:
   a. *Đồ thị* (C) *nhận điểm* I *làm tâm đối xứng.*
   b. *Không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua điểm* I.
3. M *là điểm có hoành độ* $a \neq -1$, *và thuộc* (C). *Viết phương trình tiếp tuyến* (d) *của* (C) *tại điểm* M.
   a. *Tính khoảng cách từ điểm* I *đến đường thẳng* (d). *Xác định* a *để khoảng cách trên đạt giá trị lớn nhất.*
   b. *Xác định* a *để tiếp tuyến* (d) *lập với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi bé nhất.*

✍ *Giải*

1. Khảo sát và vẽ đồ thị – *Bạn đọc tự giải*.
   Bằng phép đối xứng qua trục Ox đồ thị (C) ta có được đồ thị (C_1).
2. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là I(−1; 2).
   a. Dời trục bằng phép tịnh tiến về gốc I theo công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases} \Rightarrow Y+2=\frac{2(X-1)}{X-1+1} \Leftrightarrow Y=-\frac{2}{X}.$$

   Hàm số trên là hàm lẻ nên đồ thị nhận điểm I(−1; 2) làm tâm đối xứng.

   b. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm I(−1; 2) có phương trình $y = k(x + 1) + 2$.
   Đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1}=k(x+1)+2 \\ \frac{2}{(x+1)^2}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\frac{2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2 \\ \frac{2}{(x+1)^2}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x+1}=0 \\ \frac{2}{(x+1)^2}=k \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

   Vậy, qua I không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị.

3. Điểm M(a; $\frac{2a}{a+1}$), do đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - \frac{2a}{a+1} = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow (d): y = \frac{2}{(a+1)^2}(x - a) + \frac{2a}{a+1}.$$

a. Viết lại phương trình tiếp tuyến (d): $2x - (a + 1)^2y + 2a^2 = 0$.
 Khi đó, khoảng cách từ I đến (d) được cho bởi:

$$d = \frac{\left|-2 - 2(a+1)^2 + 2a^2\right|}{\sqrt{4 + (a+1)^4}} = \frac{4|a+1|}{\sqrt{4+(a+1)^4}} \overset{\text{Côsi}}{\le} \frac{4|a+1|}{\sqrt{2\sqrt{4.(a+1)^4}}} = 2.$$

 Vậy, ta được Mind = 2, đạt được khi:

$$(a + 1)^4 = 4 \Leftrightarrow a + 1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

b. Ta lần lượt có:
 - Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến (d) với tiệm cận đứng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{2}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{2a}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{2a-2}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow A\left(-1; \frac{2a-2}{a+1}\right).$$

 - Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến (d) với tiệm cận ngang là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \dfrac{2}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{2a}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a+1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B(2a + 1; 2).$$

 - Chu vi ΔIAB được cho bởi:

$$P_{\Delta IAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \ge 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB}$$

$$= \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{IA.IB} = \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{\left|2 - \frac{2a-2}{a+1}\right|.|2a+1+1|}$$

$$= \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{\left|\frac{4}{a+1}\right|.|2a+2|} = 4\sqrt{2} + 4.$$

 Suy ra $P_{Min} = 4\sqrt{2} + 4$ đạt được khi:

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{4}{|a+1|} = |2a + 2| \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

<u>Ví dụ 4:</u> *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{3x+4}{x-1}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*
b. *Xác định tất cả các giá trị của* k *để đường thẳng* (Δ): y = kx + 3 *không cắt đồ thị hàm số.*

c. M *là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại* M *cắt hai tiệm cận tại* A, B. *Chứng minh rằng*:
- M *là trung điểm* AB.
- ΔIAB *có diện tích không đổi, với I là tâm đối xứng của* (C).
- *Tích các khoảng cách từ* M *tới hai đường tiệm cận là một hằng số.*

✍ *Giải*

a. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{3x+4}{x-1} = kx + 3 \Leftrightarrow f(x) = kx^2 - kx - 7 = 0 \text{ với } x \neq 1. \quad (1)$$

Đường thẳng (Δ) không cắt đồ thị hàm số khi (1) vô nghiệm, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với k = 0, thì (1) có dạng:

$-7 = 0$ (MT) $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $k \neq 0$ thì để phương trình (1) vô nghiệm điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta < 0 \\ \begin{cases}\Delta = 0 \\ f(1) = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k^2 + 28k < 0 \\ \begin{cases}k^2 + 28k = 0 \\ -7 = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -28 < k < 0.$$

Vậy, với $-28 < k \leq 0$ đường thẳng (Δ) không cắt đồ thị hàm số.

c. Với hàm số ta lần lượt có:
- Đạo hàm:

$$y' = -\frac{7}{(x-1)^2}.$$

- Tiệm cận đứng x = 1 vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$;
- Tiệm cận ngang y = 3 vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = 3$.
- Toạ độ giao điểm I của hai tiệm cận là I(1; 3).

M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị, giả sử M có hoành độ bằng a, khi đó $M\left(a; \frac{3a+4}{a-1}\right)$ và phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$y - y(a) = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = -\frac{7}{(x-1)^2}(x - a) + \frac{3a+4}{a-1}.$$

Ta lần lượt có:
- Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến tại M và tiệm cận đứng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x = 1 \\ y = -\frac{7}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{3a+4}{a-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 \\ y = \frac{3a+11}{a-1}\end{cases} \Leftrightarrow A\left(1; \frac{3a+11}{a-1}\right).$$

- Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến tại M và tiệm cận ngang là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -\dfrac{7}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{3a+4}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a-1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow B(2a-1;\, 3).$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Nhận xét rằng:

$$x_A + x_B = 1 + 2a - 1 = 2a = 2x_M \Leftrightarrow \text{M là trung điểm của AB.}$$

- Diện tích tam giác IAB được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}\left|\frac{3a+11}{a-1} - 3\right|.\left|2a-1-1\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{14}{a-1}\right|.\left|2(a-1)\right| = 14.$$

Vậy, ta thấy ΔIAB có diện tích không đổi.

- Ta có:

$$d(M, tcđ).d(M, tcn) = |a-1|.\left|\frac{3a+4}{a-1} - 3\right| = |a-1|.\left|\frac{7}{a-1}\right| = 7.$$

Vậy, ta thấy tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận là một hằng số.

<u>Ví dụ 5:</u> *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

1. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số .*
2. *Tìm* m *để đường thẳng* (d): y = x + m *cắt* (C) *tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến của* (C) *tại hai điểm đó song song với nhau.*
3. *Tìm điểm* M∈(C) *để:*
   a. *Khoảng cách từ* M *đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ* M *đến tiệm cận ngang.*
   b. *Tổng khoảng cách từ* M *đến hai tiệm cận nhỏ nhất.*
   c. *Tổng khoảng cách từ* M *đến hai trục toạ độ nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

1. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*
2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{x-1}{x-2} = x + m \Leftrightarrow f(x) = x^2 + (m-3)x - 2m + 1 = 0 \text{ với } x \neq 2. \quad (1)$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt khi:

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + 4(2m-1) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Mọi m.}$$

Khi đó, hai giao điểm A, B có hoành độ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A . x_B = 1 - 2m \end{cases}.$$

- Để hai tiếp tuyến tại A và B của đồ thị (C) song song với nhau điều kiện là:

$$y'(x_A) = y'(x_B) \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_A - 2)^2} = -\frac{1}{(x_B - 2)^2} \Leftrightarrow (x_A - 2)^2 = (x_B - 2)^2$$

$$\overset{x_A \neq x_B}{\Leftrightarrow} x_A - 2 = 2 - x_B \Leftrightarrow 4 = x_A + x_B = 3 - m \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy, với $m = -1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

3. Điểm M thuộc đồ thị hàm số, ta có $M\left(x; \frac{x-1}{x-2}\right)$.

Khi đó, ta lần lượt có:

- Để khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang điều kiện là:

$$|x-2| = \left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\frac{1}{x-2}\right| \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

  Vậy, hai điểm $M_1(1; 0)$ và $M_2(3; 2)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận được cho bởi:

$$d = |x-2| + \left|\frac{x-1}{x-2} - 1\right| = |x-2| + \left|\frac{1}{x-2}\right| \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{|x-2|.\left|\frac{1}{x-2}\right|} = 2.$$

  Vậy, tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt được khi:

$$|x-2| = \left|\frac{1}{x-2}\right| \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

  Vậy, hai điểm $M_1(1; 0)$ và $M_2(3; 2)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Tổng khoảng cách từ M đến hai trục toạ độ được cho bởi $d = |x| + \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$.

  Nhận xét rằng: với $M_0(0; \frac{1}{2}) \Rightarrow d(M_0) = \frac{1}{2}$, nên chỉ cần xét khi:

$$|x| \leq \frac{1}{2} \text{ và } \left|\frac{x-1}{x-2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 0.$$

  Với $x \in D = \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, ta được $d = -x + \frac{x-1}{x-2}$, ta có đạo hàm:

$$d' = -1 - \frac{1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{d nghịch biến trên D.}$$

  Vậy, ta được $\text{Mind} = \frac{1}{2}$, đạt được tại $M_0\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 6: *Cho hàm số* (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.*

b. *Lựa chọn phép tịnh tiến song song với* Ox *để từ* (C) *suy ra đồ thị hàm số* (C_1): $y = \frac{x}{x-4}$.

c. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm* A(–6; 5).

d. *Tìm những điểm trên trục tung mà từ điểm đó kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.*

✍ *Giải*

a. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

b. Giả sử:

$$\frac{x}{x-4} = f(x+a) \Leftrightarrow \frac{x}{x-4} = \frac{x+a+2}{x+a-2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a+2 \\ -4 = a-2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, ta được $\frac{x}{x-4} = f(x-2)$

Do đó (C_1) được suy ra bằng phép tịnh tiến theo Ox đồ thị (C) sang phải 2 đơn vị.

c. Ta có $y' = -\frac{4}{(x-2)^2}$, tới đây ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \Leftrightarrow (d): y = -\frac{4}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-2}. \quad (1)$$

Điểm A∈(d) khi:

$$5 = -\frac{4}{(x_0-2)^2}.(-6 - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - 24x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 6 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 0$ thay vào (1) được tiếp tuyến (d_1): $y = -x - 1$.
- Với $x_0 = 6$ thay vào (1) được tiếp tuyến (d_2): $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đồ thị.

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua điểm A có phương trình:

(d): $y = k(x + 6) + 5$. (2)

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 1 + \frac{4}{x-2} = k(x+6)+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{4}{x-2} = k(x-2)+8k+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{4}{x-2}=-\dfrac{4}{x-2}+8k+5 \\ -\dfrac{4}{(x-2)^2}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-2}=2k+1 \\ -(2k+1)^2=k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Khi đó:

- Với $k_1 = -1$ thay vào (2) được tiếp tuyến (d_1): $y = -x - 1$.
- Với $k_2 = -\dfrac{1}{4}$ thay vào (2) được tiếp tuyến (d_2): $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đồ thị.

☞ ***Chú ý***: Trong lời giải trên chúng ta đã bước đầu làm quen với phương pháp lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm phân thức không dùng khái niệm nghiệm kép. Cách biến đổi trong đó sẽ rất có ích với các hàm số chứa tham số, cụ thể:

Cho hàm số (C): $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, với $bd \neq 0$, tử, mẫu không có nghiệm chung. Hãy tìm điều kiện để đường thẳng (d): $y = kx + m$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C).

Phương pháp

Viết lại hàm số dưới dạng $y = \alpha + \dfrac{\gamma}{cx+d}$.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \alpha+\dfrac{\gamma}{cx+d}=kx+m & (1) \\ -\dfrac{\gamma.c}{(cx+d)^2}=k & (2) \end{cases}$$

Viết lại (1) dưới dạng:

$$\alpha + \frac{\gamma}{cx+d} = \frac{k}{c}(cx+d) - \frac{kd}{c} + m. \qquad (3)$$

Thay (2) vào (3) với lưu ý chỉ thay vào biểu thức $\dfrac{k}{c}(cx + d)$, được:

$$\alpha + \frac{\gamma}{cx+d} = -\frac{1}{c}(cx+d)\frac{\gamma c}{(cx+d)^2} - \frac{kd}{c} + m$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{\gamma}{cx+d} = -\frac{\gamma}{(cx+d)^2} - \frac{kd}{c} + m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{cx+d} = \frac{1}{2\gamma}\left(-\frac{kd}{c}+m-\alpha\right). \qquad (4)$$

Thay (4) vào (2), được $(k) = Ak^2 + Bk + C = 0$. (5)

Khi đó yêu cầu cụ thể của bài toán được đưa về việc giải hoặc biện luận điều kiện cho phương trình (5).

d. Các điểm thuộc Oy có dạng M(0; b).
Đường thẳng (d) đi qua M(0; b) có phương trình y = kx + b.
Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} = kx + b \\ -\dfrac{4}{(x-4)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{4}{x-2} = k(x-2) + 2k + b & (3) \\ -\dfrac{4}{(x-2)^2} = k & (4) \end{cases}$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$1 + \frac{4}{x-2} = -\frac{4}{x-2} + 2k + b \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{1}{8}\left(2k + b - 1\right). \quad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

$$-4\left[\frac{1}{8}\left(2k + b - 1\right)\right]^2 = k \Leftrightarrow f(k) = 4k^2 + 4k(b + 4) + b^2 - 2b + 1 = 0. \quad (6)$$

Để từ M kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị hàm số điều kiện là:

(1) có nghiệm kép khác $\frac{1-b}{2}$ hoặc hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng $\frac{1-b}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta'_f = 0 \\ f\left(\dfrac{1-b}{2}\right) \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta'_f > 0 \\ f\left(\dfrac{1-b}{2}\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4(b+4)^2 - 4(b^2 - 2b + 1) = 0 \\ 1 - b \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4(b+4)^2 - 4(b^2 - 2b + 1) > 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -\dfrac{3}{2} \\ b = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai điểm $M_1\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ và $M_2(0; 1)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: *Cho hàm số* (C_m): $y = \dfrac{(1+m)x + m}{x + m}$.

1. *Với* m = 1:
   a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị* (C) *của hàm số.*
   b. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C) *tại các giao điểm của* (C) *với các trục tọa độ.*
2. *Tìm* m *để*:
   a. *Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.*
   b. *Hàm số đồng biến trên khoảng* [0; +∞).

✍ *Giải*

1. Với m = 1, hàm số có dạng $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

a. *Đề nghị bạn đọc tự làm*: Ở đây ta nhận được các kết quả:

- Đạo hàm $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
- Tiệm cận đứng $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$; Tiệm cận ngang $y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0$.

b. Ta lần lượt có:

- $(C) \cap Ox = \left\{A\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)\right\}$ và phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$$(d_A): y = y'(x_A)(x - x_A) + y(x_A) \Leftrightarrow (d_A): y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (d_A): y = 4x + 2.$$

- $(C) \cap Oy = \{B(0; 1)\}$ và phương trình tiếp tuyến tại B có dạng:

$$(d_B): y = y'(x_B)(x - x_B) + y(x_B) \Leftrightarrow (d_B): y = 1.x + 1 \Leftrightarrow (d_B): y = x + 1.$$

2. Ta lần lượt:

a. Với câu hỏi "*Đồ thị hàm số có hai tiệm cận*" ta viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = m + 1 - \frac{m^2}{x+m}.$$

Từ đó, suy ra với $m \neq 0$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

b. Với câu hỏi "*Hàm số đồng biến trên khoảng* $[0; +\infty)$" ta thực hiện:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$, và khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ trước tiên nó cần xác định trên $(0; +\infty)$ tức là:

$$-m \notin [0; +\infty) \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

- Đạo hàm:

$$y' = \frac{m^2}{(x+m)^2} > 0 \text{ với mọi } m > 0 \Leftrightarrow \text{Hàm số đồng biến.}$$

Vậy, với $m > 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

IV. HÀM PHÂN THỨC BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT

Một số tính chất của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất:

Tích chất 1: Hàm số đồng biến trên D khi:

$$\begin{cases} -\dfrac{e}{d} \notin D \\ y' \geq 0, \forall x \in D \end{cases}.$$

Tích chất 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$.

Khi đó:

- Giá trị cực trị của hàm số tại x_0 là $y(x_0) = \dfrac{2ax_0 + b}{d}$.
- Phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{1}{d}(2ax + b)$.

Tích chất 3: Hàm số có hai cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ Phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm.

Tích chất 4: Hàm số có hai cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow$ y' = 0 có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Tích chất 5: Đồ thị nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Tích chất 6: M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị hàm số. Ta có:

a. Tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận là một hằng số.
b. Nếu tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B thì M là trung điểm AB và ΔIAB có diện tích không đổi.

Ví dụ 1: *Cho hàm số* (C): $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2 - x}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*
b. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi* (C) *và hai trục toạ độ.*
c. *Đồ thị* (C) *cắt trục hoành tại hai điểm* A, B. *Viết phương trình các tiếp tuyến của* (C) *tại* A *và* B, *rồi tìm toạ độ giao điểm của hai tiếp tuyến đó.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Diện tích S phải tìm được cho bởi:

$$S = \int_{-1}^{0}\left[-\left(-x + \frac{3}{x-2}\right)\right]dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} + 3\ln\frac{3}{2} \text{ (đvdt)}$$

c. Hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{2 - x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;\ 0) \text{ và } B(3;\ 0).$$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có dạng:

$$(d_A):\ y - 0 = y'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow (d_A):\ y = -\frac{4}{3}(x + 1).$$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại B có dạng:

$$(d_B):\ y - 0 = y'(3)(x - 3) \Leftrightarrow (d_A):\ y = -4(x - 3).$$

Hoành độ giao điểm K của (d_A) và (d_B) là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{4}{3}(x + 1) = -4(x - 3) \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow K(5;\ -8).$$

Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối A – 2005): *Cho hàm số*:

$$(C_m):\ y = mx + \frac{1}{x}, \text{ m là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 1/4.
b. *Tìm* m *để hàm số* (C_m) *có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của* (C_m) *đến tiệm cận xiên của* (C_m) *bằng* $1/\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Đạo hàm:

$$y' = m - \frac{1}{x^2} = \frac{mx^2-1}{x^2}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = mx^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Trước hết, hàm số có cực trị khi và chỉ khi:

$$\text{(1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Khi đó, (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{m}$		$1/\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy, hàm số đạt CT tại điểm A($\frac{1}{\sqrt{m}}$, $2\sqrt{m}$).

Đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên là (d): y = mx ⇔ (d): mx − y = 0.

Để khoảng cách từ điểm cực tiểu A của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $1/\sqrt{2}$ điều kiện là:

$$\frac{|\sqrt{m} - 2\sqrt{m}|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: *Cho hàm số* (C_m): $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 1.

b. *Xác định* m *để hàm số có cực đại trong khoảng* (0; m) *với* m > 0.

c. *Xác định* m *để hàm số đạt cực đại tại* x = 2.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự thực hiện.*

b. Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, \qquad y'' = \frac{2x+2m}{(x+m)^4}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -m \pm 1.$$

Ta thấy ngay với mọi m hàm số luôn có cực đại và bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		$-m$		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số có cực đại trong khoảng (0; m) khi $0 < -m + 1 < m \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Vậy, với $\frac{1}{2} < m < 1$ hàm số đạt cực đại trong khoảng (0; m).

c. Hàm số đạt cực đại tại x = 2 khi:

$$\begin{cases} 2 \in D \\ y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq -m \\ m^2 + 4m + 3 = 0 \\ 4 + 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy, với $m = -3$ hàm số đạt cực đại tại x = 2.

<u>Ví dụ 8:</u> (Đề thi đại học khối B – 2005): *Cho hàm số*:

$$(C_m): y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}, \text{ với m là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* m = 1.
b. *Chứng minh rằng với* m *bất kỳ, đồ thị* (C_m) *luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng* $\sqrt{20}$.

✍ *Giải*

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, \; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, với mọi m đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu là

$$A(-2, m-3) \text{ và } B(0, m+1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + (m+1-m+3)^2} = \sqrt{20}.$$

<u>Ví dụ 9:</u> (Đề thi đại học khối D – 2003): *Cho hàm số* (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*
b. *Tìm* m *để đường thẳng* (d_m): $y = mx + 2 - 2m$ *cắt đồ thị hàm số* (C) *tại hai điểm phân biệt.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d_m) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2} = mx + 2 - 2m \Leftrightarrow (m-1)(x-2)^2 = 4 \text{ với } x \neq 2. \qquad (1)$$

Để đồ thị hàm số (C_m) cắt (d_m) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy, $m > 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 10:</u> (Đề thi đại học khối A – 2003): *Cho hàm số*:

$$(C_m): y = \frac{mx^2+x+m}{x-1}, \textit{ với } m \textit{ là tham số.}$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* $m = -1$.

b. *Tìm* m *để đồ thị hàm số* (C_m) *cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm của Ox với đồ thị hàm số là:

$$\frac{mx^2+x+m}{x-1} = 0 \Leftrightarrow f(x) = mx^2 + x + m = 0 \text{ với } x \neq 1. \qquad (1)$$

Để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ f(1) \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \text{ và } P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m+1 \neq 0 \\ 1-4m^2 > 0 \\ -\dfrac{1}{m} > 0 \text{ và } \dfrac{m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m < 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 11:</u> (Đề thi đại học khối A – 2004): *Cho hàm số*:

$$(C): y = \frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}.$$

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*

b. *Tìm* m *để đường thẳng* (d): y = m *cắt đồ thị hàm số tại hai điểm* A, B *sao cho* AB = 1.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$\frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)} = m \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x) = x^2 + (2m-3)x - 2m + 3 = 0. \qquad (1)$$

Trước hết, để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ f(1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 4m - 3 > 0\\ -1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m > 3/2\\ m < -1/2\end{array}\right. . \qquad (*)$$

Khi đó, ta có (d)$\cap$(C) = {A(x_A, m), B(x_B, m)}, với x_A, x_B là nghiệm của (1) và thoả mãn:

$$\begin{cases}x_A + x_B = 3 - 2m\\ x_A.x_B = 3 - 2m\end{cases}.$$

Để AB = 1 điều kiện là

$AB^2 = 1 \Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A.x_B = 1$

$\Leftrightarrow (3 - 2m)^2 - 4(3 - 2m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, thoả (*).

Vậy, với $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>**Ví dụ 4:**</u> *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.*
b. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm* M *bất kỳ trên đồ thị* (C) *đến các đường tiệm cận là một hằng số không phụ thuộc vị trí điểm* M.
c. *Tìm hai điểm* A, B *thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị để khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự thực hiện.*

b. Lấy điểm M(x_0; $\dfrac{x_0^2 + x_0 - 5}{x_0 - 2}$)$\in$(C).

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận:

- Tiệm cận đứng x = 2 vì $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} y = \infty$.
- Tiệm cận xiên y = x + 3 vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (x + 3)] = 0$.

Ta lần lượt có:

- Khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng, được cho bởi $d_1 = |x_0 - 2|$.
- Khoảng cách từ M tới tiệm cận xiên, được cho bởi $d_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{1}{|x_0 - 2|}$.

Suy ra:

$d_1.d_2 = |x_0 - 2| . \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{1}{|x_0 - 2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là hằng số (đpcm).

c. Xét hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị, ta có:

$A(2 - x_1; f(2 - x_1))$, $B(2 + x_2; f(2 + x_2))$ với $x_1, x_2 > 0$.

Suy ra:

$$AB^2 = [(2 - x_1) - (2 + x_2)]^2 + [\, f(2 - x_1) - f(2 + x_2)]^2$$
$$= (x_2 + x_1)^2 + \left[\frac{(2-x_1)^2 + (2-x_1) - 5}{(2-x_1) - 2} - \frac{(2-x_2)^2 + (2-x_2) - 5}{(2-x_2) - 2}\right]^2$$
$$= (x_2 + x_1)^2\left(2 + \frac{2}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1^2x_2^2}\right)$$
$$\ge 4x_2x_1\left(2 + \frac{2}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1^2x_2^2}\right) = 4\left(2x_1x_2 + 2 + \frac{1}{x_1x_2}\right) \ge 4(2\sqrt{2} + 2).$$

Vậy, ta được $(AB)_{Min} = 2\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1x_2 = \dfrac{1}{x_1x_2} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Vậy, hai điểm A, B cần tìm có hoành độ tương ứng là $2 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

<u>Ví dụ 5:</u> *Cho hàm số* $y = \dfrac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x - 2a}$.

a. *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với* $a = 1$.

b. (Đề 85 – Bộ đề 1996): *Tìm* a *để hàm số đồng biến trên* $(1; +\infty)$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự thực hiện.*

b. Miền xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{2a\}$.

Trước hết là hàm số cần xác định với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 2a \le 1 \Leftrightarrow a \le \dfrac{1}{2}$. (1)

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 - 4ax + a^2}{(x - 2a)^2}.$$

Hàm số đồng biến với $\forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4ax + a^2 \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)$. (2)

Để giải (2) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp tam thức bậc hai*): Ta có $\Delta' = 3a^2 \ge 0$ (do (1)), vậy điều kiện (2) là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thoả $x_1 \le x_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a + a^2 \ge 0 \\ 2a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge 2 + \sqrt{3} \\ a \le 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \\ a < 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow a \le 2 - \sqrt{3}. \quad (3)$$

Kết hợp (1) và (3), ta được $a \le 2 - \sqrt{3}$.

Vậy, hàm số đồng biến trong $(1;\ +\infty)$ khi $a \le 2 - \sqrt{3}$.

Cách 2: (*Phương pháp hàm số*): Ta có:

(2) $\Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1} f(x) \ge 0$ – *Bạn đọc tự làm tiếp*.

IV. CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Ví dụ 1: (Đề thi đại học khối B – 2003): *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

✍ *Giải*

Điều kiện $x \in [-2, 2]$.

Xét hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$, trên $[-2, 2]$, ta có:

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Do đó, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[-2, 2]$ được cho bởi:

$$y_{max} = \text{Max}\{y(-2),\ y(2),\ y(\sqrt{2})\} = \text{Max}\{-2,\ 2,\ 2\sqrt{2}\} = 2\sqrt{2},$$

đạt được tại $x = \sqrt{2}$.

$y_{min} = -2$, đạt được tại $x = -2$.

Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối D – 2004): *Chứng minh rằng phương trình sau có đúng 1 nghiệm*:

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^5 = (x + 1)^2 \overset{VP \ge 0 \Rightarrow x^5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow VP \ge 1}{\Rightarrow} x > 1,$$

tức là, nếu phương trình có nghiệm thì $x > 1$.

Xét hàm số: $y = x^5 - x^2 - 2x - 1$ trên miền $D = (1, +\infty)$.

Đạo hàm:

$y' = 5x^4 - 2x - 2 = 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Ta có:

$y(1) = -3$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$,

tức là, đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình có đúng 1 nghiệm.

Ví dụ 3: (Đề thi đại học khối B – 2004): Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $|x| \le 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, suy ra $2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Ta có:

- $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \ge 0$, đạt được khi $x = 0$
- $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \le 2$, đạt được khi $x = \pm 1$.

Suy ra điều kiện của ẩn t là $0 \le t \le \sqrt{2}$. (*)

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$m(t + 2) = 2 - t^2 + t \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{-t^2+t+2}{t+2} = m. \quad (1)$$

Khi đó, phương trình ban đầu có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thoả mãn (*)

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng y = m cắt phần đồ thị hàm số $y = \frac{-t^2+t+2}{t+2}$ trên $[0; \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $y = \frac{-t^2+t+2}{t+2}$ trên $D = [0; \sqrt{2}]$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-t^2-4t}{(t+2)^2} \le 0, \forall t \in D \Leftrightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Vậy, điều kiện là:

$$y(\sqrt{2}) \le m \le y(0) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le m \le 1.$$

CHƯƠNG 2 – HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. LUỸ THỪA

Định nghĩa 1: (*Luỹ thừa với số mũ nguyên*): Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, luỹ thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi:

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ với n nghuyên âm.}$$

Định nghĩa 2: (*Căn bậc* n): Với n nguyên dương căn bậc n của số thực a là số thực b (nếu có) sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau đây:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n, kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau. Căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn số học bậc n của a), căn có giá trị âm kí hiệu là và $-\sqrt[n]{a}$.

Định nghĩa 3: (*Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ*): Cho a là số thực dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên còn n là một số nguyên dương. Khi đó, luỹ thừa của a với với sô mũ r là số a^r xác định bởi:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Từ đó $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Tính chất của luỹ thừa: Với $a > 0$, $b > 0$, ta có:

1. $a^n.a^m = a^{n+m}$.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$.
4. $(ab)^n = a^n.b^n$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Định lí 1: Cho m, n là những số nguyên. Khi đó:

1. Với $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
2. Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

II. LÔGARIT

Định nghĩa1: Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$, ta định nghĩa

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow b = a^\alpha, \quad \alpha = \lg b \Leftrightarrow b = 10^\alpha, \quad \alpha = \ln b \Leftrightarrow b = e^\alpha,$$

từ định nghĩa ta được:

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a^\alpha = \alpha; \quad \log_a a^b = b, \text{ với mọi b}; \quad a^{\log_a b} = b \text{ với } b > 0.$$

So sánh hai lôgarit cùng cơ số

Định lí 1: Cho các số dương b và c.

(1). Khi a > 1 thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Hệ quả: Khi a > 1 thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

(2). Khi 0 < a < 1 thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Hệ quả: Khi 0 < a < 1 thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

(3). $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Các quy tắc tính lôgarit

Định lí 2: Với a dương khác 1 và các số dương b, c, ta có:

(1). $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$,

Trường hợp chỉ có bc > 0 thì $\log_a(xy) = \log_a|b| + \log_a|c|$.

(2). $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$,

trường hợp chỉ có bc > 0 thì $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a|b| - \log_a|c|$.

(3). $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$,

Trường hợp $b \in \mathbb{R}$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a|b|$.

Hệ quả: Với n nguyên dương thì

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b; \qquad \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b.$$

Đổi cơ số của lôgarit

Định lí 3: Với a, b dương khác 1 và số dương c, ta có:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b.\log_b c = \log_a c.$$

Hệ quả: Ta có:

- Với a, b dương khác 1 thì $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
- Với a dương khác 1, c là số dương và $\alpha \neq 0$, ta có $\log_{a^\alpha} c = \dfrac{1}{\alpha}\log_a c$.

  Trường hợp $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $\log_{a^\alpha} c = \dfrac{1}{\alpha}\log_{|a|} c$.

III. HÀM SỐ MŨ

Định nghĩa: Hàm số mũ cơ số a ($0 < a \neq 1$) có dạng $y = a^x$.

Đạo hàm của hàm số mũ: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

b. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $(e^x)' = e^x$ và $(a^x) = a^x.\ln a$.

c. Nếu u = u(x) là hàm số có đạo hàm trên J thì với mọi $x \in J$, ta có

$$(e^u)' = u'.e^u \text{ và } (a^u) = u'.a^u.\ln a.$$

Xét hàm số $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
   - Với a > 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
   - Với 0 < a < 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và:
   - Luôn cắt trục Oy tại A(0; 1).
   - Nằm ở phía trên trục hoành.
   - Nhận trục hoành làm tiệm cân ngang.

IV. HÀM SỐ LÔGARIT

Định nghĩa: Hàm số logarit cơ số a ($0 < a \neq 1$) có dạng $y = \log_a x$.

Đạo hàm của hàm số mũ: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

b. Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$.

c. Nếu u = u(x) là hàm số có đạo hàm trên J thì với mọi $x \in J$, ta có

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ và } (\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}.$$

Xét hàm số $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Hàm số liên tục trên $D = (0, +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
   - Với a > 1 thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
   - Với 0 < a < 1 thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và:
   - Luôn cắt trục Oy tại A(1; 0).
   - Nằm ở bên phải trục tung.
   - Nhận trục tung làm tiệm cân đứng.

V. HÀM SỐ LUỸ THỪA

Định nghĩa: Hàm số lũy thừa là hàm số xác định bởi công thức $y = x^\alpha$, với α là hằng số tùy ý.

Tập xác định là $(0; +\infty)$, trừ các trường hợp sau:

- Nếu α nguyên dương thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Nếu α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}^*$.

Đạo hàm của hàm số lũy thừa: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. Hàm số $y = x^\alpha$ có có đạo hàm tại mọi điểm x > 0 và:

$(x^{\alpha})' = \alpha.x^{\alpha-1}$.

b. Nếu u = u(x) là hàm số có đạo hàm và u(x) > 0 trên J thì:

$(u^{\alpha})' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$, với mọi $x \in J$.

☞ ***Chú ý***: 1. Với n là số nguyên tùy ý, ta có $(x^n)' = n.x^{n-1}$ với mọi $x \neq 0$; và nếu u = u(x) là hàm số có đạo hàm và $u(x) \neq 0$ trên J thì $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$, với mọi $x \in J$.

2. Ta có:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

với mọi x > 0 nếu n chẵn, với mọi $x \neq 0$ nếu n lẻ.

3. Nếu u = u(x) là hàm số có đạo hàm trên J và thỏa mãn điều kiện u(x) > 0 với mọi x thuộc J khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J khi n lẻ thì:

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

VI. CÁC DẠNG CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. ***Phương trình mũ cơ bản*** có dạng $a^x = m$, trong đó a > 0 và m là số đã cho.

   Khi đó:

   - Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
   - Nếu m > 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a m$.

   Ta có các kết quả:

   $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

   Với a > 1 thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

   Với 0 < a < 1 thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

2. ***Phương trình lôgarit cơ bản*** có dạng $\log_a x = m$, trong đó m là số đã cho.

   Ta phải có điều kiện x > 0 và $0 < a \neq 1$.

   Với mọi m phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^m$.

   Ta có các kết quả:

   $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$.

   Với a > 1 thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

   Với 0 < a < 1 thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

a. ***Phương pháp đưa về cùng cơ số***

b. ***Phương pháp đặt ẩn phụ***

c. ***Phương pháp lôgarit hóa***: Ta có thể giải một phương trình có hai vế luôn dương bằng cách lấy lôgarit hai vế theo cùng một cơ số thích hợp.

d. ***Phương pháp sử dụng tính chất đồng biến hay nghịch biến của hàm số***

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Dạng toán 1: Giới hạn của hàm số mũ và lôgarit

Phương pháp

Chúng ta có các dạng giới hạn đặc biệt sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e.$

d. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

☞ ***Mở rộng:***: Ta có:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ f(x)\to 0}}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ f(x)\to 0}}\frac{\ln\left[f(x)+1\right]}{f(x)}=1.$$

☞ **Quy tắc Lôpitan:** *Nếu* f(x), g(x) *khả vi ở lân cận* x_0 *trừ tại điểm* x_0, *thì*:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận x_0,

đồng thời:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ thì } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Quy tắc vẫn đúng với $x\to\infty$.

Thí dụ 1. *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^{3x+2}}{x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2-e^{3x+2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3e^2(e^{3x}-1)}{3x} = -3e^2.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+1-e^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-1)}{2x} - \lim_{x\to 0}\frac{3(e^{5x}-1)}{3x}$$

$$= 2 - 3 = -1.$$

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên:

- Ở câu a), để làm xuất hiện dạng giới hạn $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ f(x) \to 0}} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{f(x)}$ chúng ta thực hiện nhóm nhân tử chung e^2.
- Ở câu b), chúng ta tách giới hạn ban đầu thành hai giới hạn cơ bản bằng việc thêm bớt 1.
- Với quy tắc Lôpitan, ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^2 - e^{3x+2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^2 - e^{3x+2}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \left(-3e^{3x+2}\right) = -3e^2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{2x} - e^{3x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \left(2e^{2x} - 3e^{3x}\right) = 2 - 3 = -1.$$

Thí dụ 2. *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$. b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x} = 2.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\left(\sqrt{e^x} + 1\right)\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{e^x - 1}{x}}{\left(\sqrt{e^x} + 1\right).\dfrac{2\sin 2x}{2x}} = \frac{1}{4}.$$

Thí dụ 3. *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x^2 - 3x}$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 2^x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\ln 5^x} - e^{\ln 2^x}}{x(x-3)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln 5.\dfrac{e^{x\ln 5} - 1}{x\ln 5} - \ln 2.\dfrac{e^{x\ln 2} - 1}{x}}{x - 3}$$

$$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{-3} = -\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

Thí dụ 4. *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x}$

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(2x+1)}{2x} = 2.1 = 2.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+2x^2)}{2x^2} = 0.1 = 0.$$

Thí dụ 5. *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)-\ln(2x+1)}{x}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x+1}.\ln\frac{x^2+1}{x+1}$, với $x > -1$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)-\ln(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(4x+1)}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{4\ln(4x+1)}{4x} - \frac{2\ln(2x+1)}{2x}\right] = 2.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x^2+1}{x+1}}{e^x+1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)-\ln(x+1)}{e^x+1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^x+1}{x}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.\ln(x^2+1)}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{x}} = \frac{0.1-1}{1} = -1.$$

Dạng toán 2: Tập xác định của hàm số mũ và lôgarit

Thí dụ 1. *Tìm tập xác định của các hàm số*:

a. $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$. b. $y = \log_x\frac{1}{x-1}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \neq 0.$$

Vậy, ta được tập xác định $D = (-1; +\infty)\backslash\{0\}$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, ta được tập xác định $D = (1; +\infty)$.

Thí dụ 2. *Tìm tập xác định của hàm số* $y = \lg\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1}$.

Giải

Hàm số $g(x) = 2^{1-x} - 2x + 1$ nghịch biến, có $g(1) = 0$, nên:

- $g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow x < 1$.
- $g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow x > 1$.

Hàm số có nghĩa khi:

$$\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2^{1-x} - 2x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 1 < 0 \\ 2^{1-x} - 2x + 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Vậy, ta được tập xác định $D = (0; 1)$.

Dạng toán 3: Xét tính liên tục của hàm số mũ và lôgarit

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khẳng định rằng hàm số xác định tại điểm x_0, tính $f(x_0)$.

Bước 2: Xác định $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 3: Kiểm nghiệm $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 4: Kết luận.

Thí dụ 1. *Xác định* a *để hàm số sau liên tục trên* $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{e^{2x} - 1} & \text{khi } x \neq 0 \\ a - 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện cần và đủ là nó liên tục trên $\mathbb{R}$ là nó liên tục tại điểm $x_0 = 0$, tức:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x). \qquad (*)$$

Ta có:

$f(0) = a - 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x.\ln(x^2+1)}{x^2}}{\frac{2(e^{2x}-1)}{2x}} = 0.$$

Khi đó, điều kiện (*) trở thành:

$a = 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy, với a = 1 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Tính đạo hàm của các hàm số luỹ thừa, mũ, lôgarit và hàm số hợp của chúng

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong phần kiến thức cơ bản cần nhớ.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng hàm số* $y = \ln\frac{1}{1+x}$ *thoả mãn hệ thức* $xy' + 1 = e^y$.

Giải

Trước tiên, ta có:

$$y = \ln\frac{1}{1+x} = -\ln(1+x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x}.$$

Khi đó:

$$xy' + 1 = -\frac{x}{1+x} + 1 = \frac{1}{1+x} = e^{\ln\frac{1}{1+x}} = e^y, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 2. *Tính đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = x^2\sqrt{e^{2x}+1}$. b. $y = x^2\ln\sqrt{x^2+1}$

Giải

a. Ta có:

$$y' = \left(x^2\sqrt{e^{2x}+1}\right)' = 2x\sqrt{e^{2x}+1} + \frac{4x^2.e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}} = 2x\sqrt{e^{2x}+1} + \frac{2x^2.e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$= \frac{2x\left(e^{2x}+1\right)+2x^2.e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{2x\left(e^{2x}+1+xe^{2x}\right)}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

b. Ta có:

$$y' = 2x.\ln\sqrt{x^2+1} + x^2.\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}} = = 2x.\ln\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Dạng toán 5: Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số mũ và lôgarit. Các bài toán liên quan

Thí dụ 3. *Cho hàm số* (C_m): $y = xe^{mx}$.

1. *Với* $m = -2$:
   a. *Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số* (C).
   b. *Biện luận theo* a *số nghiệm của phương trình* $xe^{-2x} = a$.
   c. *Tìm* b *để phương trình* $\sin x.e^{-2\sin x} = b$ *có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng* $[0; \pi]$.
   d. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C) *tại điểm có hoành độ* $x = 1$.
2. *Tìm* m *để*:
   a. *Hàm số đồng biến trên* $\mathbb{R}$. b. *Hàm số có cực trị.*
   c. *Hàm số có cực tiểu.*

✍ *Giải*

1. Với $m = -2$ hàm số có dạng (C): $y = xe^{-2x}$.

a. Ta lần lượt có:

(1). Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.

(2). Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.
- Bảng biến thiên:

$$y' = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1 - 2x),\ y' = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	0	1/2	1	$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$ ↗	0	CĐ 1/2e	$1/e^2$ ↘	0

Kết luận:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2e}\right)$.

b. Số nghiệm của phương trình $xe^{-2x} = a$ là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = a$. Ta có:

- Với $a \le 0$, phương trình có nghiệm duy nhất.
- Với $0 < a < \frac{1}{2e}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Với $a = \frac{1}{2e}$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.
- Với $a > \frac{1}{2e}$, phương trình vô nghiệm.

c. Đặt $t = \sin x$, $0 \le t \le 1$, phương trình có dạng $te^{-2t} = b$. (1)

Nhận xét rằng với mỗi $t_0 \in [0; 1)$ thì:

$\sin x = t_0$ phương trình này có 2 nghiệm thuộc khoảng $[0; \pi]$.

Vậy, điều kiện là đường thẳng y = b cắt đồ thị (C) phần [0; 1] tại đúng một điểm:

$$\Leftrightarrow 0 \le m < \frac{1}{e^2}.$$

d. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x = 1 là:

$$(d): y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}.$$

2. Trước tiên, ta có:
   (1). Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.
   (2). Đạo hàm:

$$y' = e^{mx} + mxe^{mx} = e^{mx}(1 + mx),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^{mx}(1 + mx) = 0 \Leftrightarrow mx + 1 = 0. \quad (2)$$

a. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$y' \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx + 1 \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 0$.

b. Hàm số có cực trị khi:

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \ne 0$.

c. Hàm số có cực tiểu khi (1) có nghiệm duy nhất và qua đó y' đổi dấu từ – sang +, tức $m > 0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Dạng toán 1: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Dạng 1: Phương trình:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}.$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Việc lựa chọn điều kiện f(x) > 0 hoặc g(x) > 0 tuỳ thuộc vào độ phức tạp của f(x) và g(x).

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}; \quad \log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau*:

a. $8^{x^3 - 4x^2 + x + 2} = 4^{x^2 - x + 2}$. b. $0,125.4^{2x-3} = \left(4\sqrt{2}\right)^x$.

Giải

a. Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(2^3)^{x^3-4x^2+x+2} = (2^2)^{x^2-x+2} \Leftrightarrow 3(x^3 - 4x^2 + x + 2) = 2(x^2 - x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 14x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(x^2 - 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \frac{2}{3}$, $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

b. Vì $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ nên ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{-3}.2^{2(2x-3)} = (2^2.2^{\frac{1}{2}})^x \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}} \Leftrightarrow 4x - 9 = \frac{5x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8x - 18 = 5x \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là x = 6.

Nhận xét: Trong lời giải trên:

- Với phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ta cần chọn phần tử trung gian c để biến đổi phương trình về dạng:

$$(c^{\alpha})^{f(x)} = (c^{\beta})^{g(x)} \Leftrightarrow c^{\alpha f(x)} = c^{\beta g(x)} \Leftrightarrow \alpha f(x) = \beta g(x),$$

- Với phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta sử dụng kết quả "*Nếu* a, b, c, d *nguyên và phương trình có nghiệm hữu tỷ* $\frac{p}{q}$ *thì* p, q *theo thứ tự là ước của* d *và* a" để đoán nhận được nghiệm $x = \frac{2}{3}$, từ đó phân tích phương trình trở thành:

$$(3x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0.$$

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $\log_2(3x + 2) = \log_2(x^3 - 4x^2 + 2x + 6)$.

b. $\log_3 x - \log_9 x = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$.

c. $\log_{\sqrt{2}} x.\log_2 x.\log_4 x = 8$.

Giải

a. Phương trình được biến đổi về dạng:

$$3x + 2 = x^3 - 4x^2 + 2x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ (x^2 - 1)(x - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt x = 1, x = 4.

b. Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x = -\frac{1}{2}\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 x = -\log_3 2 \Leftrightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

c. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}\log_2 x.\log_2 x.2\log_2 x = 8 \Leftrightarrow \log_2^3 x = 8 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 4$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên ở câu a), chúng ta đã sử dụng kết quả trong chú ý ở cuối dạng 1 để tránh phải kiểm tra điều kiện $x^3 - 4x^2 + 2x + 6 > 0$.

Thí dụ 3. *Giải các phương trình sau*:

a. $6^x - 3^x - 2^{x+1} + 2 = 0$.

b. $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$.

✍ *Giải*

a. Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(2.3)^x - 3^x - 2.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3^x(2^x - 1) - 2(2^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(3^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 1 = 0 \\ 3^x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$, $x = \log_3 2$.

b. Phương trình được biến đổi về dạng:

$$2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = 2 \Leftrightarrow \log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)] = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(1 + 3\log_2 x) = 3 \Leftrightarrow \log_2(1 + 3\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow 1 + 3\log_2 x = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), chúng ta đã sử dụng phương pháp phân tích thành nhân tử để chuyển phương trình về dạng tích. Và từ đó, nhận được hai phương trình mũ dạng 2.
- Ở câu b), chúng ta đã sử dụng phương pháp biến đổi dần để loại bỏ được lôgarit. Cách thực hiện này giúp chúng ta tránh được phải đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Dạng toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Phương pháp dùng ẩn phụ là việc sử dụng một (hoặc nhiều) ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình hoặc hệ phương trình với một (hoặc nhiều) ẩn phụ.

1. Các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau đối với phương trình mũ:

<u>Dạng 1:</u> Phương trình $\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1} a^{(k-1)x} ... \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$,
khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$\alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} ... \alpha_1 t + \alpha_0 = 0.$$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$. Khi đó:

$$a^{2f(x)} = t^2,\ a^{3f(x)} = t^3,\ ...,\ a^{kf(x)} = t^k \text{ và } a^{-f(x)} = \frac{1}{t}.$$

<u>Dạng 2:</u> Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$, với $a.b = 1$

khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, suy ra $b^x = \frac{1}{t}$, ta được:

$$\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0.$$

Mở rộng: Với $a.b = 1$ thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$, suy ra

$$b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

<u>Dạng 3:</u> Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$,
khi đó chia hai vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc a^{2x}, $(a.b)^x$), ta được:

$$\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{x} + \alpha_3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, ta được $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử a^{2f}, b^{2f}, $(a.b)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia hai vế của phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc a^{2f}, $(a.b)^f$).
- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$, điều kiện hẹp $t > 0$.

☞ ***Chú ý***: Ta sử dụng ngôn từ *điều kiện hẹp* $t > 0$ cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$ vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì $t > 0$ là điều kiện đúng.
- Nếu đặt $t = 2^{x^2+1}$ thì $t > 0$ chỉ là điều kiện hẹp, bởi thực chất điều kiện cho t phải là $t \geq 2$. Điều này đặc biệt quan trong cho lớp các bài toán có chứa tham số.

2. Các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau đối với phương trình lôgarit:

Dạng 1: Nếu đặt $t = \log_a x$ với $x > 0$ thì $\log_a^k x = t^k$, $\log_x a = \dfrac{1}{t}$ với $0 < x \neq 1$.

Dạng 2: Ta biết rằng $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, do đó nếu đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$

Tuy nhiên, trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dần với $t = \log_b x$.

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau*:

a. $4^x + 3.2^{x+1} - 16 = 0$. b. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = 2^x$ (điều kiện $t > 0$).

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$2^{2x} + 6.2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -8 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Nhận xét rằng:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, thì $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 2$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với hai dạng đặt ẩn phụ cơ bản của phương trình mũ. Và ở đó:

- Với câu a) chúng ta cần tới phép biến đổi $4^x = 2^{2x}$ và $2^{x+1} = 2.2^x$ để định hướng cho ẩn phụ $t = 2^x$.
- Với câu b) các em học sinh cần biết cách mở rộng phương pháp cho dạng phương trình:

$$\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 c^x = 0, \text{ với } a.b = c^2.$$

Rồi thực tập bằng cách giải phương trình:

$$(3 + \sqrt{5})^x + 7(3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}.$$

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$. b. $5.4^x - 2.6^x = 3^{2x+1}$.

Giải

a. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3.3^x + 18.\frac{1}{3^x} = 29 \Leftrightarrow 3t + \frac{18}{t} = 29 \Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^2 \\ 3^{x+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 1 = \log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \log_3 2 - 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = \log_3 2 - 1$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5.2^{2x} - 2.(2.3)^x = 3.3^{2x}.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2z} > 0$, ta được:

$$5\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$5t^2 - 2t - 3 = 0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Thí dụ 3. *Giải các phương trình sau*:

a. $\log_3^2 x^3 - 20\log_3\sqrt{x} + 1 = 0$. b. $\log_{9x}27 - \log_{3x}3 + \log_9 243 = 0$.

Giải

a. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3\log_3 x)^2 - 20.\frac{1}{2}\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 9\log_3{}^2 x - 10\log_3 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \log_3 x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$9t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1/9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 1/9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3$ hoặc $x = \sqrt[9]{3}$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < 9x \neq 1 \\ 0 < 3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)\backslash\{\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\log_{9x}3 - \log_{3x}3 + \frac{1}{2}.5\log_3 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\log_3 9x} - \frac{1}{\log_3 3x} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1+\log_3 3x} - \frac{1}{\log_3 3x} + \frac{5}{2} = 0.$$

Đặt t = $\log_3 3x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{1+t} - \frac{1}{t} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6t - 2(1+t) + 5t(1+t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 9t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0,2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 3x = 0,2 \\ \log_3 3x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3^{0,2} \\ 3x = 3^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{-0,8} \\ x = 3^{-3} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3^{-0,8}$ hoặc $x = 3^{-3}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với dạng đặt ẩn phụ cơ bản của phương trình lôgarit. Và ở đó:

- Với câu a), các em học sinh dễ nhận thấy ẩn phụ t = $\log_3 x$. Tuy nhiên, rất nhiều em biến đổi nhầm $\log_3^2 x^3 = 3\log_3^2 x$.
- Với câu b), chúng ta cần sử dụng công thức đổi cơ số để làm xuất hiện ẩn phụ.

Thí dụ 4. *Giải các phương trình sau*:

a. $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$. b. $3^{\log_2 x^3} + 12^{\log_2 x} = 2.x^{\log_2 8}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 0 < 2x \neq 1 \\ 0 < 8x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)\backslash\{\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2x} = \frac{\frac{1}{3}\log_2 4x}{\frac{1}{4}\log_2 8x} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} = \frac{2(2+\log_2 x)}{3(3+\log_2 x)}.$$

Đặt t = $\log_2 x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)} \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{16} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm là x = 2 hoặc $x = \dfrac{1}{16}$.

b. Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3^{3\log_2 x} + 12^{\log_2 x} = 2.8^{\log_2 x} \Leftrightarrow 3^{3\log_2 x} + (3.2^2)^{\log_2 x} = 2.2^{3\log_2 x}. \quad (**)$$

Đặt t = $\log_3 x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$3^{3t} + (3.2^2)^t = 2.2^{3t} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2.$$

Đặt $u = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ (điều kiện u > 0), ta biến đổi phương trình về dạng:

$$u^3 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 + u + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u^2 + u + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là x = 1.

☞ ***Nhận xét***: Với câu b) các em học sinh có thể giảm bớt một lần đặt ẩn phụ bằng cách chia hai vế của phương trình (*) cho $2^{3\log_2 x}$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình* $\lg^2 x - \lg x.\log_2(4x) + 2\log_2 x = 0$.

✍ *Giải*

Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\lg^2 x - (2 + \log_2 x)\lg x + 2\log_2 x = 0.$$

Đặt t = lgx, khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - (2 + \log_2 x).t + 2\log_2 x = 0$$

ta có:

$$\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8\log_2 x = (2 - \log_2 x)^2$$

suy ra phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \log_2 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 2 \\ \lg x = \dfrac{\lg x}{\lg 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 2 \\ \lg x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 100 và x = 1.

☞ ***Chú ý***: Một mở rộng khá tự nhiên của phương pháp đặt ẩn phụ kiểu này là chúng ta có thể sử dụng ngay các hằng số hoặc các tham số trong phương trình để làm ẩn phụ, phương pháp này có tên gọi là "*Phương pháp hằng số biến thiên*".

Dạng toán 3: Phương pháp lôgarit hóa giải phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Ta có thể giải một phương trình có hai vế luôn dương bằng cách lấy lôgarit hai vế theo cùng một cơ số thích hợp.

Cụ thể:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x).$$

$$\text{hoặc } \log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_c a = g(x).\log_c b.$$

☞ ***Chú ý***: Phương pháp logarit hoá tỏ ra rất hiệu lực khi hai vế phương trình có dạng tích các luỹ thừa.

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau*:

a. $2^{3^x} = 3^{2^x}$. b. $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

✍ *Giải*

a. Ta trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy logarit cơ số 3 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_3 2^{3^x} = \log_3 3^{2^x} \Leftrightarrow 3^x \log_3 2 = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \log_3 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \log_{\frac{2}{3}} \log_3 2$.

Cách 2: Lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_2 2^{3^x} = \log_2 3^{2^x} \Leftrightarrow 3^x = 2^x \log_2 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3$.

Cách 3: Lấy logarit cơ số 10 hai vế của phương trình, ta được:

$$\lg 2^{3^x} = \lg 3^{2^x} \Leftrightarrow 3^x\lg 2 = 2^x\lg 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3$.

b. Điều kiện $x \neq 0$. Tới đây, ta trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy logarit cơ số 5 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_5\left(5^x.8^{\frac{x-1}{x}}\right) = \log_5 500 \Leftrightarrow \log_5 5^x + \log_5 8^{\frac{x-1}{x}} = \log_5 125 + \log_5 4$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x-1}{x}\log_5 8 = 3 + 2\log_5 2 \Leftrightarrow x^2 + 3(x-1)\log_5 2 = x\left(3 + 2\log_5 2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\log_5 2 - 3\right)x - 3\log_5 2 = 0$$

ta có $\Delta = \left(\log_5 2 - 3\right)^2 + 12\log_5 2 = \left(\log_5 2 + 3\right)^2$ phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{3 - \log_5 2 \pm (\log_5 2 + 3)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\log_5 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 3$, $x = -\log_5 2$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x.2^{3.\frac{x-1}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}} = 1.$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được:

$$\log_2\left(5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 5^{x-3} + \log_2 2^{\frac{x-3}{x}} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\log_2 5 + \frac{x-3}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\log_2 5 + \frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{\log_2 5} = -\log_5 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 3$, $x = -\log_5 2$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với phương pháp lôgarit hóa. Và ở đó:

- Với câu a) đã trình bày các cách lấy lôgarit hóa hai vế của một phương trình.
- Với câu b) các em học sinh sẽ nhận thấy tính linh hoạt trong việc sử dụng các phép biến đổi đại số trước khi thực hiện phép lôgarit hóa hai vế của một phương trình để giảm thiểu tính phức tạp.

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $3^{2-\log_3 x} = 81x$. b. $x^6.5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $x > 0$.

Lấy lôgarit cơ số 3 cả hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_3 3^{2-\log_3 x} = \log_3(81x) \Leftrightarrow 2 - \log_3 x = 4 + \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3^{-1}$.

b. Điều kiện $0 < x \neq 1$.

Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_5(x^6.5^{-\log_x 5}) = \log_5 5^{-5} \Leftrightarrow \log_5 x^6 + \log_5 5^{-\log_x 5} = -5$$

$$\Leftrightarrow 6\log_5 x - \log_x 5 = -5 .$$

Đặt $t = \log_5 x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$6t - \frac{1}{t} = -5 \Leftrightarrow 6t^2 + 5t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1/6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = -1 \\ \log_5 x = 1/6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^{-1} \\ x = \sqrt[6]{5} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 5^{-1}$ hoặc $x = \sqrt[6]{5}$.

Dạng toán 4: Phương pháp sử dụng tính chất của hàm số để giải phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Ta sử dụng các tính chất sau:

Tính chất 1. Nếu hàm f tăng (hoặc giảm) trong khoảng (a, b) thì phương trình f(x) = k có không quá một nghiệm trong khoảng (a, b).

Phương pháp áp dụng: ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng f(x) = k.

Bước 2: Xét hàm số y = f(x).
Dùng lập luận khẳng định hàm số là đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 3: Nhận xét:

- Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$, do đó $x = x_0$ là nghiệm
- Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > k$, do đó phương trình vô nghiệm.
- Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < k$, do đó phương trình vô nghiệm.

Bước 4: Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Tính chất 2. Nếu hàm f tăng trong khoảng (a; b) và hàm g là hàm hằng hoặc là một hàm giảm trong khoảng (a; b) thì phương trình f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng (a; b) (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a; b)$: $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x)).

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau*:

a. $2^x + 3^x = 5$. b. $\log_2(x + 2) + \log_3(x + 3) = 2$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng x = 1 là nghiệm của phương trình vì $2^1 + 3^1 = 5$, đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

b. Điều kiện $x \geq -2$. Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng x = 0 là nghiệm của phương trình vì $\log_2 2 + \log_3 3 = 2$, đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

b. $3^x = 4 - x$. b. $\log_3 x = 4 - x$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình vì:

$3^1 = 4 - 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b. Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 3$ là nghiệm của phương trình vì:

$\log_3 3 = 4 - 3 \Leftrightarrow 1 = 1$, đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình* $3^{1-x} - \log_2 x - 1 = 0$.

✍ *Giải*

Điều kiện $x > 0$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \log_2 x + 1.$$

Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm đồng biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình vì:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

☞ ***Chú ý***: 1. Đối với phương trình logarit có một dạng rất đặc biệt, đó là:

$$s^{ax+b} = c\log_s(dx + e) + \alpha x + \beta$$

với $d = ac + \alpha$ và $e = bc + \beta$. (*)

Với dạng phương trình này, ta thực hiện như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < s \neq 1s \\ dx + e > 0 \end{cases}.$$

Đặt $ay + b = \log_s(dx + e)$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} s^{ax+b} = c(ay+b) + \alpha x + \beta \\ ay + b = \log_s(dx+e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^{ax+b} = acy + \alpha x + bc + \beta \\ s^{ay+b} = dx + e \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^{ax+b} = acy + (d-ac)x + e & (1) \\ s^{ay+b} = dx + e & (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$s^{ax+b} + acx = s^{ay+b} + acy. \qquad (3)$$

Xét hàm số f(t) = s^{at+b} + act là hàm đơn điệu trên R.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$s^{ax+b} - dx - e = 0. \qquad (4)$$

Dùng phương pháp hàm số để xác định nghiệm của (4).

2. Để sử dụng được phương pháp trên cần phải khéo léo biến đổi phương trình ban đầu về dạng thoả mãn điều kiện (*).

Thí dụ 4. *Giải phương trình*:

$$6^x = 3\log_6(5x + 1) + 2x + 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$5x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}.$$

Đặt y = $\log_6(5x + 1)$. Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} 6^x = 3y + 2x + 1 \\ y = \log_6(5x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 2x + 3y + 1 & (1) \\ 6^y = 5x + 1 & (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$6^x + 3x = 6^y + 3y. \qquad (3)$$

Xét hàm số f(t) = 6^t + 3t là hàm đơn điệu trên R.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$6^x - 5x - 1 = 0. \qquad (4)$$

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Bernouli

$$(4) \Leftrightarrow 6^x + (1-6)x = 1 \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 0 và x = 1.

Cách 2: (*Sử dụng định lý Rôn*): Xét hàm số g(x) = $6^x - 5x - 1$.

- Miền xác định: D = $(-\frac{1}{5}; +\infty)$.
- Đạo hàm:

$$g'(x) = 6^x.\ln 6 - 5,\quad g''(x) = 6^x.\ln^2 6 > 0,\ \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ g'(x) là hàm đồng biến trên D.

Vậy theo định lý Rôn phương trình g(x) = 0 có không quá 2 nghiệm trên D.
Nhận xét rằng g(0) = g(1) = 0.
Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 0 và x = 1.

☞ ***Chú ý***: Ta xét dạng phương trình lặp:

$$f[f(x)] = x,$$

trong đó f(x) là hàm đồng biến trên tập xác định D.
Khi đó ta thực hiện:
Đặt y = f(x), khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} f(y) = x & (1) \\ y = f(x) & (2) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Cộng theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$f(y) + y = f(x) + x. \qquad (3)$$

Xét hàm số A(t) = f(t) + t là hàm đồng biến trên D (bởi f(t) là hàm đồng biến).
Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$f(x) = x. \qquad (4)$$

Dùng phương pháp hàm số để xác định nghiệm của (4).
Ví dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể dạng phương trình kiểu này.

Thí dụ 5. *Giải phương trình* $\log_2[3\log_2(3x - 1) - 1] = x$.

✍ *Giải*

Điều kiện

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 3\log_2(3x-1) - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 3x - 1 > 2^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2^{\frac{1}{3}} + 1}{3}.$$

Đặt $y = \log_2(3x - 1)$.
Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} \log_2(3y - 1) = x & (1) \\ y = \log_2(3x - 1) & (2) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Cộng theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$\log_2(3y - 1) + y = \log_2(3x - 1) + x. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2(3t - 1) + t$, ta có:

- Miền xác định $D = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}} + 1}{3};\ +\infty\right)$.
- Đạo hàm:

$$f'(t) = \frac{3}{(3t-1)\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in D.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên D.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\log_2(3x - 1) = x \Leftrightarrow 3x - 1 = 2^x \Leftrightarrow 2^x - 3x + 1 = 0. \quad (4)$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 3x + 1$, ta có:

- Miền xác định: $D = (\frac{2^{\frac{1}{3}} + 1}{3};\ +\infty)$.
- Đạo hàm:

$$g'(x) = 2^x.\ln 2 - 3, \quad g''(x) = 2^x.\ln^2 2 > 0, \forall x \in D$$

$\Rightarrow g'(x)$ là hàm đồng biến trên D.

Vậy theo định lý Rôn phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên D.

Nhận xét rằng $g(1) = g(3) = 0$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, ...

Dạng toán 1: Phương pháp thế

Thí dụ 1. *Giải các hệ phương trình*:

a. (ĐHKT – 1999): $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-\frac{x}{3})} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases}$. b. $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-y} \\ 3^{\log_9 x} = \frac{y}{3} \end{cases}$.

Giải

a. Điều kiện $x, y > 0$. (*)

Thế phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^{x^{-3}+4x} = x^{-3.5(x^{-3}-\frac{x}{3})} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^{-3} + 4x = -15x^{-3} + 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^4 - 16 = 0 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $x = 1$ suy ra $y = 1^{-3} = 1$.

- Với $x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{8}$.

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1; 1) và (2; $\frac{1}{8}$).

b. Điều kiện $x > 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 2^{2\sqrt{x}} = 2^{y-1} \\ 3^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = y-1 \\ \left(3^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = y-1 \\ \sqrt{x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\frac{y}{3} = y-1 \\ \sqrt{x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một cặp nghiệm (1; 3).

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), chúng ta sử dụng ngay phép thế $y = x^{-3}$ vào phương trình thứ nhất của hệ để nhận được một phương trình mũ dạng:
$$[u(x)]^{f(x)} = [u(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x) = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right..$$
- Ở câu b), để tường minh chúng ta có thể trình bày theo cách:
Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:
$$2^{2\sqrt{x}} = 2^{y-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = y-1 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}+1. \quad (1)$$
Biến đổi phương trình thứ hai của hệ về dạng:
$$3^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \left(3^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y}{3}. \quad (2)$$
Thay (2) vào (1), ta được:
$$y = \frac{2y}{3}+1 \Leftrightarrow 3y = 2y + 1 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = 1.$$

Dạng toán 2: Phương pháp biến đổi tương đương

Thí dụ 1. *Giải các hệ phương trình*:

a. $\begin{cases} x+y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x+y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $x > 0, y > 0$.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x+y = 20 \\ \log_4(xy) = \log_4(4.9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 20 \\ xy = 36 \end{cases}$$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 20t + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y=18 \\ x = 18 \text{ và } y=2 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là (2; 18) hoặc (18; 2).

b. Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (-2x) + (-2y) = -2 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{(-2x)+(-2y)} = \dfrac{1}{16} \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{-2x}.4^{-2y} = \dfrac{1}{16} \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

suy ra 4^{-2x}, 4^{-2y} là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^{-2x} = 4^{-2y} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là $x = y = \dfrac{1}{2}$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), bằng việc sử dụng công thức biến đổi tổng của hai logarit cùng cơ số (trong đó $1 = \log_4 4$) chúng ta nhận được dạng Vi–ét cho hai ẩn x, y.
  Ngoài ra, cũng có thể sử dụng phương pháp thế như sau:
  Rút y = 20 − x từ phương trình thứ nhất của hệ thay vào phương trình thứ hai, ta được:
  $$\log_4 x + \log_4(20 - x) = 1 + \log_4 9 \Leftrightarrow \log_4[x(20 - x)] = \log_4 36$$
  $$\Leftrightarrow x(20 - x) = 36 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y=18 \\ x = 18 \Rightarrow y=2 \end{array}\right..$$
- Ở câu b), chúng ta đã sử dụng phép mũ hoá để nhận được tích của hai toán tử 4^{-2x} và 4^{-2y}, từ đó sử dụng hệ quả của định lí Vi–ét. Đây chính là sự khác biệt mà các em học sinh cần lưu ý cho hai dạng hệ phương trình ở a) và b).
  Ngoài ra, cũng có thể sử dụng phương pháp thế như sau:
  Rút y = 1 − x từ phương trình thứ nhất của hệ thay vào phương trình thứ hai, ta được:
  $$4^{-2x} + 4^{-2(1-x)} = 0,5 \Leftrightarrow 4^{-2x} + \frac{1}{16}4^{2x} = 0,5.$$
  Đặt $t = 4^{2x}$, điều kiện $t > 0$. Ta được:
  $$t^{-1} + \frac{1}{16}.t = 0,5 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 4^{2x} = 4$$
  $$\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy, từ đây các em học sinh có thể thấy được tính tối ưu của việc sử dụng các phép biến đổi tương đương để giải hệ phương trình. Và áp dụng nó để giải hệ phương trình (HVNH Hà Nội – 1999)::

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Giải các hệ phương trình*:

a. $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7.\log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = (1 + 3\log_5 x)\log_2 5 \end{cases}$. b. $\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y) \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện x, y > 0. Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5 + 3\log_2 5.\log_5 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = \log_5 10 \\ 3\log_2 x - \log_2 y = 3 - \log_2 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(xy) = \log_5 10 \\ \log_2 \dfrac{x^3}{y} = \log_2 \dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ \dfrac{x^3}{y} = \dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là (2; 5).

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x - y > 0;\ x + y > 0 \\ \lg y - \lg 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ 0 < y \neq 3 \\ x - y > 0;\ x + y > 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi tương đương hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x - y) + \log_2(x + y) = 5 \\ \lg \dfrac{x}{4} = \lg \dfrac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - y^2) = 5 \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 32 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 32y^2 - 144 = 0 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = \dfrac{12}{y} \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là (6; 2).

Dạng toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ

Thí dụ 1. *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^y \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Khi đó, hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 9u^2 + 4v^2 = 17 \\ 6u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2 - 6u + 1 = 0 \\ v = \dfrac{8 - 6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \dfrac{1}{3} \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy, hệ có cặp nghiệm (−1; 1).

b. Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x.(-2^y) = -2 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^x \\ v = -2^y \end{cases}, u > 0 \text{ và } v < 0.$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u.v = -2 \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + \sqrt{3} \\ v = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 + \sqrt{3} \\ -2^y = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(1 + \sqrt{3}) \\ y = \log_2(\sqrt{3} - 1) \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm.

Thí dụ 2. *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 1 \\ \lg \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} \ln(xy) = \ln^2 x + 1 \\ \ln(xy) = \ln^2 y + 1 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện x, y > 0. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 1 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \lg x \\ v = \lg y \end{cases}$$

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ u-v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=u-1 \\ u^2+(u-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=u-1 \\ 2u^2-2u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=u-1 \\ \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \ \& \ v=-1 \\ u=1 \ \& \ v=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \ \& \ y=\dfrac{1}{10} \\ x=10 \ \& \ y=1 \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (1; $\frac{1}{10}$) và (10; 1).

b. Điều kiện $x, y > 0$. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \ln x+\ln y=\ln^2 x+1 \\ \ln x+\ln y=\ln^2 y+1 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u=\ln x \\ v=\ln y \end{cases}$$

Khi đó, hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u+v=v^2+1 \\ u+v=u^2+1 \end{cases}.$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$u - v = -(u^2 - v^2) + (u - v) \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-v \end{array}\right. .$$

Ta lần lượt:

- Với $u = v$, ta được:

  $v = v^2 - v + 1 \Leftrightarrow v^2 - 2v + 1 = 0 \Leftrightarrow v = 1$

  $\Rightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \lg x = \lg y = 1 \Leftrightarrow x = y = 10.$

- Với $u = -v$, ta được:

  $-v = v^2 - v + 1 \Leftrightarrow v^2 + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (10; 10).

☞ ***Chú ý***: Với các em học sinh đã có kinh nghiệm trong việc giải toán thì:

- Ở câu a), chúng ta có thể trình bày (với điều kiện $x > 0$, $y > 0$) theo cách:

$$\begin{cases} \lg^2 x+\lg^2 y=1 \\ \lg x-\lg y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lg x-\lg y)^2+2\lg x.\lg y=1 \\ \lg x-\lg y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x.\lg y = 0 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = 0 \\ -\lg y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \lg y = 0 \\ \lg x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = \dfrac{1}{10} \\ x = 10 \ \& \ y = 1 \end{array}\right. .$$

- Ở câu b), chúng ta có thể trình bày (với điều kiện $x > 0$, $y > 0$) theo cách suy ra:

  $$\ln^2x + 1 = \ln^2y + 1 \Leftrightarrow \ln^2x = \ln^2y \Leftrightarrow \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y.$$

  Từ đó, ta được:

  $$\ln x^2 = \ln^2x + 1 \Leftrightarrow \ln^2x - 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$$
  $$\Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10.$$

<u>Dạng toán 4:</u> Phương pháp hàm số

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}.$ b. $\begin{cases} \ln x - \ln y = y - x \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \end{cases}.$

Giải

a. Viết lại phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$3^x + x = 3^y + y.$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy, phương trình (*) được viết dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (2; 2) và (–2; –2).

b. Điều kiện $x, y > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ:

$\ln x + x = \ln y + y.$ (**)

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ là hàm đồng biến, khi đó (**) tương đương:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Khi đó, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (1; 1) và (3; 3).

<u>Thí dụ 2.</u> (ĐHQG Hà Nội – 1995): *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Thay (2) vào (1) ta được:

$2^x - 2^y = (y - x)(x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3$

$\Leftrightarrow 2^x - x^3 = 2^y - y^3$ (3)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (1; 1) và (–1; –1).

Thí dụ 3. (ĐHQG Hà Nội – 1995): *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) = y - 1 \\ \log_2 y = x \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \end{cases}.$$

Từ hệ suy ra:

$\log_2(x + 1) + x = \log_2 y + y - 1 \Leftrightarrow \log_2(x + 1) + x + 1 = \log_2 y + y.$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm đồng biến với $t > 0$, do đó phương trình có dạng:

$f(x + 1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y.$

Khi đó hệ được chuyển thành:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ \log_2(x + 1) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = 2^x \end{cases} \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = x + 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ \&\ y = 1 \\ x = 1 \ \&\ y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (0; 1) và (1; 2).

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Dạng toán 1: Phương pháp biến đổi tương đương cho bất phương trình mũ

Phương pháp

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] \le 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} < b \text{ (với } b > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right..$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$.   b. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{x^2+1} > \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{2x+1}$.

c. $3^{x^2-1} < 2$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x - 2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3}.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Cách 2: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \le 2 - x \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3}.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện bài toán trên ở cả hai cách chúng ta đều thực hiện một công việc là đưa bất phương trình về dạng có cùng cơ số, tuy nhiên:

- *Trong cách 1*, với việc sử dụng cơ số a < 1 nên dấu bất đẳng thức phải đổi chiều và đây là điểm thường gây ra lỗi đối với một vài học sinh.
- *Trong cách 2*, với việc sử dụng cơ số a > 1 nên dấu bất đẳng thức không đổi chiều. Trong những trường hợp tương tự các em học hãy lựa chọn theo hướng này.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Nhận xét rằng:

$$5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2}.$$

Do đó, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x^2+1}>\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2(2x+1)}\Leftrightarrow x^2+1<-2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+3<0\Leftrightarrow -3<x<-1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-3; -1)$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=3-2=1\Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}.$$

Do đó, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(x^2+1)}>\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2(2x+1)}\Leftrightarrow -x^2-1>4x+2\Leftrightarrow x^2+4x+3<0$$

$$\Leftrightarrow -3<x<-1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-3; -1)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện bài toán trên ở cả hai cách chúng ta đều thực hiện một công việc là đưa bất phương trình về dạng có cùng cơ số, tuy nhiên:

- *Trong cách 1*, chúng ta đã tìm cách biến đổi $5+2\sqrt{6}$ theo $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ và ở đây các em học sinh cũng cần lưu ý rằng cơ số này nhỏ hơn 1.
- *Trong cách 2*, chúng ta đã sử dụng ý tưởng về cơ số trung gian đã biết trong phần phương trình mũ.

c. Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$x^2-1<\log_3 2\Leftrightarrow x^2<1+\log_3 2 \text{ tham số } x^2<\log_3 6\Leftrightarrow |x|<\sqrt{\log_3 6}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\sqrt{\log_3 6}; \sqrt{\log_3 6}\right)$.

Dạng toán 2: Phương pháp biến đổi tương đương cho bất phương trình lôgarit

Phương pháp

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\0<f(x)<g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\f(x)>g(x)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}0<a\neq 1\\f(x)>0\\g(x)>0\\(a-1)[f(x)-g(x)]<0\end{cases}.$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\0<f(x)<a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\f(x)>a^b\end{cases}\end{array}\right..$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\f(x)>a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\0<f(x)<a^b\end{cases}\end{array}\right..$$

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\log_5(x^2-1) < 1 - \log_{\frac{1}{5}}(x-1)$.

b. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x-4) < 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2-1>0\\x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>1\\x>1\end{cases} \Leftrightarrow x>1. \qquad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_5(x^2-1) < 1+\log_5(x-1) \Leftrightarrow \log_5(x^2-1) < \log_5 5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 < 5(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta nhận được tập nghiệm của bất phương trình là (1; 4).

Cách 2: Bất phương trình biến đổi tương đương về dạng:

$$\log_5(x^2-1) < 1+\log_5(x-1) \Leftrightarrow \log_5(x^2-1) < \log_5 5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 1 < 5(x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là (1; 4).

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy so sánh hai cách giải trên và hãy trả lời câu hỏi "*Có thể sử dụng cách 2 cho bất phương trình trong câu b) hay không ?*".

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 18 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4. \qquad (*)$$

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$-\log_5(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0 \Leftrightarrow \log_5(x - 4)^2 < \log_5(x^2 - 6x + 18)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 < x^2 - 6x + 18 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1. \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được nghiệm của bất phương trình là x > 4.

Dạng toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ giải bất phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Các dạng đặt ẩn phụ trong trường hợp này cũng giống như với phương trình mũ và phương trình logarit.

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $9^x + 2.3^{x+1} - 16 \geq 0$. b. $(5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \leq 2^{x + \log_2 5}$.

c. $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} \leq 0$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = 3^x$ (điều kiện $t > 0$), phương trình được biến đổi về dạng:

$$3^{2x} + 6.3^x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -8 \text{ (loại)} \\ t \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $(\log_3 2; +\infty)$.

b. Chia hai vế bất phương trình cho $2^x > 0$, ta được:

$$\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x \leq 5.$$

Nhận xét rằng $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right).\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right) = 1$, nên nếu đặt $t = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$ thì $\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{1}{t} \le 5 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t^2 - 5t + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \le t \le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \le \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \le \frac{5+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $[-1; 1]$.

c. Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$4.4^{\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{\ln x^2} \le 0 \Leftrightarrow 4.2^{2\ln x} - (2.3)^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} \le 0. \qquad (1)$$

Chia cả hai vế của (1) cho $3^{2\ln x} > 0$, ta được $4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\ln x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} - 18 \le 0.$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x}$, điều kiện $t > 0$. Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$4t^2 - t - 18 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge e^{-2}.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $[e^{-2}; +\infty)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với ba dạng đặt ẩn phụ cơ bản đã được biết trong phần phương trình mũ. Và ở đây:

- Với câu a) chúng ta cần tới phép biến đổi $9^x = 3^{2x}$ và $3^{x+1} = 3.3^x$ để định hướng cho ẩn phụ $t = 3^x$. Và với điều kiện $t > 0$ nên kết quả $t \le -8$ bị loại.
- Với câu b) chúng ta đã sử dụng dạng mở rộng đã biết cho phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 c^x = 0$, với $a.b = c^2$. Và với điều kiện $t > 0$ chúng ta loại bỏ luôn mẫu số sau phép quy đồng.
- Với câu c) chúng ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để nhận dạng được loại ẩn phụ cho bất phương trình. Và ở đó việc chia cả hai vế của bất phương trình cho một số dương nên dấu bất đẳng thức không đổi chiều.

Thí dụ 2. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\lg^2 x^3 - 20\lg\sqrt{x} + 1 \le 0$. b. $\log_{x-1} 4 \ge 1 + \log_2(x - 1)$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(3\lg x)^2 - 20.\frac{1}{2}\lg x + 1 \le 0 \Leftrightarrow 9\lg^2 x - 10\lg x + 1 \le 0.$$

Đặt t = lgx, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$9t^2 - 10t + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le t \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le \lg x \le 1 \Leftrightarrow \sqrt[9]{10} \le x \le 10.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left[\sqrt[9]{10}; 10\right]$.

b. Điều kiện $0 < x - 1 \ne 1 \Leftrightarrow 1 < x \ne 2.$ (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$2\log_{x-1}2 \ge 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2(x-1)} \ge 1 + \log_2(x-1).$$

Đặt $t = \log_2(x - 1)$, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{2}{t} \ge 1 + t \Leftrightarrow t + 1 - \frac{2}{t} \le 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + t - 2}{t} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -2 \\ 0 < t \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) \le -2 \\ 0 < \log_2(x-1) \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 \le 2^{-2} \\ 1 < x - 1 \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{5}{4} \\ 2 < x \le 3 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left(1; \frac{5}{4}\right] \cup \left(2; 3\right]$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với hai dạng đặt ẩn phụ cơ bản đã được biết trong phần phương trình lôgarit. Và ở đây:

- Với câu a) các em học sinh dễ nhận thấy ẩn phụ t = lgx. Tuy nhiên, rất nhiều em biến đổi nhầm $\lg_3^2 x^3 = 3\lg_3^2 x$.
- Với câu b) các em học sinh có thể bị mắc lỗi khi thực hiện quy đồng mẫu số rồi bỏ mẫu hoặc không kết hợp với điều kiện (*) của bất phương trình.

Dạng toán 4: Phương pháp lôgarit hóa giải bất phương trình mũ và lôgarit

Phương pháp

Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\lg a > g(x).\lg b$$

hoặc có thể sử dụng logarit theo cơ số a hay b.

☞ ***Chú ý***: Phương pháp logarit hoá tỏ ra rất hiệu lực khi hai vế bất phương trình có dạng tích các luỹ thừa.

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $4^{3^x} < 3^{4^x}$. b. $x^6.5^{-\log_x 5} \le 5^{-5}$.

✍ *Giải*

a. Ta trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy logarit cơ số 4 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_4 4^{3^x} < \log_4 3^{4^x} \Leftrightarrow 3^x < 4^x \log_4 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x < \log_4 3 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{4}} \log_4 3.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left(\log_{\frac{3}{4}} \log_4 3; +\infty\right)$.

Cách 2: Lấy logarit cơ số 3 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_3 4^{3^x} < \log_3 3^{4^x} \Leftrightarrow 3^x \log_3 4 < 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > \log_3 4 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{4}{3}} \log_3 4.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left(\log_{\frac{4}{3}} \log_3 4; +\infty\right)$.

Cách 3: Lấy logarit cơ số 10 hai vế của phương trình, ta được:

$$\lg 4^{3^x} < \lg 3^{4^x} \Leftrightarrow 3^x \lg 4 < 4^x \lg 3 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{\lg 4}{\lg 3} = \log_3 4 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{4}{3}} \log_3 4.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left(\log_{\frac{4}{3}} \log_3 4; +\infty\right)$.

b. Điều kiện $0 < x \ne 1$. (*)

Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế của bất phương trình, ta được:

$$\log_5(x^6.5^{-\log_x 5}) \le \log_5 5^{-5} \Leftrightarrow \log_5 x^6 + \log_5 5^{-\log_x 5} \le -5 \Leftrightarrow 6\log_5 x - \log_x 5 \le -5.$$

Đặt $t = \log_5 x$, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$6t - \frac{1}{t} \le -5 \Leftrightarrow \frac{6t^2 + 5t - 1}{t} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 0 < t \le \frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x \le -1 \\ 0 < \log_5 x \le \frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 5^{-1} \\ 1 < x \le \sqrt[6]{5} \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left(0; 5^{-1}\right] \cup \left(1; \sqrt[6]{5}\right]$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua thí dụ trên chúng ta đã được làm quen với phương pháp lôgarit hóa. Và ở đó:

- Với câu a) đã trình bày các cách lấy lôgarit hóa hai vế của một bất phương trình.
- Với câu b) các em học sinh đã nhận thấy tính linh hoạt trong việc thực hiện phép lôgarit hóa hai vế của một bất phương trình để giảm thiểu tính phức tạp. Và ở đây cần lưu ý tới việc kết hợp điều kiện (*) với giá trị tìm được.

Thí dụ 2. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\log_3 x > \log_4 x$. b. $3^{\log_4 x+\frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}} \le \sqrt{x}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện x > 0. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_3 x > \log_4 3.\log_3 x \Leftrightarrow (1 - \log_4 3)\log_3 x > 0 \overset{\log_4 3<1}{\Leftrightarrow} \log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm x > 1.

b. Điều kiện x > 0. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$3^{\log_4 x}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \le \sqrt{x} \Leftrightarrow 4.3^{\log_4 x} \le \sqrt{3x}.$$

Lấy lôgarit cơ số 4 cả hai vế của bất phương trình, ta được:

$$\log_4(4.3^{\log_4 x}) \le \log_4\sqrt{3x} \Leftrightarrow 1 + \log_4 x.\log_4 3 \le \frac{1}{2}(\log_4 3 + \log_4 x)$$

$$\Leftrightarrow (2\log_4 3 - 1)\log_4 x \le \log_4 3 - 2 \Leftrightarrow \log_4\frac{9}{4}.\log_4 x \le \log_4\frac{3}{16} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x \ge \frac{\log_4\frac{3}{16}}{\log_4\frac{9}{4}} = \frac{\log_4\frac{\sqrt{3}}{4}}{\log_4\frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x \ge 4^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là $\left[4^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}}; +\infty\right)$.

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy giải thích cho phép biến đổi tiếp theo từ (*).

Dạng toán 5: Phương pháp sử dụng tính chất của hàm số để giải bất phương trình mũ và lôgarit

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1$. b. $\log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} > 1$.

✍ *Giải*

a. Chia hai vế bất phương trình cho $6^x > 0$, ta được:

$$\frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x} > 1. \qquad (1)$$

Hàm số $f(x) = \frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x}$, là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $x \ge 2$, $f(x) \le f(2) = 1$ do đó bất phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $x < 2$, $f(x) > f(2) = 1$ do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng.

Vậy $x < 2$ là nghiệm của bất phương trình.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

Các hàm số $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ và $f_2(x) = \sqrt{x+9}$ đồng biến trên miền $x > -1$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x) = \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9}$ đồng biến trên miền $x > -1$.

Ta có $f(0) = 1$, do đó:

- Nếu $x > 0$ thì $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} > 1$, nên $x > 0$ là nghiệm.
- Nếu $-1 < x \le 0$ thì $f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} \le 1$, nên $-1 < x \le 0$ không phải là nghiệm.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)(1-\cos 2x)}{x^3+x^2}$. b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2}.\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-e^x}{x}.\frac{2\sin^2 x}{x^2}}{x+1}.x = \frac{-1.2}{1}.0 = 0.$$

b. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x.(e^{2x^2}-1) + \cos^2 x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{2\cos^2 x.(e^{2x^2}-1)}{2x^2} - \frac{\sin^2 x}{x^2}\right] = 2 - 1 = 1.$$

Ví dụ 2: *Tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$. b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, *với* $b \ne 0$.

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\cos ax-1}}{\dfrac{\ln[1+(\cos bx-1)]}{\cos bx-1}}.\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}}{\dfrac{\sin^2\frac{bx}{2}}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}}.\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-8x^2}-1+x^2}{[e^{-4x^2}+e^{-2x^2}.\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}]\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-4x^2}+e^{-2x^2}.\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}.\left[\frac{e^{-8x^2}-1}{\ln(1+x^2)}+\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-4x^2}+e^{-2x^2}.\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\,\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\left[\frac{-8(e^{-8x^2}-1)}{-8x^2}+1\right]=-\frac{7}{3}.$$

Cách 2: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1+1-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-2.\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}+\frac{1-(1+x^2)}{x^2[1+\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}]}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-2.\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}+\frac{-1}{[1+\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}=-\frac{7}{3}.$$

<u>Ví dụ 3:</u> *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4^x-3^x}$.　　　　b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-3^x)(3^x-2^x)}{(8^x-6^x)(4^x-2^x)}$

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{4^x-3^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln 3^x}-e^{\ln 2^x}}{e^{\ln 4^x}-e^{\ln 3^x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln 3.\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}-\ln 2.\dfrac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}}{\ln 4.\dfrac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4}-\ln 3.\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}}$$

$$= \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 3} = \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{4}{3}} = \log_{4/3}\frac{3}{2}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4^x - 3^x)(3^x - 2^x)}{(8^x - 6^x)(4^x - 2^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{\ln 4^x} - e^{\ln 3^x})(e^{\ln 3^x} - e^{\ln 2^x})}{(e^{\ln 8^x} - e^{\ln 6^x})(e^{\ln 4^x} - e^{\ln 2^x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln 4.\frac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4} - \ln 3.\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\right)\left(\ln 3.\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3} - \ln 2.\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\right)}{\left(\ln 8.\frac{e^{x\ln 8}-1}{x\ln 8} - \ln 6.\frac{e^{x\ln 6}-1}{x\ln 6}\right)\left(\ln 4.\frac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4} - \ln 2.\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\right)}$$

$$= \frac{(\ln 4 - \ln 3)(\ln 3 - \ln 2)}{(\ln 8 - \ln 6)(\ln 4 - \ln 2)} = \frac{\ln\frac{4}{3}.\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{8}{6}.\ln\frac{4}{2}} = \log_2\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 4: a. *Tính đạo hàm của các hàm số* $y = \cos x.e^{2\tan x}$ *và* $y = \log_2(\sin x)$.

b. *Chứng minh rằng hàm số* $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ *thoả mãn hệ thức*:

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Với hàm số $y = \cos x.e^{2\tan x}$ thì:

$$y' = -\sin x.e^{2\tan x} + \cos x.\frac{2}{\cos^2 x}.e^{2\tan x} = \left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right).e^{2\tan x}.$$

- Với hàm số $y = \log_2(\sin x)$ thì:

$$\frac{1}{\ln 2}.\ln(\sin x), \qquad y' = \frac{1}{\ln 2}.\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cot x}{\ln 2}.$$

b. Trước tiên, ta lần lượt có:

$y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}$; $y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}$; $y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}$.

Khi đó:

$y''' - 3y' - 12y = 64e^{4x} - 2e^{-x} - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0.$

Ví dụ 5: *Tìm tập xác định của các hàm số sau*:

a. $y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)]$.

b. $y = \sqrt{\log_{0,5}(-x^2 + x + 6)} + \frac{1}{x^2 + 2x}$.

✍ *Giải*

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 16 > 0 \\ 1 - \lg(x^2 - 5x + 16) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lg(x^2 - 5x + 16) < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 16 < 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = (2; 3).

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 6 > 0 \\ \log_{0,5}(-x^2 + x + 6) \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ -x^2 + x + 6 \leq 1 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \leq \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \leq x < 3 \end{array}\right..$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \left(-2; \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}; 3\right)$.

<u>Ví dụ 6:</u> *Cho hàm số* (C_m): y = mx + lnx.

1. *Với* m = 1:
   a. *Tìm các khoảng tăng, giảm, cực trị và điểm uốn của đồ thị hàm số* (C).
   b. *Gọi* (d) *là một tiếp tuyến bất kì của* (C). *Chứng minh rằng trên khoảng* (0; +∞), (C) *nằm ở phía dưới của đường thẳng* (d).
2. *Tìm* m *để*:
   a. *Hàm số luôn đơn điệu trên miền xác định của nó.*
   b. *Hàm số có cực trị, khi đó điểm cực trị của hàm số là cực đại hay cực tiểu.*

✍ *Giải*

1. Với m = 1 hàm số có dạng (C): y = x + lnx.

a. Ta lần lượt có:

(1). Hàm số xác định trên $D = (0; +\infty)$.

(2). Sự biến thiên của hàm số:

$$y' = 1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên D.}$$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
y'	//////	+
y	//////	↗ $+\infty$

(3). Điểm uốn của đồ thị hàm số:

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{Hàm số không có điểm uốn.}$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Từ kết quả trong a) ta thấy hàm số lồi trên khoảng (0; +∞).

Vậy, trên khoảng (0; +∞), đồ thị (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng (d).

Cách 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm x_0 có dạng:

$$(D): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (D): \ y = \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0) + x_0 + \ln x_0.$$

Xét hiệu:

$$f(x) = x + \ln x - \left[\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0) + x_0 + \ln x_0\right] = \ln x - \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \ln x_0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

Bảng biến thiên:

x	0		x_0		$+\infty$
f'		+	0	–	
f	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ 0	$\searrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra:

$f(x) \le 0, \ \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x + \ln x \le \ y = \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0) + x_0 + \ln x_0, \ \forall x \in (0; +\infty).$$

Vậy, trên khoảng $(0; +\infty)$, đồ thị (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng (d).

2. Trước tiên, ta có:
   (1). Hàm số xác định trên $D = (0; +\infty)$.
   (2). Đạo hàm:

$$y' = mx + \frac{1}{x} = \frac{mx + 1}{x}; \ y' = 0 \Leftrightarrow mx + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Hàm số luôn đơn điệu trên miền xác định của nó khi y' không đổi dấu trên D và dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm, suy ra điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} y' \ge 0 \\ y' \le 0 \end{array}\right., \ \forall x \in D \Rightarrow m \ge 0.$$

b. Hàm số có cực trị khi (1) có nghiệm thuộc D, suy ra điều kiện là $m \le 0$.

<u>**Ví dụ 7:**</u> *Giải các phương trình sau*:

a. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

b. $2^{x^2+1} + 9^x = 3^x\left(2^{x^2} + 2\right)$.

✍ *Giải*

a Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^x(1 + 2^{-1} + 2^{-2}) = 3^x(1 + 3^1 + 3^2)$$

$$\Leftrightarrow 2^x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3^x(1 + 3 + 9) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{52}{7} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}\frac{52}{7}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{2}{3}}\frac{52}{7}$.

b Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{x^2+1} + 3^{2x} - 3^x.2^{x^2} - 2.3^x = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2}\left(2 - 3^x\right) - 3^x\left(2 - 3^x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - 3^x\right)\left(2^{x^2} - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 3^x = 0 \\ 2^{x^2} - 3^x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3^x = 2 & (1) \\ 2^{x^2} = 3^x & (2) \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Giải (1) ta được nghiệm $x = \log_3 2$.
- Giải (2) bằng cách lấy lôgarit có số 2 hai vế của phương trình ta được:

$$\log_2 2^{x^2} = \log_2 3^x \Leftrightarrow x^2 \log_2 2 = x\log_2 3 \Leftrightarrow x(x - \log_2 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - \log_2 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = \log_3 2$, $x = 0$ và $x = \log_2 3$.

Ví dụ 8: *Giải các phương trình sau*:

a. $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 2) = \log_2(3x - 5)$.

b. $\log_5\{2 + 3[\log_2 x + \log_2(x + 1)]\} = 1$.

c. $3^{x(x-\log_3 5)}.5^x = 5^{\log_3 5}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 5/3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2[(x + 1)(x - 2)] = \log_2(3x - 5) \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$2 + 3[\log_2 x + \log_2(x + 1)] = 5 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ \log_2\left[x(x + 1)\right] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

c. Lấy lôgarit có số 3 hai vế của phương trình ta được:

$$\log_3\left[3^{x(x-\log_3 5)}.5^x\right] = \log_3 5^{\log_3 5} \Leftrightarrow \log_3 3^{x(x-\log_3 5)} + \log_3 5^x = \log_3 5^{\log_3 5}$$

$$\Leftrightarrow x(x-\log_3 5).\log_3 3 + x.\log_3 5 = \log_3 5.\log_3 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \log_3^2 5 \Leftrightarrow x = \pm\log_3 5.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm\log_3 5$.

☞ ***Nhận xét***: Trong câu b) của ví dụ trên, nếu các em học sinh lựa chọn kiểu trình bày theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Sử dụng phép biến đổi để tìm nghiệm của phương trình.

Bước 3: Kết luận về nghiệm cho phương trình.

Thì các em phải thực hiện một công việc khá cồng kềnh và dư thừa ở bước 1.

Ví dụ 9: (Đề 81 – Bộ đề 1996): *Giải phương trình*:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases}(x+2)^2 > 0\\ 4-x>0\\ x+6>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-6<x<-2\\ -2<x<4\end{array}\right. . \qquad (*)$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$3\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6) \Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4(x+2)=(4-x)(x+6)\\ 4(x+2)=-(4-x)(x+6)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-8\\ x=1+\sqrt{33}\\ x=1-\sqrt{33}\end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1-\sqrt{33}\end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 1 - \sqrt{33}$.

☞ ***Chú ý***: Nếu biến đổi: $\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 = 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2)$ sẽ mất nghiệm $x = 1 - \sqrt{33}$.

Hãy nhớ rằng $\log_a c^b = b.\log_a|c|$, $\sqrt{a^2} = |a|$ và $\sqrt{a.b} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$

Ví dụ 10: *Giải các phương trình sau*:

a. $4^x - 5.2^x + 6 = 0.$ b. $\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = 1.$

✍ *Giải*

a. Đặt $t = 2^x$ (điều kiện $t > 0$), phương trình được biến đổi về dạng:

$$2^{2x} - 5.2^x + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 3 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 3 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \log_2 3$ và $x = 1$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}\log_2(5^x - 1).\log_2[2(5^x - 1)] = 1\text{m} \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1).[1 + \log_2(5^x - 1)] = 2.$$

Điều kiện:

$$5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, khi đó phương trình có dạng:

$$t(1 + t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(5^x - 1) = 1 \\ \log_2(5^x - 1) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x - 1 = 2 \\ 5^x - 1 = 2^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 3 \\ x = \log_5 5/4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \log_5 3$, $x = \log_5\frac{5}{4}$.

☞ ***Chú ý***: Trong một số trường hợp ta không thấy ngay được sự xuất hiện a.b = 1 đối với các toán tử của phương trình, khi đó cần có đánh giá tinh tế hơn.

Ví dụ 11: *Giải các phương trình sau*:

a. $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0.$

b. $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x = 2^{x + \log_2 3}.$

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \text{ và } (2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3}) = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$, điều kiện $t > 0$, thì:

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t} \text{ và } (7 + 4\sqrt{3})^x = t^2.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong câu a) bằng việc đánh giá:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \text{ và } (2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3}) = 1$$

ta đã lựa chọn được ẩn phụ $t = (2 + \sqrt{3})^x$ cho phương trình.

Ở câu b) chúng ta sẽ miêu tả việc lựa chọn ẩn phụ thông qua đánh giá mở rộng của a.b = 1, đó là:

$$a.b = c^2 \Leftrightarrow \frac{a}{c}.\frac{b}{c} = 1,$$

tức là với các phương trình có dạng $A.a^x + B.b^x + C.c^x = 0$.

Khi đó ta thực hiện phép chia cả hai vế của phương trình cho $c^x \neq 0$, để nhận được:

$$A.\left(\frac{a}{c}\right)^x + B.\left(\frac{b}{c}\right)^x + C = 0,$$

từ đó thiết lập ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{c}\right)^x$, $t > 0$ và suy ra $\left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{1}{t}$.

b. Chia hai vế của phương trình cho $2^x > 0$, ta được:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 2^{\log_2 3}. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1$,

do đó, nếu đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, thì $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình (*) tương đương với:

$$t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\pm 1} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \pm 1$.

<u>Ví dụ 12:</u> *Giải các phương trình sau*:

a. $2.4^{x^2+1} + 6^{x^2+1} = 9^{x^2+1}$. b. $4.2^{\log_2^2 x} + 7.x^{-\log_2 x} - 11 = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2.2^{2(x^2+1)} + (2.3)^{x^2+1} = 3^{2(x^2+1)}.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $2^{2(x^2+1)} \neq 0$, ta được:

$$2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2+1)}. \qquad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}$, điều kiện $t \geq \frac{3}{2}$ vì $x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$.

Khi đó, phương trình (1) tương đương với:

$$f(t) = t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \log_{\frac{3}{2}} 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}} 2 - 1}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}} 2 - 1}$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$, khi đó phương trình (1) có dạng:

$$4.2^{u^2} + 7.(2^u)^{-u} - 11 = 0 \Leftrightarrow 4.2^{u^2} + \frac{7}{2^{u^2}} - 11 = 0. \quad (2)$$

Đặt $t = 2^{u^2}$, điều kiện $t \ge 1$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$4t^2 - 11t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{u^2} = 1 \\ 2^{u^2} = \frac{7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2 = 0 \\ u^2 = \log_2 \frac{7}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = \pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = \pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2^{\pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}}} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = 1$, $x = 2^{\pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}}}$.

Ví dụ 13: (Đề thi đại học khối D – 2003): *Giải phương trình*:

$$2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3.$$

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{x^2-x} - \frac{4}{2^{x^2-x}} = 3.$$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$, với $t > 0$ ta chuyển phương trình về dạng:

$$t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ lo¹i} \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 = 2^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $x = 2$..

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

☞ ***Chú ý***: Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng các phép biến đổi đại số để làm xuất hiện ẩn phụ hoặc sử dụng ẩn phụ cho tổ hợp đối xứng.

Ví dụ 14: *Giải phương trình* $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$.

✍ *Giải*

Chia cả hai vế của phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$, ta được:

$$2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0.$$

Đặt t = 2^{x^2-x}, điều kiện t > 0.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = –1, x = 2.

Ví dụ 15: *Giải phương trình*:

$$\log_2(x - \sqrt{x^2-1}).\log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2-1}|.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2-1} > 0 \\ x + \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Nhận xét rằng:

$$(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1}) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{x^2-1}) = (x + \sqrt{x^2-1})^{-1}.$$

Khi đó phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2(x + \sqrt{x^2-1})^{-1}.\log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2-1})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + \sqrt{x^2-1}).\log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Sử dụng phép đổi cơ số:

$$\log_2(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_2 6.\log_6(x + \sqrt{x^2-1});$$

và $\log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_3 6.\log_6(x + \sqrt{x^2-1})$.

Khi đó phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2 6.\log_6(x + \sqrt{x^2-1}).\log_3 6.\log_6(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2-1}). \quad (1)$$

Đặt t = $\log_6(x + \sqrt{x^2-1})$. Khi đó (1) có dạng:

$$t(\log_2 6.\log_3 6.t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \log_2 6.\log_3 6.t - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

- Với t = 0

$$\log_6(x + \sqrt{x^2-1}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2-1} = 1 \\ x - \sqrt{x^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Với $\log_2 6.\log_3 6.t - 1 = 0$

$$\log_2 6.\log_3 6.\log_6(x + \sqrt{x^2-1}) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 6.\log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = 1$$

$\Leftrightarrow \log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2-1} = 3^{\log_6 2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2-1} = 3^{\log_6 2} \\ x - \sqrt{x^2-1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}).$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1 và $x = \dfrac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$.

<u>Ví dụ 16:</u> (ĐHY Hà Nội – 2000): *Giải phương trình* $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1$.

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}) - 6(2^x - \frac{2}{2^x}) = 1. \qquad (1)$$

Đặt $t = 2^x - \dfrac{2}{2^x}$, suy ra:

$$2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = (2^x - \frac{2}{2^x})^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}(2^x - \frac{2}{2^x}) = t^3 + 6t.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1. \qquad (2)$$

Đặt $u = 2^x$, $u > 0$, khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{2}{u} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1\ (l) \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

<u>Ví dụ 17:</u> (Đề thi đại học khối A – 2002): *Cho phương trình*:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0.$$

a. *Giải phương trình với* m = 2.

b. *Tìm* m *để phương trình có ít nhất* 1 *nghiệm thuộc* $[1;\ 3^{\sqrt{3}}]$.

✍ *Giải*

Điều kiện x > 0.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$, với $t \ge 1$, ta được:

$$f(t) = t^2 + t - 2m - 2 = 0. \qquad (1)$$

1. Với m = 2 phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \text{ (loại) hoặc } t = 2.$$

Với t = 2, ta được:

$$\sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}.$$

Vậy, với m = 2, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 3^{\pm\sqrt{3}}$.

2. Từ điều kiện:

$$1 \le x \le 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 \le \log_3 x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \le \log_3^2 x + 1 \le 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{\log_3^2 x + 1} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2.$$

Tới đây ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày tiếp theo như sau:

Cách 1: Phương trình ban đầu có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;\ 3^{\sqrt{3}}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có ít nhất 1 nghiệm thuộc [1; 2]

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = 2m + 2 cắt phần đồ thị hàm số $y = t^2 + t$ lấy trên đoạn [1; 2] tại ít nhất một điểm.

Ta xét hàm số: $y = t^2 + t$.

- Miền xác định D = [1; 2].
- Đạo hàm: $y' = 2t + 1$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.
- Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-1/2$	1		2	$+\infty$
y'				+		
y			2	$\nearrow$	6	

Vậy điều kiện là: $2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

Cách 2: (Tối ưu hoá cách 1): Phương trình ban đầu có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;\ 3^{\sqrt{3}}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có ít nhất 1 nghiệm thuộc [1, 2]

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = 2m + 2 cắt phần đồ thị hàm số $y = t^2 + t$ lấy trên đoạn [1, 2] tại ít nhất một điểm.

Ta xét hàm số: $y = t^2 + t$.

- Miền xác định D = [1; 2].
- Đạo hàm: $y' = 2t + 1 > 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Vậy điều kiện là:

$$y(1) \le 2m + 2 \le y(2) \Leftrightarrow 2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2.$$

Cách 3: Phương trình ban đầu có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1,\ 3^{\sqrt{3}}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có ít nhất 1 nghiệm thuộc [1, 2]

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm thoả mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < t_1 \le t_2 < 2 \text{ lo¹i vi } t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 \le 1 \le t_2 \le 2 \\ 1 \le t_1 \le 2 \le t_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow f(1).f(2) \le 0 \Leftrightarrow -2m(4 - 2m) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2.$$

<u>Ví dụ 18:</u> (ĐHKT – 1998): *Cho phương trình*:

$$(x-2)^{\log_3[9(x-2)]} = 9(x-2)^m. \qquad (1)$$

a. *Giải phương trình với* m = 3.

b. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm thoả mãn*:

$$3x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 11 = 0.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Lấy logarit cơ số 3 hai vế, ta được:

$$\log_3[(x-2)^{\log_3[9(x-2)]}] = \log_3[9(x-2)^m]$$

$$\Leftrightarrow [\log_3[9(x-2)]].\log_3(x-2) = 2 + \log_3(x-1)^m$$

$$\Leftrightarrow [2 + \log_3(x-2)].\log_3(x-2) = 2 + m\log_3(x-1). \qquad (1')$$

Đặt $t = \log_3(x-2)$.

Khi đó (1') có dạng:

$$(2+t)t = 2 + mt \Leftrightarrow t^2 - (m-2)t - 2 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 3, ta được:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2) = -1 \\ \log_3(x-2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{3} \\ x = 11 \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = 3 phương trình có hai nghiệm $x = \frac{7}{3}$ và x = 11.

b. Xét điều kiện:

$$3(x_1-2)(x_2-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3[(x_1-2)(x_2-2)] = \log_3\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x_1-2) + \log_3(x_2-2) = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = -1.$$

Vậy, để phương trình có nghiệm thoả mãn $3x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 11 = 0$

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1 + t_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ t_1 + t_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 + 8 \geq 0 \\ m - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: ***Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2*** là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó, thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

Ví dụ 19: *Giải phương trình* $9^x + (x-3).3^x - 2x + 2 = 0. \qquad (1)$

✍ *Giải*

Đặt t = 3^x, điều kiện t > 0. Khi đó, phương trình tương đương với:

$t^2 + (x - 3).t - 2x + 2 = 0$

ta có $\Delta = (x - 3)^2 - 4(-2x + 2) = (x + 1)^2$ nên phương trình có nghiệm:

$t_1 = 2$ hoặc $t_2 = 1 - x$.

Khi đó:

- Với $t = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.
- Với $t = 1 - x \Leftrightarrow 3^x = 1 - x$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \text{VT là hàm đbiến} \\ \text{VP là hàm nbiến} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.}$$

Nhận xét rằng x = 0 là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \log_3 2$, x = 0.

Ví dụ 20: *Giải phương trình* $x + 2^{\log_3 x} = 5$.

✍ *Giải*

Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng $2^{\log_3 x} = 5 - x$

Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng x = 3 là nghiệm của phương trình vì:

$2^{\log_3 3} = 5 - 3 \Leftrightarrow 2 = 2$, đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong ví dụ trên bằng việc chuyển vế chúng ta thấy ngay tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số ở hai vế của phương trình, để từ đó kết luận về tính duy nhất nghiệm (nếu có) của phương trình.

Tuy nhiên, hầu hết phương trình được giải bằng phương pháp này ở dạng ban đầu đều không đưa ra được nhận xét "*VT đồng biến còn VP là hàm hằng hoặc nghịch biến*". Khi đó, cần thực hiện một vài phép biến đổi đại số, thí dụ với phương trình:

$$A.a^{f(x)} + B.b^{g(x)} = C.c^{h(x)} \Leftrightarrow A.\frac{a^{f(x)}}{c^{h(x)}} + B.\frac{b^{g(x)}}{c^{h(x)}} = C.$$

Ví dụ 21: *Giải phương trình* $1 + 3^{x/2} = 2^x$.

✍ *Giải*

Chia hai vế phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$.   (1)

Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
Nhận xét rằng x = 2 là nghiệm của phương trình vì:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \text{ đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

☞ ***Chú ý***: Nhiều bài toán cần sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để chuyển chúng về dạng f(u) = k. Từ đó, mới có thể áp dụng được phương pháp hàm số để giải.

Ví dụ 22: *Giải phương trình* $2^{\log_3(x+1)} = x$.

✍ *Giải*

Điều kiện $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

a. Nếu $-1 < x \le 0$, thì phương trình vô nghiệm bởi VT > 0 còn VP ≤ 0.

b. Xét x > 0, đặt $y = \log_3(x + 1)$.

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \log_3(x+1) \\ x = 2^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 3^y \\ x = 2^y \end{cases} \Rightarrow 2^y + 1 = 3^y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y + \left(\frac{1}{3}\right)^y = 1. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
Nhận xét rằng y = 1 là nghiệm của phương trình, suy ra:

$$y = 1 \Leftrightarrow \log_3(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

Ví dụ 23: (Đề thi đại học khối B – 2005): *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 2 - y \ge 0 \\ 9x^2 > 0 \text{ vµ } y^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < y \le 2 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$$3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 1) và (2, 2).

Ví dụ 24: (Đề thi đại học khối A – 2004): *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} y - x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x \\ y > 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$-\log_4(y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4(y-x)$$

$$\Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \frac{3y}{4}. \qquad (**)$$

Thay (**) vào phương trình thứ hai của hệ:

$$\frac{9y^2}{16} + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 16 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} y = 4 \Rightarrow x = 3.$$

Vậy, hệ có nghiệm (3; 4).

Ví dụ 25: (ĐHMĐC – 2000): *Giải và biện luận hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x + y + a = 1 \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = 1 - a - x & (1) \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 & (2) \end{cases}.$$

Thế (1) vào (2), ta được:

$$2^{a^2}.4^{x + (1-a-x) - x(1-a-x)} = 2 \Leftrightarrow 2^{2[x^2+(a-1)x+1-a]} = 2^{1-a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(a-1)x + (a-1)^2 = 0, \qquad (3)$$

ta có $\Delta' = -(a-1)^2 \le 0$.

Khi đó:

- Với $a \ne 1$ thì $\Delta' < 0 \Leftrightarrow$ phương trình (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Với $a = 1$ thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x = 0$, suy ra $y = 0$.

Vậy, khi $a = 1$ hệ có nghiệm $x = y = 0$.

Ví dụ 26: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 2^x.3^y = 12 \\ 3^x.2^y = 18 \end{cases}.$$

Giải

Lấy logarit có số 2 cả hai vế của hai phương trình, ta được:

$$\begin{cases} \log_2(2^x.3^y) = \log_2 12 \\ \log_2(3^x.2^y) = \log_2 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y\log_2 3 = 2 + \log_2 3 \\ x\log_2 3 + y = 1 + 2\log_2 3 \end{cases}.$$

Ta có

$D = 1 - \log_2^2 3 \neq 0$, hệ phương trình có nghiện duy nhất.

$D_x = 2 - 2\log_2^2 3$, $D_y = 1 - \log_2^2 3$.

Suy ra hệ có nghiệm

$$x = \frac{D_x}{D} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = 1.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là (2; 1).

Ví dụ 27: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3.2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4.4^{x^2-1}.2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3.4^{x^2-1}.2^y = 4 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 4^{x^2-1} \\ v = 2^y \end{cases}, \text{ điều kiện } u \geq \frac{1}{4} \text{ và } v > 0.$$

Khi đó, hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1 \quad (1) \\ v^2 - 3uv = 4 \quad (2) \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Để giải hệ (II) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử số hạng tự do từ hệ ta được:

$4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0.$ (3)

Đặt u = tv, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow v^2(4t^2 - 13t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1/4 \end{array}\right..$$

- Với t = 3 ta được u = 3v do đó:

  $(2) \Leftrightarrow -8v^2 = 4$ vô nghiệm.

- Với $t = \frac{1}{4}$ ta được $u = \frac{1}{4}v \Leftrightarrow v = 4u$ do đó:

$$(2) \Leftrightarrow 4u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 2) và (− 1, 2).

Cách 2: Nhận xét rằng nếu (u, v) là nghiệm của hệ thì $u \neq 0$.

Từ (2) ta được $u = \frac{v^2 - 4}{3v}$. (4)

Thay (4) vào (1), ta được $2v^4 - 31v^2 - 16 = 0$. (5)

Đặt $t = v^2$, $t > 0$, ta được:

$$(5) \Leftrightarrow 2t^2 - 31t - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 16 \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow v^2 = 16 \Leftrightarrow v = 4 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1; 2) và (−1; 2).

<u>Ví dụ 28:</u> *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$. b. $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} > 0$.

c. $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1$. d. $4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \leq 0$.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$(\sqrt{10} + 3)(\sqrt{10} - 3) = 1 \Rightarrow \sqrt{10} - 3 = (\sqrt{10} + 3)^{-1}.$$

Khi đó, bất phương trình được viết lại dưới dạng:

$$(\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10} + 3)^{-\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-3; -\sqrt{5}\right) \cup \left(1; \sqrt{5}\right)$.

b. Điều kiện $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.3^{2\sqrt{x+4}} > 0.$$

Chia hai vế bất phương trình cho $3^{2\sqrt{x+4}} > 0$, ta được:

$$3^{2(x-\sqrt{x+4})} - 8.3^{x-\sqrt{x+4}} - 9 > 0. \quad (1)$$

Đặt $t = 3^{x-\sqrt{x+4}}$, $t > 0$, khi đó bất phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 8t - 9 > 0 \Leftrightarrow (t - 9)(t + 1) > 0 \Leftrightarrow t - 9 > 0 \Leftrightarrow t > 9 \Leftrightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}} > 9$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x+4} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 0 \le x+4 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(5; +\infty)$.

c. Chia hai vế bất phương trình cho $6^x > 0$, ta được $\frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x} > 1$. (2)

Xét hàm số $y = \frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x}$, là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $x \ge 2$, $f(x) \le f(2) = 1$ do đó bất phương trình (2) vô nghiệm.
- Với $x < 2$, $f(x) > f(2) = 1$ do đó bất phương trình (2) nghiệm đúng.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2)$.

d. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 2t + 4^{x^2} \le 0 \quad (3)$$

ta có $\Delta' = 1 - 4^{x^2} \le 0$, do đó:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4^{x^2} = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2} = 1 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 2: Biến đổi bất phương trình có dạng:

$$2^{2x} + 2^{2x^2} - 2^{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \left(2^x - 2^{x^2}\right)^2 + 2.2^x.2^{x^2} - 2^{x+1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x - 2^{x^2}\right)^2 + 2^{x+1}\left(2^{x^2} - 1\right) \le 0. \quad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} \left(2^x - 2^{x^2}\right)^2 \ge 0 \\ 2^{x+1}\left(2^{x^2} - 1\right) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow VT(*) \ge 0.$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x - 2^{x^2}\right)^2 = 0 \\ 2^{x+1}\left(2^{x^2} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{x^2} \\ 2^{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua ví dụ trên các em học sinh đã được ôn tập lại những phương pháp cơ bản để giải một bất phương trình mũ. Và ở đó:

- Với câu a) là việc đưa bất phương trình về dạng có cùng cơ số.
- Với câu b) có sự tổng hợp khá cao, bắt đầu bằng việc sử dụng một vài phép biến đổi đại số để làm xuất hiện ẩn phụ, tiếp tới

là công việc khá đơn giản khi chỉ phải giải một bất phương trình bậc hai. Tuy nhiên, cuối cùng chúng ta gặp một dạng bất phương trình chứa căn cơ bản $\sqrt{f} < g$.

- Với câu c) và d) chúng hẳn là những bài toán khó hơn bởi cần phải sử dụng tới kiến thức về hàm số và biết cách đánh giá một biểu thức chứa hàm số mũ.

Ví dụ 29: *Giải bất phương trình*:

$$\log_2^4(x) - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2(x).$$

✍ *Giải*

Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2^4(x) - \log_{2^{-1}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [\log_2x^3 - \log_2 8]^2 + 9[\log_2 32 - \log_2x^2] < 4\log_2^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [3\log_2x - 3]^2 + 9[5 - 2\log_2x] < 4\log_2^2(x)$$

Đặt $t = \log_2x$, ta được:

$$t^4 - (3t - 3)^2 + 9(5 - 2t) < 4t^2 \Leftrightarrow t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow 4 < t^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < t < -2 \\ 2 < t < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -2 \\ 2 < \log_2 x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \\ 4 < x < 8 \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$.

Ví dụ 30: *Giải bất phương trình*:

$$x^2 + (\log_2x - 2)x + \log_2x - 3 > 0. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Điều kiện x > 0. (*)

Coi (1) là bất phương trình bậc 2 theo ẩn x, ta có:

$$\Delta = (\log_2x - 2)^2 - 4(\log_2x - 3) = \log_2^2 x - 8\log_2x + 16 = (\log_2x - 4)^2$$

Do đó, bất phương trình (1) có dạng:

$$(x + 1)(x + \log_2x - 3) > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x + \log_2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2x > 3 - x. \quad (2)$$

Nhận xét rằng:

- Hàm số $y = \log_2x$ là hàm đồng biến.
- Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến.
- Với x > 2, ta có:

  VT > 1 và VP < 1 ⇒ x > 2 là nghiệm của (2).

- Với $0 < x \le 2$, ta có:

  $VT < 1$ và $VP > 1 \Rightarrow 0 < x \le 2$ không là nghiệm của (2).

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(2; +\infty)$.

Ví dụ 31: (Đề thi đại học khối B – 2002): *Giải bất phương trình*:

$$\log_x(\log_3(9^x - 72)) \le 1.$$

✍ *Giải*

Trước hết ta đi xác định điều kiện:

$$\begin{cases} 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \Leftrightarrow 9^x > 73 \Leftrightarrow x > \log_9 73 \Leftrightarrow x > \log_3\sqrt{73}. \\ 0 < x \ne 1 \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện trên, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\log_3(9^x - 72) \le x \Leftrightarrow 9^x - 72 \le 3^x \quad (2)$$

Đặt $t = 3^x > 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - t - 72 \le 0 \Leftrightarrow -8 \le t \le 9 \Leftrightarrow 3^x \le 9 \Leftrightarrow x \le 2.$$

Kết hợp với (*), suy ra bất phương trình có nghiệm $\log_3\sqrt{73} < x \le 2$.

Ví dụ 32: (Đề thi đại học khối D – 2003): *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*:

$$y = \frac{\ln^2 x}{x}, \text{ trên } [1; e^3].$$

✍ *Giải*

Xét hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, trên $[1, e^3]$, ta có:

$$y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = e^2 \end{array}\right..$$

Do đó, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[1, e^3]$ được cho bởi:

a. $y_{max} = \text{Max}\{y(1), y(e^2), y(e^3)\} = \text{Max}\{0, \dfrac{4}{e^2}, \dfrac{9}{e^3}\} = \dfrac{4}{e^2}$, đạt được tại $x = e^2$.

b. $y_{min} = 0$, đạt được tại $x = 1$.

Ví dụ 33: (Đề thi đại học khối B – 2005): *Chứng minh rằng với mọi* $x \in \mathbf{R}$, *ta có*:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

✍ *Giải*

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta lần lượt có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x. \qquad (1)$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.4^x. \qquad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.5^x. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0.$$

CHƯƠNG 3 – NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. NGUYÊN HÀM

1. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa

> *Cho hàm số* f(x) *liên tục trên khoảng* I. *Hàm số* F(x) *được gọi là* ***nguyên hàm*** *của hàm số* f(x) *trên* I *nếu* F'(x) = f(x) *với mọi* x *thuộc* I.

Định lí 1: *Giả sử* F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên khoảng* I. *Khi đó*:

a. *Với mỗi hằng số* C, *hàm số* G(x) = F(x) + C *cũng là một nguyên hàm của* f(x).

b. *Ngược lại, nếu* G(x) *là một nguyên hàm bất kì của* f(x) *thì tồn tại hằng số* C *sao cho* G(x) = F(x) + C *với mọi* x *thuộc* I.

Kí hiệu $\int f(x)dx$ để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x).

Vậy ta viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Định lí 2: *Mọi hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a; b] *đều có nguyên hàm trên đoạn đó*.

2. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. $\int 0dx = C, \quad \int dx = x + C.$
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$
4. Với k là hằng số khác 0:

   a. $\int \sin kx.dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C.$

   b. $\int \cos kx.dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C.$

   c. $\int e^{kx}.dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C.$

   d. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$
5. a. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

   b. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí 3: *Nếu* F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *và* G(x) *là một nguyên hàm của hàm số* g(x) *thì*:

a. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C.$

b. Với mọi số thực a ≠ 0:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx = a.F(x) + C.$$

4. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau:

Định lí 1: *Giả sử* $u = u(x)$ *là một hàm số có đạo hàm liên tục trên* I *sao cho hàm số hợp* $f[u(x)]$ *xác định trên* I. *Khi đó, ta có*:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C. \quad (1)$$

ở đó $F(u)$ *là một nguyên hàm của* $f(u)$.

Nhận xét rằng:

$$u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx \text{ và } f[u(x)].u'(x)dx = f(u)du$$

do đó, công thức (1) được viết gọn dưới dạng:

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Để tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng phương pháp đổi biến ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn $u = u(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \varphi(u)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(u)du$.

Bước 3: Biểu thị $f(x)dx$ theo u và du. Giả sử rằng $f(x)dx = g(u)du$.

Bước 4: Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int g(u)du.$$

☞ ***Lưu ý***: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	**Có thể chọn**
Hàm có mẫu số	u là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$u = \varphi(x)$ hoặc $u = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	• Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$, đặt: $u = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ • Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$, đặt: $u = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$
Hàm $f(x)=\dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$u = \tan\dfrac{x}{2}$ (với $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$)

5. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cơ sở của phương pháp là định lí sau:

Định lí 2: *Nếu* $u(x)$, $v(x)$ *là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên* I *thì*:

$$\int u(x).v'(x).dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x).dx$$

hoặc viết $\int u.dv = uv - \int v.du.$

Để tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx.$$

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó:

$$\int f(x)dx = uv - \int vdu.$$

☞ ***Lưu ý***: Khi sử dụng *phương pháp lấy nguyên hàm từng phần* để tìm nguyên hàm chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

a. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

b. Tích phân bất định $\int vdu$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với tích phân ban đầu.

II. TÍCH PHÂN

1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

Định nghĩa

Cho hàm số f(x) *liên tục trên khoảng* I *và* a, b *là hai số bất kì thuộc* I. *Nếu* F(x) *là một nguyên hàm của* f(x) *thì hiệu số* F(b) − F(a) *được gọi là* ***tích phân của* f(x) *từ* a *đến* b** *và kí hiệu là* $\int_a^b f(x)dx$.

Ta có công thức Niutơn − Laipnit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

☞ ***Chú ý***: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào f, a, b mà không phụ thuộc vào cách ký hiệu biến số tích phân. Vì vậy, ta có thể viết:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

Định lí 1: *Cho hàm số* y = f(x) *liên tục, không âm trên khoảng* I *và* a, b *là hai số thuộc* I (a < b). *Diện tích* S *của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số* y = f(x), *trục hành và hai đường thẳng* x = a, x = b *là* $S = \int_a^b f(x).dx$.

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Định lí 2: *Giả sử các hàm số* f(x), g(x) *liên tục trên* I *và* a, b, c *là ba số bất kì thuộc* I. *Khi đó ta có*:

Tính chất 1: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Tính chất 2: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Tính chất 3: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Tính chất 4: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với $k \in \mathbb{R}$.

Tính chất 5: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Để tính $\int_a^b f(x)dx$ ta sử dụng:

a. Bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.
b. Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập môi trường bằng cách ấn:

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$

Bước 2: Để tính $\int_a^b f(x)dx$, ta khai báo theo cú pháp:

$\boxed{\int dx}$ < hàm số f(x) > $\boxed{,}$ a $\boxed{,}$ b $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

3. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du, \text{ với } \alpha = u(a) \text{ và } \beta = u(b).$$

Từ đó, chúng ta thấy có hai phương pháp đổi biến:

Phương pháp 1: Để tính tích phân:

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Chọn:
- Phân tích $g(x)dx = f[u(x)]u'(x)dx = f[u(x)]d[u(x)]$.
- Đặt $u = u(x)$.

Bước 2: Thực hiện phép đổi cận:
- Với $x = a$ thì $u = u(a)$.
- Với $x = b$ thì $u = u(b)$.

Bước 3: Khi đó $\int_a^b g(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$.

Phương pháp 2: Để tính tích phân:

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ với giả thiết hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } [a; b]$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số được lựa chọn một cách thích hợp (ảnh của φ nằm trong tập xác định của f).

Bước 2: Lấy vi phân dx = φ'(t)dt, giả sử φ'(t) liên tục.

Bước 3: Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Nếu tính được các cận α và β tương ứng theo a và b (với a = φ(α) và b = φ(β)) thì ta được:

$$I = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

Hướng 2: Nếu không tính được dễ dàng các cận tương ứng theo a và b thì ta lựa chọn việc xác định nguyên hàm, từ đó suy ra giá trị của tích phân xác định (trong trường hợp này φ phải là đơn ánh để diễn tả kết quả hàm số của t thành hàm số của x).

☞ ***Chú ý***: Để minh hoạ việc lựa chọn một trong hai hướng trên, ta có ví dụ:

a. Với $I = \int_0^{1/2} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ x = sint, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ cho phép ta lựa chọn hướng 1, bởi khi đó:
- Với x = 0, suy ra t = 0.
- Với $x = \frac{1}{2}$, suy ra $t = \frac{\pi}{6}$.

b. Với $I = \int_0^{1/3} f(x)dx$, việc lựa chọn ẩn phụ x = sint, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ta thường lựa chọn hướng 2, bởi khi đó:
- Với x = 0, suy ra t = 0.
- Với $x = \frac{1}{3}$, ta không chỉ ra được số đo góc t.

4. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Cơ sở của phương pháp tích phân từng phần là công sau:

$$\int_a^b u(x).v'(x).dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x).dx. \qquad (1)$$

Để sử dụng (1) trong việc tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta thực hiện các bước:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx$.

Bước 2: Đặt:

$$\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}.$$

Bước 3: Khi đó $I = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

☞ ***Chú ý***: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.
2. Tích phân $\int_a^b v\,du$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.
3. Chúng ta cần nhớ các dạng cơ bản sau:

Dạng 1: Tích phân $I = \int x^{\alpha}.\ln x dx$, với $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ khi đó đặt $u = \ln x$.

Dạng 2: Tích phân $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ (hoặc $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$) với P là một đa thức thuộc **R**[X] và $\alpha \in \mathbb{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 3: Tích phân $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là đa thức thuộc **R**[X] và $\alpha \in \mathbb{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 4: Tích phân $I = \int e^{ax}\cos(bx)$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)$) với $a, b \neq 0$ khi đó đặt $u = \cos(bx)$ (hoặc $u = \sin(bx)$).

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN VÀ CỦA HÌNH ELÍP

a. *Hình tròn bán kính* R *có diện tích* $S = \pi R^2$.

b. *Hình elíp* (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *có diện tích* $S = \pi ab$.

2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

a. *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = f(x)$ ($f(x)$ *liên tục trên đoạn* [a; b]), *trục* Ox *và hai đường thẳng* $x = a$ *và* $x = b$ *được cho bởi công thức*:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

b. *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$, *và đồ thị của hai hàm số* $y = f_1(x)$ *và* $y = f_2(x)$ ($f_1(x)$ và $f_2(x)$ *liên tục trên đoạn* [a; b]) *được cho bởi công thức* $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$.

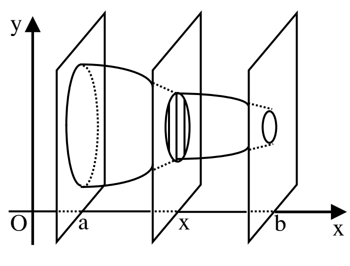
3. THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

Giả sử vật thể T được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song (α), (β).

Ta chọn trục Ox sao cho:

$$\begin{cases} Ox \perp (\alpha) \text{ và giả sử } Ox \cap (\alpha) = a \\ Ox \perp (\beta) \text{ và giả sử } Ox \cap (\beta) = b \end{cases}$$

Giả sử mặt phẳng $(\gamma) \perp Ox$ và $(\gamma) \cap Ox = x$ $(a \le x \le b)$ cắt T theo một thiết diện có diện tích S(x) (là hàm số liên tục theo biến x).



Khi đó, *thể tích* V *của vật thể* T *được cho bởi công thức*:

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

4. THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ TRÒN XOAY

a. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *liên tục và không âm trên đoạn* $[a; b]$. *Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ *quay quanh trục* Ox *được cho bởi công thức*:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx .$$

b. *Cho hàm số* $x = f(y)$ *liên tục và không âm trên đoạn* $[a; b]$. *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* $x = f(y)$, $y = a$, $y = b$, $x = 0$, *quay quanh trục* Oy *được cho bởi công thức*:

$$V = \pi\int_a^b x^2dy = \pi\int_a^b f^2(y)dy .$$

5. THỂ TÍCH KHỐI NÓN VÀ KHỐI CHÓP, KHỐI NÓN CỤT VÀ KHỐI CẦU

a. *Thể tích khối nón (khối chóp) có diện tích đáy bằng* B *và chiều cao* h *được cho bởi* $V = \frac{1}{3}Bh$.

b. *Thể tích khối nón cụt (khối chóp cụt) có diện tích hai đáy là* B_1, B_2 *và chiều cao* h *được cho bởi*:

$$V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2})h.$$

c. *Thể tích của khối cầu có bán kính* R *được cho bởi*:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. NGUYÊN HÀM

Dạng toán 1: **Tìm nguyên hàm sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp và các tính chất cơ bản của nguyên hàm**

Phương pháp

Sử dụng:

- Bảng các nguyên hàm cơ bản.
- Các tính chất của nguyên hàm.
- Các phép biến đổi đại số.

Thí dụ 1. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = 1 - \sqrt{x} + 2x^3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$. b. $f(x) = (2x + 3)^3$.

Giải

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int\left(1 - \sqrt{x} + 2x^3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\left(1 - x^{\frac{1}{2}} + 2x^3 + \frac{1}{x} - 2x^{-2}\right)dx$$

$$= x - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2.\frac{x^{3+1}}{3+1} + \ln|x| - 2.\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^4 + \ln|x| + \frac{2}{x} + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có phân tích:

$$\int f(x)dx = \int (2x+3)^3 dx = \int (8x^3 + 36x^2 + 54x + 27)^3 dx$$

$$= 2x^4 + 12x^3 + 27x^2 + 27x + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int (2x+3)^3 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^3 d(2x+3) = \frac{1}{8}(2x+3)^4 + C.$$

Nhận xét: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Câu a) được đề xuất với mục đích giúp các em học sinh ôn lại các công thức 1, 2, 3 trong bảng nguyên hàm.
- Câu b) được trình bày theo hai cách với mục đích yêu cầu các em học sinh đưa ra lời đánh giá. Và rút ra nhận định rằng cách 2 luôn được ưu tiên bởi nếu thay $(2x + 3)^3$ bằng $(2x + 3)^{2009}$ thì không thể sử dụng cách 1.
  Với cách 2 các em học sinh có thể hiểu theo nghĩa nếu thay x bằng u thì $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

Thí dụ 2. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{x^2}$. b. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

Giải

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x^2\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int\left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2-2x+3}{x-1}dx = \int\left(x-1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x-1| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Ở câu a) chúng ta thực hiện thêm động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng nguyên hàm.
- Ở câu b) ngoài việc thực hiện động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ, chúng ta còn sử dụng công thức:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Thí dụ 3. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \sin 4x - \cos\frac{x}{2}$. b. $\int\left(2\cos^2 3x + 4\sin\frac{3x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)dx$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int\left(\sin 4x - \cos\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{1}{4}\cos 4x - 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int\left(2\cos^2 3x + 4\sin\frac{3x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)dx = \int(1-\cos 6x + 2\cos x - 2\cos 2x)dx$$

$$= x - \frac{1}{6}\sin 6x + 2\sin x - \sin 2x + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Câu a) được đề xuất với mục đích giúp các em học sinh ôn lại các công thức 4.a và 4.b trong bảng nguyên hàm.
- Ở câu b) chúng ta thực hiện thêm động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ (cụ thể là phép hạ bậc và biến đổi tích thành tổng) mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng nguyên hàm.

Thí dụ 4. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = (e^{2x} - e^x)^2$. b. $f(x) = \frac{(2^x - 3^x)^2}{4^x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int(e^{2x} - e^x)^2 dx = \int(e^{4x} - 2e^{2x}.e^x + e^{2x})dx$$

$$= \int(e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x})dx = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\left(2^x - 3^x\right)^2}{4^x}dx = \int \frac{2^{2x} - 2.2^x3^x + 3^{2x}}{4^x}dx = \int \frac{4^x - 2.6^x + 9^x}{4^x}dx$$

$$= \int \left[1 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{9}{4}\right)^x\right]dx = x - \frac{2}{\ln\frac{3}{2}}.\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{\ln\frac{9}{4}}.\left(\frac{9}{4}\right)^x + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Câu a) được đề xuất với mục đích giúp các em học sinh ôn lại công thức 4.c trong bảng nguyên hàm. Tuy nhiên, trước đó chúng ta thực hiện thêm động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ.
- Câu b) được đề xuất với mục đích giúp các em học sinh ôn lại công thức 4.d trong bảng nguyên hàm. Tuy nhiên, trước đó chúng ta thực hiện hai động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ.

Thí dụ 5. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$.   b. $f(x) = \tan^2 2x + \cot^2 2x$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \tan x - \cot x + C.$$

Cách 2: Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx = \int \frac{4}{\sin^2 2x}dx = -2\cot 2x + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \left(\tan^2 2x + \cot^2 2x\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x} + 1 - \frac{1}{\sin^2 2x}\right)dx$$

$$= 2x - \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{2}\cot 2x + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

- Câu a) được đề xuất với mục đích giúp các em học sinh ôn lại các công thức 5.a và 5.b trong bảng nguyên hàm.
- Ở câu b) chúng ta thực hiện thêm động tác tách biểu thức ban đầu thành các toán tử nhỏ.

Cuối cùng, thông qua những thí dụ trên các em học sinh cũng đã được làm quen với việc sử dụng các phép biến đổi để làm xuất hiện những toán tử mà có thể xác định được nguyên hàm của chúng dựa vào bảng nguyên hàm, ý tưởng này sẽ được trình bày cụ thể trong dạng toán tiếp theo.

Dạng toán 2: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích

Phương pháp

Phương pháp phân tích thực chất là việc sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi hàm số ban đầu (hoặc gọi là hàm số dưới dấu tích phân) thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết.

Để tìm nguyên hàm của hàm số y = f(x) bằng phương pháp phân tích, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x),$$

với $f_i(x)$ có nguyên hàm trong bảng công thức và αi là các hằng số.

Bước 2: Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)dx$$

☞ ***Chú ý quan trọng***: Điểm mấu chốt là phép phân tích trong bước 1, các em học sinh có thể rút ra ý tưởng cho riêng mình từ một vài minh hoạ sau:

- Với $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$ thì bằng việc sử dụng phép nhân đa thức ta viết lại:

  $f(x) = x^3 - x^3 - x - 2.$

- Với $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ thì bằng phép chia đa thức ta viết lại:

  $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x + 1}.$

- Với $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thì bằng phép phân tích đa thức thành nhân tử ta viết lại:

  $$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

- Với $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ thì bằng sử dụng phương pháp nhận liên hợp ta viết lại:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(x+1)-x} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}.$$

- Với f(x) = cos3x.cosx thì bằng việc sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng ta viết lại:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x).$$

Thí dụ 1. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = (x - 1)(x - 2)$. b. $f(x) = x(x + 2)^9$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int (x-1)(x-2)dx = \int (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int (x-1)(x-2)dx = \int (x-1)[(x-1)-1]dx = \int [(x-1)^2 - (x-1)]dx$$

$$= \int [(x-1)^2 - (x-1)]d(x-1) = \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + C.$$

b. Sử dụng đồng nhất thức $x = (x + 2) - 2$, ta được:

$$x(x+2)^9 = [(x+2)-2](x+2)^9 = (x+2)^{10} - 2(x+2)^9.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int x(x+2)^9 dx = \int \left[(x+2)^{10} - 2(x+2)^9\right]dx$$

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - \frac{2(x+2)^{10}}{10} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên chúng ta bắt đầu làm quen với việc xác định nguyên hàm của các hàm đa thức bằng phương pháp phân tích, cụ thể:

1. Ở câu a) chúng ta nhận thấy:
   - Cách 1 sử dụng phương pháp nhân đa thức để biến đổi tích thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.
   - Cách 2 sử dụng đồng nhất thức $x - 2 = (x - 1) - 1$ để biến đổi nguyên hàm về dạng tổng của các $\int u^{\alpha}du$. Tuy nhiên, các em học sinh sẽ thấy ngay rằng cách giải này được trình bày chỉ mang tính minh họa bởi nó phức tạp hơn nhiều so với cách 1.

2. Ở câu b) chúng ta có thể tổng quát với nguyên hàm:

$$I = \int x(ax + b)^{\alpha}dx, \text{ với } a \neq 0$$

bằng việc sử dụng đồng nhất thức:

$$x = \frac{1}{a}.ax = \frac{1}{a}[(ax + b) - b].$$

Thí dụ 2. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$. b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x + 1| + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)}dx = \int \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right)dx$$

$$= \ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C = \ln\left|\frac{x + 1}{x + 2}\right| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên:

1. Ở câu a) chúng ta chỉ cần thực hiện phép chia đa thức là đã biến đổi phân thức hữu tỉ ban đầu thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.
2. Ở câu b) chúng ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{(A + B)x + 2A + B}{(x + 1)(x + 2)}$$

Ta được đồng nhất thức $1 = (A + B)x + 2A + B$. (1)

Để xác định A, B trong (1) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp đồng nhất hệ số*): Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Cách 2: (*Phương pháp trị số riêng*): Lần lượt thay $x = -1$, $x = -2$ vào hai vế của (1) ta được $A = 1$ và $B = -1$. Tức là:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}.$$

Thí dụ 3. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 1}}$. b. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} = \int \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)dx}{2x+1-2x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx = \frac{1}{6}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}-(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}-x} = \int \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)dx}{x^2+1-x^2}$$

$$= \int x\sqrt{x^2+1}dx + \int x^2dx = \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1)+\int x^2dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C.$$

☞ ***Nhận xét***: Để tìm nguyên hàm của các hàm số ở ví dụ trên chúng ta đều sử dụng phép nhân liên hợp bậc hai, cụ thể:

$\sqrt{A}+\sqrt{B}$ có liên hợp là $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ và ngược lại.

Tuy nhiên:

1. Ở câu a) sau phép lấy liên hợp chúng ta nhận được ngay tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.
2. Ở câu b) chúng ta cần thực hiện thêm việc tách hàm số nhận được thành hai hàm số nhỏ bởi cần tới hai dạng $\int x^\alpha dx$ và $\int u^\alpha du$.

Thí dụ 4. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. f(x) = sin3x.cosx. b. f(x) = sin3x.sin2x.cosx.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int(\sin4x+\sin2x)dx = -\frac{1}{8}\cos4x-\frac{1}{4}\cos2x+C.$$

b. Ta có phân tích:

$$f(x) = \sin3x.\sin2x.\cos x = \frac{1}{2}\sin3x(\sin3x+\sin x) = \frac{1}{2}(\sin^2 3x+\sin3x.\sin x)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos6x+\cos2x-\cos4x).$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(1-\cos 6x+\cos 2x-\cos 4x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm cho các hàm số lượng giác trên chúng ta sử dụng *phương pháp phân tích*, cụ thể:

1. Ở câu a) chúng ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng. Các em học sinh hãy nhớ lại:

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$
$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$
$$\cos x.\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

2. Ở câu b) chúng ta sử dụng phép phân tích dần và khi xuất hiện những hàm sinx hoặc cosx bậc cao chúng ta sử dụng công thức hạ bậc. Các em học sinh hãy nhớ lại:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ và } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$
$$\sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin 3x}{4} \text{ và } \cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}.$$

Thí dụ 5. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \cos^3 x$. b. $f(x) = \tan^3 x$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int\cos^3 x dx = \frac{1}{4}\int(3\cos x+\cos 3x)dx = \frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)+C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int\cos^3 x dx = \int\cos^2 x.\cos x.dx = \int(1-\sin^2 x)\cos x.dx$$
$$= \int\cos x.dx - \int\sin^2 x.d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

b. Sử dụng đồng nhất thức:

$$\tan^3 x = \tan^2 x.\tan x = \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x = \tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan x.$$

Ta được:

$$\int f(x)dx = \int\left(\tan x.\frac{1}{\cos^2 x} - \tan x\right)dx = \int \tan x.\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \int \tan x.d(\tan x) + \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm cho các hàm số lượng giác trên:

1. Ở câu a) việc trình bày theo hai cách với mục đích cho các em học sinh thấy tính linh hoạt trong các phép biến đổi lượng giác của hàm số dưới dấu tích phân.
2. Ở câu b) chúng ta có thể tổng quát với $I_n = \int\cot^n dx$ (hoặc $I_n = \int\tan^n dx$), với $n \geq 2$.

Thí dụ 6. *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^4 2x}$. b. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

✍ *Giải*

a. Sử dụng kết quả $\dfrac{dx}{\sin^2 2x} = -\dfrac{1}{2}d(\cot 2x)$, ta được:

$$\int f(x)dx = \int\frac{dx}{\sin^4 2x} = \int\frac{1}{\sin^2 2x}.\frac{dx}{\sin^2 2x} = -\frac{1}{2}\int(1+\cot^2 2x)d(\cot 2x)$$

$$= -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C.$$

b. Sử dụng đồng nhất thức $1 = (e^{2x} + 1) - e^{2x}$, ta được:

$$\frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{(e^{2x}+1)-e^{2x}}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

Suy ra:

$$\int f(x)dx = \int\left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx = \int dx - \int\frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = x - \ln|e^{2x} + 1| + C.$$

Dạng toán 3: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp đổi biến.

Thí dụ 1. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int x\left(2x^2-1\right)^4 dx$. b. $\int\dfrac{\cos x.dx}{2\sin x - 3}$.

c. $\int\dfrac{\sin(2x-1)dx}{\cos^2(2x-1)}$. d. $\int\dfrac{xdx}{x^4-1}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $u = 2x^2 - 1$, suy ra $du = 4x.dx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{4}du$.

Từ đó:

$$\int x\left(2x^2-1\right)^4 dx = \frac{1}{4}\int u^4 du = \frac{1}{4}.\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{20}u^5 + C = \frac{1}{20}(2x^2-1)^5 + C.$$

b. Đặt $u = 2\sin x - 3$, suy ra $du = 2\cos x.dx \Leftrightarrow \cos x.dx = \frac{1}{2}du$.

Từ đó:

$$\int \frac{\cos x.dx}{2\sin x - 3} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2\sin x - 3| + C.$$

c. Đặt $u = \cos(2x - 1)$, suy ra $du = -2\sin(2x - 1)dx \Leftrightarrow \sin(2x - 1)dx = -\frac{1}{2}du$.

Từ đó:

$$\int\frac{\sin(2x-1)dx}{\cos^2(2x-1)} = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{2u} + C = \frac{1}{2\cos(2x-1)} + C.$$

d. Đặt $u = x^2$, suy ra $du = 2x.dx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}du$. Từ đó:

$$\int\frac{xdx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) bằng việc lựa chọn ẩn phụ $u = x^2 + 1$ chúng ta nhận được nguyên hàm dạng $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.
2. Ở câu b) việc lựa chọn ẩn phụ được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ nhất trong bảng dấu hiệu.
3. Ở câu c) chúng ta không lựa chọn việc đặt t = MS bởi nó có dạng u^2 nên $(u^2)' = 2u'.u$ không phù hợp với TS. Lời giải này được đề xuất dựa trên nhận xét đạo hàm của cos thì bằng sin. Ý tưởng này được tiếp tục sử dụng trong câu d).

Thí dụ 2. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int x.\sin(x^2-1)dx$. b. $\int e^{\sin x.\cos x}\cos 2x.dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt u = $x^2 - 1$, suy ra du = 2xdx ⇔ xdx = $\frac{1}{2}$du .

Từ đó:

$$\int x.\sin(x^2-1)dx = \frac{1}{2}\int \sin u.du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2-1) + C.$$

b. Đặt u = sinx.cosx = $\frac{1}{2}\sin 2x$, suy ra du = cos2x.dx. Từ đó:

$$\int e^{\sin x.\cos x}\cos 2x.dx = \int e^u dx = e^u + C = e^{\sin x.\cos x} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) bằng việc lựa chọn ẩn phụ u = $x^2 - 1$ chúng ta nhận được nguyên hàm dạng:

   $\int$cosu.du = sinu + C, tương tự với $\int$sinu.du = −cosu + C.

2. Ở câu a) bằng việc lựa chọn ẩn phụ u = sinx.cosx chúng ta nhận được nguyên hàm dạng:

   $\int e^u.du = e^u + C$, tương tự với $\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

Thí dụ 3. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x-1)}$. b. $\int \frac{\tan^2\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x+1}}$.

✍ *Giải*

a. Đặt u = 2x − 1, suy ra du = 2dx ⇔ $dx = \frac{1}{2}du$.

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{2}\cot u + C = -\frac{1}{2}\cot(2x-1) + C.$$

b. Đặt $u = \sqrt{x+1}$, suy ra $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ ⇔ $\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2du$. Từ đó:

$$\int \frac{\tan^2\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x+1}} = 2\int \tan^2 u.du = 2\int\left(\frac{1}{\cos^2 u} - 1\right)du = \tan u - u + C = \tan\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) bằng việc lựa chọn ẩn phụ u = 2x + 1 chúng ta nhận được nguyên hàm dạng:

   $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$, tương tự với $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$.

2. Ở câu a) bằng việc lựa chọn ẩn phụ $u = \sqrt{x+1}$ chúng ta nhận được một nguyên hàm lượng giác, để rồi sử dụng phương pháp phân tích để tìm nó.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới việc lựa chọn ẩn phụ được đề xuất dựa trên các dấu hiệu trong bảng dấu hiệu.

Thí dụ 4. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x^2-1}$, suy ra:

$u^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow xdx = udu.$

Từ đó:

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \int u.udu = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 - 1$, suy ra $du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}du$.

Từ đó:

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x+1}$, suy ra:

$u^2 = x + 1 \Rightarrow 2udu = dx.$

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} = \int \frac{2udu}{u(u+1)^2} = 2\int (u+1)^{-2}d(u+1) = -\frac{2}{u+1} + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x+1}+1} + C.$$

Cách 2: Đặt $u = \sqrt{x+1} + 1$, suy ra:

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2du.$$

Từ đó:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} = \int \frac{2du}{u^2} = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{\sqrt{x+1}+1} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của các hàm số trên:

1. Ở câu a) chúng ta nhận thấy:
   - Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ hai trong bảng dấu hiệu.

- Cách 2 chúng ta trình bày dựa trên nhận xét $(x^2 - 1)' = 2x$ điều này sẽ cho phép chúng ta khử được x trong hàm số cần tìm nguyên hàm.

Các em học sinh có thể thấy ngay rằng độ phức tạp trong lời giải của hai cách này là như nhau. Tuy nhiên, điều này đã thay đổi trong câu b).

2. Ở câu b) chúng ta nhận thấy:
   - Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ hai trong bảng dấu hiệu.
   - Cách 2 chúng ta trình bày dựa trên nhận xét rằng $\left(\sqrt{x+1}+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ điều này sẽ cho phép ta khử được $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ trong hàm số cần tìm nguyên hàm.

Thí dụ 5. *Tìm nguyên hàm* $L = \int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

Giải

Biến đổi nguyên hàm về dạng:

$$L = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \tan\frac{x}{2}$, suy ra:

$$dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó:

$$L = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$L = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Cách 3: Ta biến đổi:

$$L = \int \frac{\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$= \left(-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm trên chúng ta lựa chọn phép đổi biến dựa trên đề xuất của dấu hiệu thứ ba trong bảng dấu hiệu.
Tuy nhiên, do tính đặc thù của các hàm số lượng giác nên nếu biết vận dụng đúng các phép biến đổi lượng giác chúng ta có thể nhận được một lời giải đơn giản hơn, đó chính là các cách giải 2 và 3.

Thí dụ 6. *Tìm nguyên hàm* $\int \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1+\cos^2 x}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt t = 1 + $\cos^2$x, suy ra:

$$dt = -2\sin x.\cos x.dx \Leftrightarrow \sin x.\cos x.dx = -\frac{1}{2}dt.$$

Khi đó:

$$\int \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x.\cos x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(t - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}(\ln|t| - t) + C = \frac{1}{2}[\ln(1+\cos^2x) - 1 - \cos^2x] + C.$$

Cách 2: Đặt t = $\cos^2$x, suy ra:

$$dt = -2\sin x.\cos x.dx \Leftrightarrow \sin x.\cos x.dx = -\frac{1}{2}dt.$$

Khi đó:

$$\int \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x.\cos x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int\frac{t.dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}[t - \ln|1+t|] + C = \frac{1}{2}[\ln(1+\cos^2x) - 1 - \cos^2x] + C.$$

Cách 3: Đặt u = cosx, suy ra du = –sinx.dx.

Khi đó:

$$\int \frac{\cos^3 x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = -\int\frac{t^3dt}{1+t^2} = -\int\left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1 + \cos^2 x) - 1 - \cos^2 x] + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm trên:

1. Cách 1 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ nhất trong bảng dấu hiệu.
2. Cách 2 được trình bày dựa trên nhận định:
$$\sin x.\cos^3 x.dx = \cos^2 x.\cos x.\sin x.dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x.d(\cos^2 x).$$
3. Cách 3 được đề xuất dựa trên kiến thức:
   - Để chọn t = sinx thì cần có $\cos^{2k+1}x$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Để chọn t = cosx thì cần có $\sin^{2k+1}x$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Trong những trường hợp còn lại (sin và cos có bậc chẵn) phép đổi biến thường được lựa chọn là:
   - Đặt t = tanx khi đó:
   $$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2};$$
   - Đặt t = cotx khi đó:
   $$dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)dx = -(1 + t^2)dx \Leftrightarrow dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Thí dụ 7. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int \frac{dx}{e^x - e^{x/2}}$. b. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = e^{-x/2}$, suy ra:
$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$
$$\frac{dx}{e^x - e^{x/2}} = \frac{dx}{e^x(1-e^{-x/2})} = \frac{e^{-x/2}dx}{e^{x/2}(1-e^{-x/2})} = \frac{-2tdt}{1-t} = 2(1 + \frac{1}{t-1})dt$$
Khi đó:
$$I = 2\int(1 + \frac{1}{t-1})dt = 2(e^{-x/2} + \ln|e^{-x/2} + 1|) + C.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow t^2 = 1 + e^x$ suy ra:
$$2tdt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \ \& \ \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = \frac{2dt}{t^2-1}.$$
Khi đó:
$$I = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Cách 2: Đặt t = $e^{-x/2}$ suy ra:

$$dt = -\frac{1}{2}e^{-x/2}dx \Leftrightarrow -2dt = \frac{dx}{e^{x/2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{dx}{\sqrt{e^x(e^{-x}+1)}} = \frac{dx}{e^{x/2}\sqrt{e^{-x}+1}} = \frac{-2dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Khi đó:

$$I = -2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = -2\ln|e^{-x/2} + \sqrt{e^{-x}+1}| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong thí dụ trên ở câu a), chúng ta đã dùng tới kinh nghiệm để lựa chọn phép đổi biến t = $e^{-x/2}$, tuy nhiên với cách đặt t = $e^{x/2}$ chúng ta cũng có thể thực hiện được bài toán.

Thí dụ 8. *Tìm nguyên hàm* $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$, với $a \neq 0$.

✍ *Giải*

Đặt t = x + $\sqrt{x^2+a}$ suy ra:

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}$$

Khi đó:

$$I = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Dạng toán 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Thí dụ 1. *Tìm nguyên hàm* $\int\frac{x.dx}{\sin^2 2x}$.

✍ *Giải*

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cot 2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int\frac{x.dx}{\sin^2 2x} = -x.\cot 2x + \frac{1}{2}\int\cot 2x.dx = -x.\cot 2x + \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x.dx}{\sin 2x}$$

$$= -x.\cot 2x + \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Đây là ví dụ mở đầu minh hoạ phương pháp lấy nguyên hàm từng phần và hai câu hỏi được đặt ra là:

1. ***Câu 1*** "*Tại sao lại lựa chọn phương pháp lấy nguyên hàm từng phần* ?", để trả lời câu hỏi này chúng ta sử dụng nhận xét:
   - Hàm số f(x) không có trong bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp, do đó cần những phép phân tích để chuyển nó về dạng một biểu thức chứa các hàm số có trong bảng nguyên hàm. Tuy nhiên, với những phép phân tích đại số thông thường sẽ không thể thực hiện được yêu cầu trên bởi f(x) là một hàm không thuần nhất (thương của hàm đa thức với hàm lượng giác hoặc với hàm mũ và lôgarit).
   - Phương pháp đổi biến mà chúng ta đã biết cũng không thể thực hiện được bởi không có phần tử trung gian chuyển đổi giữa hàm đa thức và hàm lượng giác, hàm mũ và lôgarit.
2. ***Câu 2*** "*Tại sao lại lựa chọn cách đặt* u *và* dv *như vậy* ?", để trả lời câu hỏi này chúng ta sử dụng phân tích mang tính chủ quan sau:

$$f(x) = \frac{x}{\sin^2 2x} = x.\frac{1}{\sin^2 2x}.$$

   Điều này cho thấy u chỉ có thể là x hoặc $\frac{1}{\sin^2 2x}$ và phần còn lại sẽ là dv. Lựa chọn trong lời giải trên là u = x bởi:
   - Khi đó dv = $\frac{1}{\sin^2 2x}$dx nên v = $-\frac{1}{2}$cot2x, tức thoả mãn "*Phép đặt* dv *sao cho* v *được xác định một cách dễ dàng*". Tuy nhiên, sẽ có học sinh đặt câu rằng trong trường hợp trái lại (dv = xdx) thì v cũng được xác định một cách dễ dàng (v = $\frac{1}{2}x^2$).
   - Câu hỏi rất đúng, nhưng câu trả lời là không bởi khi đó việc tính du trở nên phức tạp hơn và tích phân mới xuất hiện $\int$vdu không được xác định một cách dễ dàng (vì v vẫn là hàm hợp).

DANG 1: Tính I = $\int P(x)\sin(\alpha x)dx$ hoặc $\int P(x)\cos(\alpha x)dx$ với P là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(\alpha x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\dfrac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = -\frac{1}{\alpha}P(x)\cos\alpha x + \frac{1}{\alpha}\int P'(x).\cos\alpha x.dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ " *khử* " được đa thức.

Thí dụ 2. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int x.\sin(x+1).dx$. b. $\int (2x+1).\cos^2\frac{x}{2}.dx$.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(x+1).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos(x+1) \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int x.\sin(x+1).dx = -x.\cos(x+1) + \int \cos(x+1).dx = -x.\cos(x+1) + \sin(x+1) + C.$$

b. Trước tiên, ta có:

$$\int (2x+1).\cos^2\frac{x}{2}.dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)(1+\cos x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x+1).dx}_{I_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x+1).\cos x.dx}_{I_2}. \quad (1)$$

Ta có ngay $I_1 = x^2 + x + C$. (2)

Với nguyên hàm I_2, ta có đặt:

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = (2x+1).\sin x - 2\int \sin x.dx = (2x+1).\sin x + 2\cos x + C. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$\int (2x+1).\cos^2\frac{x}{2}.dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}(2x+1).\sin x - \cos x + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm các nguyên hàm trên:

1. Ở câu a) chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết trong dạng 1.
2. Ở câu b) bởi hàm số côsin ở đó có bậc hai nên cần thực hiện thao tác hạ bậc trước.

DANG 2: Tính $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ với P là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}.$$

Bước 2: Khi đó:

$$I = \frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x).e^{\alpha x}.dx.$$

Bước 3: Tiếp tục thủ tục trên ta sẽ " *khử* " được đa thức.

Thí dụ 3. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int (x+1)e^{2x+1}dx$. b. $\int xe^{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{2x+1}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int (x+1)e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}x.e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}x.e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} + C.$$

b. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, suy ra:

$$t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2t.dt = 2xdx \Leftrightarrow t.dt = x.dx.$$

Từ đó:

$$\int xe^{\sqrt{x^2+1}}dx = \int te^t.dt.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int xe^{\sqrt{x^2+1}}dx = te^t - \int e^t.dt = te^t - e^t + C = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)e^{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm các nguyên hàm trên:

1. Ở câu a) chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết trong dạng 2.

2. Ở câu b) chúng ta đã phải kết hợp phương pháp đổi biến số với phương pháp lấy nguyên hàm từng phần bởi hàm số $e^{\sqrt{x^2+1}}$ không đúng với dạng $e^{\alpha x}$.

Thí dụ 4. *Tìm nguyên hàm* $\int (x+1)^2 e^{x+2}dx$.

✍ *Giải*

Đặt:

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \\ dv = e^{x+2}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x+1)dx \\ v = e^{x+2} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int (x+1)^2 e^{x+2}dx = (x+1)^2.e^{x+2} - 2\underbrace{\int (x+1)e^{x+2}dx}_{I_1}. \quad (1)$$

Xét tích phân I_1, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{x+2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x+2} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = (x+1).e^{x+2} - \int e^{x+2}dx = (x+1).e^{x+2} - e^{x+2} + C. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int (x+1)^2 e^{x+2}dx = (x+1)^2 e^{x+2} - 2\left[(x+1)e^{x+2} - e^{x+2}\right] + C$$

$$= \left[(x+1)^2 - 2(x+1) + 2\right]e^{x+2} + C = \left(x^2+1\right)e^{x+2} + C.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm nguyên hàm trên chúng ta đã cần tới hai thủ tục lấy nguyên hàm từng phần từng phần điều này đã được khẳng định ở bước 3.

DANG 3: Tính $I = \int p(x).\ln\alpha x dx$ với p là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Phương pháp

Giả sử p(x) có nguyên hàm là P(x), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln\alpha x \\ dv = p(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = P(x) \end{cases}.$$

Bước 4: Khi đó:

$$I = P(x)\ln\alpha x - \underbrace{\int \frac{P(x)dx}{x}}_{I_1}.$$

Bước 2: Nguyên hàm I_1 được xác định bằng cách chia đa thức.

Thí dụ 5. *Tìm các nguyên hàm sau*:

a. $\int x.\ln(x^2+1).dx$. b. $\int (x^2+1)^2 \ln x.dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = x^2 + 1$, suy ra:

$$dt = 2x.dx \Leftrightarrow x.dx = \frac{1}{2}dt$$

Khi đó:

$$\int x.\ln(x^2+1).dx = \frac{1}{2}\int \ln t.dt.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{2}\int \ln t.dt = \frac{1}{2}(t.\ln t - \int dt) = \frac{1}{2}(t.\ln t - t) + C = \frac{1}{2}[(x^2+1).\ln(x^2+1) - (x^2+1)] + C.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2+1)^2 dx = (x^4+2x^2+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int (x^2+1)^2 \ln x.dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\ln x - \left(\frac{1}{25}x^5 + \frac{2}{9}x^3 + x\right) + C.$$

DANG 4: Tính I = $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ hoặc $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ với a, b ≠ 0.

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b\sin(bx)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx. \quad (1)$$

Bước 2: Xét $J = \int e^{ax}\sin(bx)dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b\cos(bx)dx \\ v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I. \quad (2)$$

Bước 3: Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}[\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I]$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{[a.\cos(bx) + b.\sin(bx)]e^{ax}}{a^2 + b^2} + C$$

Thí dụ 6. *Tìm nguyên hàm* $I = \int e^{x+1}.\cos(2x + 1).dx$.

✍ *Giải*

Đặt:

$$\begin{cases} u = e^{x+1} \\ dv = \cos(2x+1).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{x+1}dx \\ v = \frac{1}{2}\sin(2x+1) \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}e^{x+1}.\sin(2x + 1) - \frac{1}{2}\int e^{x+1}.\sin(2x+1).dx. \quad (1)$$

Xét tích phân $J = \int e^{x+1}.\sin(2x+1).dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = e^{x+1} \\ dv = \sin(2x+1).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{x+1}dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = -\frac{1}{2}e^{x+1}.\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int e^{x+1}.\cos(2x+1).dx = -\frac{1}{2}e^{x+1}.\cos(2x+1) + \frac{1}{2}I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2}e^{x+1}.\sin(2x + 1) - \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}e^{x+1}.\cos(2x + 1) + \frac{1}{2}I]$$

$$\Leftrightarrow 4I = 2e^{x+1}.\sin(2x + 1) + e^{x+1}.\cos(2x + 1) - I$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5}[2\sin(2x + 1) + \cos(2x + 1)]e^{x+1} + C.$$

§2. TÍCH PHÂN

Dạng toán 1: Tính tích phân sử dụng các tính chất của tích phân và bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Thí dụ 1. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^4 (3x + \cos\pi x - e^{\frac{x}{4}})dx$. b. $J = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3}dx$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$I = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{\pi}\sin\pi x - 4e^{\frac{x}{4}}\right)\Big|_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4) = 28 - 4e.$$

b. Ta có:

$$J = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{2}{x}\right)\Big|_1^2 = (\ln 2 + 1) - (\ln 1 + 2) = \ln 2 - 1.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các tích phân trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức sẵn trong bảng nguyên hàm là chỉ ra được nguyên hàm của hàm số. Từ đó, nhận được giá trị của tích phân.
- Ở câu b) chúng ta chỉ cần tách hàm số dưới dấu tích phân thành các hàm số nhỏ rồi sử dụng công thức sẵn.

Thí dụ 2. *Hàm số* $f(x) = a.\sin\pi x + b.\cos\pi x$ *thoả mãn* $f(1) = -2$ *và* $\int_0^1 f(x)dx = 4$.

Tìm a, b.

✍ *Giải*

Ta lần lượt xét các giả thiết:

- Với $f(1) = -2$ thì $a.\sin\pi + b.\cos\pi = -2 \Leftrightarrow b = 2$. (1)
- Với $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì:

$$4 = \int_0^1 (a.\sin\pi x + b.\cos\pi x)dx = \left(-\frac{a}{\pi}\cos\pi x + \frac{b}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + b$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2a}{\pi} + 2 = 4 \Leftrightarrow a = \pi.$$

Vậy, với $a = \pi$, $b = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Thí dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng tính chất 3 để tính tích phân.

Thí dụ 3. *Cho biết* $\int_0^3 f(z)dz = 3$, $\int_0^4 f(x)dx = 7$. *Hãy tính* $\int_3^4 f(t)dt$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_0^3 f(z)dz + \int_3^4 f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_3^4 f(t)dt = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^3 f(z)dz = 7 - 3 = 4$$

☞ ***Chú ý***: Tính chất 3 thường được sử dụng để tính tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối.

Thí dụ 4. *Tính tích phân* $I = \int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx$.

✍ *Giải*

Xét dấu của hàm số $y = x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
y			+	0	–	0	+		

Do đó:

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_{1}^{2} = 4.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được tích phân trên chúng ta cần loại bỏ được dấu giá trị tuyệt đối cho hàm số dưới dấu tích phân và để thực hiện điều này chúng ta chỉ cần thực hiện việc xét dấu hàm số $y = x^2 - 1$ trên $[-2; 2]$, từ đó sử dụng tính chất 3 để tách tích phân ban đầu thành những tích phân nhỏ mà trên đó hàm số $y = x^2 - 1$ mang dấu âm hoặc dương.

Thí dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng tính chất 4, 5 để tính tích phân.

Thí dụ 5. *Cho biết* $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_1^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$. *Hãy tính*:

$$\int_2^5 f(x)dx, \quad \int_1^5 \left[4f(x) - g(x)\right]dx.$$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx \Leftrightarrow \int_2^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 10.$$

b. Ta có:

$$\int_1^5 \left[4f(x) - g(x)\right]dx = 4\int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx = 4.6 - 8 = 16.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu hàm dưới dấu tích phân là hàm cực trị như Min(f, g,...) hoặc Max(f, g,...) khi đó cần thực hiện phép xét dấu hiệu các hàm.

Thí dụ 6. *Tính tích phân*:

$$I = \int_0^2 \max\{f(x), g(x)\}dx, \textit{ trong đó } f(x) = x^2 \textit{ và } g(x) = 3x - 2.$$

✍ *Giải*

Xét hiệu $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Do đó:

$$I = \int_0^2 \max\{f(x), g(x)\}dx = \int_0^1 \max\{f(x), g(x)\}dx + \int_1^2 \max\{f(x), g(x)\}dx$$

$$= \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (3x-2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\right|_1^2 = \frac{17}{6}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu biết biết cách tận dụng ý nghĩa hình học của tích phân, trong nhiều trường hợp chúng ta có ngay được đáp số của một tích phân tương đối phức tạp.

Thí dụ 7. *Tính tích phân* $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx$, *với* $a > 0$.

✍ *Giải*

Hàm số $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ là một hàm số không âm liên tục trên $[-a, a]$ và có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính R = a (gọi là (C)) trên mặt phẳng tọa độ, do đó tích phân trên là diện tích của nửa đường tròn (C).

Vậy, ta được $I = \frac{1}{2}\pi a^2$.

Dạng toán 2: Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Phương pháp

Sử dụng kiến thức đã thu nhận được trong phần "*Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích*".

Thí dụ 1. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1 \frac{(4x+11)dx}{x^2+5x+6}$. b. $I = \int_0^1 \frac{(x^2+3x+10)dx}{x^2+2x+9}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi:

$$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+2)(x+3)}.$$

Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx = (\,3\ln|x+2| + \ln|x+3|\,)\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{2}.$$

b. Biến đổi:

$$\frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9} = 1 + \frac{x+1}{x^2+2x+9} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x+9}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (1 + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x+9})dx = (x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9|)\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các tích phân trên:

- Ở câu a) chúng ta phân tích hàm phân thức hữu tỉ thành những hàm nhỏ (phương pháp này đã được trình bày trong chủ đề về nguyên hàm).
- Ở câu b) sau phép chia đa thức chúng ta nhận thấy rằng:
  $(x^2 + 2x + 9)' = 2x + 2 = 2(x + 1) = 2TS$
  nên có dạng $\frac{u'}{u}$.

Thí dụ 2. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 7x.\sin 2x dx$.   b. $J = \int_0^{\pi/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 5x - \cos 9x)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{9}\sin 9x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{90}(9\sin 5x - 5\sin 9x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{90}[(9-5) - (-9+5)] = \frac{4}{45}.$$

b. Ta có:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1 - \sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}(2x + \cos 2x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi-2}{8}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các tích phân trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng. Từ đó, nhận được giá trị của tích phân.
- Ở câu b) chúng ta chỉ cần sử dụng công thức hạ bậc và công thức giữa hai góc hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$.

Thí dụ 3. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. b. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx = \frac{2}{3}[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1).$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\right)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x)dx$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x dx = 2\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 1.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các tích phân trên:

- Ở câu a) việc sử dụng phép nhân liên hợp là điều chúng ta đã được biết trong chủ đề về nguyên hàm.
- Ở câu b) chỉ cần các em học sinh nhớ lại khi học về việc tính giá trị của một biểu thức lượng giác tại x_0 (lớp 10), chúng ta luôn tìm cách đơn giản biểu thức đó trước khi thay giá trị x_0 vào.

<u>Dạng toán 3:</u> Tính tích phân sử dụng phương pháp đổi biến dạng 1

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phương pháp 1 của phần phương pháp đổi biến số.

Thí dụ 1. *Tính các tích phân sau*:

a. $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$. b. $\int_0^1 \frac{5xdx}{(x^2+4)^2}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $u = 1 + x^4$, suy ra $du = 4x^3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 1$.
- Với $x = 1$ thì $u = 2$.

Từ đó:

$$\int_0^1 x^3(1+x^4)^3dx = \frac{1}{4}\int_1^2 u^3du = \frac{1}{16}u^4\Big|_1^2 = \frac{15}{16}.$$

b. Đặt $u = x^2 + 4$, suy ra $du = 2xdx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 4$.
- Với $x = 1$ thì $u = 5$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{5}{2}\int_4^5 \frac{du}{u^2} = -\frac{5}{2u}\Big|_4^5 = \frac{1}{8}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các tích phân (*tích phân các hàm số hữu tỉ*) trên:

- Ở câu a) việc lựa chọn ẩn phụ $u = 1 + x^4$ xuất phát từ nhận xét $(1 + x^4)' = 3x^3$ và x^3 có trong hàm số dưới dấu tích phân. Việc lựa vẫn đúng trong trường hợp x^3 được thay bởi x^{4k+3}, $k \in \mathbb{N}$.
- Ở câu b) việc lựa chọn ẩn phụ $u = x^2 + 4$ xuất phát từ nhận xét $(x^2 + 4)' = 2x$ và x có trong hàm số dưới dấu tích phân. Việc lựa chọn vẫn đúng trong trường hợp x được thay bởi x^{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$.

Thí dụ 2. *Tính các tích phân sau*:

a. $\int_0^{\pi/6}(1-\cos 3x)\sin 3x dx$.

b. $\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x.dx}{\cos^2 x}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $u = 1 - \cos 3x$, suy ra $du = 3\sin 3x.dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 3x)\sin 3x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 udu = \frac{1}{6}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

b. Đặt $u = \tan x$, suy ra $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Thí dụ 3. *Tính các tích phân sau*:

a. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx$.

b. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$, suy ra:

$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx.$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1.
- Với $x = \sqrt{3}$ thì u = 2.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \int_1^2 u^2du = \frac{1}{3}u^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra du = 2xdx.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1,
- Với $x = \sqrt{3}$ thì u = 4.

Từ đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u}du = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.$$

b. Đặt $u = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow u^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 2udu = 2xdx.$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1.
- Với $x = \sqrt{3}$ thì u = 2.

Khi đó:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx = \int_1^2 (u^2-1)^2u^2du = \int_1^2 (u^6-2u^4+u^2)du$$

$$= \left(\frac{1}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_1^2 = \frac{848}{105}.$$

☞ ***Chú ý***: Như vậy, để tìm nguyên hàm của hàm số trong a):

- Cách 1 và cách 2 được đề xuất dựa trên dấu hiệu thứ hai trong bảng dấu hiệu ở chủ đề 2.
- Cách 3 được trình bày dựa trên ý tưởng đổi biến của cách 2.

Thí dụ 4. *Tính tích phân* $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}$.

✍ *Giải*

Đặt $u = e^{2x} + 3$, suy ra $du = 2e^{2x}dx = 2(u - 3)dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2(u-3)}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 4$.
- Với $x = 1$ thì $u = e^2 + 3$.

Từ đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_4^{e^2+3}\frac{du}{u(u-3)} = \frac{1}{6}\int_4^{e^2+3}\left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{6}\left(\ln|u-3| - \ln|u|\right)\Big|_4^{e^2+3}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u}\right|\Bigg|_4^{e^2+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\ln\frac{4}{e^2+3}.$$

Dạng toán 4: Tính tích phân sử dụng phương pháp đổi biến dạng 2

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phương pháp 2 của phần phương pháp đổi biến số.

Thí dụ 1. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx$.b. b. $I = \int_2^{2/\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx = \cos t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/6}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt = \int_0^{\pi/6}\cos^2 t.dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(1+\cos 2t).dt$$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Cách 2: Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$ suy ra $dx = -\sin t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = -\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sqrt{1-\cos^2 t}.\sin t.dt = -\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sin^2 t.dt = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi/3}(1-\cos 2t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $dx = -\frac{\cos t.dt}{\sin^2 t}$.

Đổi cận:

- Với $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{6}$. Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}\cos t dt}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} = -\int_{\pi/6}^{\pi/3} dt = -t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Cách 2: Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $dx = \frac{\sin t.dt}{\cos^2 t}$.

Đổi cận:

- Với $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.
- Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\sin t dt}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \int_{\pi/3}^{\pi/6} dt = t\Big|_{\pi/3}^{\pi/6} = -\frac{\pi}{6}.$$

☞ ***Chú ý***: a. Trong lời giải trên việc lựa chọn miền giá trị cho ẩn phụ t phụ thuộc vào hai cận của tích phân.

b. Cũng có thể sử dụng phép đổi biến $t = \frac{1}{x}$, bằng cách viết:

$$I = \int_{2}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Rồi tiếp tục sử dụng phép đổi biến $t = \sin u$, $u \in (0; \frac{\pi}{2})$, ta được:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = u\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}.$$

Thí dụ 2. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}dx$. b. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$.

✍ *Giải*

a. Đặt x = tant, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra dx = $\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0.
- Với x = 1 thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} \tan t.\sqrt{1+\tan^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t} = -\int_0^{\pi/4}\frac{d(\cos t)}{\cos^4 t} = \left.\frac{1}{3\cos^3 t}\right|_0^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

b. Đặt x = tant, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra dx = $\frac{dt}{\cos^2 t}$ = $(1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0.
- Với x = 1 thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1} = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

Thí dụ 3. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

b. $I = \int_{5/4}^{3/2}\sqrt{(x-1)(2-x)}dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt x = cos2t, $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra dx = −2sin2t.dt. Đổi cận:

- Với x = −1 thì t = $\frac{\pi}{2}$.
- Với x = 0 thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}(-2\sin 2t.dt) = |\cot t|(-2\sin 2t.dt)$$

$$= -4\cos^2 t.dt = -2(1 + \cos 2t)dt.$$

Khi đó:

$$I = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = -2\left.\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{\pi/4}^{\pi/2} = -2\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

b. Đặt x = 1 + $\sin^2 t$, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ khi đó dx = sin2t.dt. Đổi cận:

- Với x = $\frac{5}{4}$ thì t = $\frac{\pi}{6}$.
- Với x = $\frac{3}{2}$ thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Ta có $\sqrt{(x-1)(2-x)}dx = \sin^2 2t.dt = (1 - \cos 4t)dt$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt = \left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Dạng toán 5: Phương pháp đổi biến cho lớp hàm số đặc biệt

Phương pháp

Dựa vào việc xem xét cận của tích phân và tính chất của hàm số dưới dấu tích phân ta có thể lựa chọn phép đặt ẩn phụ, thông thường:

- Với $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $x = -t$.
- Với $I = \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.
- Với $I = \int_{0}^{\pi} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = \pi - x$.
- Với $I = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $t = 2\pi - x$.
- Với $I = \int_{a}^{b} xf(x)dx$ có thể lựa chọn việc đặt $x = a + b - t$.

Thí dụ 1. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_{-1}^{1} x^{2010}\sin x.dx$. b. $I = \int_{0}^{2\pi} x.\cos^3 xdx$.

Giải

a. Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_{-1}^{0} x^{2010}\sin x.dx + \int_{0}^{1} x^{2010}\sin x.dx. \qquad (*)$$

Xét tính phân $J = \int_{-1}^{0} x^{2010}\sin x.dx$ bằng cách đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = 1$.
- Với $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$J = -\int_{1}^{0}(-t)^{2004}\sin(-t)dt = -\int_{0}^{1} t^{2004}\sin t.dt = -\int_{0}^{1} x^{2004}\sin xdx. \qquad (**)$$

Thay (**) vào (1) ta được I = 0.

b. Đặt x = 2π − t suy ra dx = −dt.

Đổi cận:

- Với x = 2π thì t = 0.
- Với x = 0 thì t = 2π.

Khi đó:

$$I = \int_{2\pi}^{0}(2\pi - t).\cos^3(2\pi - t)(-dt) = \int_{0}^{2\pi}(2\pi - t).\cos^3 t dt$$

$$= 2\pi\int_{0}^{2\pi}\cos^3 t dt - \int_{0}^{2\pi}t\cos^3 t dt = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{2\pi}(\cos 3t + 3\cos t)dt - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{3}\sin 3t + 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Với tích phân trong a), các em học sinh chưa có kinh nghiệm thường suy nghĩ theo hai hướng sau:

Hướng 1: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, bởi nó có dạng $\int P(x)\sin\alpha x dx$ song khi đó ta cần thực hiện 2010 lần tích phân từng phần và điều đó đương nhiên không thực tế.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần cho công thức tổng quát $\int_{-1}^{1}x^n \sin x dx$, từ đó bằng phương pháp truy hồi nhận được kết quả.

Thí dụ 2. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_{0}^{\pi}x.\sin x.\cos^2 x dx$.

b. $I = \int_{0}^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt x = π − t suy ra dx = −dt. Đổi cận:

- Với x = π thì t = 0.
- Với x = 0 thì t = π.

Khi đó:

$$I = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t).\sin(\pi - t).\cos^2(\pi - t)dt = \int_{0}^{\pi}(\pi - t).\sin t.\cos^2 t dt$$

$$= \pi\int_{0}^{\pi}\sin t.\cos^2 t dt - \int_{0}^{\pi}t.\sin t.\cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2t.\cos t dt - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin 3t + \sin t)dt \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8}(-\frac{1}{3}\cos 3t - \cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}.$$

b. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra dx = −dt. Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\frac{1+\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\right)(-dt) = \int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\right)dt = -\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\right)dt$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Dạng toán 6: Phương pháp lấy tích phân từng phần

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp tích phân từng phần.

Thí dụ 3. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$.

b. $I = \int_0^1 x\tan^2 x.dx$.

Giải

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2xdx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{[x(x^2+1)-x]dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})dx = \frac{\ln 2}{2} - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^1 x(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{xdx}{\cos^2 x}}_{I_1} - \int_0^1 xdx. \qquad (1)$$

Xác định I_1 bằng phương pháp tích phân từng phần, như sau:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = x\tan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \text{tg}x dx = (x\tan x + \ln|\cos x|)\Big|_0^1 = \tan 1 + \ln(\cos 1). \quad (2)$$

Ngoài ra $I_2 = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \tan 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}$.

Thí dụ 4. *Tính tích phân* $I = \int_0^1 e^{x+e^x}dx$.

✍ *Giải*

Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 e^x e^{e^x} dx.$$

Đặt $t = e^x$ suy ra $e^x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = 1$ thì $t = e$.

Khi đó $I = \int_1^e te^t dt$, ta đặt:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases} \Rightarrow I = te^t\Big|_1^e - \int_1^e e^t dt = e^{e+1} - e - e^t\Big|_1^e = e^{e+1} - e^e.$$

Thí dụ 5. *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1 e^x \sin^2(\pi x)dx$. b. $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x dx$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1 - \cos 2\pi x)dx = \frac{1}{2}(\underbrace{\int_0^1 e^x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x dx}_{I_2}). \quad (1)$$

Với tích phân I_1, ta có ngay:

$$I_1 = e^x\Big|_0^1 = e - 1. \quad (2)$$

Với tích phân I_2 sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2\pi x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2\pi x.dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = e^x\cos 2\pi x\Big|_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 e^x \sin 2\pi x dx}_{I_{2.1}} = e - 1 + 2I_{2.1}. \quad (3)$$

Với tích phân $I_{2.1}$ sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2\pi x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2\pi x dx \\ v = e^x \end{cases},$$

Khi đó:

$$I_{2,1} = e^x\sin 2\pi x\Big|_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x dx}_{I_2} = -2I_2. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$I_2 = e - 1 - 2I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e-1}{3}. \quad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

$$I = \frac{1}{2}(e - 1 - \frac{e-1}{3}) = \frac{e-1}{3}.$$

b. Ta có thể lựa chọn các cách sau cho việc tính nguyên hàm $I' = \int e^x.\cos^2 x dx$:

Cách 1: Viết lại I' dưới dạng:

$$I' = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}(\int e^x dx + \int e^x.\cos 2x dx) = \frac{1}{2}(e^x + \int e^x.\cos 2x dx). \quad (1)$$

- Tính tích phân $J = \int e^x.\cos 2x dx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx. \quad (2)$$

- Tính tích phân $K = \int e^x \sin 2x dx$ bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$K = e^x\sin 2x - 2\int e^x\cos 2x dx = e^x\sin 2x - 2J. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$J = e^x\cos 2x + 2(e^x\sin 2x - 2J) \Leftrightarrow J = \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C. \quad (4)$$

Thay (4) vào (1), ta được:

$$I' = \frac{1}{2}[e^x + \frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x] + C = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C.$$

Từ đó, suy ra:

$$I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2e^{\pi/2} - 3}{5}.$$

Cách 2: Viết lại I' dưới dạng:

$$I' = \frac{1}{2}\int e^x.(1 + \cos 2x)dx = (a + b.\cos 2x + c.\sin 2x)e^x + C. \quad (5)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5), ta được:

$$\frac{1}{2}e^x.(1 + \cos 2x) = (-2b.\sin 2x + 2c.\cos 2x)\, e^x + (a + b.\cos 2x + c.\sin 2x)e^x$$

$$= [a + (2c + b)\cos 2x + (c - 2b)\sin 2x]e^x. \quad (6)$$

Đồng nhất hệ số, ta được:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(2c + b) = 1 \\ 2(c - 2b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/10 \\ c = 1/5 \end{cases}.$$

Vậy, ta có:

$$I' = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2e^{\pi/2} - 3}{5}.$$

§3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

__Dạng toán 1:__ Tính diện tích hình phẳng dạng 1

Phương pháp

Với yêu cầu "*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* y = f(x) *(liên tục trên đoạn* [a; b]*), trục hoành và hai đường thẳng* x = a, x = b *và trục* Ox" ta thực hiện các bước sau:

__Bước 1:__ Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad (1)$$

__Bước 2:__ Xét dấu biểu thức f(x) trên [a; b].

Từ đó phân được đoạn [a; b] thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a; b] = [a; c_1]\cup[c_1; c_2] \cup\ldots\cup[c_k; b].$$

mà trên mỗi đoạn f(x) chỉ có một dấu.

__Bước 3:__ Khi đó:

$$S = \int_a^{c_1} |f(x)|dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} |f(x)|dx. \quad (2)$$

☞ ***Chú ý***: Nếu bài toán phát biểu dưới dạng:

"*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* x = f(y) (*liên tục trên đoạn* [a; b]), *hai đường thẳng* y = a, y = b *và trục* Oy"

khi đó công thức tính diện tích là:

$$S = \int_a^b |f(y)|dy.$$

Thí dụ 1. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi*:

a. *Đồ thị hàm số* $y = \cos x + 1$, *trục hoành và hai đường thẳng* $x = 0$ *và* $x = \frac{2\pi}{3}$.

b. *Đồ thị hàm số* $y = x^3 - 1$, *trục hoành, trục tung và đường thẳng* $x = 2$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$S = \int_0^{2\pi/3} |\cos x + 1|dx = \int_0^{2\pi/3} (\cos x + 1)dx = (\sin x + x)\Big|_0^{2\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}.$$

b. Ta có:

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1|dx.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 1$ trên đoạn [0; 2], ta có:

$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu:

x	0		1		2
y'		–	0	+	0

Khi đó:

$$S = \int_0^1 |x^3 - 1|dx + \int_1^2 |x^3 - 1|dx = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các diện tích hình phẳng trên:

- Ở câu a) chúng ta chỉ việc sử dụng công thức cùng với nhận xét $\cos x + 1 \geq 0$ để phá dấu trị tuyệt đối. Từ đó, nhận được giá trị của tích phân.
- Ở câu b) chúng ta cần xét dấu đa thức $x^3 - 1$ trên đoạn [0; 2], để từ đó tách tích phân S thành các tích phân nhỏ mà trên đó biểu thức $x^3 - 1$ không âm hoặc không dương.

Thí dụ 2. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi*:

a. *Đồ thị hàm số* $y = -x^2 + 3x - 2$ *và trục hoành.*

b. *Đồ thị hàm số* $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ *và trục hoành.*

✍ *Giải*

a. Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ và trục hoành là:

$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó:

$$S = \int_1^2 \left|-x^2 + 3x - 2\right| dx = \int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6}.$$

b. Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và trục hoành là:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó:

$$S = \int_{-1}^2 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx = \int_{-1}^1 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx + \int_1^2 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx + \int_1^2 \left(-x^3 + 2x^2 + x - 2\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-1}^1 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_1^2 = 3.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các diện tích hình phẳng trên chúng ta đều cần tìm được hai cận a, b của tích phân và:

- Ở câu a) vì phương trình hoành độ chỉ có hai nghiệm nên hàm số dưới dấu tích phân chỉ có một dấu.
- Ở câu b) vì phương trình hoành độ có ba nghiệm nên tích phân S cần được tách thành hai tích phân nhỏ.

<u>Dạng toán 2:</u> Tính diện tích hình phẳng dạng 2

Phương pháp

Với yêu cầu " *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số* $y = f(x)$, $y = g(x)$ *(liên tục trên đoạn* $[a; b]$*), hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$" ta thực hiện các bước sau:

<u>Bước 1:</u> Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx. \qquad (1)$$

<u>Bước 2:</u> Xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$ trên $[a; b]$.

Từ đó phân được đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$[a; b] = [a; c_1] \cup [c_1; c_2] \cup \ldots \cup [c_k; b]$.

mà trên mỗi đoạn $f(x) - g(x)$ chỉ có một dấu.

<u>Bước 3:</u> Khi đó:

$$S = I = \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|dx + ... + \int_{c_k}^{b} |f(x) - g(x)|dx. \qquad (2)$$

☞ ***Chú ý***: Nếu bài toán phát biểu dưới dạng:

"*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số* $x = f_1(y)$ *và* $x = f_2(y)$ *(liên tục trên đoạn* $[a; b]$*), hai đường thẳng* $y = a$, $y = b$ *và trục* Oy"

khi đó công thức tính diện tích là:

$$S = \int_a^b |f_1(y) - f_2(y)|dy.$$

Thí dụ 1. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi*:

a. *Đồ thị các hàm số* $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$.

b. *Đồ thị các hàm số* $y = \ln x$, $y = -\ln x$ và $x = e$.

✍ *Giải*

a. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$4 - x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó:

$$S = \int_{-1}^{2} |x^2 - x - 2|dx = -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{27}{6}.$$

b. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$\ln x = -\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó:

$$S = \int_1^e |\ln x + \ln x|dx = 2\int_1^e \ln x.dx.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow S = 2\left(x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx\right) = 2\left(e - x\Big|_1^e\right) = 2.$$

Thí dụ 2. *Cho hàm số* (C): $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.*

b. *Tìm* b *sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi* (C) *và các đường thẳng* $y = 1$, $x = 0$, $x = b$ *bằng* $\dfrac{\pi}{4}$.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S=\int_0^b\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|dx=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int_0^b\left|\frac{x^2-x^2-1}{x^2+1}\right|dx=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left|\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}\right|=\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

Đặt x = tant, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}=(1+\tan^2 t)dt$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0,
- Với x = b thì t = α, với tanα = b và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\left|\int_0^\alpha dt\right|=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow |t|\Big|_0^\alpha=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow|\alpha|=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow b=\pm 1.$$

§3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

Dạng toán 1: Tính thể tích vật thể

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần "*Công thức tính thể tích*" và hãy hiểu cần thực hiện theo hai bước, cụ thể:

Bước 1: Xác định công thức tính diện tích thiết diện S(x) (hoặc S(y)), thông thường chúng ta gặp thiết diện là các hình cơ bản.

Bước 2: Khi đó:

$$V=\int_a^b S(x)dx\ \ (\text{hoặc } V=\int_a^b S(y)dy\,).$$

Thí dụ 1. *Tính thể tích của vật thể*:

a. *Nằm giữa hai mặt phẳng* x = 0 *và* $x=\frac{\pi}{2}$, *biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục* Ox *tại điểm có hoành độ* x ($0\le x\le\frac{\pi}{2}$) *là một hình vuông cạnh* $\sqrt{\sin^3 x}$.

b. *Nằm giữa hai mặt phẳng* x = 1 *và* x = 4, *biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục* Ox *tại điểm có hoành độ* x ($1\le x\le 4$) *là một tam giác đều cạnh là* $\sqrt{x}-1$.

✍ *Giải*

a. Diện tích thiết diễn S(x) được cho bởi:

$$S(x)=\left(\sqrt{\sin^3 x}\right)^2=\sin^3 x=\frac{1}{4}\left(3\sin x-\sin 3x\right).$$

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2}(3\sin x - \sin 3x)dx = \frac{1}{4}\left(-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

b. Diện tích thiết diễn S(x) được cho bởi:

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right).$$

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{1}^{4}\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right)\Big|_1^4 = \frac{7\sqrt{3}}{24}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các thể tích vật thể trên:

- Ở câu a) vì thiết diện là hình vuông (giả sử cạnh bằng a) nên ta có ngay $S = a^2$.
- Ở câu b) vì thiết diện là tam giác đều (giả sử cạnh bằng a) nên ta có ngay $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dạng toán 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay dạng 1

Phương pháp

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* y = f(x), x = a, x = b, y = 0 *quay quanh trục* Ox"
ta áp dụng công thức:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Dạng 2: Với yêu cầu "*Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* x = f(y), y = a, y = b, x = 0*, quay quanh trục* Oy "
ta áp dụng công thức :

$$V = \pi\int_a^b x^2dy = \pi\int_a^b f^2(y)dy.$$

☞ ***Chú ý***: Trong một số trường hợp chúng ta cần tìm cận a, b thông qua việc thiết lập điều kiện không âm cho hàm số f(x) (hoặc f(y)).

Thí dụ 1. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi*:

a. *Quay quanh trục hoành một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = e^x$, *trục hoành và hai đường thẳng* x = 0, x = 3.

b. *Quay quanh trục tung một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = 3 - x^2$, *trục tung và đường thẳng* y = 1.

✍ *Giải*

a. Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \pi\int_0^3 y^2dx = \pi\int_0^3 e^{2x}dx = \frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}(e^6 - 1).$$

b. Biến đổi hàm số về dạng:

$y = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 - y$ (cần có điều kiện $3 - y \ge 0 \Leftrightarrow y \le 3$).

Khi đó, thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \pi\int_1^3 x^2dy = \pi\int_1^3 (3-y)dy = \pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 2\pi.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các thể tích khối tròn xoay trên:

- Ở câu a) chúng ta sử dụng ngay công thức trong dạng 1.
- Ở câu b) chúng ta cần thực thêm công việc biến đổi hàm số về dạng x = f(y) và ở đây nhờ điều kiện có nghĩa của y chúng ta nhận được cận y = 3.

Thí dụ 2. *Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay hình* H *quanh trục* Ox, *với*:

a. $H = \{y = 0;\ y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x};\ x = \frac{\pi}{2};\ x = \pi\}$.

b. $H = \{y = 0;\ y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x};\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}\}$.

✍ *Giải*

a. Thể tích vật tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}(1 + \cos^4 x + \sin^4 x)dx = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{7 - \cos 4x}{4}\right)dx = \pi\left(\frac{7}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{7}{8}\pi^2 \text{ (đvtt)}.$$

b. Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}(\cos^6 x + \sin^6 x)dx = \pi\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)dx = \pi\left(\frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi^2}{16} \text{ (đvtt)}.$$

Thí dụ 3. *Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay hình* H *quanh trục* Ox, *với*:

a. $H = \{y = 3ax - x^2\ (a > 0),\ y = 0\}$.

b. $H = \{y = x\ln x;\ y = 0;\ x = 1;\ x = e\}$.

✍ *Giải*

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là:

$3ax - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3a$.

Khi đó, thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_0^{3a}(3ax - x^2)^2dx = \pi\int_0^{3a}(x^4 - 6ax^3 + 9a^2x^2)dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3a}{2}x^4 + 3a^2x^3\right)\Big|_0^{3a} = \frac{81a^5\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$

b. Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_1^e(x\ln x)^2dx = \pi\int_1^e x^2\ln^2 x dx.$$

Để tính tích phân trên ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{x}\ln x dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$V = \pi\left(\frac{1}{3}x^3\ln^2 x\right)\Big|_1^e - \frac{2\pi}{3}\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3}\underbrace{\int_1^e x^2\ln x dx}_{I}. \quad (1)$$

Xét tích phân I, đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $V = \dfrac{\pi(5e^3 - 3)}{27}$ (đvtt).

Dạng toán 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay dạng 2

Phương pháp

Ta có hai dạng sau:

Dạng 1: Với yêu cầu "*Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ *quay quanh trục* Ox" ta áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b\left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$.

Dạng 2: Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền* (D) *giới hạn bởi* $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$, $y = b$ *quay quanh trục* Oy" ta áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left|f^2(y) - g^2(y)\right| dy$.

Thí dụ 1. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi:*

a. *Quay quanh trục hoành một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số* $y = x^2$ *và* $y = 2 - x^2$.

b. *Quay quanh trục tung một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số* $y = x$ *và* $y = 2 - x^2$.

✍ *Giải*

a. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Thể tích vật tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left|x^4 - (2 - x^2)^2\right|dx = \pi\int_{-1}^{1}\left|4x^2 - 4\right|dx = 4\pi\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = 4\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{16\pi}{3}.$$

b. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right..$$

Thể tích vật thể được cho bởi:

$$V = \pi\int_1^2\left|y^2 - (2 - y)^2\right|dy = \pi\int_1^2\left|4y - 4\right|dy = 4\pi\int_1^2(y - 1)dy = 4\pi\left(\frac{y^3}{2} - y\right)\Big|_1^2 = 10\pi.$$

Thí dụ 2. *Cho hình phẳng giới hạn bởi* $D = \{\, y = \frac{1}{x^2 + 1};\ y = \frac{x^2}{2} \,\}$

a. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi* D.

b. *Tính thể tích vật tròn xoay khi* D *quay quanh* Ox.

✍ *Giải*

Hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Thể tích vật tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left|\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right|dx = \pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2 + 1)^2}dx - \pi\left(\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx - \frac{\pi}{5}. \qquad (1)$$

Xét tích phân

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Thực hiện phép đổi biến x = tant thì $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -\frac{\pi}{4}$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{(\frac{1}{\cos^2 t})^2}dt = \pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \pi\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$

<u>Dạng toán 4:</u> Tính thể tích vật thể tròn xoay dạng 3

Phương pháp

Với yêu cầu " *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi một đường (C) kín*" ta xét hai trường hợp sau:

<u>Trường hợp 1</u>: Khi quay quanh Ox, ta thực hiện hai bước sau:

<u>Bước 1:</u> Phân đường cong kín (C) thành hai cung

(C_1): $y = f_1(x) = y_1$ và (C_2): $y = f_2(x) = y_2$

với $a \le x \le b$ và $f_1(x)$, $f_2(x)$ không âm.

<u>Bước 2:</u> Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_a^b\left|y_1^2 - y_2^2\right|dx.$$

<u>Trường hợp 2</u>: Khi quay quanh Oy, ta thực hiện theo hai bước sau:

<u>Bước 1:</u> Phân đường cong kín (C) thành hai cung

(C_1): $x = f_1(y) = x_1$ và (C_2): $x = f_2(y) = x_2$

với $a \le y \le b$ và $f_1(y)$, $f_2(y)$ cùng dấu.

<u>Bước 2:</u> Thể tích cần xác định được cho bởi:

$$V = \pi\int_a^b \left|x_1^2 - x_2^2\right| dy.$$

Thí dụ 1. *Cho hình tròn* (C) *tâm* I(0; 2), *bán kính* R = 1. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi*:

a. *Quay* (C) *quanh trục* Ox. a. *Quay* (C) *quanh trục* Oy.

✍ *Giải*

Đường tròn (C) được cho bởi:

$$(C): \begin{cases} \text{Tâm I}(0;\ 2) \\ \text{Bán kính R=1} \end{cases} \Leftrightarrow (C): x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

a. Khi quay (C) quanh trục hoành ta nhận được khối tròn xoay chính là hình cầu bán kính R = 1, do đó:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

b. Ta có:

- Nửa (C) ở trên ứng với $2 \le y \le 4$ có phương trình:

$$y = f_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2} \quad \text{với } x\in[-1;\ 1]$$

- Nửa (C) ở dưới ứng với $0 \le y \le 2$ có phương trình:

$$y = f_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2} \quad \text{với } x\in[-1;\ 1].$$

Khi đó, thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx = 8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Thực hiện phép đổi biến x = sint suy ra dx = cost.dt.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$V = 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\cos t.dt = 4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 4\pi(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2.$$

Thí dụ 2. *Tính thể tích vật thể tạo bởi hình* (E): $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 1$ *quay quanh trục* Oy.

✍ *Giải*

Elip (E) có tâm I(4,0), trục lớn có độ dài 2a = 8, trục nhỏ có độ dài 2b = 4.

Vậy:

- Nửa (E) ứng với $2 \le x \le 4$ có phương trình:

$$x = f_1(y) = 4 - 2\sqrt{1-\frac{y^2}{16}} \quad \text{với } y\in[-4;\ 4].$$

- Nửa (E) ứng với $4 \le x \le 6$ có phương trình:

$$x = f_2(y) = 4 + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} \quad \text{với } y \in [-4; 4].$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính được cho bởi:

$$V = \pi\int_{-4}^{4}\left(f_2^2(y) - f_1^2(y)\right)dy = 32\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{1 - \frac{y^2}{16}}dy.$$

Thực hiện phép đổi biến $y = 4\sin t$ thì $dy = 4\cos t dt$.
Đổi cận:

- Với $y = -4$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Với $y = 4$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$V = 32\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1 - \sin^2 t}.4\cos t dt = 128\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt$$

$$= 128\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 64\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 64\pi^2 \text{ (đvtt)}.$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho hàm số*:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|.$$

a. *Chứng minh rằng* $F(x)$ *là một nguyên hàm của* $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, $a > 0$.

b. *Tìm nguyên hàm hàm số* $h(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + a}$, $a > 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2}.\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} = \sqrt{x^2 + a} = f(x).$$

Vậy, với $a > 0$ thì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b. Viết lại hàm số $h(x)$ dưới dạng $h(x) = x\sqrt{x^2 + a} + 2\sqrt{x^2 + a}$. Từ đó, suy ra:

$$H(x) = \int h(x)dx = \int x\sqrt{x^2 + a}\,dx + 2\int\sqrt{x^2 + a}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + a)^3} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

Ví dụ 2: *Tìm một nguyên hàm* F(x) *của hàm số* $f(x) = 2\sin5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ *sao cho đồ thị* F(x) *cắt đồ thị* f(x) *tại một điểm thuộc* Oy.

✍ *Giải*

Ta có:

$$F(x) = \int\left(2\sin5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}\right)dx = \int\left(2\sin5x + x^{1/2} + \frac{3}{5}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{5}\cos5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C.$$

Khi đó, để đồ thị F(x) cắt đồ thị f(x) tại một điểm thuộc Oy điều kiện là:

$$F(0) = f(0) \Leftrightarrow -\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5} \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy, nguyên hàm cần tìm là $F(x) = -\frac{2}{5}\cos5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + 1$.

Ví dụ 3: *Tìm nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{x^{2009}}{(x^2+1)^{1006}}$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$f(x) = \frac{x^{2008}}{(x^2+1)^{1004}}.\frac{x}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1004}.\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Đặt $u = \frac{x^2}{x^2+1}$, suy ra:

$$du = \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx \Leftrightarrow \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}du.$$

Từ đó:

$$\int f(x)dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1004}.\frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int u^{1004}du = \frac{1}{2}.\frac{1}{1005}u^{1005} + C$$

$$= \frac{1}{2010}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1005} + C.$$

Ví dụ 4: *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \sin^3x.\sin3x$. b. $f(x) = \sin^3x.\cos3x + \cos^3x.\sin3x$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin3x}{4}.\sin3x = \frac{3}{4}\sin3x.\sin x - \frac{1}{4}\sin^2 3x$$

$$= \frac{3}{8}(\cos 2x - \cos 4)x - \frac{1}{8}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{8}(3\cos 2x - 3\cos 4 + \cos 6x - 1).$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{8}\int(3\cos 2x - 3\cos 4x + \cos 6x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{3}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - x) + C.$$

b. Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.\cos 3x + \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}(\cos 3x.\sin x + \sin 3x.\cos x) = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{3}{4}\int \sin 4x dx = -\frac{3}{16}\cos 4x + C.$$

<u>**Ví dụ 5:**</u> *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau*:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$.   b. $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x.\cos x}{2 + \sin x}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos x.\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \int \frac{\sqrt{2}dx}{\sin x.(\cos x - \sin x)} = \int \frac{\sqrt{2}dx}{(\cot x - 1)\sin^2 x}.$$

Đặt u = cotx – 1, suy ra:

$$du = -\frac{1}{\sin^2 x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x}dx = -du.$$

Từ đó:

$$\int f(x)dx = -\sqrt{2}\int \frac{du}{u} = -\sqrt{2}\ln|u| + C = -\sqrt{2}\ln|\cot x - 1| + C.$$

b. Ta biến đổi:

$$\int f(x)dx = \int \frac{(1 + \sin x)\cos x}{2 + \sin x}dx.$$

Đặt u = 2 + sinx suy ra du = cosx.dx. Từ đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{(u-1)du}{u} = \int\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = u - \ln|u| + C = 2 + \sin x - \ln|2 + \sin x| + C.$$

<u>**Ví dụ 6:**</u> *Tìm nguyên hàm* $\int \cos(\ln x)dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó $\int\cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)dx$. (1)

Xét $J = \int\sin(\ln x)dx$, đặt:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó $J = x.\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - I$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$$x.\cos(\ln x) + x.\sin(\ln x) - I \Leftrightarrow \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

Ví dụ 7: *Xác định số b dương để tích phân* $\int_0^b(-3x^2 + 2x + 1)dx$ *có giá trị lớn nhất.*

Giải

Ta có:

$$\int_0^b(-3x^2 + 2x + 1)dx = \left(-x^3 + x^2 + x\right)\Big|_0^b = -b^3 + b^2 + b.$$

Xét hàm số $y = -b^3 + b^2 + b$ trên tập $D = (0; +\infty)$, ta có:

$$y' = -3b^2 + 2b + 1; \qquad y' = 0 \Leftrightarrow -3b^2 + 2b + 1 \Leftrightarrow b = 1 \text{ hoặc } b = -\frac{1}{3} \text{ (loại)}.$$

Bảng biến thiên:

b	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'			+	0	−	
y		0	↗	CĐ 1	↘	$-\infty$

Vậy, hàm số có giá trị lớn nhất khi b = 1.

Ví dụ 8: *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^1\dfrac{(x^3 + 2x^2 + 10x + 1)dx}{x^2 + 2x + 9}$. b. $I = \int_0^1\dfrac{xdx}{(1 + 2x)^3}$.

Giải

a. Biến đổi:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 9} = x + \frac{1}{2}.\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 9}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^1(x + \frac{1}{2}.\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 9})dx = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 9|)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt u = 1 + 2x (suy ra $x = \frac{u-1}{2}$), suy ra du = 2dx $\Leftrightarrow$ $dx = \frac{1}{2}du$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1.
- Với x = 1 thì u = 3.

Từ đó:

$$I = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{(u-1)du}{u^3} = \frac{1}{4}\int_1^3\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{18}.$$

Cách 2: Sử dụng đồng nhất thức x = $\frac{1}{2}$(1 + 2x − 1), ta được:

$$\frac{x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^3}\right].$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{(1+2x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}\right]dx = \frac{1}{4}\int_0^1\left[\frac{1}{(1+2x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}\right]d(1+2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(1+2x)} + \frac{1}{2(1+2x)^2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Ví dụ 9: *Tính tích phân* $I = \int_0^1 \frac{(1+x^4)dx}{1+x^6}$.

Giải

Biến đổi:

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1} \Rightarrow I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^6+1}}_{I_2}.$$

- Tích phân I_1 được xác định bằng cách đặt x = tant, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \text{ và } \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1} = dt.$$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0,
- Với x = 1 thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Khi đó $I_1 = \int_0^{\pi/4} dt = t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$.

- Tích phân I_2 được xác định bằng cách đặt x^3 = tant, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$3x^2dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt \ \& \ \frac{x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}.\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1} = \frac{1}{3}dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$,
- Với $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} dt = \frac{1}{3}t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

Ví dụ 10: (Đề thi đại học khối D – 2003): *Tính tích phân* $I = \int_0^2 |x^2 - x|dx$.

Giải

Ta đi xét dấu hàm số $f(x) = x^2 - x$ trên $[0, 2]$, được:

x	0		1		2
f(x)	0	–	0	+	0

Khi đó:

$$I = -\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 1.$$

Ví dụ 11: *Tính các tích phân sau*:

a. (Đề thi đại học khối A – 2004): $I = \int_1^2 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x - 1}}$.

b. (Đề thi đại học khối A – 2002): $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$.

Giải

a. Đặt $t = \sqrt{x - 1}$, suy ra $t^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $t = 0$.
- Với $x = 2$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 \frac{(t^2 + 1).2tdt}{t + 1} = \int_0^1 (t^2 - t + 2 - \frac{2}{t + 1})dt = \frac{11}{3} - 4\ln 2.$$

b. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4}$, suy ra:

$$t^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 4 \Rightarrow xdx = tdt \Leftrightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Đổi cận:

- Với $x = \sqrt{5}$ thì $t = 3$.
- Với $x = 2\sqrt{3}$ thì $t = 4$.

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

<u>Ví dụ 12:</u> *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int\limits_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$. b. $I = \int\limits_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách đặt ẩn phụ sau:

Cách 1: Đặt $t = 3x + 1$ suy ra $dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì $t = 8$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{9}\int\limits_1^8 \frac{(t+2)dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{9}\int\limits_1^8 (t^{2/3} + 2t^{-1/3})dt = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}t^{5/3} + 2.\frac{3}{2}.t^{2/3}\right)\Big|_1^8 = \frac{46}{15}.$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{3x+1}$ suy ra $t^3 = 3x + 1 \Rightarrow 3t^2dt = 3dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \frac{7}{3}$ thì $t = 2$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{3}.\int\limits_1^2 \frac{(t^3+2)t^2dt}{t} = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 (t^4 + 2t)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}t^5 + t^2\right)\Big|_1^2 = \frac{46}{15}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x^2-1}$, suy ra:

$$dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \ \& \ \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{dt}{t^2+1}$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Với $x = \sqrt{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó $I = \int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dt}{t^2+1}$.

Đặt $t = \tan u$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, suy ra:

$$dt = \frac{du}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u)du \text{ và } \frac{dt}{t^2+1} = \frac{(1+\tan^2 u)du}{\tan^2 u + 1} = du.$$

Đổi cận:

- Với $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $u = \frac{\pi}{6}$.
- Với t = 1 thì $u = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} du = u\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}.$$

Cách 2: Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in (0; \frac{\pi}{2})$, suy ra:

$$dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \text{ và } \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \frac{\tan t.dt}{\tan t} = dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.
- Với $x = \sqrt{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dt = t\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}.$$

Ví dụ 13: (Đề thi đại học khối B – 2003): *Tính tích phân* $I = \int_0^{\pi/4} \frac{(1 - 2\sin^2 x)dx}{1 + \sin 2x}$.

Giải

Biến đổi tích phân về dạng:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} = (\ln|\cos x - \sin x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ví dụ 14: *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^2 x dx$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$.

Giải

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x).\sin^2 x.\cos x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^4 x).\cos x dx.$$

Đặt t = sinx, khi đó dt = cosxdx.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

b. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta được:

$$dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}.(1 + \tan^2\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}.(1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 2t + 3} = -\frac{1}{t+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

<u>Ví dụ 15:</u> (Đề thi đại học khối A, B – 2005): *Tính tích phân*:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x.\cos x.dx}{1+\cos x}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin 2x + \sin x)dx}{\sqrt{1+3\cos x}}$.

Giải

a. Đặt $t = 1 + \cos x$, suy ra:

$\cos x = t - 1 \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 2$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2 x.\sin x.dx}{1+\cos x} = -2\int_2^1 \frac{(t-1)^2 dt}{t} = 2\int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

b. Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x}$, suy ra:

$$t^2 = 1 + 3\cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow -\sin x dx = \frac{2tdt}{3}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 2$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos x + 1).\sin x.dx}{\sqrt{1+3\cos x}} = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{34}{27}.$$

<u>Ví dụ 16:</u> *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$.   b. $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2}dx = \int_0^{2\pi} |\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|\, dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^{3\pi/2} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})dx - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})dx\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-2\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\Big|_0^{3\pi/2} + 2\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] = 4\sqrt{2}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt u = tanx, suy ra:

$$du = \frac{du}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì u = 1,
- Với $x = \frac{\pi}{3}$ thì $u = \sqrt{3}$.

Từ đó:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{3} - \ln 1\right) = \frac{\ln 3}{4}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\tan x.\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\tan x)}{\tan x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\tan x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{3} - \ln 1\right) = \frac{\ln 3}{4}.$$

Cách 3: Ta biến đổi:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\ln 3}{4}.$$

<u>Ví dụ 17:</u> *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x.dx}{\cos^6 x}$.　　　　b. $I = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin 4x.dx}{1+\cos^2 x}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x.\frac{1}{\cos^4 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x(1+\tan^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Đặt t = tanx suy ra $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận:

- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Với $x = \frac{\pi}{3}$ thì $t = \sqrt{3}$.

Khi đó:

$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(1+t^2)dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2+t^4)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{42\sqrt{3}-8}{15}.$$

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin 2x.\cos 2x}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{4\sin 2x.\cos 2x}{3+\cos 2x}dx$$

Đặt t = cos2x, khi đó dt = −2sin2x.dx.
Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1,
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì t = 0.

Khi đó:

$$I = \int_1^0 \frac{-2tdt}{3+t} = -2\int_1^0 \frac{tdt}{t+3} = -2\int_1^0 \frac{(t+3)-3}{t+3}dt = -2\int_1^0 (1-\frac{3}{t+3})dt$$

$$= -2(t - 3\ln|t+3|)\Big|_1^0 = \frac{2}{15}.2 + 6\ln\frac{3}{4}.$$

Ví dụ 18: *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.　　　　b. $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

✍ *Giải*

a. Đặt x = 2sint, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra dx = 2cost.dt.

Đổi cận:

- Với x = 1 thì $t = \frac{\pi}{6}$.
- Với x = 2 thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\sin^2 t.\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 2t.dt = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\cos 4t).dt$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt x = sint, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra dx = cost.dt.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0.
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t.dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t.dt}{\cos t} = \int_0^{\pi/6} dt = t\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6}.$$

Cách 2: Đặt x = cost, t∈(0; π) suy ra dx = –sint.dt.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì $t = \frac{\pi}{2}$.
- Với $x = \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó:

$$I = -\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin t.dt}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\sin t.dt}{\sin t} = -\int_{\pi/2}^{\pi/3} dt = -t\Big|_{\pi/2}^{\pi/3} = -\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

<u>Ví dụ 19:</u> *Tính các tích phân*:

a. (Đề thi đại học khối D – 2005): $I = \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x dx$.

b. (Đề thi đại học khối B – 2004): $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x.dx}{x}$.

✍ *Giải*

a. Viết lại tích phân dưới dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x.dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2x + 1)dx$$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

b. Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$, suy ra:

$$t^2 = 1 + 3\ln x \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3}tdt.$$

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = 1.
- Với x = e thì t = 2.

Khi đó:

$$I = \int_1^2 \frac{t(t^2-1)}{3}.\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4-t^2)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{135}.$$

<u>Ví dụ 20:</u> *Tính các tích phân*:

a. (Đề thi đại học khối D – 2004): $I = \int_2^3 \ln(x^2-x)dx$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

✍ *Giải*

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(x^2-x) \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x-1}{x^2-x}dx \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = x\ln(x^2-x)\big|_2^3 - \int_2^3 \frac{(2x-1)dx}{x-1} = 3\ln3 - 2\ln2 - \int_2^3 \left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= 3\ln3 - 2\ln2 - (2x + \ln|x-1|)\big|_2^3 = 3\ln3 - 2.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = -1 + \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx}_{J}. \quad (1)$$

Xét tích phân J bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\pi/2} - I. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$.

<u>Ví dụ 21:</u> *Tính các tích phân sau*:

a. $I = \int_0^{\pi/3} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x}dx$. b. $I = \int_0^{\pi/2} x\cos^2 x dx$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi I về dạng:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x.dx}{\cos^2 x}}_{I_2}. \quad (1)$$

trong đó:

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int_0^{\pi/3} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} = 1. \quad (2)$$

Với tích phân I_2 được xác định bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = x\tan x\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \text{tg}x dx = (x\tan x + \ln|\cos x|)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\dfrac{1}{2} + 1$.

b. Biến đổi I về dạng:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi/2} xdx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} x\cos 2xdx}_{I_2}\Bigg). \quad (1)$$

trong đó $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$. (2)

Với tích phân I_2 được xác định bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx = \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $I = \dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

<u>**Ví dụ 22:**</u> *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường*:

a. $y = \ln(x + 1)$, *trục tung và hai đường thẳng* $y = -1$ *và* $y = 1$.

b. (Đề thi đại học khối B – 2002): $y = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$ và $y = \dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi hàm số về dạng:

$y = \ln(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 1.$

Từ đó $S = \int_{-1}^{1} |e^y - 1| dy$.

Xét hàm số $f(y) = e^y - 1$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta có:

$f(y) \ge 0 \Leftrightarrow e^y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^y \ge 1 \Leftrightarrow y \ge 0.$

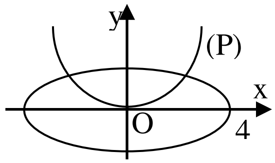
Khi đó:

$$S = \int_{-1}^{0} |e^y - 1| dy + \int_{0}^{1} |e^y - 1| dy = \int_{-1}^{0} \left(1 - e^y\right) dy + \int_{0}^{1} \left(e^y - 1\right) dy$$

$$= \left(y - e^y\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^y - y\right)\Big|_{0}^{1} = e + \frac{1}{e} - 2.$$

b. Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của:

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$



Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm, ta có:

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right).dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}.dx - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} x^2.dx . \quad (1)$$

Ta lần lượt có:

$$I_1 = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} x^2.dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{3}. \quad (2)$$

Để xác định $I_2 = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}.dx$, ta đặt $x = 4\sin t$, $t \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow dx = 4\cos t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x = -2\sqrt{2}$ thì $t = -\pi/4$.
- Với $x = 2\sqrt{2}$ thì $t = \pi/4$.

Khi đó:

$$I_2 = 16 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t.dt = 16 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 t.dt = 8 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 2t).dt$$

$$= (8t + 4\sin 2t)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4\pi + 8. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

<u>Ví dụ 23:</u> *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:*

a. $y = x\sqrt{1+x^2}$, $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

b. $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, $x = \sqrt{1-y^2}$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left| x\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left| \frac{x(1+x^2) - x}{\sqrt{1+x^2}} \right| dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Tới đây, để tính tích phân ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt u = $\sqrt{x^2+1}$, suy ra:

$u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1.
- Với x = $\sqrt{3}$ thì u = 2.

Từ đó:

$$S = \int_1^2 \frac{(u^2-1)udu}{u} = \int_1^2 (u^2-1)du = \left(\frac{u^3}{3} - u \right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Cách 2: Đặt $u = x^2 + 1$, suy ra $du = 2xdx$. Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1.
- Với x = $\sqrt{3}$ thì u = 4.

Từ đó:

$$S = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = \int_1^4 \left(\frac{\sqrt{u}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} \right)\Bigg|_1^4 = \frac{4}{3}.$$

b. Ta có:

$$S = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1-y^2} \right| dy = S = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left| \frac{1-(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} \right| dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tới đây, để tính tích phân ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt y = sint, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ suy ra dy = cost.dt.

Đổi cận:

- Với y = 0 thì t = 0.
- Với y = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì t = $\frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t.\cos t.dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t.\cos t.dt}{|\cos t|} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t.\cos t.dt}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Cách 2: Đặt y = cost, t∈[0; π] suy ra dy = −sint.dt. Đổi cận:

- Với y = 0 thì $t = \frac{\pi}{2}$,
- Với $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I = -\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{\cos^2 t.\sin t.dt}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{\cos^2 t.\sin t.dt}{|\sin t|} = -\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{\cos^2 t.\sin t.dt}{\sin t}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt = -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 24: (Đề thi đại học khối A − 2002): *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi*:

$y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.

✍ *Giải*

Hoành độ giao điểm là nghiệm của:

$|x^2 - 4x + 3| = x + 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3 = x+3 \text{ với } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 3 \\ -x^2+4x-3 = x+3 \text{ với } 1 \le x \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Khi đó:

$$S = \int_0^5 (x+3-|x^2-4x+3|)dx$$

$$= \int_0^1(-x^2+5x)dx + \int_1^3(x^2-3x+6)dx + \int_3^5(-x^2+5x)dx = \frac{109}{6}.$$

Ví dụ 25: *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = \frac{2}{(x-1)^2}$, *đường thẳng* y = 2 *và đường thẳng* y = 8.

✍ *Giải*

Từ hàm số:

$$y = \frac{2}{(x-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{2}{y} \Leftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{\frac{2}{y}} \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{\frac{2}{y}} \text{ hoặc } x = 1-\sqrt{\frac{2}{y}}.$$

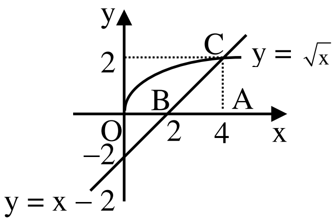
Từ đó:

$$S = \int_2^8\left|\left(1+\sqrt{\frac{2}{y}}\right)-\left(1-\sqrt{\frac{2}{y}}\right)\right|dy = \int_2^8\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}dy = 4\sqrt{2}\int_2^8\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = 4\sqrt{2y}\Big|_2^8 = 8.$$

Ví dụ 26: *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số* $y = \sqrt{x}$, *trục hoành và đường thẳng* y = x − 2.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:



Cách 1: Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số y = $\sqrt{x}$ và đường thẳng y = x − 2 là nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 4.$

Khi đó, diện tích S của hình H bằng diện tích hình tam giác cong OAC trừ đi diện tích hình tam giác ABC, tức là:

$$S = \int_0^4 \sqrt{x}dx - \frac{1}{2}AB.AC = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 - \frac{1}{2}.2.2 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$$

Cách 2: Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số y = $\sqrt{x}$ (suy ra x = y^2) và đường thẳng y = x − 2 là nghiệm của phương trình:

$$y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} y = 2.$$

Khi đó, diện tích S của hình H được cho bởi:

$$S = \int_0^2 (y + 2 - y^2)dy = \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

CHƯƠNG 4 – SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. SỐ PHỨC

1. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

> *Một **số phức** là một biểu thức dạng* a + bi *trong đó* a, b *là các số thực và số* i *thỏa mãn* $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết z = a + bi.
> i *được gọi là **đơn vị ảo***, a *được gọi là **phần thực** và* b *được gọi là **phần ảo** của số phức* z = a + bi.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

☞ ***Chú ý***:

1. Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là:
   $$a + 0i = a,\ a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$
2. Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là thuần ảo):
   $$z = 0 + bi = bi\ (b \in \mathbb{R});\ i = 0 + 1i = 1i.$$
3. Số 0 = 0 + 0i = 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2

> ***Hai số phức*** $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i$ $(a', b' \in \mathbb{R})$ ***bằng nhau*** *nếu và chỉ nếu*:
> $$a = a',\ \ b = b'.$$
> Khi đó, ta viết z = z'.

2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b). Khi đó, ta thường viết M(a + bi) hay M(z). Gốc O biểu diễn số 0.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức được gọi là *mặt phẳng phức*.

- Trục Ox gọi là trục thực.
- Trục Oy gọi là trục ảo.

3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

Định nghĩa 3

> ***Tổng của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ *là số phức*
> $$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta công các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Tính chất của phép cộng số phức

1. *Tính chất kết hợp*:
   $$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

2. *Tính chất giao hoán*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. *Cộng với* 0:

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có:

$$z + (-z) = -z + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là ***số đối*** của số phức z.

Định nghĩa 4

> ***Hiệu của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) *là tổng của* z_1 với $-z_2$, tức là:
>
> $$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm M(a; b) cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó, nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

- $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$.
- $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$.

4. PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

Định nghĩa 5

> ***Tích của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) *là số phức*
>
> $$z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i.$$

☞ ***Nhận xét***: Từ định nghĩa, ta có:

- Với mọi số thực k, và mọi số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có $k(a + bi) = ka + kbi$.
- $0z = 0$ với mọi số phức z.

Tính chất của phép nhân số phức

1. *Tính chất giao hoán*:

$$z_1z_2 = z_2z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

2. *Tính chất kết hợp*:

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

3. *Nhân với* 1:

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng):

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP VÀ MÔDUN CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 6

> ***Số phức liên hợp*** *của* $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *là* $a - bi$ *và được kí hiệu bởi* $\overline{z}$.

Như vậy, ta có:

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

☞ ***Nhận xét***: Từ định nghĩa ta thấy:

1. Số phức liên hợp của $\bar{z}$ lại là z, tức là $\bar{\bar{z}} = z$. Vì thế người ta còn nói z và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.
2. Số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục Ox.

Tính chất

1. Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có:
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,;\quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\,.$$
2. Với mọi số phức z, số $z.\bar{z}$ luôn là một số thực, và nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:
$$z.\bar{z} = a^2 + b^2.$$

<u>Định nghĩa 7</u>

> ***Môđun của số phức*** $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *là số thực không âm* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *và được kí là* $|z|$.

Như vậy, nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

☞ ***Nhận xét***:

1. Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
2. $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

6. PHÉP CHIA CHO SỐ PHỨC KHÁC 0

<u>Định nghĩa 8</u>

> ***Số nghịch đảo*** *của số phức* z *khác* 0 *là số* $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.
>
> ***Thương*** $\dfrac{z'}{z}$ *của phép chia số phức* z' *cho số phức* z *khác* 0 *là tích của* z' *với số phức nghịch đảo của* z, *tức là* $\dfrac{z'}{z} = z'.z^{-1}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, nếu $z \neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$.

☞ ***Chú ý***: Có thể viết $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'.\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'.\bar{z}}{z.\bar{z}}$ nên để tính $\dfrac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử và mẫu số với $\bar{z}$ và để ý rằng $z\bar{z} = |z|^2$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Với $z \neq 0$, ta có $\dfrac{1}{z} = 1.z^{-1} = z^{-1}$.

2. Thương $\dfrac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw = z'$. Từ đó, có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

II. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

> *Cho số phức* w. *Mỗi số phức* z *thỏa mãn* $z^2 = w$ *được gọi là một* ***căn bậc hai*** *của* w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình:

$z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

☞ ***Chú ý 1***: Để tìm căn bậc hai của số phức w, ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu w là số thực (tức là w = a):

- Với $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Với $a < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

Trường hợp 2: Nếu $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$) thì $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của w khi và chỉ khi:

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Ghi nhớ về căn bậc hai của số phức w:

- $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$.
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt:

- Số thực dương a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Số thực âm a có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho phương trình:

$Ax^2 + Bx + C = 0$, với A, B, C là những số phức và $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$, ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

Đặc biệt:

- Nếu Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

- Nếu Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$.

☞ ***Chú ý 2***: 1. Mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau).

2. Mọi phương trình bậc n:

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$$

trong đó $A_0, A_1, ..., A_n$ là n + 1 số phức cho trước, $A_0 \neq 0$ và n là một số nguyên dương luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

III. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC – ỨNG DỤNG

1. SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa 1

(*Acgumen của số phức* $z \neq 0$): *Cho số phức* $z \neq 0$. *Gọi* M *là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu* Ox, *tia cuối* OM *được gọi là một acgumen của* z.

☞ ***Chú ý***:

1. Nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có cùng acgumen.

Định nghĩa 2

(*Dạng lượng giác của số phức*): *Dạng* $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, *trong đó* $r > 0$ *được gọi là* ***dạng lượng giác*** *của số phức* $z \neq 0$. *Còn dạng* $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *được gọi là* ***dạng đại số*** *của số phức* z.

☞ ***Nhận xét***: Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0 cho trước, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: ***Tìm* r**: đó là môdun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

Bước 2: ***Tìm* φ**: đó là acgumen của z, φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Chúng ta tổng kết hai bước thực hiện trên bằng phép biến đổi:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\cos\varphi + i.\sin\varphi\right).$$

☞ ***Chú ý***:

1. $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i.\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$).

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$).
3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

2. NHÂN VÀ CHIA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định lí: Nếu $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ và $z' = r'(\cos\varphi' + i.\sin\varphi')$ với $r, r' \geq 0$ thì :

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i.\sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i.\sin(\varphi - \varphi')] \text{ khi } r' > 0.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu các điểm M, M' biểu diễn theo thứ tự các số phức z, z' khác 0 thì acgumen của $\frac{z}{z'}$ là số đo góc lượng giác tia đầu OM', tia cuối OM.

3. CÔNG THỨC MOA–VRƠ (MOIVRE) VÀ ỨNG DỤNG

Công thức moa–vrơ: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$[r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi).$$

Khi $r = 1$, ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi.$$

Ứng dụng vào lượng giác: Ta có:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi.$$

Mặt khác, sử dụng khai triển lũy thừa bậc ba ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi.(i.\sin\varphi) + 3\cos\varphi.(i.\sin\varphi)^2 + \sin^3\varphi.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác: Số phức $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i.\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right].$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. SỐ PHỨC

Dạng toán 1: Số phức và thuộc tính của nó

Phương pháp

Với số phức $z = a + bi$, các dạng câu hỏi thường được đặt ra là:

Dạng 1: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z. Khi đó, ta có ngay:

- Phần thực bằng a.
- Phần ảo bằng b.

☞***Chú ý***: Một câu hỏi ngược là "*Khi nào số phức* a + bi *là số thực, số ảo hoặc bằng* 0", khi đó ta sử dụng kết quả trong phần chú ý sau định nghĩa 1.

Dạng 2: Hãy biểu diễn hình học số phức z

Khi đó, ta sử dụng điểm M(a; b) để biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

☞ ***Chú ý***: Một câu hỏi ngược là "*Xác định số phức được biểu diễn bởi điểm* M(a; b)", khi đó ta có ngay số z = a + bi.

Dạng 3: Tính môđun của số phức z, khi đó, ta có ngay $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 4: Tìm số đối của số phức z, khi đó, ta có ngay $-z = -a - bi$.

Dạng 5: Tìm số phức liên hợp của z, khi đó, ta có ngay $\bar{z} = a - bi$.

Dạng 6: Tìm số phức nghịch đảo của z, khi đó, ta có ngay $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Thí dụ 1. *Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một tam giác đều có tâm là gốc toạ độ* O *trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số* –i.

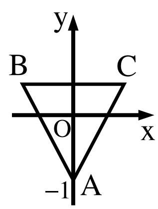
✍ *Giải*

Giả sử tam giác đều ABC (như trong hình vẽ) thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó giả sử đỉnh A(0; –1) biểu diễn số phức –i.

Gọi a là độ dài cạnh ΔABC, ta có $\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = AO = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.

Từ đó suy ra

- Đỉnh $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là số phức $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- Đỉnh $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là số phức $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.



Dạng toán 2: Các phép toán về số phức

Phương pháp

Sử dụng định nghĩa cùng với tính chất của các phép toán (cộng, trừ nhân, chia) trên tập số phức.

Chúng ta có các hằng đẳng thức:

$$a^2 + b^2 = a^2 - (bi)^2 = \underbrace{(a + bi)}_{z}(a - bi) = z.\bar{z}.$$

$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$; $\quad (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$.

$(a + bi)^3 = a^3 - 3a + (3a^2b - b^3)i$; $\quad (a - bi)^3 = a^3 + 3a - (3a^2b + b^3)i$.

Thí dụ 1. *Tìm phần thực phần ảo của số phức* $z = (x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ (*với* $x, y \in \mathbb{R}$).*Với* x, y *nào thì số phức đó là số thực* ?

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$z = (x^2 + 2xyi - y^2) - (2x + 2yi) + 5 = x^2 - y^2 - 2x + 5 + 2y(x - 1)i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $x^2 - y^2 - 2x + 5$ và phần ảo bằng $2y(x - 1)$.

b. Số phức đã cho là số thực điều kiện là:

$$2y(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } y = 0.$$

Thí dụ 2. *Tìm phần thực phần ảo và môđun của số phức* $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3-2i}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \frac{(3+2i)(1+i)}{2} + \frac{(1-i)(3+2i)}{13} = \frac{1+5i}{2} + \frac{5-i}{13} = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $\frac{23}{26}$, phần ảo bằng $\frac{63}{26}$ và môđun bằng $\frac{\sqrt{4498}}{26}$.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \frac{(3+2i)(3-2i) + (1-i)^2}{(1-i)(3-2i)} = \frac{13-2i}{1-5i} = \frac{(13-2i)(1+5i)}{26}$$

$$= \frac{1}{26}(23 + 63i) = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $\frac{23}{26}$, phần ảo bằng $\frac{63}{26}$ và môđun bằng $\frac{\sqrt{4498}}{26}$.

Thí dụ 3. *Tìm điểm biểu diễn các số phức sau*:

a. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2$. $\quad$ b. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^3 - \left(\sqrt{2} - i\right)^3$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} + i^2 + 2 - 2i\sqrt{2} + i^2 = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = (\sqrt{2} + i + \sqrt{2} - i)^2 - 2(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$$

$$= 8 - 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 3: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = (\sqrt{2} + i - \sqrt{2} + i)^2 + 2(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$$

$$= 4i^2 + 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = 2\sqrt{2} + 6i + 3i^2\sqrt{2} + i^3 - (2\sqrt{2} - 6i + 3i^2\sqrt{2} - i^3)$$

$$= 12i + 2i^3 = 12i - 2i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3$$

$$= (\sqrt{2} + i - \sqrt{2} + i)^3 + 3(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i - \sqrt{2} + i)$$

$$= 8i^3 + 6i(2 - i^2) = -8i + 18i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Dạng toán 3: Chứng minh tich chất của số phức

Phương pháp

Sử dụng các phép toán trên tập số phức cùng những tính chất của chúng.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng phần thực của số phức z bằng* $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, *phần ảo của số phức z bằng* $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

✍ *Giải*

Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(a + bi + \overline{a+bi}) = \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) = a \text{ – là phần thực của z.}$$

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(a + bi - \overline{a+bi})(-i) = b \text{ – là phần ảo của z.}$$

Thí dụ 2. *Gọi* A, B *theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số* $z \neq 0$ *và* $z' = \frac{1+i}{2}z$. *Chứng minh rằng* ΔOAB *là vuông cân* (O *là gốc toạ độ*).

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

$$OA = \left|\overrightarrow{OA}\right| = |z|, \qquad OB = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\frac{1+i}{2}z\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|,$$

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left|\frac{1+i}{2}z - z\right| = \left|\frac{-1+i}{2}\right| |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$$

Từ đó, suy ra OB = AB và:

$$OB^2 + AB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|z|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|z|\right)^2 = |z|^2 = OA^2 \Leftrightarrow \Delta OAB \text{ là vuông cân tại B.}$$

<u>Dạng toán 4:</u> Tập hợp điểm

Phương pháp

Câu hỏi thường được đặt ra là "*Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện* K".

Khi đó:

Dạng 1: Số phức z thỏa mãn biểu thức về độ dài (môđun). Khi đó, ta sử dụng công thức $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 2: Số phức z là số thực (thực âm hoặc thực dương), số ảo. Khi đó, ta sử dụng kết quả:

a. Để z là số thực điều kiện là b = 0.

b. Để z là số thực âm điều kiện là:

$$\begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

c. Để z là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

d. Để z là số ảo điều kiện là a = 0.

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho yêu cầu về tập hợp điểm, bài toán thường được cho dưới dạng một biểu thức phức.

<u>Thí dụ 1.</u> *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho* z^2:

a. *Là số ảo.* b. *Là số thực âm.*

c. *Là số thực dương.* d. *Có môđun bằng* 1.

✍ *Giải*

Với số phức z = x + yi (x, y∈ $\mathbb{R}$), ta có:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

a. Để z^2 là số ảo điều kiện là:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, tập hợp điểm các điểm M thuộc hai đường phân giác của góc giữa trục thực, trục ảo.

b. Để z^2 là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 > 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục Ox (trục thực) trừ gốc O.

c. Để z^2 là số thực âm điều kiện là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 < 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục Oy (trục ảo) trừ gốc O.

d. Để z^2 có môđun bằng 1 điều kiện là:

$$\sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường tròn đơn vị.

Thí dụ 2. *Xác định tập hợp các điểm* M *trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn* $(1 + i\sqrt{3})z + 2$, *trong đó* $|z - 1| \leq 2$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$(1 + i\sqrt{3})z + 2 = x + yi \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z = x - 2 + yi \Leftrightarrow z = \frac{x - 2 + yi}{1 + i\sqrt{3}}$$

Khi đó:

$$|z - 1| = \left|\frac{x - 2 + yi}{1 + i\sqrt{3}} - 1\right| = \left|\frac{x - 3 + i(y + \sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}}\right|$$

$$= \left|\frac{[x - 3 + i(y + \sqrt{3})](1 - i\sqrt{3})}{4}\right| = \left|\frac{x + y\sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})}{4}\right|$$

$$|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow \left|x + y\sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})\right| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + y\sqrt{3})^2 + (y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4\left[(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2\right]} \leq 8 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Dạng toán 5: Phương trình phức

Phương pháp

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi đại số và các phép toán về số phức.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử số phức cần tìm là $z = a + bi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bước 2: Thay z vào phương trình và sử dụng sử dụng bằng nhau của hai số phức để tìm a, b.

Bước 3: Kết luận về số phức z cần tìm.

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm phức của phương trình*:

a. $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$. b. $(iz+1)(\bar{z}-2+i)\left[(2+i)z - z + 1\right] = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{(2+i)(1+i)}{1^2+1^2}z = \frac{(-1+3i)(2-i)}{2^2+1^2} \Leftrightarrow \frac{(1+3i)}{2}z = \frac{1+7i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{5}.\frac{1+7i}{1+3i} = \frac{2}{5}.\frac{(1+7i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{22+4i}{25}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$.

b. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} iz+1=0 & (1) \\ \bar{z}-2+i=0 & (2) \\ (2+i)z-z+1=0 & (3) \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với phương trình (1), ta biến đổi $iz = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} = i$.
- Với phương trình (2), ta biến đổi:

  $\bar{z} = 2 - i \Leftrightarrow z = 2 + i$.
- Với phương trình (3), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

  Cách 1: Ta biến đổi (3) về dạng:

  $$(1+i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1(1-i)}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

  Cách 2: Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

  $(3) \Leftrightarrow (2 + i)(a + bi) - (a + bi) + 1 = 0$

  $\Leftrightarrow 2a - b + (a + 2b)i - (a + bi) + 1 = 0 \Leftrightarrow a - b + 1 + (a + b)i = 0$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+1=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b=-1 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/2 \\ b=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = i$, $z = 2 + i$ và $z = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng toán 1: Căn bậc hai của số phức

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần căn bậc hai của số phức và lưu ý tới các trường hợp đặc biệt.

Thí dụ 1. *Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau*:

a. $2\sqrt{2}-3$. b. i.

Giải

a. Số $2\sqrt{2}-3<0$ nên có hai căn bậc hai là:

$$\pm i\sqrt{-\left(2\sqrt{2}-3\right)} = \pm i\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \pm i\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \pm i\left(\sqrt{2}-1\right).$$

b. Giả sử số z = x + yi (x, y$\in\mathbb{R}$) là căn bậc hai của i, tức là ta có:

$$i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ x^2 - \left(\dfrac{1}{2x}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ 4x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, số i có hai căn bậc hai là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm căn bậc hai của các số phức trên:

- Câu a) chúng ta sử dụng ngay kết quả của trường hợp 1 trong chú ý của phần căn bậc hai.
- Câu b) chúng ta sử dụng thuật toán đã được trình bày trong trường hợp 2 của chú ý của phần căn bậc hai.
  Với số ảo dạng z = bi nếu chúng ta sử dụng đánh giá về dấu của x và y thì sẽ nhanh chóng tìm được nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể hệ trong câu b) sẽ được thực hiện như sau:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2xy = 1 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thí dụ 2. *Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau*:

a. 3 + 4i. b. $4+6i\sqrt{5}$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 3 + 4i, tức là ta có:

$$3 + 4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 1 \\ x = -2 \text{ và } y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, số 3 + 4i có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i)$.

Cách 2: Ta có phân tích:

$$3 + 4i = 3 + 2.2i = 3 + 2.2.i = (2 + i)^2.$$

Vậy, số 3 + 4i có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i)$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $4 + 6i\sqrt{5}$, tức là ta có:

$$4 + 6i\sqrt{5} = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ và } y = \sqrt{5} \\ x = -3 \text{ và } y = -\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy, số $4 + 6i\sqrt{5}$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3 + i\sqrt{5}\right)$.

Cách 2: Ta có phân tích:

$$4 + 6i\sqrt{5} = 4 + 2.3\sqrt{5}i = 4 + 2.3\left(\sqrt{5}i\right) = 3^2 + 2.3\left(\sqrt{5}i\right) + \left(\sqrt{5}i\right)^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2.$$

Vậy, số $4 + 6i\sqrt{5}$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3 + i\sqrt{5}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Ý tưởng cho cách giải 2 trong thí dụ trên với mỗi số phức dạng a + bi (a, b thực khác 0) có thể được giải thích như sau:

Ta viết $bi = 2.\dfrac{b}{2}i$, tới đây cần một phép phân tích số $\dfrac{b}{2}i$ thành hai số b_1 và b_2i sao cho $b_1^2 + \left(b_2 i\right)^2 = a$.

Đối với các em học sinh đã biết vận dụng định lí Viét để nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai thì đây là công việc đơn giản.

Dạng toán 2: Phương trình bậc hai

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần phương trình bậc hai.

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm phức của các phương trình sau*:

a. $z^2 - 2z + 2 = 0$. b. $z^2 - 2iz + 1 = 0$.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta' = 1^2 - 2 = -1$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là:

$z_{1,2} = 1 \pm i$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$(z-1)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z - 1 = \pm i \Leftrightarrow z_{1,2} = 1 \pm i$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = 1 \pm i$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta = (-2i)^2 - 4 = -8 \Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $\pm 2i\sqrt{2}$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_{1,2} = \frac{2i \pm 2i\sqrt{2}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$z^2 - 2iz - 1 = -2 \Leftrightarrow (z-i)^2 = -2 \Leftrightarrow z - i = \pm i\sqrt{2} \Leftrightarrow z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i$.

Chú ý: a. Với phương trình bậc hai có biệt số Δ là số phức chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính biệt số $\Delta = a + bi$.

Bước 2: Tìm hai căn bậc hai của Δ (giả sử $\pm\delta$) theo thuật toán đã biết trong dạng toán 1.

Bước 3: Kết luận, phương trình có hai nghiệm:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}.$$

b. Từ đó, ta thấy công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực vẫn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không, vì:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-B+\delta}{2A} + \dfrac{-B-\delta}{2A} = -\dfrac{B}{A} \\ z_1.z_2 = \dfrac{-B+\delta}{2A}.\dfrac{-B-\delta}{2A} = \dfrac{B^2-\delta^2}{4A} = \dfrac{B^2-\Delta}{4A} = \dfrac{4AC}{4A^2} = \dfrac{C}{A} \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Tìm nghiệm phức của các phương trình sau*:

a. $z^2 + (2-i)z - 2i = 0$. b. $4z^2 - 2z - i\sqrt{3} = 0$.

✍ *Giải*

a. Phương trình có:

$$\Delta = (2-i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-(2-i)-(2+i)\right] = -2 \text{ và } z_2 = \frac{1}{2}\left[-(2-i)+(2+i)\right] = i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Phương trình có $\Delta' = 1 + 4i\sqrt{3}$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta' = 1 + 4i\sqrt{3}$, tức là ta có:

$$1 + 4\sqrt{3}\,i = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 - \left(2\sqrt{3}/x\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^4 - x^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ (x^2-4)(x^2+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = \sqrt{3} \\ x = -2 \text{ và } y = -\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Tức là, biệt số Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i\sqrt{3})$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1}{4}\left[1-(2+i\sqrt{3})\right] = -\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right) \text{ và } z_2 = \frac{1}{4}\left[1+(2+i\sqrt{3})\right] = \frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{3}\right).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ và $z_2 = \frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{3}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để giải các phương trình trên:

- Ở câu a) bằng việc nhận xét được ngay rằng $3 + 4i = (2+i)^2$ chúng ta đã giảm thiểu được các bước tìm căn bâc hai của Δ.
- Câu b) chúng ta cần sử dụng thuật toán để tìm căn bậc hai của Δ'. Tuy nhiên, với những người có kinh nghiệm họ có thể nhẩm được.

Thí dụ 3. *Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng* $4 - i$ *và tích của chúng bằng* $5(1 - i)$.

✍ *Giải*

Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 - i \\ z_1.z_2 = 5(1-i) \end{cases}$$

suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình:

$$z^2 - (4-i)z + 5(1-i) = 0$$

phương trình có $\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -5 + 12i$, tức là ta có:

$$-5 + 12i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 3 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{array}\right.$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 3i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{4 - i + (2 + 3i)}{2} = 3 + i; \qquad z_2 = \frac{4 - i - (2 + 3i)}{2} = 1 - 2i.$$

Vậy, hai số cần tìm là $3 + i$ và $1 - 2i$.

Dạng toán 3: Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình bậc cao

Phương pháp

a. ***Đối với phương trình bậc ba*** thì chúng ta cần thực hiện phép nhẩm nghiệm để phân tích đa thức thành nhân tử (tức nhận được một phương trình tích).

b. ***Đối với phương trình bậc bốn*** dạng đặc biệt chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức):*

a. $z^3 - 1 = 0$. b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z_1 = 1,\ z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_1(1; 0)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_3\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trên mặt phẳng phức.

b. Vì tổng các hệ số bằng 0 nên phương trình có một nghiệm bằng 1 nên ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_1(1; 0)$, $M_2\left(1; \sqrt{3}\right)$ và $M_3\left(1; -\sqrt{3}\right)$ trên mặt phẳng phức.

☞ ***Chú ý***: a. Rất nhiều học sinh khi thực hiện câu a) do thói quen tìm nghiệm thực nên đã chỉ ra nghiệm duy nhất $x = 1$. Các em học sinh cần ghi nhớ nội dung chú ý 2 trong phần lí thuyết, nên sử dụng hằng đẳng thức để biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích.

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng kết quả $a + b + c + d = 0$ thì phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (với a, b, c, d là những số thực) có nghiệm bằng 1, do đó nó được phân tích thành:

$$(z - 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

Tương tự, nếu phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ có:

$$a - b + c - d = 0$$

thì nó có nghiệm bằng -1, do đó nó được phân tích thành:

$$(z + 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

c. Các em học sinh hãy chứng minh rằng "*Kết quả trên vẫn đúng với phương trình bậc ba có hệ số phức*".

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $z^4 - 1 = 0$. b. $z^4 + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1 \text{ và } z = \pm i.$$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^4 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - i)(z^2 + i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2 = i & (1) \\ z^2 = -i & (2) \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với phương trình (1), giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 2i, tức là ta có:

$$i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

- Với phương trình (2), giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $-i$, tức là ta có:

$$-i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = -1 \text{ và } x, y \text{ trái dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Như vậy, qua ví dụ trên:

a. Ở câu a) chúng ta sử dụng hằng đẳng thức để chuyển phương trình ban đầu về tích của hai phương trình bậc hai.

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng tính chất $i^2 = -1$ để làm xuất hiện dạng $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

2. Chúng ta đều biết rằng các phương trình trùng phương dạng:

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

được giải bằng việc sử dụng ẩn phụ $t = z^2$.

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

Dạng toán 1: Dạng lượng giác của của số phức

Phương pháp

Sử dụng kiến thức được trình bày trong nhận xét của phần 1.

Thí dụ 1. *Tìm dạng lượng giác của các số phức* $\bar{z}$, —z, $\dfrac{1}{\bar{z}}$, kz ($k \in \mathbb{R}^*$), biết:

a. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

b. $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, với $r > 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có:

Môdun $r = \sqrt{1+3} = 2$,

Acgumen φ thỏa mãn $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ và $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ chọn $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Từ đó, suy ra $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i.\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ và khi đó:

$$\bar{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$—z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z.\bar{z}}z = \frac{1}{4}.2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$kz = \begin{cases} 2k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{nếu } k > 0 \\ -2k\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right) & \text{nếu } k < 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Chúng ta thường sử dụng ngay phép biến đổi:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\bar{z} = \overline{1 + i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$-z = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{\overline{1 - i\sqrt{3}}}{1 + 3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

b. Ta lần lượt có:

- Số phức $\bar{z}$ có môdun r và acgumen bằng $-\varphi$ nên có dạng:
  $\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i.\sin(-\varphi)]$.
- Số phức $-z$ có môdun r và acgumen bằng $\varphi + \pi$ nên có dạng:
  $-z = r[\cos(\varphi + \pi) + i.\sin(\varphi + \pi)]$.
- Số phức $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z.\bar{z}}z$ có môdun $\frac{1}{r^2}r = \frac{1}{r}$ và acgumen bằng φ nên có dạng:
  $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.
- Số phức kz có môdun $|kz| = |k|r$ và acgumen bằng φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ nên có dạng:
  $$kz = \begin{cases} kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi) & \text{nếu } k > 0 \\ -kr[\cos(\varphi + \pi) + i.\sin(\varphi + \pi)] & \text{nếu } k < 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Cho hai số phức* $z_1 = 1 + i$ *và* $z_2 = \sqrt{3} + i$.

a. *Tìm dạng lượng giác của* z_1, z_2.

b. *Sử dụng kết quả trong* a) *tính* z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

b. Ta lần lượt có:

$$z_1z_2 = \sqrt{2}.2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i.\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

☞ ***Chú ý***: Nếu thực hiện các phép toán trên dưới dạng đại số:

a. Ta có:

$$z_1z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\sqrt{3} - 1\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right)i$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)}{2\sqrt{2}}i\right]$$

từ đó, suy ra $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \sin\frac{5\pi}{12}$.

b. Ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1+i)\left(\sqrt{3} - i\right)}{4} = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3} + 1\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)i\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}i\right]$$

từ đó, suy ra $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4} = \cos\frac{\pi}{12}$, $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4} = \sin\frac{\pi}{12}$.

Dạng toán 2: Các ứng dụng

Phương pháp

Sử dụng dạng lượng giác của số phức để thực hiện các phép toán.

Sử dụng công thức moa–vrơ (moivre) và ứng dụng.

Thí dụ 1. *Tìm dạng lượng giác của các căn bậc hai của số phức*:

$$z = \cos\varphi - i.\sin\varphi.$$

✍ *Giải*

Viết lại số phức z dương dạng chuẩn:

$$z = \cos(-\varphi) - i.\sin(-\varphi)$$

từ đó, suy ra nó có hai căn bậc hai là:

$$\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + i.\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } \cos\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i.\sin\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right).$$

Thí dụ 2. *Tính* $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có dạng lượng giác của các số phức:

$$\frac{i}{1+i} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left(\cos 502\pi + i.\sin 502\pi\right) = \frac{1}{2^{1004}}.$$

Cách 2: Ta có:

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left(\cos 502\pi + i.\sin 502\pi\right) = \frac{1}{2^{1004}}.$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Tìm điểm biểu diễn các số phức sau*:

a. $z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2$. b. $z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} + i^2 + 2 - 2i\sqrt{2} + i^2 = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = (\sqrt{2} + i + \sqrt{2} - i)^2 - 2(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$$

$$= 8 - 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 3: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = (\sqrt{2}\ + i - \sqrt{2}\ + i)^2 + 2(\sqrt{2}\ + i)(\sqrt{2}\ - i)$$

$$= 4i^2 + 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = 2\sqrt{2}\ + 6i + 3i^2\sqrt{2}\ + i^3 - (2\sqrt{2}\ - 6i + 3i^2\sqrt{2}\ - i^3)$$

$$= 12i + 2i^3 = 12i - 2i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = (\sqrt{2}\ + i - \sqrt{2}\ + i)^3 +$$

$$+ 3(\sqrt{2}\ + i)(\sqrt{2}\ - i)(\sqrt{2}\ + i - \sqrt{2}\ + i)$$

$$= 8i^3 + 6i(2 - i^2) = -8i + 18i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

<u>Ví dụ 2:</u> *Tìm môđun của các số phức sau*:

a. $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \dfrac{\sqrt{2}+i}{i}$.

b. $z = 1 + (1 - i) + (1 - i)^2 + (1 - i)^3 + ... + (1 - i)^{19}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}+i}{i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1-i)}{2} + (\sqrt{2}+i)i = \frac{\sqrt{3}-3}{2} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{6-\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

b. Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $q = 1 - i$, ta có:

$u_n = u_1.q^{n-1}$,

$$z = S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{q^{20}-1}{q-1} = \frac{(1-i)^{20}-1}{1-i-1} = \frac{(1-i)^{20}-1}{-i}$$

$$= [(-2i)^{10} - 1]i = (2^{10} - 1)i$$

tức là z có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng $2^{10} - 1$ nên $|z| = 2^{10} - 1$.

<u>Ví dụ 3:</u> *Chứng minh rằng*:

a. *Số phức* z *là số ảo khi và chỉ khi* $z = -\overline{z}$.

b. *Với mọi số phức* z, z' *ta có* $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết:

$z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = -\overline{a+bi} = -a + bi \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow$ Số phức z là số ảo.

b. Với hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), ta lần lượt có:

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+bi)+(a'+b'i)} = \overline{(a+a')+(b+b')i} = (a + a') - (b + b')i$$
$$= (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \overline{z'}, \text{ đpcm.}$$
$$\overline{z.z'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)} = \overline{(aa'-bb')+(ab'+a'b)i}$$
$$= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z}.\overline{z'}, \text{ đpcm.}$$

__Ví dụ 4:__ *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số thoả mãn mỗi điều kiện sau*:

a. $|z + \bar{z} + 3| = 4$.　　　　b. $(2 - z)(i + \bar{z})$ *là số thực tuỳ ý*.

c. $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$.　　d. $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

✍ *Giải*

Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễm bởi điểm $M(x; y)$.

a. Ta có:

$$4 = |x + iy + x - yi + 3| = |2x + 3| \Leftrightarrow 2x + 3 = \pm 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

b. Ta có:

$$w = (2 - z)(i + \bar{z}) = (2 - x - yi)(i + x - yi) = -x^2 - y^2 + 2x + y + (2 - x - 2y)i$$

Để w là số thực điều kiện là:

$$2 - x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.

c. Ta có:

$$2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + yi - i| = |x + yi - x + yi + 2i|$$
$$\Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = |2(y + 1)i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{4(y+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc parabol (P): $y = \frac{x^2}{4}$.

d. Ta có:

$$4 = |z^2 - (\bar{z})^2| = |(x + yi)^2 - (x - yi)^2| = |4xyi|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{x}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hai hypebol có phương trình $y = \pm\frac{1}{x}$.

__Ví dụ 5:__ *Tìm số phức z thỏa mãn*:

a. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$.　　　b. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt z = x + iy (x, y ∈ $\mathbb{R}$), khi đó ta lần lượt có:

$$1 = \left|\frac{z-1}{z-i}\right| \Leftrightarrow |z - i| = |z - 1| \Leftrightarrow |x + iy - i| = |x + iy - 1|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |x - 1 + iy| \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = y.$$

$$1 = \left|\frac{z-3i}{z+i}\right| \Leftrightarrow |z + i| = |z - 3i| \Leftrightarrow |x + iy + i| = |x + iy - 3i|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y + 1)i| = |x + (y - 3)| \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 8y = 8 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy, số phức cần tìm là z = 1 + i.

Cách 2: Đặt z = x + iy (x, y ∈ $\mathbb{R}$), khi đó ta lần lượt có nhận xét:

- Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$ (với $z_1 = 1$, $z_2 =$ i theo thứ tự được biểu diễn bởi các điểm A(1; 0), B(0; 1)) là đường trung trực của đoạn AB. Từ đó, suy ra M thuộc đường phân giác góc phần từ thứ nhất, tức là y = x.
- Điều kiện $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$ chứng tỏ z có phần ảo bằng 1 (tức là y = 1).

Vậy, số phức cần tìm là z = 1 + i.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$0 = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - 1 = \left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1\right] = \left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - i^2\right]$$

$$= \left(\frac{z+i}{z-i} - 1\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + 1\right)\left(\frac{z+i}{z-i} - i\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i = z-i \\ z+i = -z+i \\ z+i = (z-i)i \\ z+i = -(z-i)i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ (1-i)z = 1-i \\ (1+i)z = -(1+i) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, số phức cần tìm là z = 0, z = ±1.

Ví dụ 6: *Tìm nghiệm phức của mỗi phương trình sau*:

a. $z^2 + \bar{z} = 0$. b. $z^2 + |z| = 0$.

✍ *Giải*

a. Đặt z = x + iy (x, y ∈ $\mathbb{R}$), khi đó phương trình có dạng:

$$(x + iy)^2 + x - yi = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ và } x^2 - y^2 + x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ và } x^2 - y^2 + x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ và } x^2 + x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ và } 4y^2 = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ và } x = 0 \text{ hoặc } x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ và } y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z = 0, z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b. Đặt $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, khi đó phương trình có dạng:

$$(x + iy)^2 + |x + iy| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ y = 0 \text{ và } x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } -y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \\ y = 0 \text{ và } x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } y = \pm i \\ y = 0 \text{ và } x = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = 0$, $z = i$ và $z = -i$.

<u>Ví dụ 7:</u> *Tìm các căn bậc hai của số phức* $4 + 6i\sqrt{5}$.

Giải

Giả sử số $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $4 + 6i\sqrt{5}$, tức là ta có:

$$4 + 6i\sqrt{5} = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ và } y = \sqrt{5} \\ x = -3 \text{ và } y = -\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Vậy, số $1 + 4\sqrt{3}\,i$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3 + i\sqrt{5}\right)$.

<u>Ví dụ 8:</u> Hỏi khi số thực a thay đổi tuỳ ý thì các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của a + 2i vạch nên đường nào ?

Giải

Giả sử số $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của a + i, tức là ta có:

$$a + 2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 2 \end{cases} .$$

Từ phương trình 2xy = 2 chứng tỏ điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol $y = \frac{1}{x}$. Vì với mỗi điểm (x; y) của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch trên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

Ví dụ 9: *Giải các phương trình sau*:

a. $z^2 - 4i\sqrt{2}z - 6i = 0$. b. $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$.

Giải

a. Phương trình có:

$$\Delta' = \left(2i\sqrt{2}\right)^2 + 6i = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = 2i\sqrt{2} - (1+3i) = -1 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)i \text{ và } z_1 = 2i\sqrt{2} + (1+3i) = 1 + \left(2\sqrt{2} + 3\right)i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Đặt $t = z^2 + z$, phương trình được chuyển về dạng:

$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -6$.

Ta lần lượt:

- Với t = 2, ta được:

$$z^2 + z = 2 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1 \text{ và } z_2 = -2.$$

- Với t = −6, ta được:

$$z^2 + z = -6 \Leftrightarrow z^2 + z + 6 = 0.$$

Phương trình này có $\Delta = 1 - 24 = -23$ nên có hai nghiệm phân biệt là $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ và $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

Ví dụ 10: *Cho phương trình* $z^2 - mz - 6i = 0$.

a. *Giải phương trình với* $m = 4i\sqrt{2}$.

b. *Tìm* m *để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng* 5.

Giải

a. Với $m = 4i\sqrt{2}$ phương trình có dạng $z^2 - 4i\sqrt{2}z - 6i = 0$.

Phương trình có:

$$\Delta' = \left(2i\sqrt{2}\right)^2 + 6i = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

nên nó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = 2i\sqrt{2} - (1+3i) = -1 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)i,$$

$$z_2 = 2i\sqrt{2} + (1+3i) = 1 + \left(2\sqrt{2} + 3\right)i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Giả sử hai nghiệm của phương trình là z_1, z_2, suy ra:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = m \\ z_1.z_2 = -6i \end{cases}.$$

Khi đó:

$$5 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = m^2 + 12i \Leftrightarrow m^2 = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm(3 - 2i).$$

Vậy, với $m = \pm(3 - 2i)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 11:</u> *Tìm số thực* a, b *để có phân tích*:

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 2z^3 - (1 - a)z^2 + (2b - a)z - b.$$

Sử dụng đồng nhất thức, ta được:

$$\begin{cases} 1 - a = 9 \\ 2b - a = 14 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 - 4z + 5).$$

Từ phân tích trên, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} 2z - 1 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2z = 1 \\ (z - 2)^2 = -1 = i^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \\ z - 2 = \pm i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \\ z = 2 \pm i \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = 2 \pm i$ và $z = \frac{1}{2}$.

<u>Ví dụ 12:</u> *Tìm số thực* a, b *để có phân tích*:

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = z^4 - (2 - a)z^3 - (2a - b + 4)z^2 - (4a + 2b)z - 4b.$$

Sử dụng đồng nhất thức, ta được:

$$\begin{cases} 2 - a = 0 \\ 2a - b + 4 = 4 \\ 4a + 2b = 16 \\ 4b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b).$$

Từ phân tích trên, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} z^2 - 2z - 4 = 0 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z - 1)^2 = 5 \\ (z + 1)^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = \pm\sqrt{5} \\ z + 1 = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \pm \sqrt{5} \\ z = -1 \pm i\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{5}$ và $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Ví dụ 13: *Cho phương trình* $z^4 + pz^2 + q = 0$ *với* p, q *là các số thực. Tìm điều kiện cần và đủ về các số* p, q *để phương trình*:

a. *Chỉ có nghiệm thực.*

b. *Không có nghiệm thực.*

✍ *Giải*

Đặt $t = z^2$, phương trình được biến đổi về dạng $t^2 + pt + q = 0$. (*)

a. Phương trình ban đầu chỉ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

(*) có hai nghiệm không âm ($0 \le t_1 \le t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ -p \ge 0 \\ q \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ p \le 0 \\ q \ge 0 \end{cases}.$$

b. Phương trình ban đầu chỉ không có nghiệm thực khi và chỉ khi:

(*) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm ($t_1 \le t_2 < 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ -p < 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy thực hiện "*Tìm điều kiện để phương trình có cả nghiệm thực và nghiệm không thực*".

Ví dụ 14: *Cho các số phức* $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a. *Viết* z_1, z_2, z_3 *dưới dạng lượng giác.*

b. *Từ câu* a) *hãy tính* $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ *và* $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$z_2 = -2 - 2i = -2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{7\pi}{12} + i.\sin\frac{7\pi}{12}.$$

b. Ta có:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-2 + 2i)}{8} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)i}{4}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ và } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

<u>Ví dụ 15:</u> *Tính* $\left(\dfrac{5 - 3i\sqrt{3}}{1 + 2i\sqrt{3}}\right)^{2010}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(5 + 3i\sqrt{3})(1 + 2i\sqrt{3})}{13} = -1 + i\sqrt{3} = -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Từ đó, suy ra:

$$\left(\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}\right)^{2010} = \left\{-2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{2010}$$

$$= (-2)^{2010}\left[\cos\left(-670\pi\right) + i.\sin\left(-670\pi\right)\right] = 2^{2010}.$$

<u>Ví dụ 16:</u> *Viết dạng lượng giác của số phức z và các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau*:

a. $|z| = 3$ *và một acgument của* iz *là* $\dfrac{5\pi}{4}$.

b. $|z| = \dfrac{1}{3}$ *và một acgument của* $\dfrac{\overline{z}}{1 + i}$ *là* $-\dfrac{3\pi}{4}$.

✍ *Giải*

a. Giả sử z = a + bi với môdun r và acgument φ, ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3,$$

$$iz = i(a + bi) = -b + ai \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Từ đó, suy ra $z = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i.\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i.\sin\frac{3\pi}{8}\right); \quad \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i.\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

b. Giả sử z = a + bi với môdun r và acgument φ, ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\overline{z}}{1 + i} = \frac{(a - bi)(1 - i)}{2} = \frac{a + b}{2}(1 - i) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Từ đó, suy ra z = $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}\right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right);\quad \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i.\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

B. HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1 – KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

1. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP, KHỐI LĂNG TRỤ

Định nghĩa

> ***Hình đa diện*** (gọi tắt là ***đa diện***) *là hình gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện*:
> a. *Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.*
> b. *Mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.*

Định nghĩa

> *Hình đa diện và phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.*

2. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Kết quả

> *Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện* (bằng nhiều cách khác nhau).

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. THỂ TÍCH CỦA KHỐI HỘP CHỮ NHẬT

Định lí 1: *Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước.*

Như vậy:

- Với khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c thì $V = abc$.
- Khối lập phương có cạnh bằng a thì $V = a^3$.

2. THỂ TÍCH CỦA KHỐI CHÓP

Định lí 2: *Thể tích của khối chóp bằng* $\frac{1}{3}$ *tích của diện tích đáy và chiều cao.*

Như vậy, với khối chóp có diện tích đáy bằng $\mathscr{B}$ và chiều cao bằng h ta có:

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}.h.$$

3. THỂ TÍCH CỦA KHỐI LĂNG TRỤ

Định lí 2: *Thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích đáy và chiều cao.*

Như vậy, với khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $\mathscr{B}$ và chiều cao bằng h ta có:

$$V = \mathscr{B}.h.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng toán 1: Tính thể tích

Phương pháp

Để tính thể tích của một khối chóp, khối lăng trụ (gọi chung là (H)) ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

Bước 2: Thiết lập công thức tính thể tích V cho (H).

Bước 3: Dựa vào công thức, ta phân tích V thành các biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính.

Bước 4: Tính độ dài những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng ...

Bước 5: Suy ra giá trị của V.

☞ ***Chú ý***: 1. Với khối đa diện khác chúng ta sử dụng kiến thức về việc phân chia và lắp ghép các khối đa diện.

2. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối hộp chữ nhật chúng ta giảm thiểu năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

Bước 1: Thiết lập công thức tính thể tích V cho (**H**). (1)

Bước 2: Dựa vào giả thiết tính những giá trị trong V. (2)

Bước 3: Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

Thí dụ 1. *Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước làm thành cấp số nhân với công bội là* 2 *và tổng của chúng bằng* 42.

✍ *Giải*

Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$V = abc. \quad (3)$$

Từ giả thiết a, b, c theo thứ tự đó chúng lập thành một cấp số nhân với công bội bằng 2 và tổng của chúng bằng 42, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=42 \\ b=2a \\ c=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2a+4a=42 \\ b=2a \\ c=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=24 \end{cases}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được V = 6.12.24 = 1728 (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: a. Như vậy, để tính thể tích của khối hộp chữ nhật và khối lập phương trên chúng ta đã thực hiện đúng theo ba bước được nêu trong phần phương pháp.

b. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối chóp chúng ta cụ thể năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

Bước 2: Thiết lập công thức tính cho thể tích V thông qua biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính. (1)

Bước 3: Tính độ dài những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng ... (2)

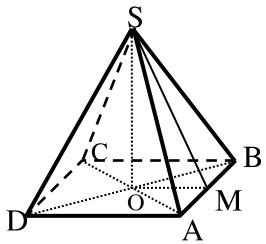
Bước 4: Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

Thí dụ 2. *Tính thể tích hình chóp tứ giác đều* S.ABCD *có*:

a. *Diện tích đáy bằng* 4 *và diện tích của một mặt bên bằng* $\sqrt{2}$.

b. $AC = \sqrt{2}$ *và* $\widehat{ASB} = 60^0$.

Giải



a. Gọi O là tâm của đáy ABCD, ta có:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{4}{3}SO. \qquad (1)$$

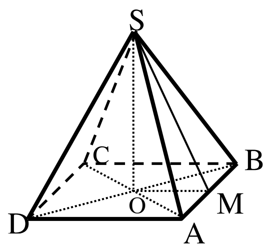
Gọi M là trung điểm AB, ta lần lượt có:

$S_{\Delta ABCD} = AB^2 = 4 \Leftrightarrow AB = 2.$

$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SM.AB \Leftrightarrow SM = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \sqrt{2}$

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = SM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2 - 1 = 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $V = \frac{4}{3}$ (đvdt).



b. Gọi O là tâm của đáy ABCD, ta có:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (3)$$

Gọi M là trung điểm AB, ta lần lượt:

- Trong ΔABC vuông cân tại B, ta có $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. (4)
- Trong ΔSMA vuông tại M, ta có:

$$SM = AM.\cot\widehat{ASM} = \frac{AB}{2}.\cot 30^0 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

- Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \frac{6}{4} - \frac{2}{4} = 1 \Rightarrow SO = 1. \qquad (5)$$

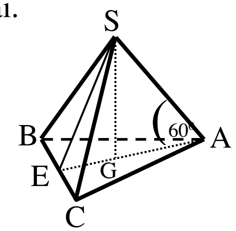
Thay (4), (5) vào (3) ta được $V = \frac{2}{3}$ (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối chóp tứ giác đều trên chúng ta đã thực hiện đúng theo bốn bước được nêu trong phần phương pháp, với lưu ý dạng hình chóp này luôn nhận SO làm đường cao.

Thí dụ 3. a. *Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng* $\sqrt{3}$ *và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc* 60^0. *Tính thể tích của hình chóp.*

b. *Cho hình chóp tam giác có các cạnh đáy bằng* 6, 8, 10. *Một cạnh bên có độ dài bằng* 4 *và tạo với đáy một góc* 60^0. *Tính thể tích khối chóp.*

✍ *Giải*



a. Xét khối chóp tam giác đều S.ABC thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra SG ⊥ (ABC) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SG. \qquad (1)$$

Trong ΔSGA vuông tại G, ta có:

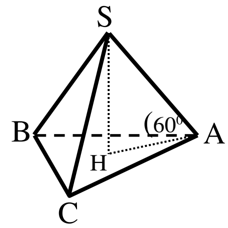
$\widehat{SAG} = g(SA, (ABC)) = 60^0$;

$$SG = AG.\tan\widehat{SAG} = \frac{2}{3}AE.\tan\widehat{SAG} = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}.\tan 60^0 = \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \frac{3}{4} \text{ (đvdt).}$$

b. Xét khối chóp tam giác S.ABC thỏa mãn điều kiện đầu bài với AB = 6, AC = 8, BC = 10, SA = 4 và tạo với đáy một góc 60^0.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC), ta có:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH. \qquad (3)$$

Ta lần lượt:

- Trong ΔABC, ta có:

  $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = BC^2$

  $$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.6.8 = 24. \qquad (4)$$

- Trong ΔSHA vuông tại H, ta có $\widehat{SAH} = g(SA, (ABC)) = 60^0$ nên:

  $$SH = SA.\sin\widehat{SAH} = 4.\sin 60^0 = 2\sqrt{3}. \qquad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3) ta được $V = \frac{1}{3}.24.2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối chóp trên chúng ta đã thực hiện đúng theo bốn bước được nêu trong phần phương pháp, tuy nhiên:

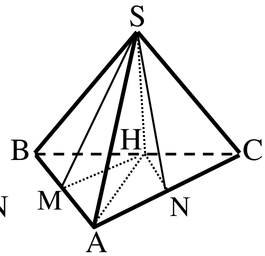
- Ở câu a) chúng ta dễ dàng xác định được đường cao (mọi hình chóp đa giác đều có đường cao là đoạn thẳng nối đỉnh với tâm của đáy) và công thức tính diện tích đáy.

- Ở câu b) bằng việc gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) chúng ta đã thực hiện được hai mục đích là "*Xác định được góc giữa* SA *với* (ABC) *và đường cao* SH *của hình chóp*". Ngoài ra, nếu các em học sinh không biết đánh giá để nhận được ΔABC vuông tại A thì cũng có thể tính được diện tích ΔABC bằng công thức Hêrông.

Thí dụ 4. *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là một tam giác vuông cân* AB = AC = a. *Mặt bên* (SBC) *vuông góc với mặt đáy* (ABC), *hai mặt bên còn lại đều tạo với đáy một góc* 45^0.

a. *Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của* S *xuống đáy* (ABC) *là trung điểm cạnh* BC.

b. *Tính thể tích hình chóp* S.ABC.



Giải

a. Hạ SH vuông góc với BC thì cùng với các điều kiện:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(SBC)=BC\\(ABC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Hạ HM, HN theo thứ tự vuông góc với AB và AC (M, N theo thứ tự sẽ là trung điểm của AB, AC), ta có:

$$SM\perp AB\Rightarrow \widehat{SMH}=45^0,\qquad SN\perp AC\Rightarrow \widehat{SNH}=45^0.$$

Từ đó, ta được:

$$\Delta SHM=\Delta SHN\Rightarrow HM=HN\Rightarrow \Delta BHM=\Delta CHN\Rightarrow HB=HC.$$

Vậy, hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) là trung điểm cạnh BC.

b. Trong ΔSHM vuông tại H, ta có:

$$\widehat{SMH}=45^0\Rightarrow SH=MH=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{12}\ \text{(đvtt)}.$$

Nhận xét: a. Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

"*Nếu hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng* a *nào thuộc mặt phẳng* (P), *vuông góc với giao tuyến của* (P) *và* (Q) *sẽ vuông góc với mặt phẳng* (Q)"

để xác định đường cao của hình chóp. Các em học sinh cần nhớ thêm kết quả:

"*Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba*"

b. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối lăng trụ chúng ta cụ thể năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

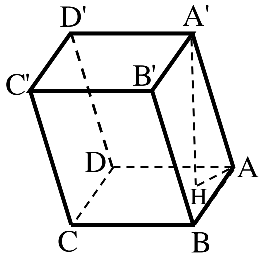
Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

Bước 2: Thiết lập công thức tính cho thể tích V thông qua biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính. (1)

Bước 3: Tính những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng... (2)

Bước 4: Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

Thí dụ 5. *Đáy của một hình lăng trụ là một hình thoi cạnh bằng* a *và góc nhọn bằng* α, *cạnh bên có dài bằng* b *và tạo với đáy một góc* β. *Tính thể tích của lăng trụ.*



✍ *Giải*

Gọi h là độ dài đường cao của hộp, ta có:

$V = B.h.$ (1)

Ta lần lượt:

- Diện tích đáy của nó hình hộp được cho bởi:

$$B = 2S_{\Delta ABD} = 2.\frac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD} = a^2.\sin\alpha. \quad (2)$$

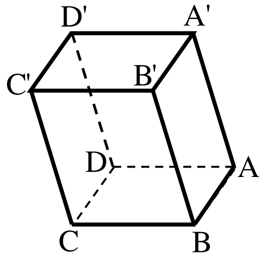
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABCD), ta có:

$$\widehat{A'AH} = \beta \Rightarrow h = A'H = A'A.\sin\widehat{A'AH} = b.\sin\beta. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V = a^2b.\sin\alpha.\sin\beta$ (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được thể tích khối lăng trụ trên chúng ta cần xác định được góc giữa cạnh bên và đáy (góc giữa đường thẳng và mặt phẳng). Với diện tích hình thoi chúng ta đã sử dụng định lí hàm số sin.

Thí dụ 6. *Cho khối lăng trụ tam giác* ABC.A'B'C', *mặt bên* ABB'A' *có diện tích bằng* S. *Khoảng cách giữa cạnh* CC' *và mặt* (ABB'A') *bằng* d. *Tính thể khối tích lăng trụ.*



✍ *Giải*

Ta dựng khối hộp ABCD.A'B'C'D', khi đó:

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}S_{ABB_1A_1}.h. \quad (1)$$

trong đó:

$S_{ABB_1A_1} = S.$ (2)

$h = d((CDD_1C_1).(ABB_1A_1)) = d(CC_1.(ABB_1A_1)) = d.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}Sd$.

Dạng toán 2: Dùng cách tính thể tích để giải toán

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dùng hai cách để tính thể tích của khối đa diện (H), cụ thể:

$$V_{(H)} = f \text{ và } V_{(H)} = g.$$

Bước 2: Từ đó, suy ra f = g.

Thí dụ 1. *Cho tứ diện* ABCD *có điểm* O *nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng là* r. *Gọi* h_A, h_B, h_C, h_D *lần lượt là khoảng cách từ các điểm* A, B, C, D *đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng*:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{d(O, (BCD)).S_{\Delta BCD}}{d(A, (BCD)).S_{\Delta BCD}} = \frac{r}{h_A},$$

tương tự, ta có $\frac{V_{O.CDA}}{V_{B.CDA}} = \frac{r}{h_B}$, $\frac{V_{O.DAB}}{V_{C.DAB}} = \frac{r}{h_C}$, $\frac{V_{O.ABC}}{V_{D.ABC}} = \frac{r}{h_D}$.

Từ đó, suy ra:

$$\frac{V_{O.BCD} + V_{O.CDA} + V_{O.DAB} + V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = = \frac{r}{h_A} + \frac{r}{h_B} + \frac{r}{h_C} + \frac{r}{h_D}$$

$$\Leftrightarrow 1 = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}, \text{ đpcm.}$$

Dạng toán 3: Tỉ số thể tích

Phương pháp

Để tính tỉ số thể tích hai phần của một khối đa diện (H) được phân chia bởi một mặt phẳng (α) ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng thiết diện tạo bởi (α) và (H).

Bước 2: Dùng phương pháp tính thể tích đã biết để tính các thể tích V_1 và V_2 của 2 hình (H_1) và (H_2) của (H) do (α) cắt ra.

Bước 3: Tính $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Cách 2: Sử dụng kết quả:

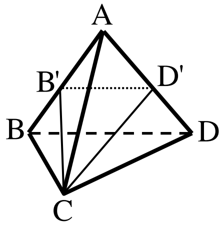
"*Trên ba tia không đồng phẳng* Sx, Sy, Sz *lấy lần lượt các cặp điểm* A *và* A_1, B *và* B_1, C *và* C_1 *khi đó ta luôn có:*

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}\text{"} \quad (*)$$

☞ ***Chú ý***: Dựa vào kết quả (*) chúng ta nhận thêm được một cách tính thể tích.

Thí dụ 1. *Cho tứ diện* ABCD *có thể tích bằng* V. *Gọi* B' *và* D' *lần lượt là trung điểm của* AB *và* AD. *Mặt phẳng* (CB'D') *chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.*

✍ *Giải*



Ta lần lượt có:

$$\frac{V_{A.B'CD'}}{V_{A.BCD}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC}{AC}.\frac{AD'}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AB'CD'} = \frac{V}{4}.$$

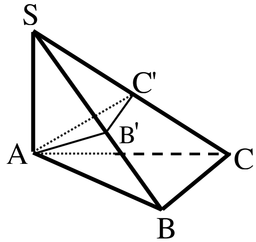
$$V_{CB'D'DB} = V_{ABCD} - V_{AB'CD'} = V - \frac{V}{4} = \frac{3V}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối đa diện trên chúng ta đã sử dụng tỉ số thể tích. Các thí dụ tiếp theo vẫn minh họa phương pháp này nhưng với độ phức tạp cao hơn.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp* S.ABC *có đường cao* SA = a, *đáy là tam giác vuông cân* AB = BC = a. *Gọi* B' *là trung điểm của* SB, C' *là chân đường cao hạ từ* A *của* ΔSAC.

a. *Tính thể tích khối chóp* S.ABC.
b. *Chứng minh rằng* SC *vuông góc với mặt phẳng* (AB'C').
c. *Tính thể tích khối chóp* S.AB'C'.

✍ *Giải*



a. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'. \qquad (1)$$

Ngoài ra, vì ΔSAB cân tại A nên SB ⊥ AB'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC \overset{AC'\perp SC}{\Rightarrow} SC \perp (AB'C'), \text{ đpcm}.$$

c. Sử dụng tỉ số thể tích và hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = 1.\frac{1}{2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SA^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{36} \text{ (đvtt)}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối hộp chóp S.AB’C’ chúng ta sử dụng tỉ số thể tích, và trong đó cần một thủ thuật nhỏ để tính tỉ số SC’:SC. Trong trường hợp các em học sinh không biết tới cách giải này thì cần sử dụng phương pháp truyền thống, cụ thể:

- Sử dụng kết quả câu b) suy ra SC’ là đường cao của hình chóp S.AB’C’. Và sử dụng tính chất về quan hệ vuông góc chứng tỏ ΔAB’C’ buông tại B’.
  Từ đó, suy ra:
  $$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}SC'.S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{6}.SC'.AB'.B'C'. \qquad (3)$$
- Tính các độ dài SC’, AB’, B’C’ dựa trên hệ thức lượng trong tam giác vuông và tam giác đồng dạng. (4)
- Thay (4) vào (3) ta nhận được thể tích hình chóp S.AB’C’.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện* ABCD *có thể tích* V. *Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho.*

✍ *Giải*

Với tứ diện ABCD, gọi G_1, G_2, G_3, G_4, G theo thứ tự là trọng tâm của ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD và tứ diện ABCD.

Khi đó, với phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{3}$, ta có:

$$V_G^{-\frac{1}{3}}(ABCD) = (G_4G_3G_2G_1).$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{V}{27}.$$

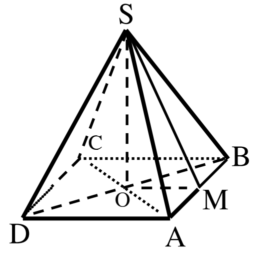
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ chúng ta sử dụng tỉ số thể tích, và trong đó các tỉ số được tính bằng việc sử dụng tính chất của phép vị tự.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

__Ví dụ 1:__ (Đề thi đại học khối B – 2004): *Cho hình chóp tứ giác đều* SABCD *có cạnh đáy bằng* a, *góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng* φ ($0^0 < φ < 90^0$).

a. *Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng* (SAB) *và* (ABCD) *theo* φ.

b. *Tính thể tích khối chóp* SABCD *theo* a *và* φ.



✍ *Giải*

Gọi O là tâm hình vuông ABCD và M là trung điểm AB, ta có ngay:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SAO} = φ.$$

a. Ta có:

$$SM \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMO}.$$

Trong ΔSAO, ta có $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

Trong ΔSMO, ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{MO} = \sqrt{2}\tan\varphi$.

b. Ta có:

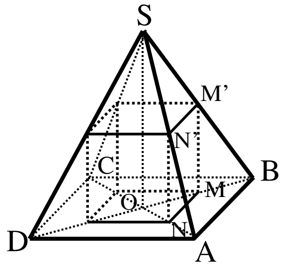
$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.\tan\varphi.$$

Ví dụ 2: *Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng* a *và chiều cao bằng* h. *Tính thể tính hình lập phương có một mặt thuộc mặt đáy của hình chóp còn mặt đối diện có các đỉnh nằm trên cạnh của hình chóp.*

✍ *Giải*

Với hình chóp S.ABCD (hình bên), ta có AB = a, SO = h.

Gọi x là độ dài cạnh của khối lập phương nội tiếp hình chóp, ta có:



$$\frac{M'N'}{AB} = \frac{SM'}{SB} = \frac{SB - BM'}{SB} = 1 - \frac{BM'}{SB} = 1 - \frac{MM'}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 - \frac{x}{h} \Leftrightarrow (a + h)x = ah \Leftrightarrow x = \frac{ah}{a+h}.$$

Khi đó, thể tích của khối lập phương đó là:

$$V = x^3 = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

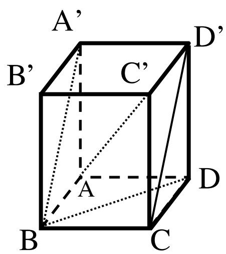
Ví dụ 3: *Tính thể tích khối hộp chữ nhật* ABCD. A'B'C'D' *có* AB = a, AB *hợp với mặt phẳng* (A'D'CB) *một góc* α *và* $\widehat{BAC'} = \beta$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$V = AB.BC.AA'. \quad (1)$$

Ta lần lượt tính các độ dài AA', BC như sau:



- Vì AB hợp với mặt phẳng (A'D'CB) một góc α nên $\widehat{ABA'} = \alpha$, từ đó:

  $$AA' = AB.\tan\alpha = a.\tan\alpha. \quad (2)$$

- Trong ΔABC_1, ta có:

  $$BC' = AB.\tan\widehat{BAC'} = a.\tan\beta.$$

  Khi đó, trong ΔBCC_1, ta có:

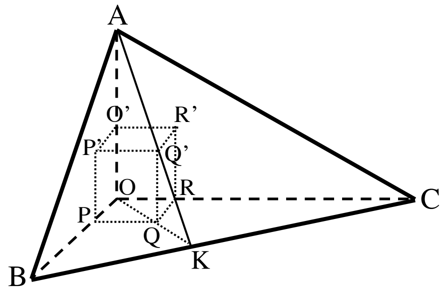
  $$BC^2 = C'B^2 - C'C^2 = C'B^2 - A'A^2 = a^2(\tan^2\beta - \tan^2\alpha)$$

  $$\Leftrightarrow BC = a\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$V = a.\,a\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha}.a.\tan\alpha = a^3.\tan\alpha\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 4: *Các cạnh bên của hình chóp* O.ABC *đôi một vuông góc với nhau và* OA = a, OB = b, OC = c. *Tính thể tích của khối lập phương nằm trong hình chóp này mà một đỉnh trùng với* O *và ba cạnh cùng xuất phát từ* O *của nó thuộc* OA, OB, OC, *còn đỉnh đối diện với* O *thuộc mặt phẳng* (ABC).



✍ *Giải*

Giả sử hình lập phương OPQR.O’P’Q’R’ có cạnh bằng x thỏa mãn điều kiện đầu bài và Q’ thuộc mặt phẳng (ABC).

Ta có:

$$V_{O.ABC} = V_{Q'.OAB} + V_{Q'.OBC} + V_{Q'.OAC} \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}xab + \frac{1}{6}xbc + \frac{1}{6}xac$$

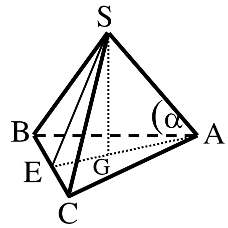
$$\Leftrightarrow abc = x(ab + bc + ac) \Leftrightarrow x = \frac{abc}{ab + bc + ac} \Rightarrow V_{lp} = x^3 = \left(\frac{abc}{ab + bc + ac}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 5: *Thể tích của hình chóp đều* S.ABC *có* SA = a *và tạo với mặt phẳng đáy một góc* α.

✍ *Giải*

a. Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra SG ⊥ (ABC) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SG. \quad (1)$$



Ta lần lượt:

- Trong ΔSGA, ta có $\widehat{SAG} = \alpha$ nên:

  $SG = SA.\sin\widehat{SAG} = a.\sin\alpha.$ (2)

  $AG = SA.\cos\widehat{SAG} = a.\cos\alpha.$

- Trong ΔABC đều, ta có:

$$AG = \frac{2}{3}AE \Leftrightarrow a.\cos\alpha = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = a\sqrt{3}.\cos\alpha. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}.a.\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3.\cos^2\alpha.\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6: *Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều* S.ABCD, biết:

a. AB = a, *góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng* α.

b. AB = a, *góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng* α.

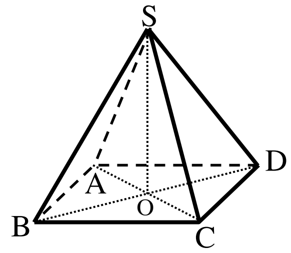
c. *Chiều cao bằng* h *và góc ở đáy của mặt bên bằng* α.

✍ *Giải*

a. Gọi O là tâm của đáy ABCD, suy ra SO ⊥ (ABCD) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (1)$$

Ta lần lượt có:



$$g(SB, (ABCD)) = \widehat{SBO} = \alpha.$$

$$SO = BO.\tan\widehat{SBO} = \frac{BD}{2}.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{2}.\tan\alpha}{2}. \qquad (2)$$

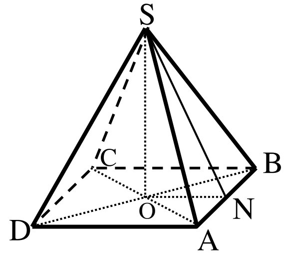
Thay (2) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}.\tan\alpha}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}.\tan\alpha}{6} \text{ (đvtt).}$$

b. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, suy ra SO ⊥ (ABCD) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (3)$$

Ta lần lượt:



- Gọi N là trung điểm AB, ta có:

$$g((SABC), (ABCD)) = \widehat{SNO} = \alpha.$$

- Trong ΔSON, ta có:

$$SO = ON.\tan\widehat{SNO} = \frac{a.\tan\alpha}{2}. \qquad (4)$$

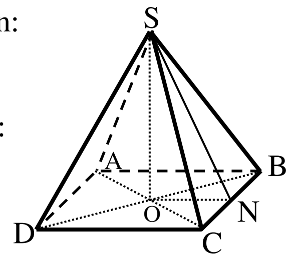
Thay (4) vào (3) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a.\tan\alpha}{2} = \frac{a^3.\tan\alpha}{6} \text{ (đvdt).}$$

c. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, suy ra SO ⊥ (ABCD) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.h. \qquad (5)$$

Gọi N là trung điểm của BC và a là độ dài cạnh đáy, ta có:



$$SN = BN.\tan\widehat{SBN} = \frac{a.\tan\alpha}{2}.$$

Trong ΔSON vuông tại O, ta có:

$$ON^2 = SN^2 - SO^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{a^2.\tan^2\alpha}{4} - h^2 \Leftrightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}. \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta được:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.h.a^2 = \frac{4h^3}{3(\tan^2\alpha - 1)} \text{ (đvtt).}$$

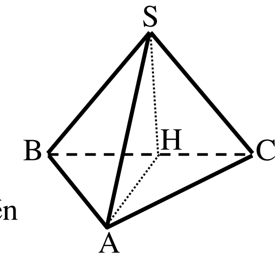
<u>**Ví dụ 7:**</u> *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác cân* AB = AC = a. *Mặt* (SBC) *vuông góc với mặt* (ABC) *và* SA = SB = a.

a. *Chứng minh rằng tam giác* SBC *là tam giác vuông.*

b. *Cho* SC = x, *tính thể tích hình chóp* S.ABC.

✍ *Giải*

a. Hạ AH vuông góc với BC thì H là trung điểm của BC và:



$$\begin{cases}(ABC)\cap(SBC)=BC\\(ABC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC).$$

Nhận xét rằng:

$$\Delta HAB=\Delta HAC=\Delta HAS\Rightarrow HB=HC=HS$$

suy ra ΔSBC vuông tại S do có trung thuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

b. Dựa trên các tam giác vuông, ta có:

$$AH^2=AB^2-BH^2=AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2=AB^2-\frac{SB^2+SC^2}{4}=\frac{1}{4}(3a^2-x^2)$$

$$\Leftrightarrow AH=\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}=\frac{1}{3}AH.\frac{1}{2}SB.SC=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}.a.x=\frac{ax\sqrt{3a^2-x^2}}{12}.$$

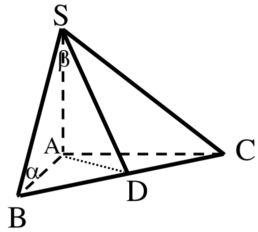
<u>Ví dụ 8:</u> *Cho hình chóp* S.ABC *có hai mặt bên* (SAB) *và* (SAC) *vuông góc với đáy. Đáy* ABC *là một tam giác cân đỉnh* A, *trung tuyến* AD *bằng* a. *Cạnh* SB *tạo với đáy góc* α *và tạo với mặt phẳng* (SAD) *góc* β.

a. *Xác định các góc* α *và* β.

b. *Tính thể tích hình chóp* S.ABC.

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết:



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{SBA}=\alpha.$$

Ta có:

$$\begin{cases}BD\perp AD\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAD)\Rightarrow\widehat{BSD}=\beta.$$

b. Ta có:

$$V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AD.BC=\frac{1}{3}SA.AD.BD.$$

Đặt SB = x, ta lần lượt:

- Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

  $SA=SB.\sin\widehat{SBA}=x.\sin\alpha$; $AB=SB.\cos\widehat{SBA}=x.\cos\alpha$.

- Trong ΔSBD vuông tại D, ta có:

  $BD=SB.\sin\widehat{BSD}=x.\sin\beta$; $SD=SB.\cos\widehat{BSD}=x.\cos\beta$.

- Dựa trên các tam giác vuông, ta có:

$$SB^2 = SD^2 + BD^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2.\sin^2\alpha + a^2 + x^2.\sin^2\beta$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V = \frac{1}{3}.x.\sin\alpha.a.x.\sin\beta = \frac{1}{3}a.\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.\sin\alpha.\sin\beta = \frac{a^3.\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}.$$

Ví dụ 9: *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác vuông cân đỉnh* B *và* $SA \perp (ABC)$, $SB = a$. *Góc giữa hai mặt phẳng* (SBC) *và* (ABC) *bằng* α.

a. *Tính thể tích khối chóp* S.ABC theo a và α.

b. *Hãy tìm* α *để thể tích khối chóp* S.ABC *lớn nhất*.

✍ *Giải*

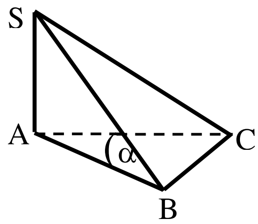
a. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{1}{6}AB^2.SA. \quad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow g((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA} = \alpha.$$

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:



$$AB = SB.\cos\widehat{SBA} = a.\cos\alpha. \quad (2)$$

$$SA = SB.\sin\widehat{SBA} = a.\sin\alpha. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}a^2.\cos^2\alpha.a.\sin\alpha = \frac{a^3}{6}\cos^2\alpha.\sin\alpha \text{ (đvtt)}.$$

b. Xét hàm số $y = \cos^2\alpha.\sin\alpha$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$y' = -2\cos\alpha.\sin\alpha.\sin\alpha + \cos^2\alpha.\cos\alpha = (3\cos^2\alpha - 2)\cos\alpha.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (3\cos^2\alpha - 2)\cos\alpha = 0 \overset{\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

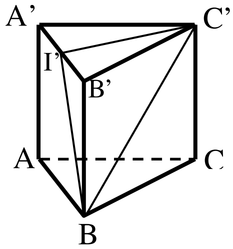
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$\sqrt{2/3}$		$\pi/2$	$+\infty$
y'	//////		+	0	−		//////
y	//////	0	↗	CĐ $2/3\sqrt{3}$	↘	0	//////

Vậy, ta có $\left(V_{S.ABC}\right)_{Max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ đạt được khi $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 10: *Cho lăng trụ tam giác đều* ABC.A'B'C', *cạnh đáy bằng* a, BC' *hợp với mặt bên* (ABB'A') *một góc* α. *Tính hể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*



Ta có $V = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.CC'$. (1)

Ta lần lượt:

- Gọi I' là trung điểm của A'B', ta có:

$$\begin{cases} C'I' \perp A'B' \\ C'I' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow C'I' \perp (ABB'A') \Rightarrow \widehat{C'BI'} = \alpha.$$

- Trong ΔBC'I', ta có $BC' = \dfrac{C'I'}{\sin\widehat{C'BI'}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$.
- Trong ΔBCC', ta có:

$$C'C^2 = C'B^2 - BC^2 = \frac{3a^2}{4\sin^2\alpha} - a^2 = \frac{a^2(3-4\sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha}$$

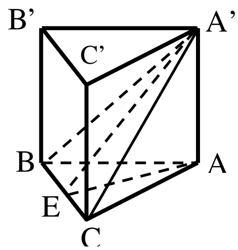
$$\Rightarrow CC' = \frac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha} = \frac{a^3}{8}\sqrt{\frac{3\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 11: *Đáy của khối lăng trụ đứng tam giác* ABC.A'B'C' *là tam giác đều. Mặt* (A'BC) *tạo với đáy một góc* α *và tam giác* A'BC *có diện tích bằng* S. *Tính thể tích khối lăng trụ.*

✍ *Giải*



Ta có:

$$V = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4}.A'A. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Gọi E là trung điểm BC, ta có:

$$AE \perp BC \Rightarrow A'E \perp BC \text{ (định lí ba đường vuông góc)} \Rightarrow \widehat{AEA'} = \alpha.$$

- Khi đó:

$$S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'E = \frac{1}{2}BC.\frac{AE}{\cos\widehat{AEA'}} = \frac{BC}{2}.\frac{\frac{BC\sqrt{3}}{2}}{\cos\widehat{AEA'}} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow BC = 2\sqrt{\frac{S.\cos\alpha}{\sqrt{3}}}. \qquad (2)$$

$$A'A = AE.\tan\widehat{AEA'} = \frac{BC\sqrt{3}}{2}.\tan\widehat{AEA'} = \sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\tan\alpha. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{4S.\cos\alpha}{\sqrt{3}}.\sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\tan\alpha = S\sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 12:</u> *Cho lăng trụ tam giác đều* ABC.A'B'C', *cạnh đáy bằng* a. *Mặt phẳng* (ABC') *hợp với mặt phẳng* (BCC'B') *một góc* α. *Gọi* I, J *theo thứ tự là hình chiếu của* A *lên* BC *và* BC'.

a. *Tính số đo góc* $\widehat{AJI}$.   b. *Tính thể tích hình lăng trụ.*

✍ *Giải*

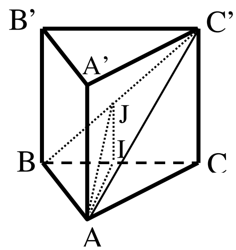
a. Ta có:

$$(ABC') \cap (BCC'B') = BC', \quad \begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCC'B').$$

Vì AJ vuông góc với BC' thì IJ cũng sẽ vuông góc với BC' (định lí ba đường vuông góc), do đó $\widehat{((ABC'), (BCC'B'))} = \widehat{AJI} = \alpha$.

b. Ta có:

$$V = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.CC'. \quad (1)$$



Ta lần lượt:

- Trong ΔAJI, ta có $IJ = AI.\cot\widehat{AJI} = \frac{a\sqrt{3}\cot\alpha}{2}$.
- Trong ΔBCC_1, ta có:

$$CC_1 = BC.\tan\widehat{CBC_1}$$

$$= BC.\frac{IJ}{BJ} = BC.\frac{IJ}{\sqrt{BI^2 - IJ^2}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}\cot\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2\cot^2\alpha}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha - 3}}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha - 3}} = \frac{3a^3}{4\sqrt{\tan^2\alpha - 3}} \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 13:</u> *Cho lăng trụ tứ giác đều* ABCD.A'B'C'D', *đường cao* h. *Mặt phẳng* (A'BD) *hợp với mặt bên* (ABB'A') *một góc* α. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

Trước tiên, ta đi xác định góc α, ta có:

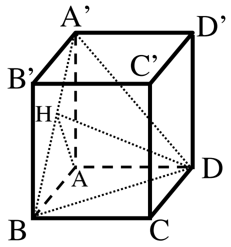
$$(A'BD) \cap (ABB'A') = A'B, \quad \begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABB'A').$$

Hạ AH vuông góc với A'B thì DH cũng sẽ vuông góc với A'B (định lí ba đường vuông góc), do đó:

$$\widehat{((A'BD), (ABB'A'))} = \widehat{AHD} = \alpha.$$

Gọi a là cạnh đáy của hình lăng trụ, suy ra:

- Trong ΔHAD, ta có AH = AD.cotα = a.cotα.
- Trong ΔBAA', ta có:



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A'A^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2.\cot^2\alpha} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow a = h\sqrt{\tan^2\alpha - 1}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V = S_{ABCD}.AA' = a^2.h = h^3(\tan^2\alpha - 1) \text{ (đvtt).}$$

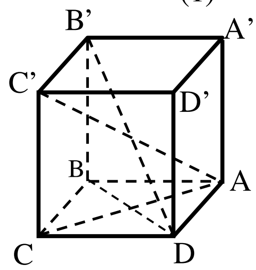
<u>Ví dụ 14:</u> *Cho khối lăng trụ đứng* ABCD.A'B'C'D' *có* AA' = h, *đáy là hình bình hành và* $\widehat{BAD} = \alpha$. *Các đường chéo* AC' *và* DB' *lần lượt tạo với đáy những góc* α *và* β. *Tính thể tích của khối lăng trụ.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$V = S_{ABCD}.AA' = AB.AD.\sin\widehat{BAD}.AA' = h.\sin\alpha.AB.AD. \quad (1)$$

Ta lần lượt:



- Từ giả thiết ta suy ra $\widehat{C'AC} = \alpha$ và $\widehat{B'DB} = \beta$.
- Trong ΔACC' ta có:

  $AC = CC'.\cot\widehat{C'AC} = h.\cot\alpha$.
- Trong ΔDBB' ta có $BD = BB'.\cot\widehat{B'DB} = h.\cot\beta$.
- Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:

  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\alpha$.

  $AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.AD.\cos(\pi - \alpha) = AB^2 + AD^2 + 2AB.AD.\cos\alpha$.

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$$4AB.AD.\cos\alpha = AC^2 - BD^2 = h^2.\cot^2\alpha - h^2.\cot^2\beta$$

$$\Leftrightarrow AB.AD = \frac{h^2(\cot^2\alpha - \cot^2\beta)}{4\cos\alpha}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

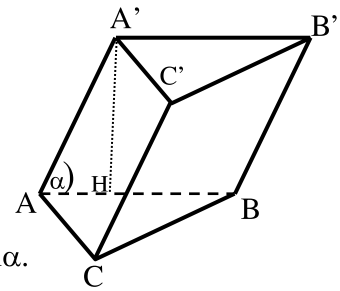
$$V = h.\sin\alpha.\frac{h^2(\cot^2\alpha - \cot^2\beta)}{4\cos\alpha} = = \frac{h^3}{4}.(\cot^2\alpha - \cot^2\beta)\tan\alpha \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 15:</u> *Cho lăng trụ xiên* ABC.A'B'C' *đáy* ABC *là tam giác vuông cân đỉnh* A. *Mặt bên* (ABB'A') *là hình thoi cạnh* a, *nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên* (ACC'A') *hợp với đáy một góc* α. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

Hạ A'H $\perp$ AB thì $A_1H \perp$ (ABC) nên:

$$V = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2.A'H. \quad (1)$$



Ta lần lượt:

- Ta có:

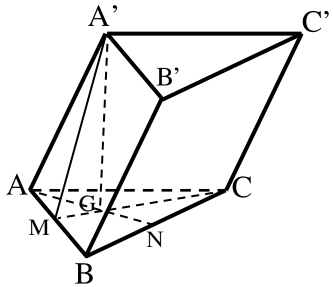
$$\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A')$$

$$\Rightarrow AC \perp AA' \Rightarrow \widehat{A'AH} = \alpha .$$

- Trong $\Delta A'AH$, ta có $A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = a.\sin\alpha$.

Thay (2) vào (1), ta được $V = \frac{1}{2}a^3.\sin\alpha$.

Ví dụ 16: *Cho lăng trụ xiên* ABC.A'B'C' *đáy là tam giác đều cạnh* a. *Hình chiếu của* A' *lên mặt phẳng* (ABC) *trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC. *Cho* $\widehat{BAA'} = 45^0$. *Tính thể tích lăng trụ.*



✍ *Giải*

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $A'G \perp (ABC)$ nên:

$$V = A'G.S_{\Delta ABC} = A'G.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \quad (1)$$

Ta lần lượt:

- Gọi M là trung điểm của AB, ta có:

$\Delta A'AB$ vuông cân tại $A' \Rightarrow A'M = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

- Trong $\Delta A'MG$, ta có:

$$A'G^2 = A'M^2 - MG^2 = A'M^2 - \left(\frac{CM}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow A'G = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 17: *Cho lăng trụ xiên* ABC.A'B'C' *có đáy* ABC *là tam giác vuông tại* A, AB = a, BC = 2a. *Mặt bên* ABB'A' *là hình thoi, mặt bên* BCC'B' *nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này hợp với nhau một góc* α.

a. *Tính khoảng cách từ* A *tới mặt phẳng* (BCC'B').
b. *Xác định góc* α.
c. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

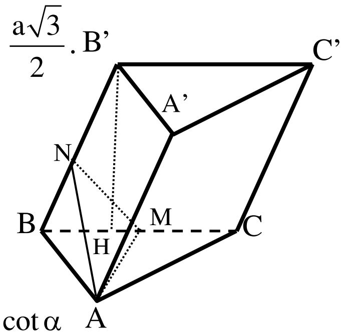
a. Hạ AM vuông góc với BC thì:

$AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AM$.

Trong ΔABC, ta có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$. (1)

$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



b. Kẻ MN vuông góc với BB_1 suy ra $\widehat{ANM} = \alpha$.

c. Hạ $B'H \perp BC$ thì $B'H \perp (ABC)$ nên:

$V = B'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}B'H.AB.AC$. (2)

Ta lần lượt:

- Trong ΔAMN, ta có $MN = AM.\cot\widehat{ANM} = \frac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{2}$.
- Trong ΔABC, ta có:

  $AB^2 = BM.BC \Rightarrow BM = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$.

- Từ hai tam giác vuông đồng dạng là ΔBHB_1 và ΔBNM, ta có:

$$\frac{B'H}{MN} = \frac{B'B}{MB} \Rightarrow B'H = \frac{MN.B'B}{MB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{2}.a}{\frac{a}{2}} = a\sqrt{3}.\cot\alpha. \quad (3)$$

Thay (1), (3) cùng với AB = a vào (2), ta được:

$V = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.\cot\alpha.a.a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^3.\cot\alpha$ (đvtt).

Ví dụ 18: *Cho khối hộp* ABCD.A'B'C'D' *có đáy là hình chữ nhật với* AB = a, AD = b *và cạnh bên có độ bằng* c. *Hai mặt bên* (ABB'A') *và* (ADD'A') *lần lượt tạo với đáy những góc* α *và* β. *Tnh thể tích khối hộp.*

✍ *Giải*

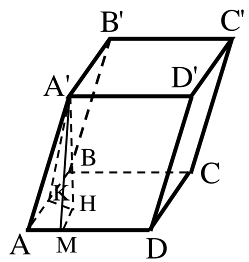
Dựng $A'H \perp (ABCD)$ $(H \in (ABCD))$, $HK \perp AB$ $(K \in AB)$, $HM \perp AD$ $(M \in AD)$.
Theo định lý 3 đường vuông góc, ta có:

$AB \perp A'K \Rightarrow \widehat{A'KH} = \alpha$, $\quad AD \perp A'M \Rightarrow \widehat{A'MH} = \beta$.

Ta có:

$V = A'H.S_{ABCD} = A'H.AB.AD$. (1)

Đặt A'H = x, ta lần lượt:



- Trong $\Delta HA'M$, ta có $A'M = \frac{A'H}{\sin\widehat{A'MH}} = \frac{x}{\sin\beta}$.
- Trong $\Delta MA'A$, ta có:

  $AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta}}$.

- Trong ΔHA'K, ta có:

$$HK = A'H.\cot\widehat{A'KH} = x.\cot\alpha$$

- Từ nhận xét AMHK là hình chữ nhật, ta có:

$$AM = HK \Leftrightarrow \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta}} = x.\cot\beta \Leftrightarrow c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta} = x^2.\cot^2\beta$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\cot^2\beta + \frac{1}{\sin^2\beta}\right) = c^2 \Leftrightarrow x = \frac{c}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta + 1}}. \qquad (2)$$

Thay (2) cùng với AB = a, AD = b vào (1), ta được:

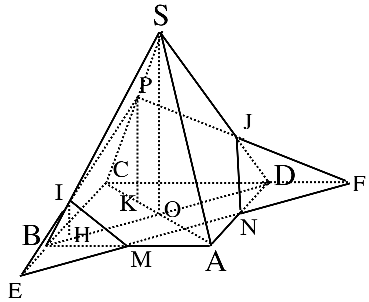
$$V = \frac{abc}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta + 1}} \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 19:</u> *Cho hình chóp tứ giác đều* S.ABCD. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* AB, AD *và* SC.

a. *Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng* (MNP) *và hình chóp*.

b. *Tính tỉ số thể tích của hai phần hình chóp được phân chia bởi mặt phẳng* (MNP).

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt có:

- MN cắt BC, CD theo thứ tự tại E, F.
- PE cắt SB tại I; PF cắt SD tại J.
- Nối IM và JN.

Ta nhận được thiết diện là MNJPI.

b. Đặt SO = h, AB = a và:

$V_1 = V_{S.ABCD}$, $V_2 = V_{SMANJPI}$,

$V_3 = V_{BCDNMIPJ}$, $V_4 = V_{I.BME}$, $V_5 = V_{J.DNF}$, $V_6 = V_{P.CEF}$.

Ta có ngay:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h.$$

$$V_4 = V_5 = \frac{1}{3}S_{\Delta BME}.IH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BM.BE.IH = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{h}{4} = \frac{a^2h}{96}.$$

$$V_6 = \frac{1}{3}S_{\Delta CEF}.PK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CE.CF.PK = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{h}{2} = \frac{3a^2h}{16}.$$

$$V_3 = V_6 - 2V_4 = \frac{3a^2h}{16} - 2.\frac{a^2h}{96} = \frac{a^2h}{6}.$$

$$V_2 = V_1 - V_3 = \frac{1}{3}a^2h - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}.$$

$$\frac{V_2}{V_3} = 1.$$

Vậy, mặt phẳng (A_1EF) chia hình lập phương thành hai phần có thể tích bằng nhau.

CHƯƠNG 2 – MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. DIỆN TÍCH MẶT CẦU – THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Hình cầu với bán kính R, ta có các kết quả:

- Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ – THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Với hình trụ có bán kính đáy R và đường cao h, ta có các kết quả:

- Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh$.
- Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h$.

3. DIỆN TÍCH HÌNH NÓN – THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Với hình nón có bán kính đáy R, đường sinh l và đường cao h, ta có các kết quả:

- Diện tích hình nón là $S_{xq} = \pi R l$.
- Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Dạng toán 1: Diện tích mặt cầu – Thể tích khối cầu

Phương pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa vào giả thiết tính R.
Bước 2: Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

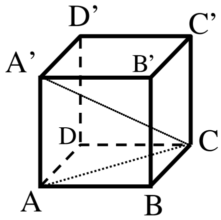
☞ ***Chú ý***: Thông thường chúng ta gặp những yêu cầu trên sau khi thực hiện đòi hỏi "*Xác định tâm và bán kính tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hoặc nội tiếp* một khối đa diện".

Thí dụ 1. *Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là* a, b, c. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.*

✍ *Giải*

Với hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', gọi R là bán kính của mặt cầu.

Ta có:



$$R = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AC^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

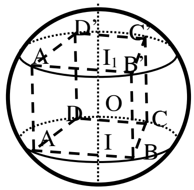
Khi đó, ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ chúng ta cần lưu ý:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ đứng có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy hoặc có thể coi nó là giao điểm của mặt phẳng trung trực một cạnh bên với trục OO_1.



3. Bán kính mặt cầu được tính dựa theo các hệ thức lượng trong tam giác và tứ giác.

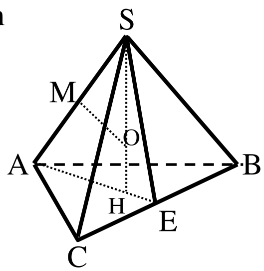
Thí dụ 2. *Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng* a *và chiều cao bằng* h.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

✍ *Giải*

a. Dựng SH ⊥ (ABC), suy ra HA = HB = HC, tức H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Trong ΔSAH dựng đường trung trực của SA cắt SH tại O, ta được:

OA = OB = OC = OS

⇔ Mặt cầu (O, OS) ngoại tiếp tứ diện.

Vì ΔSMO và ΔSHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OS}{SA} = \frac{SM}{SH} \Rightarrow OS = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SH^2 + AH^2}{2SH}$$

$$= \frac{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2h} = \frac{3h^2 + a^2}{6h}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều ABCD là (O, $\frac{3h^2+a^2}{6h}$).

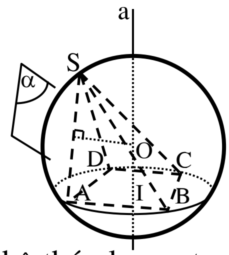
b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3h^2+a^2}{6h}\right)^2 = \frac{\pi\left(3h^2+a^2\right)^2}{9h^2} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3h^2+a^2}{6h}\right)^3 = \frac{\pi\left(3h^2+a^2\right)^3}{162h^3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt cầu ngoại tiếp hình chóp chúng ta cần lưu ý:

1. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp một đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.



3. Bán kính mặt cầu được tính dựa theo các hệ thức lượng trong tam giác và tứ giác.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện* ABCD *có* AD = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC), ΔABC *vuông tại* B *và* AB = b, BC = c.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.*

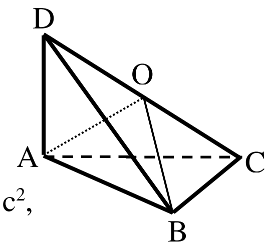
b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

✍ *Giải*

a. Gọi O là trung điểm của CD, nhận xét rằng:

$AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp AC \Leftrightarrow \Delta ACD$ vuông tại A $\Rightarrow OA = OC = OD$.

$\begin{cases} AD \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD$



$\Leftrightarrow \Delta BCD$ vuông tại B $\Rightarrow OB = OC = OD$.

Vậy, mặt cầu (O, OA) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Ta lần lượt có:

$CD^2 = AD^2 + AC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

$R = OA = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với tứ diện ABCD ở trên chúng ta đã sử dụng tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông để xác định được điểm O cách đều các đỉnh của tứ diện.

Dạng toán 2: Diện tích xung quanh của hình trụ – Thể tích khối trụ

Phương pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích xung quanh hình trụ và thể tích khối trụ chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa vào giả thiết tính R, h.

Bước 2: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ và thể tích khối trụ.

☞ ***Chú ý***: Với khối trụ *nội tiếp* và *ngoại tiếp* chúng ta sử dụng định nghĩa hình trụ cùng tính chất của các khối hình liên quan.

Thí dụ 1. *Một hình trụ* T *có bán kính đáy* R *và chiều cao* $R\sqrt{3}$.

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ* T.

b. *Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ* T.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$S_{xq} = 2\pi R.\ R\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi R^2\sqrt{3} + 2\pi R^2 = 2\pi R^2\left(\sqrt{3}+1\right) \text{ (đvdt).}$$

b. Ta có ngay:

$$V = \pi R^2.R\sqrt{3} = \pi R^3\sqrt{3} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện được yêu của bài toán trên chúng ta chỉ cần nhớ được các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

Thí dụ 2. *Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ* (**T**), *cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông có diện tích bằng* a^2.

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ* (**T**).

b. *Tính thể tích của khối trụ* (**T**).

✍ *Giải*

a. Vì thiết diện qua trục là một hình vuông có diện tích bằng a^2 nên cạnh của nó bằng a và từ đó suy ra hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{a}{2}$ và chiều cao bằng a.

Ta có ngay:

$$S_{xq} = 2\pi\frac{a}{2}.a = \pi a^2 \text{ (đvdt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = \pi a^2 + 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ (đvdt).}$$

b. Ta có ngay:

$$V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện được yêu của bài toán trên trước tiên chúng ta cần đi xác định độ dài đường cao và bán kính đáy của hình trụ.

<u>**Dạng toán 3:**</u> Diện tích xung quanh của hình nón – Thể tích khối nón

Phương pháp

Do đặc thù của công thức tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Dựa vào giả thiết tính R, h, *l*.

<u>Bước 2:</u> Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình nón và thể tích khối nón.

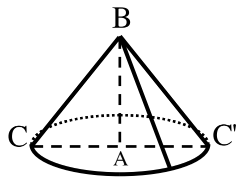
☞ ***Chú ý***: Với khối nón *nội tiếp* và *ngoại tiếp* chúng ta sử dụng định nghĩa hình nón cùng tính chất của các khối hình liên quan.

<u>**Thí dụ 1.**</u> *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AB = a, AC = b. *Xét hình tròn xoay* (N) *sinh bởi* ΔABC *khi quay quanh đường thẳng* AB. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của* (**N**).

✍ *Giải*

Hình tròn xoay (**N**) sinh bởi ΔABC khi quay quanh đường thẳng AB là hình nón có các thuộc tính:

- Bán kính đáy R = AC = b.
- Chiều cao h = AB = a.
- Đường sinh $l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Từ đó, ta lần lượt có:

$S_{xq} = \pi R l = \pi b\sqrt{a^2 + b^2}$ (đvdt).

$S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi R l + \pi R^2 = \pi b\sqrt{a^2 + b^2} + \pi b^2 = \pi b(\sqrt{a^2 + b^2} + b)$ (đvdt).

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi b^2.a$(đvtt).

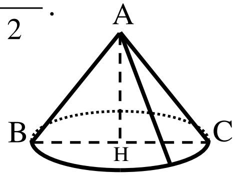
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện được yêu của bài toán trên trước tiên chúng ta cần đi xác định các thuộc tính về độ dài của hình nón (bán kính đáy, chiều cao và đường sinh). Và công việc cuối cùng chỉ cần nhớ được các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích khối nón.

<u>**Thí dụ 2.**</u> *Cắt mặt nón* (**N**) *bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh* a. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình nón* (**N**).

✍ *Giải*

Giả sử thiết diện là ΔABC vuông cân tại đỉnh A cạnh a, từ đó suy ra hình nón dã cho có các thuộc tính:

- Bán kính đáy và chiều cao $R = h = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.AB\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



- Đường sinh $l = AB = a$.

Từ đó, ta lần lượt có:

$$S_{xq} = \pi R l = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} \text{ (đvdt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi R l + \pi R^2 = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+2\right)}{2} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh cần nhớ lại hai định nghĩa sau:

1. Một mặt cầu gọi là *ngoại tiếp* hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là *nội tiếp* mặt cầu đó.
2. Một mặt cầu gọi là *nội tiếp* nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó hình nón được gọi là *ngoại tiếp* mặt cầu.

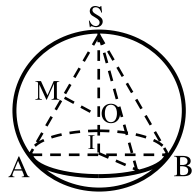
Thí dụ 3. *Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính* R. *Nếu hình nón đó có chiều cao bằng* h. *Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.*

✍ *Giải*

Thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB cân tại S. Trong (SIA), dựng trung trực Mx của đoạn SA và cắt SI tại O.

Vậy, mặt cầu (O; OS) ngoại tiếp hình nón có bán kính đáy r và đường sinh *l*.

Dựa trên tính chất đồng dạng của tam giác, ta có:



$$\frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI} \Leftrightarrow SO.SI = SA.SM = SA.\frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SA^2$$

$$\Leftrightarrow SA^2 = 2SO.SI \Leftrightarrow l = SA = \sqrt{2hR}.$$

Trong ΔSAI, ta có:

$$\Leftrightarrow AI^2 = SA^2 - SI^2 \Leftrightarrow r = AI = \sqrt{2hR - h^2} = \sqrt{h(2R-h)}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi\sqrt{h(2R-h)}.\sqrt{2hR} = \pi h\sqrt{2R(2R-h)} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{h(2R-h)}\right)^2.h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R-h) \text{ (đvtt).}$$

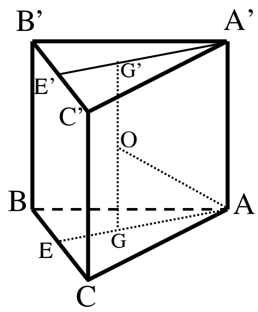
C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho hình lăng trụ đứng* ABC.A'B'C', *đáy là tam giác đều cạnh* a, AA' = b.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

Giải



a. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và ΔA'B'C' và O là trung điểm GG'.

Vì GG' là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔA'B'C', ta có:

OA = OB = OC, OA' = OB' = OC',

OA = OA',

suy ra:

OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'

⇔ Mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C'.

Trong ΔOAG, ta có:

$$OA^2 = AG^2 + OG^2 = \left(\frac{2}{3}AE\right)^2 + \left(\frac{1}{2}GG'\right)^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' là (O, $\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}$).

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right) \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right)^3} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác vuông đỉnh* A, AB = a, AC = b, SA = c *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC).

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

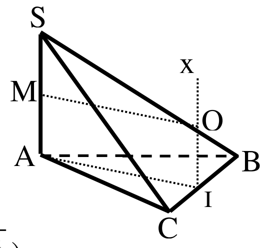
Giải

a. Vì ΔABC vuông tại A nên trung điểm I của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, dựng Ix song song với SA.

Trong mặt phẳng (SA, Ix) dựng đường trung trực của SA cắt Ix tại O, ta được:

$OA = OB = OC = OS \Leftrightarrow$ Mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp tứ diện.

Trong ΔAMO vuông tại M, ta có:



$$R = OA = \sqrt{MA^2 + MO^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là (O, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$).

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 = \pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \text{ (đvdt)}.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3} \text{ (đvtt)}.$$

<u>Ví dụ 3:</u> (Đề thi đại học khối D – 2003): *Cho hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng* (Δ). *Trên* (Δ) *lấy hai điểm* A, B *và* AB = a. *Trong mặt phẳng* (P) *lấy điểm* C, *trong mặt phẳng* (Q) *lấy điểm* D *sao cho* AC, BD *cùng vuông góc với* (Δ) *và* AC = BD = AB.

a. *Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* ABCD.

b. *Tính khoảng cách từ* A *đến mặt phẳng* (BCD) *theo* a.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Nhận xét rằng:

- ΔACD vuông tại A $\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^0$.
- ΔBCD vuông tại B $\Rightarrow \widehat{CBD} = 90^0$.

Vậy, tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu đường kính CD.

Do đó:

$$R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH = d(A, (BCD)).$$

Trong ΔABC vuông cân tại A, ta có $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

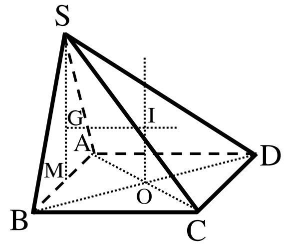
<u>Ví dụ 4:</u> *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a, *mặt phẳng* (SAB) *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD), SA = SB = a.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt:



- Gọi G là trọng tâm ΔSAB, thì vì:

  SA = SB = AB = a ⇔ ΔSAB đều

  ⇒ G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.
- Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.
- Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, ta có IG ⊥ (SAB) và IO ⊥ (ABCD).

Vậy, mặt cầu (I, IA) ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Ta có:

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54} \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 5:</u> *Cho tứ diện* ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a. *Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.*

b. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu tương ứng.*

✍ *Giải*

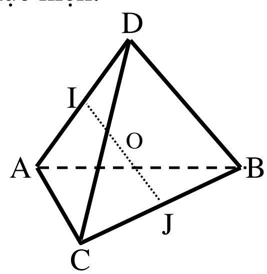
a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC, ta có nhận xét:

ΔCAD = ΔBDA (c.c.c) ⇒ IC = IB ⇒ IJ là trung trực của BC.

ΔABC = ΔDCD (c.c.c) ⇒ JA = JD ⇒ IJ là trung trực của AD.

Vậy, ta thấy AD và BC có đoạn trung trực chung IJ ta thực hiện:

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}.$$



Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC, ta có:

$$\begin{cases} O \in IJ \\ OA^2 = OC^2 \end{cases}$$

Đặt OI = x, ta biến đổi điều kiện $OA^2 = OC^2$ thành:

$$IA^2 + IO^2 = JC^2 + JO^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\sqrt{\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c^2 + b^2 - a^2}{8}}$$

$$\Rightarrow R^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là $\left(O, \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)$.

b. Ta lần lượt có:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)^2 = \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \text{ (đvdt).}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6: *Một khối trụ có bán kính đáy* $a\sqrt{3}$, *chiều cao* $2a\sqrt{3}$. *Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ.*

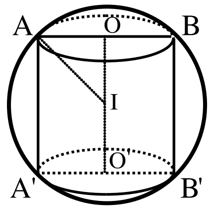
✍ *Giải*

Gọi I là trung điểm của OO'.

Khi đó, khối cầu ngoại tiếp khối trụ có tâm I và bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{OA^2 + \left(\frac{OO'}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}.$$



Do đó, ta được:

$$V_{\text{Cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(a\sqrt{6})^3 = 8\pi a^3\sqrt{6} \text{ (đvtt).}$$

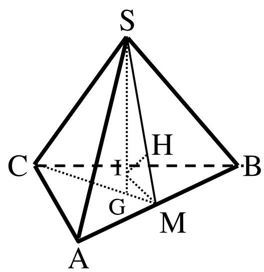
Ví dụ 7: *Cho hình chóp tứ giác đều* SABC *các cạnh bằng* a. *Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả bốn mặt của hình chóp.*

✍ *Giải*

Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra SG là trục đường tròn nội tiếp ΔABC.

Gọi M là trung điểm AB và I là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{SMG}$ với SO và hạ IH vuông góc với SM, suy ra:

$IH = IG.$ (1)



Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} AB \perp GM \\ AB \perp SG \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SGM) \Rightarrow AB \perp IH$$

$$\Rightarrow IH \perp (SAB) \Rightarrow IH = d(I, (SAB)).$$

Vì I thuộc SG nên I cách đều các mặt bên của hình chóp.

Kết hợp với (1), ta kết luận mặt cầu (I; IG) sẽ tiếp xúc với cả bốn mặt của hình chóp S.ABC.

Trong ΔSGM, ta có:

$$\frac{IG}{MG} = \frac{IS}{MS} \Leftrightarrow IG.MS = MG(SG - IG) \Leftrightarrow (MS + MG)IG = MG.SG$$

$$\Leftrightarrow IG = \frac{MG.SG}{MS + MG}. \qquad (2)$$

Trong đó, ta lần lượt có:

$$MG = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$SG = \sqrt{SC^2 - CG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \qquad SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào (2), ta được:

$$R = IG = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Ví dụ 8: *Cho mặt cầu bán kính* R *và một hình trụ có bán kính đáy* R *và chiều cao* 2R. *Tính tỉ số thể tích của khối cầu và khối trụ.*

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

- Khối cầu có bán kính R nên có thể tích là:

$$V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

- Khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao 2R nên có thể tích là:

$$V_2 = \pi R^2 h = \pi R^2.2R = 2\pi R^3.$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 9: *Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy. Một hình vuông* ABCD *có cạnh bằng a và hai cạnh* AB *và* CD *lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy. Mặt phẳng* (ABCD) *không vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ.*

a. *Tính chiều cao và bán kính đáy hình trụ theo* a.
b. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính thể tích của khối trụ.*

✍ *Giải*

a. Giả sử hình trụ có bán kính đáy bằng R thì có chiều cao bằng R.

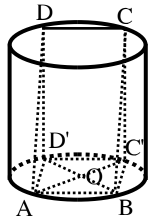
Gọi C', D' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của C, D xuống đường tròn (O), ta có:

$$BD^2 = BD'^2 + DD'^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 4R^2 + R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{2a^2}{5} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy, hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{a}{2}$ và chiều cao bằng a.

b. Ta lần lượt có:

$$S_{xq} = 2\pi R.h = 2\pi.\frac{a\sqrt{10}}{5}.\frac{a\sqrt{10}}{5} = \frac{4\pi a^2}{5} \text{ (đvdt)}.$$



$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = \frac{4\pi a^2}{5} + 2\pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{5} \text{ (đvdt)}.$$

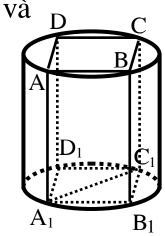
$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{5}\right)^2.\frac{a\sqrt{10}}{5} = \frac{2\pi a^3\sqrt{10}}{25} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 10: *Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là* a, b, c. *Tính thể tích của khối trụ.*

✍ *Giải*

Ta có ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $AA_1 = a$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = a$ và bán kính đáy là:



$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(b^2 + c^2)a \text{ (đvtt)}.$$

Trường hợp 2: Nếu $AA_1 = b$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = b$ và bán kính đáy là:

$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(a^2 + c^2)b \text{ (đvtt)}.$$

Trường hợp 3: Nếu $AA_1 = c$ thì khối trụ có chiều cao $h = AA_1 = c$ và bán kính đáy là:

$$R = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2 + C_1B_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Khi đó, thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)c$ (đvtt).

Ví dụ 11: *Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Mặt phẳng* (α) *song song với trục hình trụ và cắt nó theo thiết diện* ABB_1A_1. *Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy căng một cung* 120^0 *và diện tích xung quanh hình trụ là* 4π. *Tính:*

a. *Diện tích toàn phần hình trụ.*

b. *Diện tích thiết diện* ABB_1A_1.
c. *Thể tích hình trụ.*
d. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều nội tiếp hình trụ.*
e. *Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình trụ.*

✍ *Giải*

Gọi R là bán kính đáy.

a. Ta có:

$S_{xq} = 2\pi R.OO_1$; $\qquad$ $S_{tp} = 2\pi R(R + OO_1)$

$$\Rightarrow \frac{S_{tp}}{S_{xq}} = \frac{2\pi R(R+OO_1)}{2\pi R.OO_1} = \frac{R}{OO_1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{tp} = \frac{3}{2}.4\pi = 6\pi.$$

b. Với thiết diện ABB_1A_1 ta có:

$\widehat{A_1O_1B_1} = 120^0$, $\qquad$ $A_1B_1 = 2R.\sin120^0 = R\sqrt{3}$

Mặt khác, ta có:

$$4\pi = S_{xq} = 2\pi R.OO_1 = 2\pi R.2R \Leftrightarrow R = 1 \Rightarrow A_1B_1 = \sqrt{3}.$$

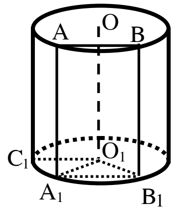
Do đó, diện tích thiết diện là:

$$S = A_1B_1.A_1A = \sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3} \text{ (đvdt)}.$$

c. Ta có ngay $V = \pi R^2h = 2\pi R^3 = 2\pi$ (đvtt).

d. Gọi A_1C_1 là cạnh của n – đa giác đều nội tiếp hình trụ, suy ra $\widehat{A_1O_1C_1} = \frac{2\pi}{n}$ và diện tích đáy của hình lăng trụ bằng:

$$S_n = n.S_{\Delta A_1O_1C_1} = n.\frac{1}{2}R^2.\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n} \text{ (đvdt)}.$$



Kí hiệu S là diện tích đáy hình trụ, ta có:

$$\frac{S_n}{S} = \frac{\frac{nR^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2} = \frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} \Rightarrow \frac{V_n}{V} = \frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow V_n = \frac{V.n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{2\pi.n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = n.\sin\frac{2\pi}{n} \text{ (đvtt)}.$$

e. Đường tròn lớn của hình cầu ngoại tiếp hình trụ là đường tròn ngoại tiếp thiết diện qua trục, do đó bán kính mặt cầu là $R_C = R\sqrt{2}$.

Từ đó, ta được:

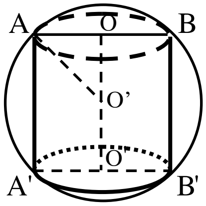
$$V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 12: *Xét hình trụ nội tiếp mặt cầu bán kính* R *mà diện tích thiết diện qua trục hình trụ là lớn nhất. Tính:*

a. *Thể tích* V *và diện tích toàn phần* S_{tp} *của hình trụ.*
b. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều nội tiếp hình trụ.*
c. *Thể tích hình lăng trụ n-giác đều ngoại tiếp hình trụ.*

d. *Diện tích thiết diện song song với trục hình trụ và cách trục một khoảng* $\frac{R}{2}$.

✍ *Giải*



Gọi O, O_1 là tâm của hai đáy hình trụ, với thiết diện qua trục OO_1 tương ứng là ABB_1A_1. Gọi O' là trung điểm OO_1, suy ra O' là tâm mặt cầu đã cho.

Kí hiệu h, r lần lượt là đường cao, bán kính đáy của hình trụ, khi đó diện tích thiết diện qua trục là:

$S_{td} = 2rh.$

Ta có:

$$R^2 = O'A^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow S_{td} = 2\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}.h = \sqrt{h^2(4R^2 - h^2)} \le \frac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2} = 2R^2$$

tức là $(S_{td})_{Max} = 2R^2$, đạt được khi:

$$h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h^2 = 2R^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}.2R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2}.$$

a. Ta có:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2.R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt).}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\frac{R\sqrt{2}}{2}.R\sqrt{2} + 2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3\pi R \text{ (đvdt).}$$

b. Đáy của hình lăng trụ n – giác đều nội tiếp hình trụ có diện tích bằng $\frac{nr^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}$, do đó thể tích hình lăng trụ đó bằng:

$$V_{l.t} = \frac{nr^2}{2}.\sin\frac{2\pi}{n}.2r = nr^3.\sin\frac{2\pi}{n} = n\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^3.\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{nR^3\sqrt{2}}{4}.\sin\frac{2\pi}{n}.$$

c. Đa giác đều n cạnh ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ có độ dài cạnh bằng $2r.\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy hình lăng trụ là:

$$S_đ = n.\frac{1}{2}.r.2r.\tan\frac{\pi}{n} = nr^2.\tan\frac{\pi}{n} \text{ (đvdt).}$$

Khi đó, thể tích của lăng trụn – giác đều ngoại tiếp hình trụ là:

$$V = nr^2.\tan\frac{\pi}{n}.2r = 2nr^3.\tan\frac{\pi}{n} = 2n\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^3.\tan\frac{\pi}{n} = \frac{nR^3}{\sqrt{2}}.\tan\frac{\pi}{n}. \text{ (đvtt).}$$

d. Giả sử thiết diện là MNN_1M_1 thì MNN_1M_1 là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm của MN, ta có:

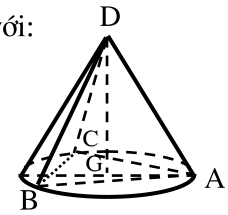
$$OI = \frac{R}{2}; \qquad IM = \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}.$$

Ví dụ 13: *Một khối tứ diện đều cạnh* a *nội tiếp trong một khối nón. Tính thể tích khối nón.*

✍ *Giải*

Tứ diện đều ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC.

Khối nón ngoại tiếp tứ diện có bán kính đáy R và chiều cao h với:



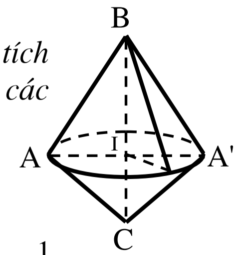
$$R = GA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$h = SG = \sqrt{SA^2 - GA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Khi đó, thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 14: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AB = a, AC = b. *Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng* BC.



✍ *Giải*

Hạ AI vuông góc với BC, khi đó:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AI^2BI + \frac{1}{3}\pi AI^2CI = \frac{1}{3}\pi AI^2(BI + CI) = \frac{1}{3}\pi AI^2BC. \quad (1)$$

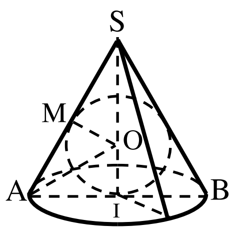
Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$ (đvtt).

Ví dụ 15: *Một hình nón có chiều cao* h *và bán kính đáy bằng* r. *Hãy tính thể tích khối cầu nội tiếp hình nón.*



✍ *Giải*

Với hình nón đỉnh S và có tâm I ở đáy, suy ra SI là trục của đường tròn đáy. Trong (SIA), dựng phân giác Ax của góc $\widehat{SAI}$ và cắt SI tại O.

B

Vậy, mặt cầu (O; OI) nội tiếp hình nón.

Trong ΔSIA, ta có:

$$\frac{OI}{AI} = \frac{OS}{AS} = \frac{SI - OI}{\sqrt{SI^2 + AI^2}} \Leftrightarrow OI\sqrt{SI^2 + AI^2} = AI(SI - OI)$$

$$\Leftrightarrow OI\left(\sqrt{SI^2 + AI^2} + AI\right) = AI.SI \Leftrightarrow OI = \frac{AI.SI}{\sqrt{SI^2 + AI^2} + AI} = \frac{rh}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}.$$

Từ đó, ta được $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{rh}{\sqrt{h^2 + r^2} + r}\right)^3$ (đvtt).

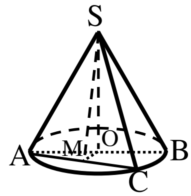
<u>Ví dụ 16:</u> *Một hình nón có đường sinh bằng* a *và góc ở đỉnh bằng* 90^0. *Cắt hình nón bằng mặt phẳng* (α) *đi qua đỉnh sao cho góc giữa* (α) *và mặt đáy của hình nón bằng* 60^0. *Tính diện tích thiết diện.*

✍ *Giải*

Giả sử ΔSAC là thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên AC, suy ra $\widehat{SMO} = 60^0$.

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SM = \frac{SO}{\sin\widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{6}}{3};\ OM = \frac{1}{2}SM = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Trong ΔAOM vuông tại M, ta có:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó, diện tích thiết diện được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}\ \text{(đvdt)}.$$

CHƯƠNG 3 – PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

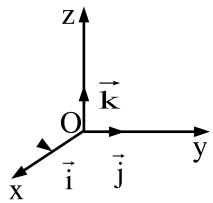
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1

> *Hệ gồm ba trục* Ox, Oy, Oz *đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ trong không gian.*



Kí hiệu Oxyz hoặc (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị lần lượt nằm trên ba trục đó.

- Điểm O được gọi là ***gốc tọa độ***.
- Trục Ox được gọi là ***trục hoành***, trục Oy được gọi ***là trục tung***, trục Oz được gọi là ***trục cao***.

Ta chú ý rằng:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

2. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

Ta có $\vec{v}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Nếu $\vec{v}(x; y; z)$ thì $x = \vec{v}.\vec{i}$, $y = \vec{v}.\vec{j}$, $z = \vec{v}.\vec{k}$.

Các tính chất: Đối với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ ta có các kết quả sau:

1). $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

2). $\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1)$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

3). $\alpha\vec{v}_1 \pm \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 \pm \beta x_2; \alpha y_1 \pm \beta y_2; \alpha z_1 \pm \beta z_2)$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4). $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

5). $|\vec{v}_1| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

6). $\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

7). $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

3. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Ta có M(x; y; z) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

☞ ***Chú ý***: Ta có các kết quả:

$M \equiv O \Leftrightarrow x = y = z = 0.$

$M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là M(x; y; 0).
$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là M(0; y; z).
$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là M(x; 0; z).

$M \in Ox \Leftrightarrow y = 0$ và $z = 0$, tức là M(x; 0; 0).
$M \in Oy \Leftrightarrow x = 0$ và $z = 0$, tức là M(0; y; 0).
$M \in Oz \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$, tức là M(0; 0; z).

4. LIÊN HỆ GIỮA TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ HAI ĐIỂM MÚT

Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

b. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

5. TÍCH CÓ HƯỚNG (HAY TÍCH VECTƠ) CỦA HAI VECTƠ

Định nghĩa 2

Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ *và* $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ *kí hiệu* $[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}]$ *là một vectơ* $\vec{v}$ *được xác định bởi*:

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Các tính chất của tích có hướng: Ta có:

a. Vectơ $[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}]$ vuông góc với hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, tức là:

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}].\vec{v}_1 = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}].\vec{v}_2 = 0.$$

b. $|[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}]| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, trong đó α là góc giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

c. $[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ cùng phương.

Ứng dung của của tích có hướng

Diện tích hình bình hành: Diện tích của hình bình hành ABCD được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]| = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}),$$

Diện tích tam giác: Diện tích của ΔABC được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}).$$

Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

Định lí: *Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng là:*

$$\left[\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right].\vec{v}_3 = 0.$$

Thể tích hình hộp: Thể tích V của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi công thức:

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA_1}\right|.$$

Thể tích tứ diện: Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|.$$

6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt cầu* (S) *có tâm* I(a; b; c) *và bán kính* R *có phương trình*:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc của mặt cầu.*

Vậy, ta được:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

☞ ***Chú ý***: Ta có:

- Mặt cầu tâm O bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Mặt cầu đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt* (S) *có phương trình*:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \qquad (2)$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ *là phương trình của mặt cầu tâm* I(a; b; c) *và bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt cầu.*

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt phẳng* (P) *đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *và có vtpt* $\vec{n}(A; B; C)$ *có phương trình*:

$$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Vậy, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A;B;C) \end{cases} \Leftrightarrow (P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng trong không gian Oxyz là:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \qquad (1)$$

Khi đó, nó nhận vectơ $\vec{n}(A; B; C)$ làm một vtpt.

2. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

1. Nếu D = 0, mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ.
2. Nếu $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P): $By + Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Ox.

   Tương tự:

   - Mặt phẳng (P): $Ax + Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Oy.
   - Mặt phẳng (P): $Ax + By + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Oz.
3. Nếu $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P): $Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Ox và Oy nên nó song song hoặc trùng với mặt phẳng xOy.

   Tương tự:

   - Mặt phẳng (P): $Ax + D = 0$ song song hoặc trùng với mặt phẳng yOz.
   - Mặt phẳng (P): $By + D = 0$ song song hoặc trùng với mặt phẳng xOz.

   Đặc biệt, các phương trình $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ theo thứ tự là phương trình của các mặt phẳng tọa độ yOz, xOz, xOy.
4. Nếu $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ thì bằng cách đặt:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C} \Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2)$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P). Mặt phẳng đó cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).

Vậy, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(a;0;0) \\ \text{Qua } B(0;b;0) \\ \text{Qua } C(0;0;c) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, điều kiện $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, điều kiện $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$,

khi đó vectơ $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ theo thứ tự là vtpt của (P_1) và (P_2), do đó:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P_1) \equiv (P_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P_1) // (P_2)$.

c. Nếu $A_1: B_1: C_1 \neq A_2: B_2: C_2$ thì $(P_1) \cap (P_2) = \{(d)\}$.

4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó, khoảng cách từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian Oxyz, đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$ có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ – ***Phương trình tham số.***

$$(d): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ với $abc \neq 0$ – ***Phương trình chính tắc.***

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

hoặc $$(d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

☞ ***Chú ý***: Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, có vtpt $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1; C_1)$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, có vtpt $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2; C_2)$

với điều kiện $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$. (*)

Điều kiện (*) chứng tỏ (P_1) và (P_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng (d) gồm những điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

- (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$.
- (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

Khi đó, xét ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ ta có kết quả:

1. (d_1) và (d_2) đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0.$$

2. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và các vtcp của chúng không cùng phương. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \text{ và } \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] \neq \vec{0}.$$

3. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và (d_1), (d_2) không có điểm chung. Như vậy:

$$(d_1) \,//\, (d_2) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] = \vec{0} \text{ và } \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}.$$

4. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và (d_1), (d_2) có điểm chung. Như vậy:

$$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}.$$

5. (d_1) và (d_2) chéo nhau khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

Khi đó, khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu biết phương trình của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thì cũng có thể xét vị trí tương đối của chúng bằng cách giải hệ gồm các phương trình xác định (d_1) và (d_2) để ìthỏa mãn giao điểm và khi đó:

a. Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Nếu hệ có vô số nghiệm thì (d_1) và (d_2) trùng nhau.

c. Nếu hệ vô nghiệm thì (d_1) và (d_2) song song hoặc chéo nhau, song song nếu hai vtcp của chúng cùng phương, chéo nhau nếu hai vectơ đó không cùng phương.

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}$ và đi qua điểm M_0. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

4. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$ và (d_2) có vtcp là $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

☞ ***Chú ý***: Điều kiện cần và đủ để (d_1) $\perp$ (d_2) là:

$$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (A; B; C).
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng toán 1: Tọa độ của điểm, vectơ và các yếu tố liên quan

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong phần:

- Tọa độ của vectơ.
- Tọa độ của điểm.
- Liên hệ giữa tọa độ vectơ và tọa độ hai điểm mút.
- Tích có hướng của hai vectơ và các ứng dụng

Thí dụ 1. *Cho ba điểm* A(1; 2; 3), B(3; 5; 4), C(3; 0; 5).

a. *Chứng minh* A, B, C *là ba đỉnh của một tam giác*.

b. *Tính chu vi, diện tích của* ΔABC.

c. *Tìm toạ độ điểm* D *để* ABCD *là hình bình hành và tính côsin góc giữa hai vectơ* $\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{BD}$.
d. *Tính độ dài đường cao* h_A *của* ΔABC *kẻ từ* A.
e. *Tính các góc của* ΔABC.
f. *Xác định toạ độ trực tâm* H *của* ΔABC.
g. *Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$ và $\overrightarrow{AC}(2; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Ta lần lượt có:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = \sqrt{2^2+3^2+1^2} + \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} + \sqrt{(-5)^2+1^2}$$
$$= \sqrt{14}+\sqrt{12}+\sqrt{26}.$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}|(8; -2; -10)| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+(-2)^2+(-10)^2} = \sqrt{42}.$$

c. Giả sử D(x; y; z), để ABCD là hình bình hành điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2; 3; 1) = (3 - x; -y; 5 - z)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 - x \\ 3 = -y \\ 1 = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; -3; 4).$$
$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{12}{\sqrt{12}.\sqrt{68}} = \frac{\sqrt{51}}{17}.$$

d. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_A.BC \Leftrightarrow h_A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{42}}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{273}}{13}.$$

e. Ta lần lượt có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0 \Leftrightarrow A = 90^0,$$
$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\sqrt{51}}{13} \text{ và } \cos C = \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{\sqrt{118}}{13}.$$

f. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử H(x; y; z) là trực tâm ΔABC, ta có điều kiện:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1; y-2; z-3).(0; -5; 1) = 0 \\ (x-3; y-5; z-4).(2; -2; 2) = 0 \\ (8; -2; -10).(x-1; y-2; z-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5(y-2) + z - 3 = 0 \\ 2(x-3) - 2(y-5) + 2(z-4) = 0 \\ 8(x-1) - 2(y-2) - 10(z-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy, ta được trực tâm H(1; 2; 3).

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên trực tâm $H \equiv A$, tức là H(1; 2; 3).

g. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 18 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5/2 \\ z = 9/2 \end{cases}.$$

Vậy, ta được tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là trung điểm của BC, tức là $I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên (tam giác trong không gian) các em học sinh có thể ôn tập được hầu hết kiến thức trong bài học "*Hệ tọa độ trong không gian*", và trong đó với các câu f), g):

- Ở cách 1, chúng ta nhận được phương pháp chung để thực các yêu cầu của bài toán.
- Ở cách 2, bằng việc đánh giá được dạng đặc biệt của ΔABC chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

Thí dụ 2. *Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm* A(5; 3; −1), B(2; 3; −4), C(1; 2; 0), D(3; 1; −2).

a. *Tìm tọa độ các điểm* A_1, A_2 *theo thứ tự là các điểm đối xứng với điểm* A *qua mặt phẳng* (Oxy) *và trục* Oy.

b. *Chứng minh rằng* A, B, C, D *là bốn đỉnh của một hình tứ diện.*

c. *Tính thể tích khối tứ diện* ABCD.

d. *Chứng minh rằng hình chóp* D.ABC *là hình chóp đều.*

e. *Tìm tọa độ chân đường cao* H *của hình chóp* D.ABC.

f. *Chứng minh rằng tứ diện* ABCD *có các cạnh đối vuông góc với nhau.*

g. *Tìm tọa độ điểm* I *cách đều bốn điểm* A, B, C, D.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt:

- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm E(5; 3; 0). Từ đó, vì E là trung điểm của AA_1 nên $A_1(5; 3; 1)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oy là điểm F(0; 3; 0). Từ đó, vì F là trung điểm của AA_2 nên $A_2(-5; 3; 1)$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng ta sẽ đi chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$ không đồng phẳng.

Giả sử trái lại, tức là ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng, khi đó sẽ tồn tại cặp số thức α, β sao cho:

$$\overrightarrow{DA} = \alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\alpha - 2\beta \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 1 = -2\alpha + 2\beta \end{cases}, \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow$ Ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$, từ đó suy ra:

$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.(-2) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.1 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.2 = 27 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Ba véctơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

c. Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}\right| = \frac{9}{2}$.

d. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} DA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ DB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \Rightarrow DA = DB = DC. \\ DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \end{cases}$$

Tương tự, ta cũng có AB = BC = CA = $3\sqrt{2}$.

Vậy, hình chóp D.ABC là hình chóp đều.

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC), ta có điều kiện:

$$\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 4x + y - z = 15 \\ x - 5y - z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 8/3 \\ z = -5/3 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Vậy, ta được $H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy ra chân đường cao H của hình chóp D.ABC chính là trọng tâm của ΔABC, do đó:

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Leftrightarrow H\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

f. Với cặp cạnh AD và BC, ta có:

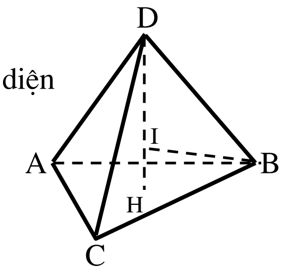
$$\overrightarrow{DA}(2; 2; 1),\ \overrightarrow{BC}(-1; -1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có AB ⊥ CD và AC ⊥ BD.

Vậy, tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau.

g. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, ta có:



$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ AI = DI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 4x + y - z = 15 \\ 4x + 4y + 2z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 7/2 \\ z = -3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy tâm I(x; y; z) thuộc DH sao cho ID = IB, tức là ta có:

$$\begin{cases} DI^2 = BI^2 \\ \overrightarrow{DI} // \overrightarrow{HI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ \dfrac{x-3}{x-\frac{8}{3}} = \dfrac{y-1}{y-\frac{8}{3}} = \dfrac{z+2}{z+\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 4z = -15 \\ 5x + y = 16 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 7/2 \\ z = -3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên (khối đa diện) các em học sinh đã ôn tập được các kiến thức trong bài học "*Hệ tọa độ trong không gian*", và trong đó:

- Ở câu b), chúng ta nhận được hai phương pháp để chứng minh bốn điểm không đồng phẳng (tương ứng với ba vectơ không đồng phẳng) và thông thường chúng ta sử dụng cách 2 trong bài thi. Và đặc biệt giá trị $\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}$ được xác định rất nhanh và chính xác với các em học sinh biết sử dụng máy tính Casio fx – 570MS.
- Ở câu e), cách 1 trình bày phương pháp chung cho mọi dạng tứ diện và cách 2 được đề xuất dựa trên dạng đặc biệt của tứ diện ABCD. Và các em học sinh cần nhớ thêm rằng chúng ta còn có một cách chung khác bằng việc thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

  Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

  Bước 3: Khi đó, điểm H chính là giao điểm của đường thẳng (d) với mặt phẳng (ABC).
- Hai cách sử dụng trong câu g) với ý tương tượng tự như câu e). Tuy nhiên, các em học sinh cũng có thể thực hiện như sau:

  Bước 1: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm).

  Bước 2: Từ kết quả ở bước 1, chúng ta nhận được tọa độ tâm I.

Dạng toán 2: Phương trình mặt cầu

Phương pháp

Với phương trình cho dưới ***dạng chính tắc***:

(S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$, với $k > 0$

ta lần lượt có:

- Bán kính bằng $R = \sqrt{k}$.
- Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ y - b = 0 \\ z - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \Rightarrow I(a;\, b;\, c).$$

Với phương trình cho dưới ***dạng tổng quát*** ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (1)$$

Bước 2: Để (1) là phương trình mặt cầu điều kiện là:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bước 3: Khi đó (S) có thuộc tính:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Cho họ mặt cong* (S_m) *có phương trình*:

$$(S_m): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - m)^2 = m^2 - 2m + 5.$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để* (S_m) *là một họ mặt cầu.*
b. *Tìm mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong họ* (S_m).
c. *Chứng tỏ rằng họ* (S_m) *luôn chứa một đường tròn cố định.*

Giải

a. Để (S_m) một họ mặt cầu điều kiện là:

$$m^2 - 2m + 5 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 4 > 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m thì (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;m) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{(m-1)^2 + 4} \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$R^2 = (m - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow R_{min} = 2, \text{ đạt được khi } m = 1.$$

Vậy, trong họ (S_m) mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất bằng 2.

c. Giả sử $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ là điểm cố định mà họ (S_m) luôn đi qua, ta có:

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - m)^2 = m^2 - 2m + 5, \forall m$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - z_0)m + (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z_0 = 0 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 4 \end{cases}.$$

Vậy, họ (S_m) luôn chứa đường tròn (C) có tâm $I_0(2;\, 1;\, 1)$ và bán kính $R_0 = 2$ nằm trong mặt phẳng (P_0): $z = 1$.

☞ ***Chú ý***: Thông qua lời giải câu c) các em học sinh hãy tổng kết để có được phương pháp thực hiện yêu cầu "*Chứng tỏ rằng họ mặt cầu* (S_m) *luôn chứa một đường tròn cố định*".

Thí dụ 2. *Cho họ mặt cong* (S_m) *có phương trình*:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0.$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để* (S_m) *là một họ mặt cầu.*

b. *Chứng minh rằng tâm của họ* (S_m) *luôn nằm trên một Parabol* (P) *cố định trong mặt phẳng* Oxy, *khi* m *thay đổi.*

c. *Trong mặt phẳng* Oxy, *gọi* F *là tiêu điểm của* (P). *Giả sử đường thẳng* (d) *đi qua* F *tạo với chiều dương của trục* Ox *một góc* α *và cắt* (P) *tại hai điểm* M, N.

- *Tìm toạ độ trung điểm* E *của đoạn* MN *theo* α.
- *Từ đó suy ra quỹ tích* E *khi* α *thay đổi.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$(x - m^2)^2 + (y - 2m)^2 + z^2 = m^4 - 4m^2 + 4.$$

Từ đó, để phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu điều kiện là:

$$m^4 - 4m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bkính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

Cách 2: Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$$m^4 + 4m^2 - 8m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bkính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$I_m: \begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy, trong mặt phẳng Oxy tâm I_m luôn nằm trên Parabol (P): $y^2 = 4x$.

c. Trong mặt phẳng Oxy, xét Parabol

(P): $y^2 = 4x$, có tiêu điểm F(1; 0).

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α có dạng:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } F(1;0) \\ \text{hệ số góc } k = \tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = (x - 1)\tan\alpha.$$

- Toạ độ giao điểm M, N của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = (x-1)\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2\tan^2\alpha - 2(\tan^2\alpha + 2)x + \tan^2\alpha = 0. \ (1)$$

Ta có:

$$\Delta' = (\tan^2\alpha + 2)^2 - \tan^4\alpha = 4\tan^2\alpha + 4 > 0, \forall\alpha$$

do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_M; y_M)$, $N(x_M; y_M)$ có hoành độ thoả mãn:

$$x_M + x_N = \frac{2(\tan^2\alpha + 2)}{\tan^2\alpha}.$$

- Gọi $E(x_E, y_E)$ là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \\ y_E = (x_E - 1)\tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2(\tan^2\alpha + 2)}{\tan^2\alpha} - 2\right]\tan\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \dfrac{2}{\tan\alpha} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Khử α từ hệ (I) ta được $y_E^2 = 4x_E - 2$

Vậy, quĩ tích trung điểm E của đoạn MN thuộc Parabol (P_1) cú phương trình $y^2 = 4x - 2$ trong mặt phẳng Oxy.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), việc trình bày theo hai cách chỉ có tính minh họa, bởi trong thực tế chúng ta thường sử dụng cách 2.
- Ở câu b), chúng ta sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai.
- Ở câu c), các em học sinh đã thấy được mối liên hệ giữa hình học giải tích trong mặt phẳng với hình học giải tích trong không gian.

<u>Dạng toán 3:</u> Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp

Gọi (S) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

Khi đó:

1. Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, R, điều kiện R > 0. Tuy nhiên, trong trường hợp này chúng ta thường chia nó thành hai phần, bao gồm:
   - Xác định bán kính R của mặt cầu.
   - Xác tâm I(a; b; c) của mặt cầu.

   Từ đó, chúng ta nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu.
2. Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, d, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☞ ***Chú ý***: 1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình mặt cầu.

Thí dụ 1. *Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau*:

a. *Đường kính* AB *với* A(3; −4; 5), B(−5; 2; 1).

b. *Tâm* I(3; −2; 1) *và đi qua điểm* C(−2; 3; 1).

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(-1; -1; 3) \\ R = \sqrt{29} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 29$.

Cách 2: Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3; y + 4; z - 5).(x + 5; y - 2; z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) + (y + 4)(y - 2) + (z - 5)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MAB$ vuông tại $M \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 + (x + 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 116$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Đi qua C} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; -2; 1) \\ \text{Bán kính } R = IC = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I(3; –2; 1) có phương trình:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = R^2.$$

Điểm C(–2; 3; 1) $\in$ (S) điều kiện là:

$$(-2 - 3)^2 + (3 + 2)^2 + (1 - 1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 50.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm I(3; –2; 1) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + d = 0.$$

Điểm C(–2; 3; 1) $\in$ (S) điều kiện là:

$$4 + 9 + 1 + 12 + 12 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 36 = 0$.

Cách 4: Ta có:

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow IM^2 = IA^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), với cách 1 chúng ta đi xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R, từ đó sử dụng công thức để nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu (S). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).
- Ở câu b), cách 1 có ý tương tương tự như trong câu a). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng các dạng phương trình có sẵn của mặt cầu và ở đó giá trị của tham số còn lại (R hoặc d) được xác định thông qua điều kiện C thuộc (S). Cách 4 chúng ta sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).

Thí dụ 2. *Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm* A(1; 2; 2), B(0; 1; 0) và tâm I thuộc trục Oz.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

- Điểm A(1; 2; 2) $\in$ (S) nên:

$$1 + 4 + (2 - c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (c - 2)^2 + 5 = R^2. \quad (1)$$

- Điểm B(0; 1; 0) $\in$ (S) nên:

$$1 + (-c)^2 = R^2 \Leftrightarrow c^2 + 1 = R^2. \quad (2)$$

Lấy (2) – (1), ta được:

$$4c - 8 = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

Thay c = 2 vào (2), ta được $R^2 = 5$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2cy + d = 0$, với $c^2 - d > 0$.

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9 - 4c + d = 0 \\ 1 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$.

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có điều kiện là:

$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 1 + 4 + (2 - c)^2 = 1 + (-c)^2 \Leftrightarrow c = 2$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0;0;2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Trung điểm của AB là điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$, ta có điều kiện là:

$$IM \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - c\right)(-1; -1; -2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 2(1 - c) = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0;0;2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

☞ ***Chú ý***: Ngoài bốn cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng (d) chúng ta còn có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua E là trung điểm của AB} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 2: Tâm {I} = (P) $\cap$ (d), nên toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 3: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Thí dụ 3. *Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A(2; 1; 1), B(1; 1; 0), C(0; 2; 4) *và có tâm nằm trên mặt phẳng* (Oyz).

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Vì tâm I(a; b; c) thuộc mặt phẳng (Oxy) nên a = 0. (1)

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6 - 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 2 - 2a - 2b + d = 0 \\ 20 - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b - d = 2 \\ 4b + 8c - d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) suy ra I(0; b; c).

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có điều kiện là:

$$AI = BI = IC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (b-1)^2 + c^2 \\ 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = (b-2)^2 + (c-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b + 3c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;0) \\ \text{Bán kính } R = IA = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

☞ ***Chú ý***: Ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của ΔABC để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Bước 1: Ta có:

- Nếu ΔABC đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trọng tâm H của ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm H của BC.

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua H và vuông góc với với mặt phẳng (ABC).

Bước 3: Tâm $\{I\} = (P) \cap (d)$, nên toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 4: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Chúng ta sẽ được thấy cách giải này trong phần đường thẳng.

Thí dụ 4. *Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A(2; 1; 1), B(1; 1; 0), C(0; 2; 4) *và có bán kính bằng* $\sqrt{5}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

ta có ngay $a^2 + b^2 + c^2 - d = 5$. (1)

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6-4a-2b-2c+d=0 \\ 2-2a-2b+d=0 \\ 20-4b-8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b-d=2 \\ a+c=2 \\ a-b-4c=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2-a \\ b=5a+1 \\ d=12a \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$a^2 + (5a+1)^2 + (2-a)^2 - 12a = 5 \Leftrightarrow 27a^2 - 6a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{2}{9}.$$

Khi đó:

- Với $a = 0$ ta được $b = 1$, $c = 2$ và $d = 0$ nên:

  $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0.$

- Với $a = \frac{2}{9}$ ta được $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ nên:

  $$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) với bán kính bằng $\sqrt{5}$ có phương trình:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 5.$$

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=5 \\ (1-a)^2+(1-b)^2+c^2=5 \\ a^2+(2-b)^2+(4-c)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(1-b)^2+c^2=5 \\ a+c=2 \\ a-b-4c=-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(1-b)^2+c^2=5 \\ c=2-a \\ b=5a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+25a^2+(2-a)^2=5 \\ c=2-a \\ b=5a+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27a^2-6a=0 \\ c=2-a \\ b=5a+1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b=1,\ c=2 \text{ và } d=0 \\ a=\frac{2}{9} \Rightarrow b=\frac{19}{9},\ c=\frac{16}{9} \text{ và } d=\frac{8}{3} \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với a = 0, b = 1, c = 2 và d = 0 ta được:

  (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$.

- Với $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ ta được:

  $$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho bốn điểm* A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2) *và* D(2; 2; 1).

a. *Chứng tỏ rằng* A, B, C, D *không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện* ABCD.

b. *Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* ABCD.

✍ *Giải*

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD}(1; 1; 0)$, suy ra:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = (1; 0; 0)(1; 1; 0) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ A, B, C, D không đồng phẳng.

Ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \mid \text{đvtt}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c), khi đó ta có điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 \\ 2z = 3 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm A, B, C, D $\in$ (S), ta được:

$$\begin{cases} 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 4b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 9 - 4a - 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ 2a + 4b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b + 4c - d = 6 \\ 4a + 4b + 2c - d = 9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = \dfrac{3}{2} \\ d = 6 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$.

☞ ***Chú ý***: Với câu b), ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D (ngoại tiếp tứ diện ABCD) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của tứ diện ABCD để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Trường hợp 1: Nếu DA = DB = DC thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Dựng đường cao DH$\perp$(ABC).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó $\{I\} = (DH) \cap (P)$.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Nếu DA$\perp$(ABC) thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
- Dựng đường thẳng (d) qua K và song song với DA (hoặc (d) $\perp$ (ABC).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó $\{I\} = (d) \cap (P)$.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 3: Nếu $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \dfrac{\pi}{2}$ thì mặt cầu ngoại tiếp DABC có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$.

Trường hợp 4: Nếu AD và BC có đoạn trung trực chung EF thì:

Bước 1: Ta lần lượt:

- Viết phương trình tham số của đường thẳng (EF) theo t.
- Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm $I \in EF$ (thỏa mãn phương trình tham số của EF).
- Từ điều kiện $IA^2 = IC^2 = R^2$ suy ra giá trị tham số t, từ đó nhận được tọa độ tâm I.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

<u>**Thí dụ 6.**</u> *Viết phương trình mặt cầu*:

a. *Có tâm* I(2; 1; –6) *và tiếp xúc với trục* Ox.

b. *Có tâm* I(2; –1; 4) *và tiếp xúc với mặt phẳng* (Oxy).

c. *Có tâm* O(0; 0; 0) *tiếp xúc với mặt cầu* (T) *có tâm* I(3; —2; 4), *bán kính bằng* 1.

✍ *Giải*

a. Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của I lên Ox, ta có $H_1(2; 0; 0)$.

Để (S) tiếp xúc với trục Ox điều kiện là:

$$R = d(I, Ox) = IH_1 = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;-6) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 37.$$

b. Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) điều kiện là:

$$R = d(I, (Oxy)) = 4.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;-1;4) \\ \text{Bán kính } R = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

c. Để (S) tiếp xúc với mặt cầu (T) có tâm I(3; —2; 4), bán kính bằng 1 điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} R + 1 = OI \\ |R - 1| = OI \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R + 1 = \sqrt{29} \\ |R - 1| = \sqrt{29} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = \sqrt{29} - 1 \\ R = \sqrt{29} + 1 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $R = \sqrt{29} - 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } O(0;0;0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{29} - 1\right)^2.$$

- Với $R = \sqrt{29} + 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } O(0;0;0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{29} + 1\right)^2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua bài toán trên chúng ta đã làm quen với việc viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu. Cụ thể:

- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với đường thẳng (d) khi:
  R = d(I, (d)).
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi:
  R = d(I, (P)).
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt cầu (T) tâm T, bán kính R_T khi:

$$\left[\begin{array}{l} (S) \text{ và } (T) \text{ tiếp xúc ngoài} \\ (S) \text{ và } (T) \text{ tiếp xúc trong} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R + R_T = IT \\ |R - R_T| = IT \end{array}\right..$$

<u>Thí dụ 7.</u> *Lập phương trình mặt cầu*:

a. *Có tâm nằm trên tia* Ox, *bán kính bằng* 5 *và tiếp xúc với mặt phẳng* (Oyz).
b. *Có bán kính bằng* 2 *và tiếp xúc với* (Oxy) *tại điểm* M(3; 1; 0).

✍ *Giải*

a. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R.
Từ giả thiết suy ra R = 5, ngoài ra:
- (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) điều kiện là:
  d(I, (Oyz)) = R ⇔ a = 5.
- Tâm nằm trên tia Ox điều kiện là b = c = 0.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(5;0;0) \\ \text{Bán kính } R = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

b. Ta lần lượt đánh giá:
- Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm M(3; 1; 0) nên tâm I(3; 1; c).
- Vì R = 2 nên:
  $IM = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2 \Rightarrow I_1(3;\ 1;\ 2)$ và $I_2(3;\ 1;\ -2)$.

Khi đó:
- Với tâm $I_1(3;\ 1;\ 2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(3;1;2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

- Với tâm $I_2(3; 1; -2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(3;1;-2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Dạng toán 1: Phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

là phương trình của một mặt phẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ mặt phẳng (P_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số mặt phẳng của họ (P_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$mx + m(m-1)y - (m^2-1)z - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của m để phương trình* (1) *là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ* (P_m).

b. *Tìm điểm cố định mà họ* (P_m) *luôn đi qua*.

c. *Giả sử* (P_m) *với* $m \neq 0, \pm 1$ *cắt các trục toạ độ tại* A, B, C.

- *Tính thể tích tứ diện* OABC.
- *Tìm* m *để* ΔABC *nhận điểm* $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ *làm trọng tâm.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$A^2 + B^2 + C^2 = m^2 + m^2(m-1)^2 + (m^2-1)^2$$
$$= m^2 + (m-1)^2[m^2 + (m+1)^2] > 0, \text{ mọi } m.$$

Vậy, với mọi m phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua, ta có:

$$mx_0 + m(m-1)y_0 - (m^2-1)z_0 - 1 = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow m^2(y_0 - z_0) + m(x_0 - y_0) + z_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 1 \end{cases}.$$

Vậy, họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định M(1; 1; 1).

c. Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{1}{m}; 0; 0\right),\ B\left(0; \frac{1}{m(m-1)}; 0\right),\ C\left(0; 0; \frac{1}{1-m^2}\right).$$

Khi đó:

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\left|\frac{1}{m}\right|.\left|\frac{1}{m(m-1)}\right|.\left|\frac{1}{1-m^2}\right|$$

$$= \frac{1}{6m^2(m-1)^2|m+1|}.$$

- Điểm $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{m(m-1)} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{1-m^2} = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m(m-1) = 6 \\ 1 - m^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm điểm cố định mà họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (P_m), khi đó $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \forall m$.

Bước 2: Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0, từ đó nhận được $(x_0; y_0; z_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$(a + b)x + ay + bz - 3(a + b) = 0.$$

a. *Tìm điều kiện của* a, b *để phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ* $(P_{a,b})$.

b. *Giả sử* $(P_{a,b})$ *với* $a, b \neq 0$ *cắt các trục toạ độ tại* A, B, C. *Tìm* a, b *để*:

- ΔABC *nhận điểm* $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ *làm trọng tâm.*
- ΔABC *nhận điểm* $H(2; 1; 1)$ *làm trực tâm.*

- *Tứ diện* OABC *có thể tích nhỏ nhất với* $a > 0, b > 0$.

c. *Chứng tỏ rằng họ* $(P_{a,b})$ *luôn chứa một đường thẳng cố định.*

✍ *Giải*

a. Xét điều kiện:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Vậy, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Với với $a, b \neq 0$ ta có ngay :

$$A(3;0;0),\ B\left(0; \frac{3(a+b)}{a}; 0\right),\ C\left(0;0;\frac{3(a+b)}{b}\right).$$

Khi đó:

- Điểm $G\left(1;4;\frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{a} = 4 \\ \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = b \end{cases} \Leftrightarrow b = 3a.$$

Vậy, với $b = 3a \neq 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Điểm $H(2;1;1)$ là trực tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a-b=0 \\ 2(a+b)+a+b-3(a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy, với $a = b \neq 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{9}{2}.\frac{(a+b)^2}{ab} \geq \frac{9}{2}.\frac{2ab}{ab} = 9.$$

Vậy, ta được $\left(V_{O.ABC}\right)_{Min} = 9$, đạt được khi $a = b$.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình mặt phẳng $(P_{a,b})$ dưới dạng:

$(P_{a,b})$: $a(x + y - 3) + b(x + z - 3) = 0$.

Từ đó, suy ra họ $(P_{a,b})$ luôn chứa các điểm có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+z-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Hệ (*) chính là phương trình giao tuyến (d) của hai mặt phẳng cố định:

(P_1): $x + z - 3 = 0$ và (P_2): $x + y - 3 = 0$.

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d).

Cách 2: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua hai điểm M(1; 2; 2) và N(2; 1; 1) nên họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{Qua } N(2;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(1;-1;-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

Cách 3: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua điểm M(1; 2; 2) và có vtpt $\vec{n}(a+b; a; b)$, suy ra:

$$\vec{n}(a+b; a; b).\vec{u}(1; -1; -1) = a + b - a - b = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u},\ \forall a, b \neq 0.$$

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng và các em học sinh cần nhớ lại rằng *một đường thẳng* (d) *được hoàn toàn xác định* khi biết nó:

- Là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau – Ứng với cách 1.
- Đi qua hai điểm phân biệt M, N – Ứng với cách 2.
- Đi qua một điểm M và có phương cố định – Ứng với cách 3.

Và câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra đối với các cách 2, cách 3 là việc xác định toạ độ điểm M, N và vectơ $\vec{u}$. Câu trả lời như sau:

- Các điểm M, N có toạ độ thoả mãn hệ (*) và khi biết được toạ độ của cả M, N thì suy ra được toạ độ của vectơ $\vec{u}$.
- Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ có thể được xác định độc lập với M, N dựa trên nhận xét:

$$\begin{cases} (d) \subset (P_1) \\ (d) \subset (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{n_1} - \text{là vtpt của } (P_1) \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{n_2} - \text{là vtpt của } (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

<u>Dạng toán 2:</u> Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Để viết phương trình mặt phẳng (P) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

<u>Cách 1</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ và vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$ của (P).

<u>Bước 2:</u> Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1; n_2; n_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta có các kết quả:

1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, luôn có dạng:

   $$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$, luôn có dạng:

   $$(P): n_1x + n_2y + n_3z + \underline{D} = 0$$

   Để xác định (P), ta cần đi xác định D.

3. Mặt phẳng (P) song song với (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, luôn có dạng:

   $$(P): Ax + By + Cz + \underline{E} = 0$$

   Để xác định (P), ta cần đi xác định E.

4. *Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn*, đó là mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình:

   $$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

5. Với phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng M, N, P chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

   Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

   $$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].$$

   Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

   $$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

   Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

   $$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

   với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

   Vì M, N, P thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hệ ba phương trình với bốn ẩn A, B, C, D.

   Biểu diễn ba ẩn theo một ẩn còn lại, rồi thay vào (1) chúng ta nhận được phương trình mặt phẳng (P).

Thí dụ 1. *Viết phương trình mặt phẳng* (P), *biết*:

a. (P) *là mặt phẳng trung trực của đoạn* AB *với* A(1; 1; 2) *và* B(1; −3; 2).

b. (P) *đi qua điểm* C(1; 2; −3) *và song song với mặt phẳng* (Q) *có phương trình* $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

c. (P) *đi qua điểm* D(1; 1; 2) *và có cặp* vtcp $\vec{a}(2; -1, 1)$, $\vec{b}(2; -1; 3)$.

d. (P) *đi qua điểm* E(3; 1; 2) *và vuông góc với hai mặt phẳng*:

$$(R_1): 2x + y + 2z - 10) \text{ và } (R_2): 3x + 2y + z + 8 = 0.$$

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1 (Sử dụng công thức): Gọi I là trung điểm của đoạn AB, suy ra I(1; –1; 2).

Khi đó, mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ (P) \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(1; -1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(0; -4; 0) \text{ chọn } (0; 1; 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $0.(x - 1) + 1.(y + 1) + 0.(z - 2) = 0 \Leftrightarrow$ (P): $y + 1 = 0$.

Cách 2 (Sử dụng phương pháp quĩ tích): Điểm M(x; y; z) thuộc mặt phẳng (P) khi:

$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$

$\Leftrightarrow 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0$.

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (P) đi qua điểm C(1; 2; –3) nên có phương trình:

$$(P): A(x - 1) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow$ (P): $Ax + By + Cz - A - 2B + 3C = 0$.

- (P) song song với (Q): $x - 2y + 3z + 1 = 0$ nên:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-2} = \frac{C}{3} \neq \frac{-A - 2B + 3C}{1} \Rightarrow \begin{cases} B = -2A \\ C = 3A \end{cases}. \quad (2)$$

Cách 2: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (P) song song với (Q): $x - 2y + 3z + 1 = 0$ nên có phương trình:

(P): $x - 2y + 3z + \underline{D} = 0$.

- Điểm C thuộc (P), suy ra:

$1 - 2.2 + 3(-3) + \underline{D} = 0 \Leftrightarrow \underline{D} = 12$.

Vậy, phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Thay (2) vào (1) rồi thực hiện phép đơn giản biểu thức, ta được phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Cách 3: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } C \\ (P) // (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } C(1; 2; -3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $1.(x - 1) - 2.(y - 2) + 3.(z + 3) = 0 \Leftrightarrow$ (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

c. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -4; 0).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } D(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): (x - 1) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y - 3 = 0.$$

d. Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (R_1), (R_2), ta có:

$\overrightarrow{n_1}$ (2; 1; 2), $\overrightarrow{n_2}$ (3; 2; 1).

Vì (P) vuông góc với (R_1) và (R_2) nên nó nhận $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ làm cặp vtcp, từ đó:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{n_1}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_2}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3; 4; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } E(3;1;2)\\ \text{vtpt } \vec{n}(-3;4;1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 4y - z - 3 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua bài toán:

- Ở câu a), chúng ta nhận được hai phương pháp (có tính minh họa) để viết phương trình mặt phẳng.
- Ở câu b), với ba cách giải đó thì các cách 1 và cách 2 có tính minh họa để các em học sinh hiểu cách khai thác từng giả thiết. Và như vậy, cách 3 luôn là sự lựa chọn khi thực hiện bài thi.
- Câu c), câu d) minh họa việc viết phương trình mặt phẳng khi biết cặp vtcp của nó.

Thí dụ 2. *Cho ba điểm* A(1; 2; 3), B(3; 5; 4), C(3; 0; 5).

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua ba điểm* A, B *và* C.

b. *Lập phương trình mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *làm đường tròn lớn.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8; -2; -10) \text{ chọn } \vec{n}(4; -1; -5).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A(1;2;3)\\ \text{vtpt } \vec{n}(4;-1;-5)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 4(x-1) - (y-2) - 5(z-3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $4x - y - 5z + 13 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. (1)

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases}A + 2B + 3C + D = 0\\ 3A + 5B + 4C + D = 0\\ 3A + 5C + D = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = -4B\\ C = 5B\\ D = -13B\end{cases}.$$

Thay A, B, C vào (1), ta được:

(P): $-4Bx + By + 5Bz - 13B = 0 \Leftrightarrow$ (P): $4x - y - 5z + 13 = 0$.

b. Mặt cầu (S) có tâm I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 36 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 39/7 \\ y = 89/14 \\ z = 81/14 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right).$$

Khi đó, mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Đi qua A} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{9338}}{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{39}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{89}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{81}{14}\right)^2 = \frac{667}{14}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, câu a) của thí dụ trên trên đã minh họa hai phương pháp viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước (kiến thức đã được trình bày trong phần chú ý của bài toán 2).

Thí dụ 3. *Cho hai điểm* A(1; –1; 5), B(0; 0; 1).

a. *Tìm điểm* M *thuộc* Oy *sao cho* ΔMAB *cân tại* M.
b. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, B *và song song với trục* Oy.
c. *Lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm* A, B *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*.

✍ *Giải*

a. Với điểm M thuộc Ox thì M(0; y; 0), ta có:

$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (-1)^2 + (y + 1)^2 + (-5)^2 = y^2 + 1$

$\Leftrightarrow 2y = -26 \Leftrightarrow y = -13 \Rightarrow M(0; -13; 0)$.

Vậy, với M(0; –13; 0) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1;-1;5) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{j}\right] = (4;\, 0;\, -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $4x - z + 1 = 0$.

c. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm A, B và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là mặt cầu đường kính AB, ta có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; 3\right) \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{\sqrt{18}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{2}.$$

Thí dụ 4. *Cho hai điểm* A(2; 1; −3), B(3; 2; −1) *và mặt phẳng* (Q) *có phương trình* (Q): $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, B *và vuông góc với mặt phẳng* (Q).

b. *Tìm tọa độ điểm* I *thuộc* (Q) *sao cho* I, A, B *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

a. Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q), ta được $\overrightarrow{n_Q}$ (1; 2; 3).

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(1;1;2) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q}(1;2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (-1;\, -1;\, 1) \text{ chọn } \vec{n}\,(1;\, 1;\, -1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(2;1;-3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2 + y - 1 - (z + 3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $x + y - z - 6 = 0$.

b. Giả sử điểm I(x; y; z) thuộc mặt phẳng (Q) , vì vectơ $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AI} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Suy ra, tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = t \\ z + 3 = 2t \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \\ t + 2 + 2(t+1) + 3(2t-3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I(3; 2; −1).

Thí dụ 5. *Cho điểm* A(2; −2; −4).

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua điểm* A *và chứa trục* Ox.

b. *Tìm điểm* B *thuộc mặt phẳng* (P) *sao cho* ΔOAB *đều.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua O} \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{OA} \text{ và } \vec{i} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua O}(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{i}\right] = (0; -4; 2) \end{cases}$$

⇔ (P): 2y − z = 0.

b. Giả sử điểm B(x; y; z), ta lần lượt có:

- Điểm B ∈ (P) nên x + y = 0 ⇔ y = −x. (1)
- ΔOAB đều, ta được:

$$OA = OB = AB \Leftrightarrow \begin{cases} OB^2 = OA^2 \\ AB^2 = OA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 24 \\ (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 24 \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 24 \\ x - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ 2x^2 + (x-3)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1\left(1+\sqrt{6}; -1-\sqrt{6}; \sqrt{6}-2\right) \\ B_2\left(1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}; -\sqrt{6}-2\right) \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai điểm B_1 và B_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 6. *Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:*

a. *Đi qua điểm* G(1; 2; 3) *và cắt các trục tọa độ tại các điểm* A, B, C *sao cho G là trọng tâm* ΔABC.

b. *Đi qua điểm* H(2; 1; 1) *và cắt các trục tọa độ tại các điểm* A, B, C *sao cho* H *là trực tâm* ΔABC.

c. *Đi qua điểm* M(1; 1; 1) *cắt chiều dương của các trục toạ độ tại ba điểm* A, B, C *sao cho tứ diện* OABC *có thể tích nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Để G(1; 2; 3) là trọng tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow (P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

b. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1)$$

Để H(2; 1; 1) là trực tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = c = 6 \end{cases}.$$

Thay a, b, c vào (1), ta được:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow (P): 2x + y + z - 6 = 0.$$

c. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c > 0, ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Điểm M thuộc (P) nên:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}} \Leftrightarrow abc \geq 27.$$

Thể tích tứ diện OABC, được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.abc \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Vậy, ta được $(V_{OABC})_{Min} = \frac{9}{2}$, đạt được khi:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

và khi đó:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (P): x + y + z - 3 = 0.$$

<u>Dạng toán 3:</u> Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *lần lượt có phương trình là*:

$$(P): x - 3y - 3z + 5 = 0,$$
$$(Q): (m^2 + m + 1)x - 3y + (m + 3)z + 1 = 0.$$

Với giá trị nào của m *thì*:

a. *Hai mặt phẳng đó song song* ?

b. *Hai mặt phẳng đó trùng nhau* ?

c. *Hai mặt phẳng đó cắt nhau* ?

d. *Hai mặt phẳng đó vuông góc* ?

✍ *Giải*

a. Để hai mặt phẳng song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2+m+1} = \frac{-3}{-3} = \frac{-3}{m+3} \neq \frac{5}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m+1=1 \\ m+3=-1 \\ 1\neq 5 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng song song với nhau

b. Để hai mặt phẳng trùng nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2+m+1} = \frac{-3}{-3} = \frac{-3}{m+3} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m+1=1 \\ m+3=-1 \\ 1=5 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng trùng nhau

c. Từ kết quả của các câu a) và b) suy ra với mọi m hai mặt phẳng (P) và (Q) luôn cắt nhau.

d. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q), ta được:

$\overrightarrow{n_P}(1; -3; -3)$ và $\overrightarrow{n_Q}(m^2 + m + 1; -3; m + 3)$.

Để hai mặt phẳng vuông góc với nhau điều kiện là:

$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 - 3(-3) - 3(m + 3) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy, với m = 1 thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Thí dụ 2. *Cho hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2) *lần lượt có phương trình là*:

(P_1): $Ax + By + Cz + D = 0$,

(P_2): $Ax + By + Cz + D' = 0$ với $D \neq D'$.

a. *Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).

b. *Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).

Áp dụng với hai mặt phẳng:

(P_1): $x + 2y + 2y + 3 = 0$, (P_2): $2x + 4y + 4y + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng (P_1) và (P_2) song song với nhau.

Lấy điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P_1), ta có:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (1)$$

Khi đó:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M, (P_2)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \overset{(1)}{=} \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

b. Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + E = 0. \quad (2)$$

Để (P) cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) điều kiện là:

$$\frac{|D_1 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow |D_1 - E| = |D_2 - E|$$

$$\overset{D \neq E}{\Leftrightarrow} E = \frac{1}{2}(D_1 + D_2). \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được (P): $Ax + By + Cz + \frac{1}{2}(D_1 + D_2) = 0$.

Áp dụng với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2): Trước tiên ta có:

$$(P_2): x + 2y + 2z + \frac{1}{2} = 0.$$

a. Khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$d((P_1), (P_2)) = \frac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

b. Ta có thể trình bày theo ba cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng kết quả trên*): Ta có ngay:

$$(P): x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0.$$

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 2z + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + 2z + 3| = \left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

Cách 3: (*Sử dụng tính chất*): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): x + 2y + 2z + D = 0. \qquad (*)$$

Lấy các điểm $A(-3; 0; 0) \in (P_1)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $M\left(-\frac{7}{4}; 0; 0\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức:

$$-\frac{7}{4} + D = 0 \Leftrightarrow D = \frac{7}{4}.$$

Thay $D = \frac{7}{4}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P): $x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0$.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) song song với nhau (giả sử có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (P_1) và (P_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (P_1), (P_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P_1), (P_2) và $d((Q), (P_1)) = k.d((Q), (P_2))$.
4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
   a. Tiếp xúc với (P_2).
   b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách* d *giữa* (P_1) *và* (P_2)" chúng ta sử dụng kết quả:

$$d = d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2)), \text{ với } M_1 \in (P_1).$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều* (P_1), (P_2)", chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tính chất*): Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0. \qquad (*)$$

<u>Bước 2:</u> Lấy các điểm $E_1 \in (P_1)$ và $E_2 \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $E(x_0; y_0; z_0)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \underline{D} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D}.$$

<u>Bước 3:</u> Thay $\underline{D}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P).

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (P)}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P_1), (P_2) *và* $d((Q), (P_1)) = k.d((Q), (P_2))$", chúng ta sử dụng ý tương trong cách 2 của yêu cầu (2), cụ thể:

Điểm $M(x; y; z) \in (Q)$ cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = k.d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2). Toạ độ của điểm M_2 được xác định bằng cách:

$$\begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2.

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu tâm M_2 và bán kính $R = M_1M_2 = d$.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính bằng* r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R. Ta lần lượt:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:

  $M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\vec{n}$.

- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:

  $r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2 \Rightarrow$ Giá trị t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Thí dụ 3. *Cho điểm* $M_1(2; 1; -3)$ *và hai mặt phẳng* (P_1), (P_2) *có phương trình*:

$$(P_1): x + y + 2z + 3 = 0,$$

$$(P_2): x + (m - 2)y + (m - 1)z - 3m = 0.$$

1. *Tìm để* (P_1) *song song với* (P_2).
2. *Với* m *tìm được ở câu* 1) *hãy*:
   a. *Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).
   b. *Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).
   c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P_1), (P_2) *và* $d((Q), (P_1)) = 2d((Q), (P_2))$.
   d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và tiếp xúc với* (P_2).
   e. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
   f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = 6\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

1. Để hai mặt phẳng (P_1), (P_2) song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{1} = \frac{m-2}{1} = \frac{m-1}{2} \neq \frac{-3m}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

2. Với m = 3 mặt phẳng (P_2): $x + y + 2z - 9 = 0$ và có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$.

a. Ta có ngay:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2)) = \frac{|2+1+2(-3)-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = 2\sqrt{6}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tính chất*): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

(P): x + y + 2z + D = 0. (*)

Lấy điểm $N(1; 0; 4) \in (P_2)$, suy ra M_1N có trung điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} + D = 0 \Leftrightarrow D = -3.$$

Thay D = −3 vào (*), ta nhận được phương trình (P): x + y + 2z − 3 = 0.

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm thì điểm $M(x; y; z) \in (P)$ khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x+y+2z+3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|x+y+2z-9|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow |x+y+2z+3| = |x+y+2z-9| \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

c. Điểm $M(x; y; z) \in (Q)$ khi:

$$d(M, (P_1)) = 2d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x+y+2z+3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2|x+y+2z-9|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow |x+y+2z+3| = 2|x+y+2z-9| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+2z-21=0 \\ x+y+2z-5=0 \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài là:

(Q_1): x + y + 2z − 21 = 0 và (Q_2): x + y + 2z − 5 = 0.

d. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2), ta có:

$$\begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=t \\ y-1=t \\ z+3=2t \\ x+y+2z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \\ 6t-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M_2(4; 3; 1).$$

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2, tức là:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; 2; -1) \text{ là trung điểm } M_1M_2 \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_1M_2}{2} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

e. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2), theo d) ta có ngay $M_2(4; 3; 1)$.

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } M_2(4;\,3;\,1) \\ \text{Bán kính } R = M_1M_2 = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 24.$$

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.

Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) thì M_2 chính là tâm của đường tròn (C), ta có:

$$R^2 - r^2 = M_2I^2 = \left|M_1M_2 - IM_1\right|^2 = (d-R)^2 \Leftrightarrow 2dR = d^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{d^2 + r^2}{2d} = \frac{24+72}{4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} \Rightarrow IM_2 = 2\sqrt{6} = d(I, (P_2)). \qquad (*)$$

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=t \\ y-1=t \\ z+3=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \end{cases}.$$

- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:

$$r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2$$

$$\Leftrightarrow \left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left[\frac{\left|(t+2)+(t+1)+2(2t-3)-9\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right]^2 = t^2 + t^2 + (2t)^2$$

$$\Leftrightarrow 72 + 6(t-2)^2 = 6t^2 \Leftrightarrow 96 - 24t = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow I(6;\,5;\,5).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(6;\,5;\,5\right) \\ \text{Bkính } R = M_1I = 4\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x-6\right)^2 + \left(y-5\right)^2 + \left(z-5\right)^2 = 96.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cắt nhau chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (P_1) và (P_2).
2. Viết phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thoả mãn điều kiện K.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
   a. Tiếp xúc với (P_2).
   b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

✚ Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta có ngay:

- (P_1) có vtpt $\overrightarrow{n_1}(A_1;\,B_1;\,C_1)$ và (P_2) có vtpT là $\overrightarrow{n_2}(A_2;\,B_2;\,C_2)$.

- Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Lưu ý: Để (P_1) $\perp$ (P_2) $\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình giao tuyến* (d) *của* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta thực hiện theo các bước sau:

<u>Bước 1:</u> Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases}. \qquad (1)$$

<u>Bước 2:</u> Lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Lấy điểm $M \in (d)$ và gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{vtcp } \vec{u}\end{cases}.$$

Cách 2: Lấy hai điểm M và N thuộc (d), ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{Qua } N\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{vtcp } \vec{u} = \overrightarrow{MN}\end{cases}.$$

Cách 3: Đặt $x = f_1(t)$ (hoặc $y = f_2(t)$ hoặc $z = f_3(t)$) ($t \in \mathbb{R}$), ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases}x = f_1(t)\\ y = f_2(t), \ t \in \mathbb{R}.\\ z = f_3(t)\end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Lưu ý: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu này chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng trong không gian.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta lập luận:

Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Hai mặt phẳng } (Q_1) \text{ và } (Q_2).$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta đã được thấy thông qua yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm* A, B *và thoả mãn điều kiện* K" trong dạng toán 2 và sẽ được thấy trong chủ đề về ***đường thẳng***.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.
(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì:
$M_1I = d(I, (P_2)) \Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.
Lưu ý: Với giả thiết này chúng ta còn có thể sử dụng phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1), (Q_2) để xác định toạ độ tâm I.

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì:
$I \in (P_2)) \Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:
$R^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1I^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2$
$\Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Thí dụ 4. *Cho điểm* $M_1(2; 5; 0)$ *và hai mặt phẳng* (P_1), (P_2) *có phương trình*:

$$(P_1): 3x - 2y - z + 4 = 0, \quad (P_2): x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

a. *Chứng tỏ rằng* (P_1) *cắt* (P_2) *theo giao tuyến* (d). *Tính góc giữa* (P_1), (P_2) *và tìm một vtcp của đường thẳng* (d).
b. *Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi* (P_1) *và* (P_2).
c. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và tiếp xúc với* (P_2).
d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
e. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = \sqrt{21/2}$.

Giải

a. Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) theo thứ tự có vtpt $\overrightarrow{n_1}(3; -2; -1)$, $\overrightarrow{n_1}(1; -3; 2)$, suy ra $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương nên (P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến (d).

Ta lần lượt có:

- Côsin góc α tạo bởi (P_1), (P_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|3.1 - 2(-3) - 1.2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

- Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-7; -7; -7)$ chọn $\vec{u}\,(1; 1; 1)$.

Cách 2: Lấy hai điểm A(0; 1; 2) và B(1; 2; 3) thuộc (d), thì vtcp của (d) là $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$.

Cách 3: Đặt x = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 3t - 2y - z + 4 = 0 \\ t - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; 1).$$

b. Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 2y - z + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - 3y + 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y - 3z + 5 = 0 \\ 4x - 5y + z + 3 = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1): 2x + y – 3z + 5 = 0 và (Q_2): 4x – 5y + z + 3 = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.

(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: (S) tiếp xúc với (P_2) thì:

$$M_1I = d(I, (P_2)) \Leftrightarrow \sqrt{(3t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2} = \frac{|(3t + 2) - 3(-2t + 5) + 2(-t) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 = \frac{|7t - 14|^2}{14} \Leftrightarrow 4t^2 = (t - 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = t - 2 \\ 2t = -t + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 2/3 \end{array}\right.$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = -2$ ta được tâm $I_1(-4 ; 9 ; 2)$, suy ra mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 4)^2 + (y - 9)^2 + (z - 2)^2 = 56.$$

- Với $t_2 = \frac{2}{3}$ ta được tâm $I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2): (x-4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: (*Dựa theo kết quả câu* b): (S) tiếp xúc với (P_2) thì tâm I phải thuộc mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2).

Ta lần lượt:

- Với mặt phẳng phân giác (Q_1): $2x + y - 3z + 5 = 0$, suy ra:

  $2(3t + 2) + (-2t + 5) - 3(-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$

  Khi đó, ta được mặt cầu:

  $$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x+4)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 56.$$

- Với mặt phẳng phân giác (Q_2): $4x - 5y + z + 3 = 0$, suy ra:

  $$4(3t + 2) - 5(-2t + 5) + (-t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 21t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

  Khi đó, ta được mặt cầu:

  $$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow (S_2): (x-4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.
(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Để (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn điều kiện là:

$I \in (P_2)) \Leftrightarrow (3t + 2) - 3(-2t + 5) + 2(-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 7t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) cần dựng được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(8; 1; -2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x-8)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 56.$$

e. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm T(x; y; z) và bán kính R.
(T) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1T \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1T} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1T} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Để (T) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:

$$R^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1T^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 = \frac{|7t-14|^2}{14} + \frac{21}{2} \Leftrightarrow 4t^2 = (t-2)^2 + 3 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -7/3 \end{array}\right.$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = 1$ ta được tâm $T_1(5; 3; -1)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1(5; 3; -1) \\ \text{Bán kính } R = M_1T_1 = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (T_1): (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 14.$$

- Với $t_2 = -\frac{7}{3}$ ta được tâm $T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1T_2 = \sqrt{\frac{686}{9}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x + \frac{15}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{29}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{686}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Với ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có chứa tham số chúng ta thường gặp thêm câu hỏi "*Xác định giá trị của tham số để ba mặt phẳng* (P), (Q) *và* (R) *đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng*". Khi đó, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vtpt $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$, $\overrightarrow{n_R}$ của các mặt phẳng (P), (Q), (R).

Bước 2: Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \\ \overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \end{cases}.$$

Bước 3: Toạ độ điểm chung I của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) là nghiệm hệ phương trình tạo bởi (P), (Q), (R).

Thí dụ 5. *Cho ba mặt phẳng* (P), (Q) *và* (R) *có phương trình*:

(P): $x + y + z - 6 = 0$; (Q): $x - 2y + z = 0$;

(R): $kx + (m - 1)y - z + 2 = 0$.

a. *Xác định giá trị* m *và* k *để ba mặt phẳng đó cùng đi qua một đường thẳng.*

b. *Xác định giá trị* m *và* k *để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng.*

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hai điểm } A(4;\ 2;\ 0) \text{ và } B(0;\ 2;\ 4) \text{ thuộc } (d).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng điều kiện là:

$$(d) \in (R) \Leftrightarrow A \in (R) \text{ và } B \in (R)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 2(m-1) + 2 = 0 \\ 2(m-1) - 4 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + m = 0 \\ 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Vậy, với m = 2 và k = −1 ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng.

b. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$, $\overrightarrow{n_R}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), (R), ta được:

$$\overrightarrow{n_P}(1;\ 1;\ 1),\ \overrightarrow{n_Q}(1;\ -2;\ 1),\ \overrightarrow{n_R}(k;\ m-1;\ -1).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \\ \overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + 1 = 0 \\ k + m - 1 - 1 = 0 \\ k - 2(m-1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + m = 2 \\ k - 2m = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = k = 1.$

Khi đó, toạ độ điểm chung I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1;\ 2;\ 3).$$

Vậy, với m = k = 1 thì ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau và có điểm chung là I(1; 2; 3).

Dạng toán 4: Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
Xác định d = d(I, (P)

Bước 2: So sánh d với R để đưa ra kết luận:

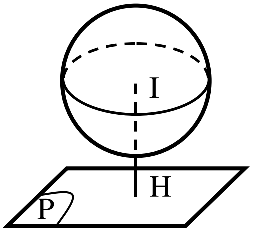
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1 trang bên).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2 trang bên).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = (C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 3 trang bên).

Và trong trường hợp này nếu:

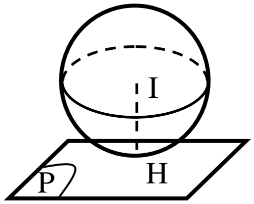
$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$
$$(P): Ax + By + Cz + D = 0,$$

thì phương trình đường tròn (C) có phương trình:

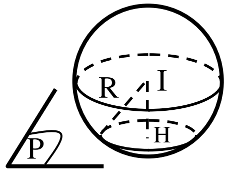
$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

☞ ***Chú ý***: 1. Trong phần này chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới các dạng toán:

<u>Dạng 1:</u> Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

<u>Dạng 2:</u> Viết phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

<u>Dạng 3:</u> Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

<u>Dạng 4:</u> Viết phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

2. Trong trường hợp mặt phẳng không cắt mặt cầu, cụ thể với mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) không cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:
   1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
      a. Tiếp xúc với (S).
      b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
      c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
   2. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
   3. Viết phương trình mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P).
   4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

Ta lần lượt:

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D} \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

b. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:

$I \in (Q)) \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D} \Rightarrow$ Phương trình (Q).

c. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r, suy ra:

$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D}$

$\Rightarrow$ Phương trình (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng vuông góc với* (P) *và cắt* (S) *tại hai điểm* B *sao cho* AB *có độ dài lớn nhất*", chúng ta thấy ngay đó là đường thẳng đi qua I và có vtcp $\vec{n}$.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm toạ độ điểm I' đối xứng với I qua (P).

Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S)", các em học sinh cần có thêm kiến thức về đường thẳng để trình bày theo các bước:

Bước 1: Gọi (T) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H (H chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P)), suy ra M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}.$$

Bước 2: Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P).

Bước 3: Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S).

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu đường kính MH.

Thí dụ 1. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): 2x - 3y + 2z - 3 = 0,$$
$$(S): (x-8)^2 + (y+8)^2 + (z-7)^2 = 68.$$

a. *Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).
c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính bằng* $r = \sqrt{51}$.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).
f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(8; −8; 7) và bán kính $R = 2\sqrt{17}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2.8 - 3.(-8) + 2.7 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 3\sqrt{17} > 2\sqrt{17}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:
  (Q): $2x - 3y + 2z + D = 0$. (1)
- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.8 - 3(-8) + 2.7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow |D + 54| = 34$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -20 \\ D_2 = -88 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -20$ thay vào (1), ta được (Q_1): $2x - 3y + 2z - 20 = 0$.
- Với $D_2 = -88$ thay vào (1), ta được (Q_2): $2x - 3y + 2z - 88 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
  (R): $2x - 3y + 2z + D = 0$.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
  $I \in (R)) \Leftrightarrow 2.8 - 3(-8) + 2.7 + D = 0 \Leftrightarrow D = -54$.

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) có dạng $2x - 3y + 2z - 54 = 0$.

d. Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
  (α): $2x - 3y + 2z + D = 0$. (2)
- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{51}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2.8 - 3(-8) + 2.7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{68 - 51}$$

$$\Leftrightarrow |D + 54| = 17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -37 \\ D_2 = -71 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -37$ thay vào (2), ta được (α_1): $2x - 3y + 2z - 37 = 0$.
- Với $D_2 = -71$ thay vào (2), ta được (α_2): $2x - 3y + 2z - 71 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = 2\sqrt{17}$ và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P). Để xác định toạ độ điểm I' ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(2; -3; 2) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1) $\Rightarrow$ I'(–4; 10; –5).

Cách 2: Giả sử I'(x; y; z), suy ra:

$$\begin{cases} II' \perp (P) \\ H \in (P) \text{ với H là trung điểm của } II' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} = t.\overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2.\dfrac{x+8}{2} - 3.\dfrac{y-8}{2} + 2.\dfrac{z+7}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 85 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \\ z = -5 \\ t = -6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1) $\Rightarrow$ I'(–4; 10; –5).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-4; 10; -5) \\ R = 2\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x+4)^2 + (y-10)^2 + (z+5)^2 = 68.$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H, suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính MH.
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(8; -8; 7) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; -3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -8 - 3t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P), suy ra:

$2(8 + 2t) - 3(-8 - 3t) + 2(7 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 17t + 51 = 0 \Leftrightarrow t = -3$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1).

Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S), suy ra:

$$(S): (8 + 2t - 8)^2 + (-8 - 3t + 8)^2 + (7 + 2t - 7)^2 = 68$$

$$\Leftrightarrow 17t^2 = 68 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với t = 2 ta được $M_1(12; -14; 11)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(7; -\dfrac{13}{2}; 6\right) \text{ là trung điểm } M_1H \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_1H}{2} = \sqrt{\dfrac{425}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): (x-7)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 + (z-6)^2 = \frac{425}{4}.$$

- Với t = –2 ta được $M_2(4; -2; 3)$ và mặt cầu đường kính M_2H là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(3; -\dfrac{1}{2}; 2\right) \text{ là trung điểm } M_2H \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_2H}{2} = \sqrt{\dfrac{17}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{17}{4}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) tiếp xúc với mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) tại điểm M chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
3. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P).

- Với yêu cầu "*Tìm tọa độ tiếp điểm* M *của* (P) *và* (S)", chúng ta thấy ngay M chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu (2.a) chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *và cắt mặt cầu* (S) *tại điểm* N *sao cho* MN *có độ dài lớn nhất*", chúng ta thấy ngay đường thẳng (d) đi qua hai điểm M và I.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Tìm toạ độ điểm I' đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M.

  Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): 2x - y + 2z - 5 = 0,\quad (S): (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9.$$

a. *Chứng tỏ rằng mặt phẳng* (P) *tiếp xúc với mặt cầu* (S). *Tìm toạ độ tiếp điểm* M *của* (P) *và* (S).
b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).
c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và chia* (S) *thành hai phần có tỉ số thể tích bằng* $\frac{7}{20}$.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(3; 0; 4) và bán kính R = 3, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2.3 + 2.4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 = R.$$

Do đó, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Toạ độ tiếp điểm M(x; y; z) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(2; -1; 2) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2t \\ y = -t \\ z - 4 = 2t \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t \\ z = 2t + 4 \\ 9t + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 2).$$

Vậy, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M(1; 1; 2).

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

  (Q): 2x − y + 2z + D = 0.

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.3 + 2.4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow |D + 14| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -5 \text{ (loại)} \\ D_2 = -23 \end{array}\right..$$

Khi đó, với $D_2 = -23$ ta được (Q): $2x - y + 2z - 23 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên $N(5; -1; 6)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

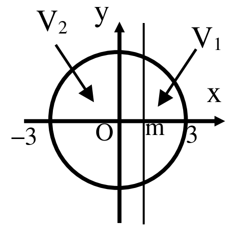
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N(5; -1; 6) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2; -1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 2z - 23 = 0.$$

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
  (R): $2x - y + 2z + D = 0$.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
  $I \in (R)) \Leftrightarrow 2.3 + 2.4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -14$.

Khi đó, với $D = -14$ ta được (R): $2x - y + 2z - 14 = 0$.

d. Trước tiên, trong mặt phẳng Oxy ta xét đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 3$ và đường thẳng $x = m$ $(0 < m < 3)$ (hình bên). Gọi V là thể tích của mặt cầu có bán kính $R = 3$, ta có:



$$\frac{7}{20} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} \Leftrightarrow 7(V - V_1) = 20V_1$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{7}{27}V \Leftrightarrow \pi\int_m^3 (9 - x^2)dx = \frac{7}{27}.\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Leftrightarrow \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_m^3 = \frac{28}{3} \Leftrightarrow (27 - 9) - \left(9m - \frac{m^3}{3}\right) = \frac{28}{3}$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 27m + 26 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 26) = 0 \overset{0<m<3}{\Leftrightarrow} m = 1.$$

Từ đó, yêu cầu của bài toán được phát biểu lại dưới dạng "*Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cách* I *một khoảng bằng* 1", do đó ta lần lượt:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
  (α): $2x - y + 2z + D = 0$. (2)
- (α) cách I một khoảng bằng 1, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2.3 + 2.4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |D + 14| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -11 \\ D_2 = -17 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -11$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_1): $2x - y + 2z - 11 = 0$.
- Với $D_2 = -17$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_2): $2x - y + 2z - 17 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = 3$ và tâm I’ là điểm đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M nên $I'(-1; 2; 0)$.

Khi đó, phương trình mặt cầu (S’) cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-1;\, 2;\, 0) \\ \text{Bán kính } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A;\, B;\, C)$) cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) theo thiết diện là đường tròn (C) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của (C).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C’) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C’)).
3. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P).
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

- Với yêu cầu "*Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của* (C)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Bán kính r_C của (C) được xác định bởi $r_C = \sqrt{R^2 - d(I,\, (P))}$.

  Bước 2: Toạ độ tâm của (C) chính là hình chiếu vuông góc M của I trên (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* (C)" chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

  Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

  Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

- Các yêu cầu còn lại được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S).

Thí dụ 3. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): x + 2y + 3z - 10 = 0,\quad (S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 56.$$

a. *Chứng tỏ rằng mặt phẳng* (P) *cắt mặt cầu* (S) *theo giao tuyến là đường tròn* (C). *Xác định toạ độ tâm* M *và tính bán kính* r *của* (C).

b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).

c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*

d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* r.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).
f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(2; 0; –2) và bán kính $R = \sqrt{56}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 + 3.(-2) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14} < \sqrt{56}.$$

Do dó, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) lần lượt có:

- Bán kính r được xác định bởi:

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))} = \sqrt{56 - 14} = \sqrt{42}.$$

- Toạ độ tâm M(x; y; z) của (C) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(1; 2; 3) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y = 2t \\ z + 2 = 3t \\ x + 2y + 3z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t \\ z = 3t - 2 \\ 14t - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 2; 1).$$

Vậy, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{42}$ và tâm M(3; 2; 1).

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:
  (Q): x + 2y + 3z + D = 0. (1)
- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 + 3.(-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56} \Leftrightarrow |D - 4| = 28 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = 32 \\ D_2 = -24 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = 12$ thay vào (1), ta được (Q_1): x + 2y + 3z + 32 = 0.
- Với $D_2 = -44$ thay vào (1), ta được (Q_2): x + 2y + 3z – 24 = 0.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
  (R): x + 2y + 3z + D = 0.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
  I ∈ (R)) ⇔ 2 + 3(–2) + D = 0 ⇔ D = 4.

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) cần dựng có dạng x + 2y + 3z + 4 = 0.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
  (α): x + 2y + 3z + D = 0.
- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{42}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2 + 3.(-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56 - 42} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -10 \text{ (loại)} \\ D_2 = 18 \end{array}\right. .$$

Khi đó, với $D_2 = 18$ ta được (Q): x + 2y + 3z + 18 = 0.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (α) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên N(1; −2; −5).

Phương trình mặt phẳng (α) được cho bởi:

$$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } N(1; -2; -5) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha): x + 2y + 3z + 18 = 0.$$

e. Mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = \sqrt{56}$ và tâm I’ là điểm đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M nên I’(4; 4; 4).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S’) cần dựng được cho bởi :

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(4; 4; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 56 .$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại A và M, suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính MA.
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(2; 0; -2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

Tiếp điểm M của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P), suy ra:

$(2 + t) + 2.2t + 3(3t - 2) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 2; 1)$.

Tiếp điểm A của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S), suy ra:

$$(S): (2 + t - 2)^2 + (2t)^2 + (-2 + 3t + 2)^2 = 56 \Leftrightarrow 14t^2 = 56 \Leftrightarrow t = \pm 2 .$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với t = 2 ta được $A_1(4; 4; 4)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right) \text{ là trung điểm } A_1M \\ \text{Bán kính } R = T_1M = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} .$$

- Với $t = -2$ ta được $A_2(0; -4; -8)$ và mặt cầu đường kính A_2M là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(\dfrac{3}{2}; -1; -\dfrac{7}{2}\right) \text{ là trung điểm } A_2M \\ \text{Bán kính } R = T_2M = \sqrt{63/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{63}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

<u>Dạng toán 1:</u> Phương trình đường thẳng

Phương pháp

Ta có:

1. Phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là phương trình *tham số* của một đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vectơ vtcp là $\vec{u}(a;b;c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

2. Phương trình:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

với điều kiện $abc \neq 0$ là phương trình *chính tắc* của một đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vectơ vtcp là $\vec{u}(a;b;c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

3. Phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$A_1{:}B_1{:}C_1 \neq A_2{:}B_2{:}C_2 \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq \vec{0}.$$

Khi đó, vectơ:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \text{ là một vtcp của (d).}$$

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ (d_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số đường thẳng của họ (d_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định, để thực hiện yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử m từ hệ của phương trình (d), ta được:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m)] +$$
$$+ \beta[A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + D_2(m)] = 0. \qquad (2)$$

Bước 2: Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β, đưa (2) về dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

Bước 3: Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$\begin{cases} x = 2 + (m+1)t \\ y = 1 + (m-1)t \\ z = mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để phương trình trên là phương trình của một họ đường thẳng kí hiệu là* (d_m), *từ đó chỉ ra điểm cố định mà họ* (d_m) *luôn đi qua*.

b. *Điểm* A(3; 1; 1) *có thuộc đường thẳng nào của họ* (d_m) *không*.

c. *Chứng minh rằng họ đường thẳng* (d_m) *luôn thuộc một mặt phẳng* (P) *cố định, tìm phương trình mặt phẳng* (P).

d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ* (d_m) *và có tâm thuộc mặt phẳng* (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$.

e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = 2\sqrt{6}$ *tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ* (d_m).

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (m + 1)^2 + (m - 1)^2 + m^2 = 3m^2 + 2 > 0, \forall m$$

Vậy với mọi m, phương trình (1) là phương trình tham số của họ đường thẳng (d_m) và dễ nhận thấy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$, ứng với t = 0 khi thay vào phương trình tham số của đường thẳng.

b. Điểm A(3; 1; 1) thuộc một đường thẳng của họ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3 = 2 + (m+1)t \\ 1 = 1 + (m-1)t \\ 1 = mt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt + t = 1 \\ mt - t = 0 \\ mt = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = t = 1.$$

Vậy, điểm A(3; 1; 1) thuộc đường thẳng (d_1) của họ (d_m).

c. Ta lựa chọn một trong ba cách lập luận sau:

Cách 1: Từ hệ (1) bằng cách rút theo t, ta được:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-2}{m+1} \\ t = \dfrac{y-1}{m-1} \\ t = \dfrac{z}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{m+1} = \dfrac{z}{m} \\ \dfrac{y-1}{m-1} = \dfrac{z}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(x - z - 2) = z \\ m(y - z - 1) = -z \end{cases} \Rightarrow \frac{x-z-2}{y-z-1} = -1$$

$\Rightarrow x + y - 2z - 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 2: Từ hệ (1) bằng cách cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{cases} x + y = 3 + 2mt \\ z = mt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 + 2mt \\ 2z = 2mt \end{cases} \Rightarrow x + y - 2z - 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 3: Họ (d_m) có vtcp $\vec{u}(m + 1; m - 1; m)$ và với vectơ $\vec{n}(1; 1; -2)$ ta có nhận xét:

$\vec{u}.\vec{n} = (m + 1).1 + (m - 1).1 - 2m = 0, \forall m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}, \forall m.$

Do đó, họ (d_m) thuộc mặt phẳng (P) cố định có phương trình được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - 2z - 3 = 0.$$

d. Mặt cầu (T) cần tìm chính là mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$ và và có tâm thuộc mặt phẳng (Q).

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M_0, suy ra I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Bằng cách thay phương trình tham số của (Δ) vào (Q), ta được:

  $2 + t + 1 + t + 2(-2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

  $\Rightarrow$ Tâm $T(3 ; 2 ; -2)$ và bán kính $R = TM_0 = \sqrt{6}$.

Từ đó, ta nhận được phương trình mặt cầu (T) có dạng:

$(T): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 6.$

e. Mặt cầu (S) cần tìm chính là mặt cầu có bán kính $R = 2\sqrt{6}$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$.

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M_0, suy ra I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

  Suy ra tâm $I(2 + t; 1 + t; -2t)$.
- (S) tiếp xúc với (P) tại M_0 khi và chỉ khi:

$$M_0I = R \Leftrightarrow M_0I^2 = R^2 \Leftrightarrow 6t^2 = 24 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t = 2$, suy ra tâm $I_1(4; 3; -4)$ khi đó được (S_1) có phương trình là:
  $(S_1): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 24.$
- Với $t = -2$, suy ra tâm $I_2(0; -1; 4)$ khi đó được (S_2) có phương trình là:
  $(S_2): x^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 24.$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của bài toán trên:

a. Ở câu b), bằng việc lựa chọn $t = 0$ chúng ta nhận được điểm cố định $M(1; 0; 2)$ mà họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua. Và các em học sinh cần linh hoạt trong phép lựa chọn này.

b. Ở câu c), với ba cách:

- ***Cách 1***, chúng ta thực hiện việc chuyển phương trình của họ (d_m) về dạng chính tắc rồi dạng tổng quát (giao tuyến của hai mặt phẳng) và từ đó khử m để nhận được phương trình mặt phẳng cố định (P). Công việc này thực chất là khử dần các tham số t và m.
- ***Cách 2***, chúng ta thực hiện liên tiếp hai phép khử cho các tham số t và mt và đây là cách giải mà các em học sinh hãy ghi nhận để áp dụng cho các bài tập tương tự.
- ***Cách 3***, để tìm được vectơ $\vec{n}$ chúng ta thực hiện như sau:

  Giả sử $\vec{n}(A; B; C)$ và khi đó:

$$\vec{a}.\vec{n} = 0, \forall m \Leftrightarrow A(m + 1) + B(m - 1) + Cm = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow (A + B + C)m + A - B = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A \\ C = -2A \end{cases}.$$

  Từ đó, chọn $A = 1$ ta được $\vec{n}(1; 1; -2)$.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$\frac{x-1}{2m} = \frac{my}{2} = \frac{z+1}{m}. \qquad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để phương trình* (1) *là phương trình chính tắc của một đường thẳng, gọi là họ* (d_m).
b. *Tìm điểm cố định mà họ* (d_m) *luôn đi qua*.
c. *Chứng tỏ rằng họ đường thẳng* (d_m) *luôn thuộc một mặt phẳng cố định*.

✍ *Giải*

a. Trước tiên ta cần có điều kiện $m \neq 0$ để chuyển phương trình (1) về dạng:

$$\frac{x-1}{2m} = \frac{y}{\frac{2}{m}} = \frac{z+1}{m}.$$

Khi đó, để phương trình trên là phương trình chính tắc của một đường thẳng điều kiện là:

$$2m.\frac{2}{m}.m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy, với $m \neq 0$ phương trình (1) là phương trình của một đường thẳng.

b. Ta thấy ngay họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(1; 0; −1).

c. Các đường thẳng thuộc họ (d_m) có vtcp $\vec{u}\left(2m; \frac{2}{m}; m\right)$.

Với vectơ $\vec{n}(1;0;-2)$ ta có nhận xét:

$$\vec{u}.\vec{n} = 2m - 2m = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}, \forall m.$$

Vậy, họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc mặt phẳng cố định (P) có phương trình được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M(1;0;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;0;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2z - 3 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt phẳng (Q) chúng ta còn gặp một dạng toán là "*Tìm đường thẳng cố định luôn thuộc họ mặt phẳng* (Q)". Thí dụ với mặt phẳng (Q): x + my − 3mz − m − 1 = 0 ta thực hiện phép biến đổi:

$$(Q): x - 1 + m(y - 3z - 1) = 0$$

Từ đó, suy ra đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Như vậy, để chứng minh họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình của họ (P_m) về dạng:

$$f(x, y, z) + mg(x, y, z) = 0.$$

Bước 2: Vậy, họ (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d): \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Dạng toán 2: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp

Để viết phương trình đường thẳng (d), ta sử dụng các kết quả:

Cách 1: Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp hoặc đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt đã được trình bày trong phần phương trình đường thẳng.

Cách 2: Đường thẳng được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) chứa nó. Từ đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Bước 3: Đường thẳng (d) gồm những điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bước 4: Chọn một điểm M_0 thoả mãn hệ (*) và một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Bước 5: Viết dạng phương trình đường thẳng (d) theo yêu cầu của bài toán (trong nhiều trường hợp chúng ta có thể bỏ qua bước 4 nếu bài toán yêu cầu về phương trình tham số của đường thẳng).

Thí dụ 1. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* M(2; −1; 3) *và*:

a. *Song song với đường thẳng* (Δ): $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{2z+1}{2}$.

b. *Vuông góc với mặt phẳng* (P): $3x - 2y + z - 6 = 0$.

c. *Song song với hai mặt phẳng*:

(P_1): $2x + 2y + z - 4 = 0$, (P_2): $2x - y - z + 5 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (d) // (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(2; -1; 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(2; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;-1;3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

c. Các mặt phẳng (P_1), (P_2) có vtpt $\overrightarrow{n_1}$ (2; 2; 1), $\overrightarrow{n_2}$ (2; −1; −1).

Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} (d) // (P_1) \\ (d) // (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-1; 4; -6) \text{ chọn } \vec{u}\,(1; -4; 6).$$

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;-1;3) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;-4;6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: 1. Rất nhiều em học sinh khi thực hiện câu a) mắc phải sai lầm bởi cho rằng đường thẳng (Δ) có một vtcp là $\vec{u}(2;1;2)$.

2. Chúng ta biết rằng giao điểm H của đường thẳng (d) với mặt phẳng (P) trong câu b) chính là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P). Như vậy, chúng ta có thêm một phương pháp để "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) *cho trước*".

3. Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *và vuông góc với hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *cho trước*" chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 3: Khi đó, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Các em học sinh cần lưu ý tới việc bài toán có thể thay đổi điều kiện vuông góc với đường thẳng (d_1) (hoặc (d_2)) bằng yêu cầu song song với mặt phẳng (P_1) (hoặc (P_2)).

Thí dụ 2. *Cho điểm* M(1; 2; 1) *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{2-z}{1}, \quad (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{1}.$$

a. *Tìm góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng* (d_1), (d_2).

b. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A *và vuông góc với cả* (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(1; 1; -1)$ và đi qua điểm $M_1(0; 1; 2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(1; -2; 1)$ và đi qua điểm $M_2(1; 1; 0)$.

Khi đó, ta lần lượt có:

- Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|.\left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{\left|1-2-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{18}}.$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]\right|} = \frac{\left|(-1; -2; -3)(1; 0; -2)\right|}{\left|(-1; -2; -3)\right|} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

b. Giả sử (d) có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases}(d)\perp(\Delta_1)\\(d)\perp(\Delta_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{v_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{v_2}\end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] = (-1; -2; -3) \text{ chọn } \vec{u}(1; 2; 3).$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M(1;2;1)\\\text{vtcp } \vec{u}(1;2;3)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 1+t\\y = 2+2t, t\in\mathbb{R}.\\z = 1+3t\end{cases}$$

☞ ***Chú ý***: 1. Bài toán trên còn có thể thực hiện theo cách:

Bước 1: Tìm các vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Ta lần lượt:

- Viết phương trình mặt phẳng (P_1) qua A và vuông góc với (d_1).
- Viết phương trình mặt phẳng (P_2) qua A và vuông góc với (d_2).

Bước 3: Khi đó (d) chính là giao tuyến của (P_1) với (P_2).
Và từ đây, chúng ta đã biết các cách xác định dạng phương trình cho đường thẳng (d) ở thí dụ 3.

2. Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *cắt hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

<u>Cách 1</u>: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A\\(d_1)\subset(P)\end{cases}.$$

Bước 2: Xác định giao điểm B của (d_2) và (P).

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

<u>Cách 2</u>: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B, C. Khi đó toạ độ B, C theo thứ tự thoả mãn các phương trình của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thẳng hàng ta xác định được toạ độ B, C.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và B.

<u>Cách 3</u>: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn điều kiện:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn điều kiện:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Và từ đây, chúng ta đã biết các cách xác định dạng phương trình cho đường thẳng (d).

Điều kiện đi qua điểm A trong bài toán trên có thể được thay bởi điều kiện song song với một đường thẳng (Δ) hoặc vuông góc với một mặt phẳng.

<u>Thí dụ 3.</u> *Cho mặt phẳng* (P) *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(P): 3x + 3y - 4y = 0,$$

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

a. *Tính côsin góc giữa mặt phẳng* (P) *với các đường thẳng* (d_1), (d_2).

b. *Viết phương trình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng* (P) *và cắt cả hai đường thẳng* (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3; 3; -4)$.

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1;\ 2;\ 1)$ và đi qua điểm $M_1(1;\ 3;\ -2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3;\ -1;\ -2)$ và đi qua điểm $M_2(2;\ 1;\ 1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi α là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{\left|1.3+2.3+1(-4)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{476}}$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{476}} = \sqrt{\frac{451}{476}}.$$

- Gọi β là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\beta = \frac{\left|\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{\left|3.3-1.3-2(-4)\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}.\sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{119}}$$

$$\Rightarrow\ \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{49}{119}} = \sqrt{\frac{70}{119}} = \sqrt{\frac{10}{17}}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \\ z = -2+t \end{cases} (t \in \mathbb{R}),\ (d_2): \begin{cases} x = 2+3u \\ y = 1-u \\ z = 1-2u \end{cases} (u \in \mathbb{R}).$$

Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm $E \in (d_1)$ suy ra $E(1 + t;\ 3 + 2t;\ t - 2)$.
- Điểm $F \in (d_2)$ suy ra $F(2 + 3u;\ 1 - u;\ 1 - 2u)$.
- Vì EF vuông góc với mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3;\ 3;\ -4)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \frac{3u-t+1}{3} = \frac{-u-2t-2}{3} = \frac{-2u-t+3}{-4} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow E\left(2;5;-1\right).$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}\left(3;3;-4\right) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+3t \\ z = -1-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng, khi đó (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2), trong đó:

$$(Q_1): \begin{cases} (P) \perp (Q_1) \\ (d_1) \subset (Q_1) \end{cases} \text{ và } (Q_2): \begin{cases} (P) \perp (Q_2) \\ (d_2) \subset (Q_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Phương trình mặt phẳng (Q_2) được cho bởi:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (-10;-6;-12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 11x - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5x + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bằng việc đặt x = 3t + 2, ta biến đổi hệ (I) về dạng:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ 11(3t+2) - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5(3t+2) + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa (d_1), ta có:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2} \\ 11x - 7y + 3z + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ z = 2y - 1 \\ 11(5-3y) - 7y + 3(2y-1) + 16 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(-1;2;3)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } F(-1;2;3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Cách 4: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (Q_2) là mặt phẳng song song với (d') và chứa (d_2), ta có:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (-10;-6;-12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

- Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{1} \\ 5x + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = x - 3 \\ 5x + 3(2x+1) + 6(x-3) - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2;5;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-4}.$$

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (d) *cho trước*", ví dụ sẽ sau minh hoạ phương pháp thực hiện.

Thí dụ 4. *Cho điểm* M(1; 2; −1) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. *Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của* M *trên đường thẳng* (d). *Từ đó, suy ra tọa độ điểm* M_1 *đối xứng với* M *qua* (d).
b. *Lập phương trình đường thẳng đi qua* M *vuông góc với* (d) *và cắt* (d).

✍ *Giải*

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (d), suy ra:

$H(2; t; 1 - t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(1; t - 2; 2 - t)$,

$MH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t - 2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(2; 2; -1)$.

Vì H là trung điểm của MM_1 nên ta có $M_1(3; 2; -1)$.

b. Phương trình đường thẳng đi qua M vuông góc với (d) và cắt (d) là:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MH}(1;0;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (Δ) *cho trước*", người ta thường thay điều kiện <u>vuông góc</u> bằng <u>*tạo với* (Δ) *một góc* α</u>,

Thí dụ 5. *Lập phương trình đường thẳng đi qua* A(4; 1; −1) *cắt* (Δ) *và tạo với* (Δ) *một góc bằng* 45^0, *biết*:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0;1;1)$.

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\ b;\ c)$, ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:
$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB},\ \vec{u}\right] = (-2;\ 4;\ -4) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(1;\ -2;\ 2).$$
- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:
$$\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 2c. \qquad (1)$$
- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:
$$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}}$$
$$\Leftrightarrow (b + c)^2 = (2b - 2c)^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow b = 2c \text{ hoặc } c = 2b.$$

Khi đó:

- Với b = 2c thì a = 2c nên $\overrightarrow{u_d}(2c;\ 2c;\ c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(2;\ 2;\ 1)$, từ đó:
$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
- Với c = 2b thì a = –2b nên $\overrightarrow{u_d}(-2b;\ b;\ 2b)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-2;\ 1;\ 2)$, từ đó:
$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0;1;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ), ta lần lượt có:

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ), ta có:
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): y + z = 0.$$
- Vì {H} = (Δ) ∩ (Q) nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow H(0;\ 0;\ 0).$$

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$HM = HA \Leftrightarrow HM^2 = HA^2 \Leftrightarrow (1 + t)^2 + (1 + t)^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + t)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+t=-3 \\ 1+t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Ta lần lượt có:

- Khoảng cách d từ A đến (Δ) được cho bởi:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \sqrt{18}.$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) và giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$AM = AH\sqrt{2} \Leftrightarrow AM^2 = 2AH^2 \Leftrightarrow (-4)^2 + t^2 + (2 + t)^2 = 2.18$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -4 \text{ hoặc } t_2 = 2.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4-2t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông* *góc với đường thẳng* (d_1) *và cắt đường thẳng* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ví dụ sẽ sau minh hoạ phương pháp thực hiện.

Thí dụ 6. *Cho điểm* A(4; −1; −1) *và hai đường thẳng* (Δ_1) *và* (Δ_2) *có phương trình*:

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (Δ_1), (Δ_2) *chéo nhau.*

b. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A *vuông góc với* (Δ_1) *và cắt* (Δ_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; 2)$.
- Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 8 \Rightarrow (\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ chéo nhau.}$$

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_2) về dạng tham số:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 3 - 2u \\ y = 1 + u \quad (u \in \mathbb{R}). \\ z = 1 + 3u \end{cases}$$

Giả sử (d) cắt (Δ_2) tại điểm N, khi đó:

- Điểm N ∈ (Δ_2) suy ra N(3 − 2u; 1 + u; 1 + 3u).
- Điều kiện để (d) vuông góc với đường thẳng (Δ_1) là:

$$\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{v_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{v_1} = 0 \Leftrightarrow 2(-1 - 2u) - (2 + u) + 2 + 3u = 0$$

$$\Leftrightarrow -2u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Rightarrow N(5; 0; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Gọi (R_2) là mặt phẳng đi qua A và chứa (Δ_2) thì:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{v_2} \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (4;-1;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (R_2): 4x - y + 3z - 14 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x - y + 3z - 14 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 2t - y + z - 8 = 0 \\ 4t - y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -5 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (d) với vtcp $\vec{u}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_1) \perp (R_1) \end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_2) \subset (R_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (R_1) có vtpt $\overrightarrow{v_1}(2; -1; 1)$.
- Mặt phẳng (R_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$ được cho bởi $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (4; -1; 3)$.
- vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được cho bởi $\vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1; 1; -1)$.

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 3: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Mặt phẳng (R_1) cắt (Δ_2) tại điểm N thì toạ độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3} \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = 2 \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow N(5; 0; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dạng toán 3: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) (hoặc xác định điều kiện về vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)), ta thường lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (***Phương pháp đại số***): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 2: Biện luận:

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất , khi đó $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ là nghiệm của hệ.
- Nếu hệ vô nghiệm, khi đó $(d) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (d) // (P)$.
- Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó $(d) \subset (P)$.

Cách 2: (***Phương pháp hình học***): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử:

- (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
- (P) có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.

Bước 2: Khi đó:

1. Để (d) cắt (P) điều kiện là:
$$\vec{u}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0.$$
2. Để (d) song song với (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}.$$
3. Để (d) nằm trong (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}.$$
Hoặc có thể lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc (d) và thiết lập điều kiện M, N thuộc (P).
4. Để (d) vuông góc với (P) điều kiện là $\vec{u} = k\vec{n}$.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α.
3. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) và (P) tại điểm M.
4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và vuông góc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).
Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).
Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ (a; b; c) là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

- $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0$. (1)
- $g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *và* (P) *tại điểm* M" thì bài toán được chuyển về dạng "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với* (P) *tại điểm* M", đây là dạng toán mà chúng ta đã biết cách thực hiện.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*", chúng ta có thể lựa chọn một trong các cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số của đường thẳng (Δ) nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Bước 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S), khi đó: toạ độ tâm I thoả mãn phương trình tham số của (Δ).
Sử dụng điều kiện:
$MI = R \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} MI \perp (d) \\ MI = R \\ d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Thí dụ 1. *Cho mặt phẳng* (P) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(P): x + 2y + 2z - 5 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *nằm trong mặt phẳng* (P).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và vuông góc với* (P).
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (R) *chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α *có* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
d. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{18}$ *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M(1; 2; 0) *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* $R = \sqrt{3}$ *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* N(1; 3; −1) *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn có diện tích bằng* $\frac{2\pi}{9}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$1 + 2(2 + t) + 2(-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$

Tức hệ có vô số nghiệm, do đó (d) nằm trong (P).

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(1; 2; 0) và B(1; 3; –1).

Nhận xét rằng A, B cũng thuộc (P) nên (d) nằm trong (P).

Cách 3: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0; 1; -1)$ và đi qua điểm A(1; 2; 0).

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; 2)$. Nhận xét rằng:

$\vec{u}.\vec{n} = 1.2 - 1.2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$. (1)

$1 + 2.2 - 5 = 0 \Rightarrow A \in (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) nằm trong (P).

b. Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0; 1; -1)$ và đi qua điểm A(1; 2; 0).
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (4; -1; -1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(4; -1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 4x - y - z - 2 = 0.$$

c. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow b - c = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

- (R) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ điều kiện là:

$$\frac{|a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \frac{|a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow (a + 4b)^2 = 6(a^2 + 2b^2) \Leftrightarrow 5a^2 - 8ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b \text{ hoặc } a = -\frac{2}{5}b.$$

Khi đó:

- Với $a = 2b$ thì chọn a = 2 ta được b = c = 1 nên $\overrightarrow{n_R}(2; 1; 1)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y + z - 4 = 0.$$

- Với $a = -\dfrac{2}{5}b$ thì chọn a = 2 ta được b = c = –5 nên $\overrightarrow{n_R}(2; -5; -5)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; 0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2; -5; -5) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): 2x - 5y - 5z + 8 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ y - 2 - z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = z + 2 \\ (-4z)^2 + z^2 + z^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = z + 2 \\ z = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3,\ y = 3,\ z = 1 \\ x = 5,\ y = 1,\ z = -1 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $I_1(-3; 3; 1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-3; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18.$$

- Với $I_2(5; 1; -1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(5; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó I thuộc đường thẳng (Δ) có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (4; -1; -1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(4; -1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tâm I(1 + 4t; 2 − t; −t) và điều kiện:

$$MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2 \Leftrightarrow 16t^2 + t^2 + t^2 = 18 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với t = −1 thì $I_1(-3; 3; 1)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-3; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18.$$

- Với t = 1 thì $I_2(5; 1; -1)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(5; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Giả sử K(x; y; z) là tâm mặt cầu (T) cần dựng, khi đó ta lần lượt có:

- Vì $NK \perp (d)$ nên:

  $\overrightarrow{NK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow y - 3 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow y = z + 4 = 0.$ (3)
- Vì NK = R nên $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3.$ (4)
- Giả sử đường tròn (C) tạo bởi (T) cắt (P) có bán kính r, ta có :

$$S_{(C)} = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{9} = \pi r^2 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$d(K, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 2z - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \sqrt{3 - \frac{2}{9}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + 2z - 5| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 10 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right..$$

Từ đó:

- Với x + 2y + 2z = 10 kết hợp với (3) ta được:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 10 \\ y = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4z \\ y = z + 4 \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

  Thay (I) vào (4) ta được:

$$(1 - 4z)^2 + (z + 1)^2 + (z + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow 6z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ hoặc } z = \frac{2}{3}.$$

  Khi đó:
  - Với z = 0 thì x = 2 và y = 4 nên $K_1(2; 4; 0)$, suy ra mặt cầu:

    $(T_1): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 3.$
  - Với $z = \frac{2}{3}$ thì $x = -\frac{2}{3}$ và $y = \frac{14}{3}$ nên $K_2\left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}; \frac{2}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_2): \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 3.$$

- Với x + 2y + 2z = 0 kết hợp với (4) ta được:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z - 8 \\ y = z + 4 \end{cases}. \quad \text{(II)}$$

  Thay (II) vào (4) ta được:

$$9z^2 + 36z + 40 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \text{ hoặc } z = -\frac{20}{9}.$$

  Khi đó:
  - Với z = –2 thì x = 0 và y = 2 nên $K_3(0; 2; -2)$, suy ra mặt cầu:

    $(T_3): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 3.$
  - Với $z = -\frac{20}{9}$ thì $x = \frac{8}{9}$ và $y = \frac{16}{9}$ nên $K_4\left(\frac{8}{9}; \frac{16}{9}; -\frac{20}{9}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_4): \left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{20}{9}\right)^2 = 3.$$

Vậy, tồn tại bốn mặt cầu (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (d) và (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P).
3. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm M.
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M.

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d) *và* (P)", chúng ta có ngay:

$$d(d, (P)) = d(A, (P)), \text{ với } A \in (d).$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và song song với* (P)", chúng ta có ngay:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \in (d) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P)", chúng ta có các cách giải sau:

<u>Cách 1</u>: Ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Lấy điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

<u>Bước 2:</u> Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) // (d) \end{cases}.$$

<u>Cách 2</u>: Ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

<u>Bước 2:</u> Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α", chúng ta thực hiện tương tự như trong trong hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M", chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính MN với N là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

<u>Bước 2:</u> Xác định toạ độ điểm N.

<u>Bước 3:</u> Viết phương trình mặt cầu đường kính MN.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d) *và tiếp xúc với* (P) *tại điểm* M", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại N.
Vì N $\in$ (d) nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

Bước 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với (P).
Vì I $\in$ (Δ) nên thoả mãn phương trình tham số của (Δ).

Bước 3: Thiết lập điều kiện IN $\perp$ (d) và R = IM = IN chúng ta sẽ nhận được toạ độ tâm I và độ dài bán kính R.

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho mặt phẳng* (P) *và đường thẳng (d) có phương trình*:

$$(P): x + y - 6 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *song song với mặt phẳng* (P). *Tính khoảng cách giữa* (d) *và* (P).
b. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và song song với* (P).
c. *Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P).
d. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α *có* $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* A(1; 1; 1).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = 2\sqrt{2}$ *tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* A(1; 1; 1).
g. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d) *và tiếp xúc với* (P) *tại điểm* E(5; 1; 1).

✍ *Giải*

Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 0)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0; 0; 1)$ và đi qua điểm M(1; 1; 4).

a. Ta lần lượt:

- Để chứng minh (d) song song với (P) ta có thể trình bày theo các cách sau:
Cách 1: Bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta thấy:
1 + 1 − 6 = 0, mâu thuẫn
do đó (d) song song với (P).
Cách 2: Ta có:
$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}. \quad (1)$$

Nhận xét M $\notin$ (P). (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) song song với (P).

- Khoảng cách giữa (d) và (P) được cho bởi:

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, khi đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + y - 2 = 0.$$

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{H\} = (MH) \cap (P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 1 = k \\ y - 1 = k \\ z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (R) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 3: Gọi (P') với vtpt $\overrightarrow{n'}$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1;\ 1;\ 0).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P') được cho bởi:

$$(\text{P'}): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n'}(-1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (\text{P'}): x - y = 0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Vậy, đường thẳng (d') luôn có phương trình tham số là:

$$(d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a;\ b;\ c)$ thoả mãn điều kiện đầu bài, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là $\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow c = 0.$
- (P) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ điều kiện là:

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow 5(a + b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$ a = 2b hoặc b = 2a.

Khi đó:

- Với a = 2b thì $\overrightarrow{n_R}(2b;\ b;\ 0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(2;\ 1;\ 0)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y - 3 = 0.$$

- Với b = 2a thì $\overrightarrow{n_R}(a;\ 2a;\ 0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1;\ 2;\ 0)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;\ 2;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 2y - 3 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính AA' với A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A'(x; y; z) bằng việc sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} A' \in (P) \\ AA' \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' \in (P) \\ \overrightarrow{AA'}(x-1;\ y-1;\ z-1) // \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1) + (t+1) - 6 = 0 \\ x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(3;\ 3;\ 1).$$

Cách 2: Phương trình đường thẳng (AA') được cho bởi:

$$(AA'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (AA') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\,1;\,1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\,1;\,0) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì {A'} = (AA') ∩ (P) nên toạ độ A' được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (AA') vào phương trình của (P), ta được:

$$1 + t + 1 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A'(3;\,3;\,1).$$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AA' được xác định bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm } AA' \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AA'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;\,2;\,1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm các điểm:

$N(x;\,y;\,z) \in (S) \Leftrightarrow AN \perp A'N \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{A'N} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1;\, y - 1;\, z - 1).(x - 3;\, y - 3;\, z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) + (y - 1)(y - 3) + (z - 1)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm:

$N(x;\,y;\,z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta NAA'$ vuông tại $N \Leftrightarrow AN^2 + A'N^2 = AA'^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(a; b; c), khi đó I thuộc mặt phẳng:

$$(P_A): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (P_A) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\,1;\,1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(0;\,0;\,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): z - 1 = 0.$$

Ta lần lượt có:

$I \in (P_A) \Rightarrow c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1.$

$AI = R \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 8.$ (*)

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|a + b - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a + b - 6| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 10 - a \\ b = 2 - a \end{array}\right..$$

Từ đó:

- Với b = 10 – a thay vào (*) ta được:

  $(a - 1)^2 + (9 - a)^2 = 8 \Leftrightarrow 2a^2 - 20a + 76 = 0$, vô nghiệm.

- Với b = 2 – a thay vào (*) ta được:

$$(a - 1)^2 + (1 - a)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow I_1(3;\,-1;\,1) \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow I_2(-1;\,3;\,1) \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với tâm $I_1(3; -1; 1)$ ta được mặt cầu (S_1) có phương trình:

  (S_1): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

- Với tâm $I_2(-1; 3; 1)$ ta được mặt cầu (S_2) có phương trình:

  (S_2): $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại F.

Vì $F \in (d)$ nên $F(1; 1; 4 + t)$.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua E và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(5;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 5 + u \\ y = 1 + u \\ z = 1 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Vì $I \in (\Delta)$ nên $I(u + 5; u + 1; 1)$, ta lần lượt có:

- Vì $FI \perp (d)$ nên:

  $\overrightarrow{FI} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow F(1; 1; 1)$.

- Vì FI = IE nên:

  $FI^2 = IE^2 \Leftrightarrow (u + 4)^2 + u^2 = u^2 + u^2 \Leftrightarrow 8u + 16 = 0 \Leftrightarrow u = -2$.

Từ đó, mặt cầu (T) với tâm $T(3; -1; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ có dạng:

$$(T): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (d) và (P).
2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P).
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M.
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P).
8. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P).

Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d) *và* (P)", chúng ta có ngay:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a;b;c)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P)

Bước 2: Lấy điểm M $\in$ (d), từ đó xác định toạ độ điểm H_M là hình chiếu vuông góc của M lên (P).

Bước 3: Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH_M} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *đi qua* A, *nằm trong mặt phẳng* (P) *và vuông góc với đường thẳng* (d)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và vuông góc với (d).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc có số đo nhỏ nhất*", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$$
$$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

- $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0$. (1)
- $g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1), (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$

$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha$.

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right].$$

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R, *tâm thuộc đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I.

Vì $I \in (d)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

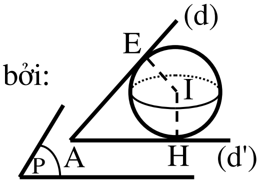
Bước 2: Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là $d(I, (P)) = R \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

- Các yêu cầu (6), (7) được thực hiện tương tự như trong trường hợp (d) song song với (P).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và tiếp xúc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt cầu (S) với tâm I cần dựng sẽ tiếp xúc với hình chiếu vuông góc (d') của (d) trên (P).

Bước 2: Ta lần lượt có:



- Mặt phẳng ((d), (d')) với vtpt $\overrightarrow{n'}$ được cho bởi:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{n}, \vec{u}\right].$$

- Đường thẳng (EI) với vtcp $\vec{v}$ được cho bởi:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{n'} \\ \vec{v} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \left[\vec{u}, \vec{n'}\right].$$

- Phương trình đường thẳng (EI) được cho bởi:

$$(EI): \begin{cases} \text{Qua } E \\ \text{vtcp } \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (theo t) của (EI).}$$

Bước 3: Từ đó, vì I thuộc (EI) nên thoả mãn phương trình tham số của (EI), ta có điều kiện:

$EI = IH = d(I, (P)) \Leftrightarrow EI^2 = d^2(I, (P)) \Rightarrow$ Tham số t

$\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R = EI.

Thí dụ 3. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1},\ (P): 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *cắt mặt phẳng* (P) *tại điểm* A. *Tìm toạ độ* A, *tính góc giữa* (d) *và* (P).
b. *Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P).
c. *Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *đi qua* A, *nằm trong mặt phẳng* (P) *và vuông góc với đường thẳng* (d).
d. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc có số đo nhỏ nhất*.
e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng* 3, *tâm thuộc đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với* (P).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm M(2; 4; 2) và có vtcp $\vec{u}(1; 3; 1)$.
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; 2; 1)$.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P):

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1} \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ z = x \\ 2x + 2(3x-2) + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vậy, ta thấy (d) cắt (P) tại điểm A(1; 1; 1).

Gọi α là góc tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2.1 + 2.3 + 1.1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M \\ MH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} \text{Qua } M(2;4;2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì {H} = (MH) ∩ (P) nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \\ 2(2+2t)+2(4+2t)+(2+t)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(0; 2; 1).

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{Qua } H(0;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ x-2=2k \\ y-4=2k \\ z-2=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0;2;1).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{Qua } H(0;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 3: Gọi (P’) với vtpt $\overrightarrow{n'}$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1;-1;4) \text{ chọn } \overrightarrow{n'}(1;1;-4).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P’) được cho bởi:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } M(2;4;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n'}(1;1;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): x+y-4z+2=0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+y-4z+2=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4z+2=0 \\ x+y+5z-7=0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ x + y - 4z + 2 = 0 \\ x + y + 5z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d_1) cần dựng.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1; -1; 4).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(-1;-1;4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (R) là mặt phẳng thỏa mãn:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A \\ (R) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (R): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(1;3;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x + 3y + z - 5 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t + 3y + z - 5 = 0 \\ 2t + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - 3b.$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{|2a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 11\left[2a + 2b + (-a - 3b)\right]^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 + 130ab + 169b^2 = 0 \Leftrightarrow (5a + 13b)^2 = 0 \Leftrightarrow 5a = -13b.$$

Chọn a = 12 ta được b = –5 và c = 2 nên $\overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

Cách 2: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha$.

Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right] = (-13; 5; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

e. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, vì $I \in (d)$ nên $I(t + 2; 3t + 4; t + 2)$.

Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(t+2) + 2(3t+4) + (t+2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

$\Leftrightarrow |t + 1| = 1 \Leftrightarrow t_1 = 0$ hoặc $t_2 = -2$.

Khi đó:

- Với $t_1 = 0$ thì $I_1(2; 4; 2)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(2; 4; 2) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

- Với $t_2 = -2$ thì $I_2(0; -2; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(0; -2; 0) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện:

- Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Kiểm tra:

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận (d_1) và (d_2) trùng nhau.

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, thực hiện bước 3.

Bước 3: Xác định $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) chéo nhau.

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2) và song song, cách đều (d_1), (d_2).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng h.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2).
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có ngay:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|},$$

với $M_1 \in (d_1)$, $M_2 \in (d_2)$ và $\overrightarrow{u_2}$ là một vtcp của (d_2).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa hai đường thẳng song song* (d_1) *và* (d_2) ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Bước 3: Vì ba điểm A, M_1, $M_2 \in (P) \Rightarrow$ Phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *thuộc mặt phẳng chứa* (d_1), (d_2) *và song song, cách đều* (d_1), (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  <u>***Bước 1:***</u> Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.
  Suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

  <u>***Bước 2:***</u> Đường thẳng (d) được cho bởi:
  $$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa đường thẳng* (d_1) *và cách đường thẳng* (d_2) *một khoảng bằng* h", chúng ta thực hiện theo các bước:

  <u>***Bước 1:***</u> Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

  <u>***Bước 2:***</u> Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:
  $$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ điều kiện } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

  <u>***Bước 3:***</u> Vì điểm A, $M_1 \in (P)$ và $d(M_2, (P)) = h$, suy ra phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* E *và tiếp xúc với* (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  <u>***Bước 3:***</u> Gọi F là hình chiếu vuông góc của E trên (d_2) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính EF.

  <u>***Bước 4:***</u> Ta lần lượt:
  - Tìm toạ độ điểm F.
  - Viết phương trình mặt cầu đường kính EF.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) và *có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  <u>***Bước 1:***</u> Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).
  Viết phương trình mặt phẳng (R).

  <u>***Bước 2:***</u> Khi đó:
  - Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
  - Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

  <u>***Bước 3:***</u> Viết phương trình mặt cầu (S).

  Lưu ý: Chúng ta còn có một phương pháp tổng quát để thực hiện yêu cầu này sẽ được trình bày trong chú ý của hai đường thẳng chéo nhau.

<u>**Thí dụ 1.**</u> *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:
$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{3-z}{2}.$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau. Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2).

b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (d_1) *và* (d_2).
c. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *nằm trong mặt phẳng* (P) *và song song, cách đều* (d_1), (d_2).
d. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d_1) *và cách* (d_2) *một khoảng bằng* 1.
e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d_1) *và tiếp xúc với* (d_2) *tại điểm* B(3; 0; 1).
f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; -1; -2)$ và đi qua điểm $M_1(2; 1; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; -1; -2)$ và đi qua điểm $M_2(1; 1; 3)$.

Nhận xét rằng các vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương và điểm M_1 không thuộc (d_2) nên hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Ta có:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 1.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2; 2; 1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + 2y + z - 7 = 0.$$

Cách 2: Lấy thêm điểm A(0; 2; 3) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện A, M_1, M_2 thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} 2B + 3C + D = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C + D = -3A \\ 3C + D = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2C = A \\ 2D = -7A \end{cases} \overset{\text{Chọn } A=2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = B = 2 \\ C = 1 \\ D = -7 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 7 = 0$.

c. Gọi M là trung điểm M_1M_2, suy ra $M\left(\frac{3}{2}; 1; 2\right)$.

Phương trình đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M\left(3/2;\ 1;\ 2\right) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1}(2;\ -1;\ -2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-3/2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy thêm điểm A(0; 2; 3) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

(Q): Ax + By + Cz + D = 0, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì A, M_1 thuộc (Q) nên:

$$\begin{cases} 2B+3C+D=0 \\ 2A+B+C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2A-2C \\ D=-4A+C \end{cases}.$$

- Để d((d_2), (Q)) = 1 điều kiện là:

$$d(M_2, (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|A+B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 1 \Leftrightarrow 4A^2 - 4AC + C^2 = 0 \Leftrightarrow C = 2A.$$

Khi đó chọn A = 1 ta được C = 2, B = −2 và D = −2 nên:

(Q): x − 2y + 2z − 2 = 0.

Cách 2: Từ giả thiết ta thấy:

$$1 = d((d_1), (d_2)) = d((Q), (d_2)) \Rightarrow \begin{cases} (d_1) \subset (Q) \\ (P) \perp (Q) \end{cases}.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_P}\right] = (3;\ -6;\ 6) \text{ chọn } \overrightarrow{n_Q}(1;\ -2;\ 2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1;-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 2y + 2z - 2 = 0.$$

e. Gọi A là hình chiếu vuông góc của B trên (d_1) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính AB. Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A bằng việc sử dụng một trong các cách sau:

  Cách 1: Ta có:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua B} \\ (R) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): \begin{cases} \text{Qua } B(3;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_1}\left(2;-1;\ -2\right) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): 2x - y - 2z - 4 = 0.$$

  Vì {A} = (d_1) ∩ (P') nên toạ độ A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-t \\ z = 1-2t \\ 2x-y-2z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-t \\ z = 1-2t \\ 2(2+2t)-(1-t)-2(1-2t)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/3 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ và } AB = 1.$$

Cách 2: Vì $A \in (d_1)$ nên:

$$A(2 + 2t\ ;\ 1 - t\ ;\ 1 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1-2t;\ t-1;\ 2t).$$

Từ điều kiện $\overrightarrow{AB} \perp (d_1)$ ta có:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2(1-2t) - (t-1) - 2.2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ và } \overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ nên } AB = 1.$$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AB được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{17}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \\ R = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{17}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

f. Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Ta lần lượt:

- Phương trình mặt phẳng (R) được cho bởi:

$$(R): \begin{cases} \text{Qua } M\left(\dfrac{3}{2}; 1; 2\right) \\ \text{vtp } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 2x - 4y + 4z - 7 = 0.$$

Vì $\{I\} = (\Delta) \cap (R)$ nên toạ độ I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{2} \\ 2x - 4y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 3 \\ 2x - 4y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right)$$

- Độ dài bán kính R của mặt cầu (S) được cho bởi:

$$R = d(I, (d_1)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1I}, \overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \frac{51}{4}.$$

- Phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(-\dfrac{1}{2}; 0; 2\right) \\ R = 51/4 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{2601}{16}.$$

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại M, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa (d_1) và (d_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2).

4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1), (d_2) tại điểm M.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).
6. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2).

- Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có ngay:
  - Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$ và (d_2) có vtcp là $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.
  - Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Lưu ý: Để $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Giả sử $(d_1) \cap (d_2) = \{M\}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các vtcp $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_1} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy hai điểm $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$ không trùng với giao điểm M của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì ba điểm $M, M_1, M_2 \in (P)$, suy ra phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường phân giác của* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).
Lấy điểm $A \in (d_1)$, với $A \ne M$.

Bước 2: Lấy điểm $B \in (d_2)$ thoả mãn AI = BI, Từ đó, nhận được toạ độ hai điểm B_1, B_2.

Bước 3: Ta có:
  - Với B_1 thì suy ra toạ độ trung điểm K_1 của AB_1.
    Khi đó, phương trình đường phân giác thứ nhất là:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1} \end{cases}.$$

- Với B_2 thì suy ra toạ độ trung điểm K_2 của AB_2.
  Khi đó, phương trình đường phân giác thứ hai là:
$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2} \end{cases}.$$

Lưu ý: Với cách giải này, ta có các lưu ý sau:
1. Ta có kết quả:
   a. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
   b. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
2. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tạo độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).
Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$, với $A, B \neq I$.

Bước 2: Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ M xuống AB.
Ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $t = \frac{IA}{IB}$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AK_1}}{\overline{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_1.$$
  Khi đó, phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi:
$$(IK_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_1} \end{cases}.$$
- Điểm $K_2(x_2; y_2; z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\frac{IA}{IB}$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AK_2}}{\overline{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_2.$$
  Khi đó, phương trình đường phân giác trong được xác định bởi:
$$(IK_2): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_2} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *tại điểm* M", chúng ta thấy ngay đó chính là "*Mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với mặt phẳng* (P) *tại điểm* M" và đây là dạng toán chúng ta đã biết cách thực hiện.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
Viết phương trình mặt phẳng (Q).

<u>Bước 2:</u> Khi đó:

- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
- Bán kính của mặt cầu là R = d(I, (d_1)).

<u>Bước 3:</u> Viết phương trình mặt cầu (S).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* E *và tiếp xúc với* (d_2)", chúng ta lựa chọn một trong hai cách giải sau:

<u>Cách 1</u>: Ta thấy ngay tâm I của mặt cầu (S) thuộc đường thẳng (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R), (T) với:

- (R) là mặt phẳng qua E và vuông góc với (d_1).
- (T) là mặt phẳng qua F và vuông góc với (d_2), biết F thuộc (d_2) sao cho ME = MF.

Từ phân tích đó chúng ta thực hiện bài toán theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Viết phương trình mặt phẳng (R) qua E và vuông góc với (d_1).

<u>Bước 2:</u> Tìm điểm F thuộc (d_2) sao cho ME = MF.

<u>Bước 3:</u> Viết phương trình mặt phẳng (T) qua F và vuông góc với (d_2).

<u>Bước 4:</u> Thiết lập phương trình tham số của giao tuyến (a) của hai mặt phẳng (R), (T).

<u>Bước 5:</u> Từ điều kiện tâm I thuộc (a) sao cho IE = R suy ra toạ độ của I.

<u>Bước 6:</u> Viết phương trình mặt cầu (S).

<u>Cách 2</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Giả sử mặt cầu (S) cần dựng với tâm I(a; b; c) tiếp xúc với (d_2) tại F, suy ra toạ độ của F thoả mãn phương trình tham số của (d_2).

<u>Bước 2:</u> Ta có các điều kiện:

$$EI = R \Leftrightarrow EI^2 = R^2. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{u_1} = 0. \quad (2)$$

$$ME = MF \Leftrightarrow ME^2 = MF^2 \Rightarrow \text{Toạ độ của F.}$$

<u>Bước 3:</u> Với F tìm được thiết lập điều kiện :

$$\overrightarrow{FI} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\overrightarrow{u_2} = 0. \quad (3)$$

<u>Bước 4:</u> Kết hợp (2) và (3), để thực hiện việc biểu diễn hai trong số ba ẩn a, b, c theo ẩn còn lại. Rồi thay vào (1) chúng ta sẽ nhận được toạ độ của tâm I.

<u>Bước 5:</u> Viết phương trình mặt cầu tâm I bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

a. *Chứng minh rằng* (d_1) *cắt* (d_2) *tại điểm* M. *Tìm toạ độ của* M *và tính góc giữa* (d_1), (d_2).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (d_1) *và* (d_2).
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d_1) *và tạo với* (d_2) *một góc lớn nhất.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng* (R) *chứa* (d_1) *và tạo với* (d_2) *một góc* α *biết* $\sin\alpha = 4/9$.
e. *Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi* (d_1) *và* (d_2).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{17}$ *tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *tại điểm* M.
g. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(-1; -1; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm $M_2(3; 2; 4)$.

a. Bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào (d_1), ta được:

$$\begin{cases} -1 + 2t = 3 + 2u \\ -1 + 2t = 2 + u \\ 1 + t = 4 + 2u \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{M(1; 1; 2)\}.$$

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{8}{9}$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (3; -2; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 2y - 2z + 3 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện M, M_1, M_2 thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} A+B+2C+D=0 \\ -A-B+C+D=0 \\ 3A+2B+4C+D=0 \end{cases} \overset{\text{Chọn } A=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B+2C+D=-1 \\ -B+C+D=1 \\ 2B+4C+D=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C=\dfrac{2}{3} \\ D=1 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P): $3x - 2y - 2z + 3 = 0$.

c. Ta có nhận xét:

$g((d_2), (Q)) \le g((d_2), (d_1))$

do đó $\text{Max}[g((d_2), (Q))] = g((d_2), (d_1))$ đạt được khi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d_2) trên (Q), tức là:

$$(Q) \perp ((d_1), (d_2)) = (P) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}\right] = (2; -7; 10).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(2;-7;10) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - 7y + 10z - 15 = 0.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d_1) thuộc (R) nên:

  $\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 2b.$ (1)

- Vì $g((d_2), (R)) = \alpha$ có $\sin\alpha = \dfrac{4}{9}$ nên:

$$\frac{4}{9} = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|2a+b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 16(a^2 + b^2 + c^2) = 9(2a + b + 2c)^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 16(a^2+b^2)+16(-2a-2b)^2 = 9\left[2a+b+2(-2a-2b)\right]$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 + 20ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2a \text{ hoặc } b = 22a.$$

Khi đó:

- Với $b = -2a$ thì $c = 2a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; -2a; 2a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; -2; 2)$, từ đó ta được:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

- Với $b = 22a$ thì $c = -46a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; 22a; -46a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; 22; -46)$, từ đó ta được:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;22;-46) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 22y - 46z + 69 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi N ∈ (d_2) sao cho $MN = MM_1$, ta lần lượt có:

$N(3 + 2u; 2 + u; 4 + 2u)$,

$MN^2 = MM_1^2 \Leftrightarrow (2u + 2)^2 + (u + 1)^2 + (2u + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow 9(u + 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow u + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow u_1 = 0$ hoặc $u_2 = -2$.

Khi đó:

- Với $u_1 = 0$ thì $N_1(3; 2; 4)$ và trung điểm của M_1N_1 là $K_1\left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_1):

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1}(0; 1/2; -1/2) \text{ chọn vtcp } (0; 1; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $u_2 = -2$ thì $N_2(-1; 0; 0)$ và trung điểm của M_1N_2 là $K_2\left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_2):

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2}\left(2; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ chọn vtcp } (4; 3; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

f. Mặt cầu (S) cần dựng với tâm I sẽ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại M.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì tâm I thuộc (Δ) nên $I(1 + 3t; 1 - 2t; 2 - 2t)$, từ đó:

$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 17 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t_{1,2} = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $t_1 = 1$ thì $I_1(4; -1; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(4; -1; 0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 17.$$

- Với $t_2 = -1$ thì $I_2(-2; 3; 4)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-2; 3; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Ta lần lượt:

- Với đường phân giác (Δ_1) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1):

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_1}(4;3;3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): 4x + 3y + 3z - 13 = 0.$$

Khi đó, ta có:

a. Toạ độ tâm T_1 của mặt cầu (T_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ 4x + 3y + 3z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 0 \\ z = 19 \\ v = 9 \end{cases} \Rightarrow T_1(-11; 0; 19).$$

b. Bán kính R_1 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_1, (d_1)) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{M_1T_1}, \overrightarrow{u_1} \right] \right\|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} = \sqrt{424}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_1) như sau:

$$(T_1): (x+11)^2 + y^2 + (z-19)^2 = 424.$$

- Với đường phân giác (Δ_2) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_2):

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_2}(0;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): y - z + 1 = 0.$$

Khi đó, ta có:

c. Toạ độ tâm T_2 của mặt cầu (T_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2(-2; 0; 1).$$

d. Bán kính R_2 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_2, (d_1)) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{M_1T_2}, \overrightarrow{u_1} \right] \right\|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} = \sqrt{2}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_2) như sau:

$$(T_2): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1), (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q_1) chứa (d_1) và song song với (d_2).

4. Viết phương trình các mặt phẳng (Q_1), (Q_2) theo thứ tự chứa (d_1), (d_2) và song song với nhau.
5. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1), (d_2).
6. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2).
8. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

- Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta thực hiện tương tự như trong phần chú ý về hai đường thẳng cắt nhau.
- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có kết quả:
  - (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$.
  - (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

  Khi đó, khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

  Ngoài ra, còn có thể sử dụng kết quả trong yêu cầu (3) hoặc yêu cầu (6).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q_1) *chứa* (d_1) *và song song với* (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2) và lấy điểm $M_1 \in (d_1)$.

Bước 2: Mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song và cách đều hai đường thẳng chéo nhau* (d_1) *và* (d_2) *cho trước*", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2).

Lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$, suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

Bước 2: Mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường vuông góc chung của* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

Bước 2: Chuyển phương trình (d_1) và (d_2) về dạng tham số, suy ra tọa độ của A, B theo phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

Bước 3: Từ điều kiện:

$$\begin{cases}(d)\perp(d_1)\\(d)\perp(d_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\\u\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Toạ độ A, B

Bước 4: Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d):\ \begin{cases}\text{qua } B\\\text{vtcp } \overrightarrow{AB}\end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{u_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1\in(d_1)\\\text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{qua } M_1\in(d_1)\\\text{vtpt } \overrightarrow{n_1}=[\vec{u},\overrightarrow{u_1}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_1)$.

Bước 3: Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2):\ \begin{cases}\text{Qua } M_2\in(d_2)\\\text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow(P_2):\ \begin{cases}\text{qua } M_2\in(d_2)\\\text{vtpt } \overrightarrow{n_2}=[\vec{u},\overrightarrow{u_2}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_2)$.

Bước 4: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases}\Rightarrow\text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{u_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1\in(d_1)\\\text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{qua } M_1\in(d_1)\\\text{vtpt } \overrightarrow{n_1}=[\vec{u},\overrightarrow{u_1}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_1)$.

Bước 3: Giả sử $(d)\cap(d_2)=\{B\}$ suy ra $(P_1)\cap(d_2)=\{B\}\Rightarrow$ toạ độ B.

Bước 4: Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 4: (Áp dụng trong trường hợp hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P_1) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Dựng mặt phẳng (P_2) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta đi viết phương trình mặt cầu đường kính AB với A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (Δ), (d_1) và (d_2) về dạng tham số và tìm các vtcp tương ứng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$.

Bước 2: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra toạ độ I, A, B theo các phương trình tham số.

Bước 3: Ta có điều kiện:

$$.\begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{u_2} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Toạ độ I} \\ R = IA \end{cases}$$

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Thí dụ 3. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 1 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0 \qquad , u \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (d_1), (d_2) *chéo nhau. Tính khoảng cách và góc giữa chúng.*

b. *Viết phương trình các mặt phẳng* (Q_1), (Q_2) *theo thứ tự chứa* (d_1), (d_2) *và song song với nhau.*
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song và cách đều* (d_1), (d_2).
d. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A(0; 1; 0) *cắt cả* (d_1), (d_2).
e. *Viết phương trình đường thẳng cắt cả* (d_1), (d_2) *và song song với đường thẳng* $(\Delta_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
f. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* B(2; 1; 2) *và vuông góc với cả* (d_1), (d_2).
g. *Viết phương trình đường vuông góc chung của* (d_1) *và* (d_2).
h. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả* (d_1) *và* (d_2).
i. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* $(\Delta_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.
j. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{5}/2$ *tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* $C_1(1; 1; 1)$ *và tiếp xúc với* (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:
- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(0; 1; 0)$ và đi qua điểm $M_1(1; 0; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 0; 0)$ và đi qua điểm $M_2(1; 0; 2)$.

Nhận xét rằng:
$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 1 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$
Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được cho bởi:
$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 1.$$
Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:
$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

b. Gọi $\vec{n}$ là vectơ thoả mãn:
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0; 0; -1) \text{ chọn } \vec{n}(0; 0; 1).$$
Khi đó, ta lần lượt có:
$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1; 0; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): z - 1 = 0; \ (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1; 0; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): z - 2 = 0.$$

c. Gọi M là trung điểm M_1M_2 thì $M\left(1; 0; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 0; 3/2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2z - 3 = 0.$$

d. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm M, N. Khi đó:

- Điểm $M \in (d_1)$ suy ra M(1; t; 1) và $\overrightarrow{AM}(1; t-1; 1)$.
- Điểm $N \in (d_2)$ suy ra N(1 + u; 0; 2) và $\overrightarrow{AN}(u+1; -1; 2)$.
- Ba điểm A, M, N thẳng hàng ta được:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k(u+1) \\ t - 1 = -k \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ u = 1 \end{cases} \Rightarrow N(2; 0; 2).$$

Khi đó, đường thẳng (a) được cho bởi:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(2; -1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 2: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng, khi đó (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_1) \subset (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1) được cho bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = (-1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x - z = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2) được cho bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2): 2y + z - 2 = 0.$

Vậy, đường thẳng (a) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Bằng việc đặt y = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} y = t \\ x - z = 0 \\ 2t + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (a) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (a) với vtcp $\overrightarrow{u_a}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_1) \subset (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (P_1) có vtpt $\overrightarrow{n_1}$ được cho bởi:
  $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1)$.
- Mặt phẳng (P_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$ được cho bởi:
  $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1)$.
- vtcp $\overrightarrow{u_a}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:
  $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-2;1;-2)$ chọn $\vec{u}(2;-1;2)$.

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2;-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 3: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_2) tại N.

- Gọi (P_1) là trình mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:
  $$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1) \end{cases}$$
  $\Leftrightarrow$ (P_1): $x - z = 0$.
- Tọa độ điểm N được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P_1), ta được:
  $1 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow N(2;0;2)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (a) có dạng:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(2;-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 4: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_1) tại M.

- Gọi (P_2) là trình mặt phẳng qua A và chứa (d_2), ta có:
  $$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1) \end{cases}$$
  $\Leftrightarrow$ (P_2): $2y + z - 2 = 0$.
- Tọa độ điểm N được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P_1), ta được:
  $2t + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (a) có dạng:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM}\left(1;-1/2;1\right) \text{ chọn } (2;\, \text{-}1;\, 1) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

e. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm E $\in$ (d_1) suy ra E(1; t; 1).
- Điểm F $\in$ (d_2) suy ra F(1 + u; 0; 2).
- Vì EF song song với đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{u_{\Delta 1}} \Leftrightarrow \frac{u}{1} = \frac{-t}{-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow t = u = 1 \Rightarrow E(1;\, 1;\, 1).$$

Khi đó, đường thẳng (b) được cho bởi:

$$(b): \begin{cases} \text{Qua } E(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}\left(1;-1;1\right) \end{cases} \Leftrightarrow (b): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng, khi đó (b) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases} (\Delta_1) // (R_1) \\ (d_1) \subset (R_1) \end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases} (\Delta_1) // (R_2) \\ (d_2) \subset (R_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (R_1) được cho bởi:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R1}} = [\overrightarrow{u_{\Delta 1}},\, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (R_1): x − z = 0.

- Phương trình mặt phẳng (R_2) được cho bởi:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R2}} = [\overrightarrow{n_{\Delta 1}},\, \overrightarrow{u_1}] = (0;1;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (R_2): y + z − 2 = 0.

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t - z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (b) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (R_1) là mặt phẳng song song với (Δ_1) và chứa (d_1), ta có:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R1}} = [\overrightarrow{u_{\Delta 1}}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (R_1)$: $x - z = 0$.

- Tọa độ điểm F được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (R_1), ta được:

$1 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow F(2;0;2)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (b) có dạng:

$$(b): \begin{cases} \text{Qua } F(2;0;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (b): \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Cách 4: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (R_1) là mặt phẳng song song với (Δ_1) và chứa (d_2), ta có:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R2}} = [\overrightarrow{n_{\Delta 1}}, \overrightarrow{u_1}] = (0;1;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (R_2)$: $y + z - 2 = 0$.

- Tọa độ điểm E được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào phương trình (R_2), ta được:

$t + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow E(1;1;1)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (b) có dạng:

$$(b): \begin{cases} \text{Qua } E(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (b): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

f. Giả sử (c) là đường thẳng cần dựng và (c) có vtcp $\overrightarrow{u_c}$, ta có:

$$\begin{cases} (c) \perp (d_1) \\ (c) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_c} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_c} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_c} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;0;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (c) có dạng:

$$(c): \begin{cases} \text{Qua } B(2;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_c}(0;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (c): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

g. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) thì:

$P(1;t;1)$ và $Q(1+u;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(u;-t;1)$.

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 0 \Rightarrow P(1;0;1) \text{ và } Q(1;0;2).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } P(1;\, 0;\, 1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{PQ}(0;\, 0;\, 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\, 0;\, -1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi (α_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (1;\, 0;\, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\alpha_1)$: $x - 1 = 0$.

- Gọi (α_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\, -1;\, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\alpha_2)$: $y = 0$.

Vì (d) chính là giao tuyến của (α_1) và (α_2) nên đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt z = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} z = t \\ x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

Cách 3: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_2) tại Q, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\, 0;\, -1).$$

Ta lần lượt:

- Gọi (α_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (1;\, 0;\, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\alpha_1)$: $x - 1 = 0$.

- Tọa độ điểm Q được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (α_1), ta được:

$$x = 1 \Rightarrow Q(1;\, 0;\, 2).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } Q(1;\ 0;\ 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 4: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_1) tại P, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ 0;\ -1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi (α_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ -1;\ 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (α_2): y = 0.

- Tọa độ điểm P được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào phương trình (α_2), ta được:

$$y = 0 \Rightarrow P(1;\ 0;\ 1).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } P(1;\ 0;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d):\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 5: Từ kết quả câu a) ((d_1) và (d_2) vuông góc với nhau), ta lần lượt có:

- Gọi (β_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (d_2), khi đó:

$$(\beta_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_2}(1;\ 0;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (\beta_1): x - 1 = 0.$$

- Gọi (β_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (d_1), khi đó:

$$(\beta_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_2}(0;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (\beta_2): y = 0.$$

Vì (d) chính là giao tuyến của (β_1) và (β_2) nên đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \qquad (**)$$

Bằng việc đặt z = t, ta biến đổi hệ (**) về dạng:

$$\begin{cases} z = t \\ x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

h. Mặt cầu (S) đường kính PQ với P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) chính là mặt cầu cần dựng. Để viết phương trình mặt cầu (S) ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) với đường kính PQ có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm PQ} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(1;\, 0;\, 3/2\right) \\ R = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x-1\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính PQ gồm:

$M(x;\, y;\, z) \in (S) \Leftrightarrow PM \perp QM \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{QM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1;\, y;\, z - 1).(x - 1;\, y;\, z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1) + y.y + (z - 1)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính PQ gồm:

$M(x;\, y;\, z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MPQ$ vuông tại $M \Leftrightarrow PM^2 + QM^2 = PQ^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

i. Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_2) về dạng tham số:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + v \\ y = v \\ z = 1 + v \end{cases},\ v \in \mathbb{R}.$$

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại D_1 và D_2, suy ra:

$I(1 + v;\, v;\, 1 + v)$, $D_1(1;\, t;\, 1)$, $D_2(1 + u;\, 0;\, 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{D_1I}(v;\, v - t;\, v)$ và $\overrightarrow{D_2I}(u - v;\, -v;\, 1 - v)$.

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại D_1 khi:

  $D_1I \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1I} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1I}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow v - t = 0 \Leftrightarrow v = t \Rightarrow \overrightarrow{D_1I}(v;\, 0;\, v)$.

- (S) tiếp xúc với (d_2) tại D_2 khi:

  $D_2I \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{D_2I} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_2I}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v \Rightarrow \overrightarrow{D_2I}(0;\, -v;\, 1 - v)$.

- (S) tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:

  $D_1I = D_2I \Leftrightarrow D_1I^2 = D_2I^2$

  $\Leftrightarrow v^2 + v^2 = (-v)^2 + (1 - v)^2 \Leftrightarrow 1 - 2v = 0 \Leftrightarrow t = u = v = \dfrac{1}{2}$

  $\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\, \dfrac{1}{2};\, \dfrac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \left|\overrightarrow{D_1I}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

j. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và tiếp xúc với (d_2) tại C_2, suy ra:

$C_2(1 + u; 0; 2) \Rightarrow \overrightarrow{C_1I}(a-1; b-1; c-1)$ và $\overrightarrow{C_2I}(a-u-1; b; c-2)$.

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại C_1 khi:

  $C_1I \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1I} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1I}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1.$

- (S) tiếp xúc với (d_2) tại C_2 khi:

  $C_2I \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{C_2I} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_2I}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow a - u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = a - 1.$

- (S) có bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:

  $R = C_1I = C_2I \Leftrightarrow R^2 = C_1I^2 = C_2I^2$

  $$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = (a-u-1)^2 + b^2 + (c-2)^2$$

  $$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = (a-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (c-2)^2$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} = 1 + (c-2)^2 \\ (a-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (c-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c^2 - 16c + 15 = 0 \quad (*) \\ (a-1)^2 = 4 - 2c \end{cases}$$

Phương trình (*) có các nghiệm $c_1 = \frac{3}{2}$ và $c_2 = \frac{5}{2}$. Khi đó:

- Với $c_1 = \frac{3}{2}$ thì:

  $$(a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 1 \\ a - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \end{array}\right..$$

  Từ đó:

  - Với $a_1 = 2$ ta được tâm $I_1\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$ nên có mặt cầu:

    $$(S_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

  - Với $a_2 = 0$ ta được tâm $I_2\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$ nên có mặt cầu:

    $$(S_2): x^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

- Với $c_1 = \frac{5}{2}$ thì $(a-1)^2 = -1$, vô nghiệm.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Dạng toán 5:</u> Vị trí tương đối của mặt cầu với đường thẳng

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

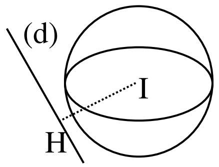
Cách 1: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S), từ đó tính:

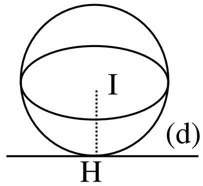
$$d = d(I, (d)).$$

<u>Bước 2:</u> So sánh d với R để đưa ra kết luận:

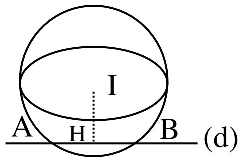
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

<u>Bước 2:</u> Thay x, y, z của (d) vào (S), ta được:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (1)$$

<u>Bước 3:</u> Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $t_0 \Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ với $A(x(t_1); y(t_1); z(t_1))$ và $B(x(t_2); y(t_2); z(t_2))$.

Với các bài toán không chứa tham số, khi sử dụng cách 1 chúng ta dễ dàng kết luận được về vị trí tương đối của (d) và (S), tuy nhiên:

- Trong trường hợp $(d) \cap (S) = \{A, B\}$ hoặc $(d) \cap (S) = \{M\}$ chúng ta không nhận được toạ độ của A, B và M.
- Với các bài toán có chứa tham số khi sử dụng cách 1 sẽ rất phức tạp, do vậy, tốt nhất hãy chọn cách 2.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) tại hai điểm A, B chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm toạ độ A, B (hoặc độ dài đoạn AB).
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B.

4. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính.
7. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

- Với yêu cầu (1) thì trong phần xét vị trí tương đối giữa (d) và (S) chúng ta sử dụng cách 2.
- Với yêu cầu (2) thì đường thẳng (Δ) cần dựng sẽ đi qua I và song song với (d).
- Với yêu cầu (3) thì chúng ta có ngay:
  - Mặt phẳng (P_A) đi qua A và có vtpt $\overrightarrow{IA}$.
  - Mặt phẳng (P_B) đi qua B và có vtpt $\overrightarrow{IB}$.

  Lưu ý: Nếu chỉ với yêu cầu tính góc α giữa (P_A), (P_B) thì $\alpha = g(IA, IB)$.

- Với yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Ta có:
  - Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a;\, b;\, c)$.
  - Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

  Bước 2: Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên:

  $(P): ax + by + cz + \underline{D} = 0.$

  Bước 3: Ta lần lượt:

  a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

  $d(I, (P)) = R \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

  b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:

  $I \in (P)) \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P).

  c. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:

  $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

- Với yêu cầu (5), gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì (Q) = (I, (d)) = (IAB) và chúng ta đã biết hai cách để viết được phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

- Với yêu cầu (6), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi H là trung điểm AB, suy ra toạ độ của H.

Bước 2: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì IH ⊥ (Q). Do đó:

$$(Q):\begin{cases}\text{Qua } H\\ \text{vtpt } \overrightarrow{IH}\end{cases}.$$

- Với yêu cầu (7), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, giả sử:

(Q): Ax + By + Cz + D = 0.

Vì (Q) chứa (d) nên A, B thuộc (Q). (1)

Bước 2: Để (Q) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2}\ . \qquad (2)$$

Từ (1), (2) chúng ta nhận được giá trị tương ứng của A, B, C, D.

Thí dụ 1. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2},$$

$$(S): (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *cắt mặt cầu* (S) *tại hai điểm* A, B. *Tính độ dài* AB.

b. *Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *song song với* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *tại hai điểm* E, F *sao cho* EF *có độ dài lớn nhất*.

c. *Viết phương trình các mặt phẳng* (P_A), (P_B) *tiếp xúc với* (S) *theo thứ tự tại các điểm* A, B. *Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng* (P_A), (P_B).

d. *Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với* (d) *và*:
   a. *Tiếp xúc với mặt cầu* (S).
   b. *Cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn của* (S).
   c. *Cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn* (C) *có diện tích bằng* 18π.

e. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn lớn của* (S).

f. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn nhận* AB *làm đường kính*.

g. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn* (C) *có bán kính bằng* $r = \sqrt{54/5}$.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm M(1; 2; −1).
- Mặt cầu (S) có tâm I(4; −1; 2) và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$$(2t - 3)^2 + (t + 3)^2 + (2t - 3)^2 = 27 \Leftrightarrow 9t^2 - 18t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow A(1; 2; -1) \\ t = 2 \Rightarrow B(5; 4; 3) \end{array}\right..$$

Khi đó:

$$AB^2 = (5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = 36 \Leftrightarrow AB = 6.$$

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$d = d(I, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MI}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3\sqrt{2} < R \Rightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}.$$

Khi đó, với là trung điểm AB thì:

$$AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 6.$$

b. Đường thẳng (Δ) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F biết EF có độ dài lớn nhất khi (Δ) đi qua tâm I của mặt cầu (S). Do đó, ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } I(4; -1; 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{2}.$$

c. Ta lần lượt có:

- Mặt phẳng (P_A) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A là:

$$(P_A): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-3; 3; -3) \text{ chọn } (1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): x - y + z + 2 = 0.$$

- Mặt phẳng (P_B) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B là:

$$(P_B): \begin{cases} \text{Qua } B(5; 4; 3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IB}(1; 5; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_B): x + 5y - z - 22 = 0.$$

Khi đó, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{|1 - 5 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}.\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{5}{9}.$$

d. Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên có vtpt là $\vec{u}$ do đó có phương trình:

(P): $2x + y + 2z + D = 0$.

a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|8 - 1 + 4 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |D + 11| = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow D = -11 \pm 9\sqrt{3}.$$

Khi đó:

- Với $D = -11 + 9\sqrt{3}$, ta được mặt phẳng (P_1): $2x + y + 2z - 11 + 9\sqrt{3} = 0$.
- Với $D = -11 + 9\sqrt{3}$, ta được mặt phẳng (P_2): $2x + y + 2z - 11 - 9\sqrt{3} = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:

$$I \in (P)) \Leftrightarrow 2.4 - 1 + 2.2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -11.$$

Vậy, ta được phương trình mặt phẳng (P): $2x + y + 2z - 11 = 0$.

c. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có:

$$S_{(C)} = 18\pi \Leftrightarrow \pi.r^2 = 18\pi \Leftrightarrow r = 3\sqrt{2}.$$

Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính $r = 3\sqrt{2}$ điều kiện là:

$$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|8 - 1 + 4 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 9 \Leftrightarrow D = -2 \text{ hoặc } D = -20.$$

Khi đó:

- Với $D = -2$, ta được mặt phẳng (P_3): $2x + y + 2z - 2 = 0$.
- Với $D = -20$, ta được mặt phẳng (P_4): $2x + y + 2z - 20 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_3) và (P_4) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) thì (Q) = (IAB). Tới đây, chúng ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (Q), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right] = (18; 0; -18) \text{ chọn } \vec{n}(1; 0; -1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; -1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 0; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - z - 2 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (1)$$

Vì I, A, B thuộc (Q), ta được:

$$\begin{cases} 4A - B + 2C + D = 0 \\ A + 2B - C + D = 0 \\ 5A + 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = -A \\ D = -2A \end{cases}.$$

Thay B, C, D vào (1), ta được:

$$(Q): Ax - Az - 2A = 0 \Leftrightarrow (Q): x - z - 2 = 0.$$

f. Gọi H là trung điểm AB, suy ra H(3; 3; 1).

Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng thì (R) vuông góc với IH, do đó:

$$(R): \begin{cases} \text{Qua } H(3; 3; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{HI}(1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x - 4y + z + 8 = 0.$$

g. Giả sử mặt phẳng (T) cần dựng có phương trình:

$$(T): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì A, B thuộc (T), ta được:

$$\begin{cases} A + 2B - C + D = 0 \\ 5A + 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B - C + D = 0 \\ 4A + 2B + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -2A - 2C \\ D = 3A + 5C \end{cases}.$$

Để (T) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{\frac{54}{5}}$ điều kiện là:

$$d(I, (T)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|4A - B + 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{54}{5}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4A - (-2A - 2C) + 2C + (3A + 5C)|}{\sqrt{A^2 + (-2A - 2C)^2 + C^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(9A + 9C)^2 = 81(5A^2 + 8AC + 5C^2) \Leftrightarrow 2AC = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } C = 0.$$

Khi đó:

- Với $A = 0$ thì $B = -2C$ và $D = 5C$, ta được mặt phẳng:
  $$(T_1): -2Cy + Cz + 5C = 0 \Leftrightarrow (T_1): 2y - z - 5 = 0.$$
- Với $C = 0$ thì $B = -2A$ và $D = 3A$, ta được mặt phẳng:
  $$(T_2): Ax - 2Ay + 3A = 0 \Leftrightarrow (T_2): x - 2y + 3 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) (tâm I, bán kính R) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm toạ độ tiếp điểm A.
2. Viết phương trình đường thẳng song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
7. Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

8. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
9. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc α.

- Với yêu các cầu (1), (2), (3), (6), chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết trong phần chú ý về trường hợp đường thẳng cắt mặt cầu.
- Với yêu các cầu (4) ta thấy ngay mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua A và có vtpt là $\overrightarrow{IA}$.
- Với yêu các cầu (7) ta thực hiện viết phương trình đường thẳng (IA).
- Với yêu các cầu (8), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Giả sử đường thẳng (d') cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases}(d')\perp(d)\\(d')\perp IA\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u'}\perp\vec{u}\\\overrightarrow{u'}\perp\overrightarrow{IA}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u'}=\left[\vec{u},\overrightarrow{IA}\right].$$

Bước 4: Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'):\begin{cases}\text{Qua A}\\\text{vtcp }\overrightarrow{u'}\end{cases}.$$

- Với yêu các cầu (9), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ (a; b; c), ta có:

- $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA}=0$. (1)
- $g((\Delta),(d))=\alpha\Leftrightarrow\dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Bước 4: Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta):\begin{cases}\text{Qua A}\\\text{vtcp }\overrightarrow{u_\Delta}\end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(d):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=4+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\ (S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu* (S) *tại điểm* A. *Tìm toạ độ tiếp điểm* A.
b. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tiếp xúc với* (S).
c. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *và cắt mặt cầu* (S) *tại điểm* B *sao cho* AB *có độ dài lớn nhất.*
d. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *tiếp xúc với* (S) *và vuông góc với đường thẳng* (d).

e. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *tiếp xúc với* (S) *và tạo với đường thẳng* (d) *một góc* 30^0.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1;\ 1;\ 2)$ và đi qua điểm M(1; 2; 4).
- Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 1) và bán kính $R = \sqrt{3}$.

a. Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + (2t + 3)^2 = 3 \Leftrightarrow 6t^2 + 12t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(0;\ 1;\ 2).$$

Vậy, đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A(0; 1; 2).

b. Giả sử (P) là mặt phẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(0;\ 1;\ 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1;\ -1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z + 1 = 0.$$

c. Giả sử (d_1) là đường thẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } I \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;\ 1;\ 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1;\ -1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d’) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases} (d') \perp (d) \\ (d') \perp IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right] = (3;\ -3;\ 0) \text{ chọn } \overrightarrow{u'}(1;\ -1;\ 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d’) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(0;\ 1;\ 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(1;\ -1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

e. Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(a;\ b;\ c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b.$$

$$g((\Delta), (d)) = 30^0 \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \cos 30^0 \Leftrightarrow \frac{|a.1 + b.1 + c.2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[a + b + 2(a + b)\right]^2 = 9\left[a^2 + b^2 + (a + b)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } a = 0.$$

Khi đó:

- Với b = 0 thì a = c ta được $\overrightarrow{u_\Delta}(a;\ 0;\ a)$ chọn $\overrightarrow{u_\Delta}(1;\ 0;\ 1)$, từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;\ 1;\ 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(1;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với a = 0 thì c = b ta được $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; b; b) chọn $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; 1; 1), từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
3. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
4. Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Giả sử các tiếp điểm là T_1, T_2, hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

- Với các yêu cầu (1), (2), (3), chúng ta thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
- Với các yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước lớn sau:

Bước 1: Lập phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) chứa (d) và tiếp xúc với (S).
Bước 2: Tìm toạ độ các tiếp điểm T_1, T_2 với cách hiểu chúng chính là hình chiếu vuông góc của I trên các mặt phẳng (P_1), (P_2).
Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

Thí dụ 3. *Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:*

$$(d): \frac{x-3}{9} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}, \quad (S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 14.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *không cắt mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).
c. *Giả sử các tiếp điểm của* (S) *với các mặt phẳng trong câu* b) *là* T_1, T_2, *hãy viết phương trình đường thẳng* (T_1T_2).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(9; 3; 5)$ và đi qua điểm M(3; 2; −1).

- Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính $R = \sqrt{14}$.

a. Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$(3 + 9t)^2 + (3t + 1)^2 + (5t - 3)^2 = 14 \Leftrightarrow 125t^2 + 30t + 5 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S).

b. Lấy thêm điểm N(−6; −1; −6) thuộc (d) và giả sử mặt phẳng (P) cần dựng có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì M, N thuộc (P) nên:

$$\begin{cases} 3A + 2B - C + D = 0 \\ -6A - B - 6C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5C = -9A - 3B \\ 5D = -24A - 13B \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

- Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|B + 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow (B + 2C + D)^2 = 14(A^2 + B^2 + C^2).$$

Để tiện tính toán, ta nhân hai vế của đẳng thức trên với 25:

$$(5B + 10C + 5D)^2 = 350(A^2 + B^2) + 14(5C)^2. \qquad (1)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$2A^2 + 3AB - 2B^2 = 0 \Leftrightarrow A = -2B$ hoặc $B = 2A$.

Khi đó:

a. Với B = 2A thì chọn A = 1 suy ra B = 2, C = −3, D = −10, ta được:

(P_1): $x + 2y - 3z - 10 = 0$.

b. Với A = −2B thì chọn B = −1 suy ra A = 2, C = −3, D = −7, ta được:

(P_2): $2x - y - 3z - 7 = 0$.

Vậy, có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta lần lượt có:

- Xác định toạ độ T_1: Phương trình đường thẳng (IT_1) được cho bởi:

$$(IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (IT_1) \perp (P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I(0;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_1}(1;2;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $(IT_1) \cap (P_1) = \{T_1\}$, do đó:

$t + 2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_1(1; 3; -1)$.

- Xác định toạ độ T_2: Phương trình đường thẳng (IT_2) được cho bởi:

$$(IT_2): \begin{cases} \text{Qua I} \\ (IT_2) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} \text{Qua } I(0;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_2}(2;-1;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Vì $(IT_2) \cap (P_2) = \{T_2\}$, do đó:

$4t - (1 - t) - 3(2 - 3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_2(2; 0; -1)$.

- Phương trình đường thẳng (T_1T_2) được cho bởi:

$$(T_1T_2): \begin{cases} \text{Qua } T_1(1;\ 3;\ -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{T_1T_2}(1;\ -3;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (T_1T_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

<u>Dạng toán 6:</u> (***Điểm và đường thẳng***): Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

<u>Cách 1</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (có vtcp } \vec{u}(a;\ b;\ c)\text{)}.$$

<u>Bước 2:</u> Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + at;\ y_0 + bt;\ z_0 + ct)$

<u>Bước 3:</u> Thiết lập tính chất K cho điểm M.

<u>Cách 2</u>: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$(d) \cap (L) = \{M\}$.

Chúng thường gặp:

1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất (hoặc được phát biểu dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (d)").
   Khi đó, nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:
   $$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 + (z_0 + ct)^2 = At^2 + Bt + C \geq \frac{\Delta}{4A}.$$
   Vậy, ta được $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{\text{Min}} = -\frac{\Delta}{4A}$ đạt được khi $t = -\frac{b}{2A} \Rightarrow M$.
2. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).
   Khi đó:
   - Nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:
     $AM \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Rightarrow$ Giá trị t $\Rightarrow$ Toạ độ H.

- Nếu sử dụng cách 2 thì thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases}.$$

Bước 3: Hình chiếu vuông góc M của A lên đường thẳng (d) là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm M thuộc (d) sao cho độ dài AM ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện M là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{x+x_A}{2}; \dfrac{y+y_A}{2}; \dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (d) và cắt (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra đường thẳng (AM) là đường thẳng cần dựng.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng (d).

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).

Bước 3: Đường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A \\ \text{Bán kính } R = AM \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) thì ta có:

$$R = d(A, (d)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A \\ \text{Bán kính } R \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Cho điểm* A(2; 6; 2) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

a. *Tìm trên đường thẳng* (d) *điểm* $M(x_M; y_M; z_M)$ *sao cho tổng* $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. *Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* A *lên đường thẳng* (d).

c. *Tìm tọa độ điểm* A_1 *đối xứng với điểm* A *qua đường thẳng* (d).

d. *Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm* A *vuông góc với* (d) *và cắt* (d).

e. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (d).

f. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và cắt đường thẳng* (d) *tại hai điểm* E, F *sao cho* EF = 6.

✍ *Giải*

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Điểm M ∈ (d), suy ra M(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t).

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (3-2t)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2 = 9t^2 - 6t + 11$$
$$= (3t-1)^2 + 10 \ge 10.$$

Từ đó, suy ra $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 10$ đạt được khi:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Toạ độ điểm } M\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Vì H ∈ (d) nên H(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t), suy ra $\overrightarrow{AH}(1-2t; t-5; 2t-1)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) điều kiện là:

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2(1-2t) + (t-5) + 2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtpt } \vec{u}(-2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - y - 2z + 6 = 0.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 9t - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(0; -2; 4)$.

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$ và giả sử điểm $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+2}{2}; \dfrac{y+6}{2}; \dfrac{z+2}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = 3 - 2t \\ \dfrac{y+6}{2} = 1 + t \\ \dfrac{z+2}{2} = 1 + 2t \\ -2(x-2) + (y-6) + 2(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 2t - 4 \\ z = 4t \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(0; -2; 4).$$

d. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Gọi (d') là đường thẳng cần dựng thì:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{Qua H} \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(1; 4; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Gọi (d') có vtcp $\overrightarrow{u'}$ là đường thẳng cần dựng.

Lấy điểm B(3; 1; 1) thuộc (d) và gọi (P) = (A, (d)) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (-9; 0; -9) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(1; 0; 1).$$

Khi đó, ta nhận thấy:

$$\begin{cases} (d') \subset (P) \\ (d') \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1; -4; 1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(-1;\ -4;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = AH = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1;\ 2;\ -2)$ và đi qua điểm B(3; 1; 1). Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d), ta có:

$R = d(A, (d)) = \sqrt{18}$.

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R = AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{AH^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R = AE = \sqrt{AM^2 + EM^2}\ \sqrt{d^2(A, (d)) + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

☞ ***Chú ý***: Tiếp tục ứng dụng hình chiếu vuông góc của điểm trên đường thẳng chúng ta xét các dạng toán sau:

- *Cho hai điểm* A, B *và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:
  a. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*
  b. $MA^2 + MB^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Khi đó:

a. Chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2MI.$$

Từ đó, ta thấy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

Bước 2: Tìm toạ độ của M.

b. Ta có thể lựa chọn các cách giải sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Từ đó, ta thấy $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

Bước 2: Tìm toạ độ của M.

Cách 2**:** Sử dụng phương trình tham số (giả sử là t) của đường thẳng (d) chúng ta biến đổi biểu thức $MA^2 + MB^2$ về dạng (ta luôn có $a > 0$):

$$MA^2 + MB^2 = at^2 + bt + c \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Từ đó, ta thấy $(MA^2 + MB^2)_{Min} = -\frac{\Delta}{4a}$, đạt được khi $t = -\frac{b}{2a}$, suy ra toạ độ điểm M.

- Mở rộng với ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hoặc tứ diện ABCD) chúng ta sử dụng trọng tâm G của ΔABC ((hoặc trọng tâm G của tứ diện ABCD)). Cụ thể "*Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:

a. $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. $MA^2 + MB^2 + MC^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Ở đây, chúng ta thực hiện phép biến đổi:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dạng toán 7: (***Điểm và mặt phẳng***): Để tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt phẳng.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó: $(P) \cap (L) = \{M\}$.

Chúng thường gặp:

1. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P). Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử H(x; y; z) là chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của H.}$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (d).}$$

Bước 3: Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (P), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm H thuộc (P) sao cho độ dài AH ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc (P)} \\ AA_1 \perp (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x + x_A}{2}; \dfrac{y + y_A}{2}; \dfrac{z + z_A}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} // \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

  Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

  $$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AH} \end{cases}.$$

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

  Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

  $$R = d(A, (P)).$$

  Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

  $$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Tìm trên mặt phẳng (P) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất bởi nó được phát biểu lại dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (P)").
- Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, suy ra toạ độ của I.

  Bước 2: Nhận xét rằng $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right| = 2MI$.

  Từ đó:

  $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

  $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

  Bước 3: Xác định toạ độ điểm M.

2. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho:

a. MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

b. $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Thí dụ 1. *Cho hai điểm* $A(1; 1; -1)$, $B(-1; 3; -1)$ *và mặt phẳng* (P) *có phương trình* $x + y + 2z - 6 = 0$.

a. *Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* A *lên mặt phẳng* (P).

b. *Tìm tọa độ điểm* A_1 *đối xứng với điểm* A *qua mặt phẳng* (P).

c. *Tìm trên mặt phẳng* (P) *điểm* $M(x_M; y_M; z_M)$ *sao cho tổng* $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

d. *Tìm trên* (P) *điểm* N *sao cho* $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

e. *Tìm trên* (P) *điểm* E *sao cho* EA + EB *đạt giá trị nhỏ nhất.*

f. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (P).

g. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua* A *và tiếp xúc với* (P).
h. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua* A *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
i. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = 3\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$.

Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH}(x-1; y-1; z+1) // \vec{n}(1; 1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-6=0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=6 \\ x-y=0 \\ 2y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 2; 1).$$

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$. Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; -1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \\ x+y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 2; 1).$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(3; 3; 3)$.

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$ và giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (P)} \\ AA_1 \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+1}{2}; \dfrac{y+1}{2}; \dfrac{z-1}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} // \vec{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+1}{2} + 2.\dfrac{z-1}{2} - 6 = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=12 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow A_1(3; 3; 3).$$

c. Nhận xét rằng $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 + (z_M - 0)^2 = OM^2$.

Từ đó, suy ra:

$$\left(x_M^2+y_M^2+z_M^2\right)_{Min} \Leftrightarrow \text{OM nhỏ nhất} \Leftrightarrow \text{M là hình chiếu vuông góc của O trên (P).}$$

Gọi (Δ) là đường thẳng thoả mãn:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{Qua O}\\ (\Delta)\perp(P)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases}\text{Qua O}(0;\,0;\,0)\\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\,1;\,2)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Vì {M} = (Δ) ∩ (P) nên bằng cách phương trình tham số của (Δ) vào phương trình của (P), ta được:

$t + t + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1;\,1;\,2).$

Vậy, với điểm M(1; 1; 2) thì $\left(x_M^2+y_M^2+z_M^2\right)_{Min}=6$.

d. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra I(1; 3; 1). Nhận xét rằng:

$$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|=\left|2\overrightarrow{NI}\right|=2NI.$$

Từ đó:

$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ NI nhỏ nhất

⇔ N là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

- Xác định toạ độ điểm N: Gọi (d’) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d'): \begin{cases}\text{Qua I}\\ (d')\perp(P)\end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases}\text{Qua I}(1;\,3;\,1)\\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\,1;\,2)\end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases}x=1+t\\ y=3+t\\ z=1+2t\end{cases}.$$

Vì {N} = (d’) ∩ (P) nên bằng cách phương trình tham số của (d’) vào phương trình của (P), ta được:

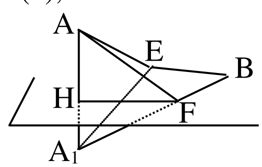
$(1 + t) + (3 + t) + 2(1 + 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow N(1;\,3;\,1).$

Vậy, với điểm N(0; 1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. (Dựa vào kết quả câu b): Nhận xét rằng:

$t_A.t_B = -6.(-6) = 36 > 0 \Leftrightarrow$ A, B ở về cùng một phía với (P).

Phân tích: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) và {F} = (A_1B) ∩ (P), khi đó với điểm E bất kỳ thuộc (P), ta có:



$EA + EB = EA_1 + EB \geq A_1B = FA + FB.$

Vậy, ta được EA + EB nhỏ nhất khi E ≡ F.

Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B): \begin{cases}\text{Qua } A_1(3;\,3;\,3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-4;\,0;\,-4) \text{ chọn } (1;\,0;\,1)\end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases}x=3+t\\ y=3\\ z=3+t\end{cases}.$$

Khi đó, để tìm toạ độ F ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

$3 + t + 3 + 2(3 + t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow F(1;\,3;\,2).$

Vậy, điểm E(1; 3; 1) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=AH=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

Cách 2: (Độc lập với câu a): Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

$$R = d(A, (P)) = \sqrt{6}.$$

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=AH=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

g. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và tiếp xúc với (P) chính là mặt cầu đường kính AH, ta có ngay:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AH} \\ \text{Bán kính } R=\dfrac{AH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}; 2\right) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{6}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}.$$

h. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là đường tròn tâm H và bán kính AH nên:

$$(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6.$$

i. Mặt cầu (T) cần dựng có bán kính là:

$$R^2 = d(A, (P)) + r^2 = 6 + 18 = 24 \Leftrightarrow R = \sqrt{24}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{24} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 24.$$

Dạng toán 8: (***Điểm và mặt cầu***): Để tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt cầu.

Cách 2: Thiết lập điều kiện để M là giao điểm của một đối tượng khác đối với mặt cầu (thường là đường thẳng).

Thí dụ 1. *Cho điểm* A(2; 3; 4) *và mặt cầu* (S): $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

a. *Chứng tỏ rằng điểm* A *nằm ngoài mặt cầu* (S).

b. *Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A cắt (S) tại hai điểm* B, C *sao cho* BC *có độ dài lớn nhất.*

c. *Tìm điểm* M *thuộc* (S) *sao cho* MA *đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với* (S) *và cách* A *một khoảng lớn nhất.*
e. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (S).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đi qua* A *và tiếp xúc với* (S).
g. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính lớn nhất, đi qua* A *và tiếp xúc với* (S).

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính $R = \sqrt{3}$, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + (3-1)^2 + (4-2)^2 = 12 \Leftrightarrow IA = 2\sqrt{3} > R.$$

Vậy, điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

b. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(0;\,1;\,2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;\,2;\,2) \text{ chọn } (1;\,1;\,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$MA \ge |IA - IM| = |IA - R| = \left|2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow MA_{Min} = \sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

$$MA \le IA + IM = IA + R = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow MA_{Max} = 3\sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

Tức trong cả hai trường hợp $\{M\} = (IA) \cap (S) = (d) \cap (S)$.

Thay phương trình tham số của (d) vào (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + t^2 = 3 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1;\,2;\,3) \\ M_2(-1;\,0;\,1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AM_1 = \sqrt{3} \\ AM_2 = 3\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, ta có kết luận:

- $MA_{Min} = \sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_1(1; 2; 3)$.
- $MA_{Max} = 3\sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_2(-1; 0; 1)$.

d. Mặt phẳng (P) cần dựng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất chính là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm M_2, do đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_2(-1;\,0;\,1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(3;\,3;\,3) \text{ chọn } (1;\,1;\,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y + z = 0.$$

e. Mặt cầu tâm A có thể tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài với (S), nên ta có:

- Mặt cầu (T_1) tâm A tiếp xúc ngoài với (S) được cho bởi:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\,3;\,4) \\ \text{Bán kính } R = AM_1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow (T_1): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3.$$

- Mặt cầu (T_2) tâm A tiếp xúc trong với (S) được cho bởi:

$$(T_2):\begin{cases}\text{Tâm A(2; 3; 4)}\\ \text{Bán kính } R=AM_2=3\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow (T_2): (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=27.$$

f. Mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_1, do đó:

$$(S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1 \text{ là trung điểm } AM_1\\ \text{Bán kính } R_1=\dfrac{AM_1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)\\ \text{Bán kính } R_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_1):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

g. Mặt cầu (S_2) có bán kính lớn nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_2, do đó:

$$(S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2 \text{ là trung điểm } AM_2\\ \text{Bán kính } R_2=\dfrac{AM_2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)\\ \text{Bán kính } R_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{27}{4}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu điểm A nằm trong hoặc nằm trên mặt cầu (S) thì mọi đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua A đều cắt (S). Nhận định này gợi ý một cách chứng minh đường thẳng hoặc mặt phẳng cắt mặt cầu.

Thí dụ 2. *Cho điểm* A(2; 1; 2) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(S): x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9.$$

a. *Chứng tỏ rằng mọi đường thẳng đi qua điểm* A *đều cắt mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua* A *cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.*
c. *Viết phương trình đường thẳng đi qua* A *cắt* (S) *tại hai điểm* B, C *sao cho* BC *có độ dài lớn nhất.*
d. *Viết phương trình đường thẳng đi qua* A *vuông góc với đường thẳng* $(\Delta):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ *và cắt* (S) *tại hai điểm* E, F *sao cho* $EF=3\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 1) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2=2^2+(1-1)^2+(2-1)^2=5 \Leftrightarrow IA=\sqrt{5}<R.$$

Vậy, mọi đường thẳng đi qua điểm A đều cắt mặt cầu (S).

b. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có nhận xét:

$r^2 = R^2 - d^2(I, (P)) \le R^2 - IA^2 = 4 \Leftrightarrow r \le 2.$

Suy ra $r_{Min} = 2$, đạt được khi $d(I, (P)) = IA \Leftrightarrow IA \perp (P)$.

Do đó, mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + z - 6 = 0.$$

c. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (Δ) với vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(2;-1;1)$ khi:

  $\vec{u} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = 2a + c.$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(a;b;c) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 2 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Toạ độ các điểm E, F được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

  $(at + 2)^2 + b^2t^2 + (ct + 1)^2 = 9$

  $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2(2a + c)t - 4 = 0.$ (1)

  Phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{2(2a+c)}{a^2+b^2+c^2} \\ t_1t_2 = -\dfrac{4}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

- Với $E(at_1 + 2; bt_1 + 1; ct_1 + 2)$ và $F(at_2 + 2; bt_2 + 1; ct_2 + 2)$ thì:

$$EF = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 18 = EF^2 = (at_1 - at_2)^2 + (bt_1 - bt_2)^2 + (ct_1 - ct_2)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(t_1 - t_2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2]$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{4(2a+c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} + \frac{16}{a^2+b^2+c^2}\right] = \frac{4(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + 16$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 + (2a + c)^2 = 2(2a + c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -\frac{4}{3}c.$$

Khi đó:

- Với a = 0 thì b = c nên $\vec{u}(0; c; c)$ chọn $\vec{u}(0; 1; 1)$, do đó ta được:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $a = -\frac{4}{3}c$ thì $b = -\frac{5}{3}c$ nên $\vec{u}\left(-\frac{4}{3}c; -\frac{5}{3}c; c\right)$ chọn $\vec{u}(4; 5; -3)$, do đó ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. Cho điểm A(4; 2; 2) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm A nằm trên mặt cầu (S).
b. Tìm điểm B thuộc (S) sao cho AB đạt giá trị lớn nhất.
c. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A.
d. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và vuông góc với vectơ $\vec{v}(-1; 0; 1)$.
e. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và tạo với đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{2}$ một góc 45^0.
f. Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $(a): \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và cắt (S) tại điểm B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$.

Giải

a. Mặt cầu (S) có tâm I(2; 1; 0) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow IA = 3 = R.$$

Vậy, điểm A nằm trên mặt cầu (S).

b. Điểm B thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi AB là một đường kính của (S), do đó B đối xứng với A qua tâm I, suy ra B(0; 0; −2).

c. Mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(4; 2; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + y + 2z - 14 = 0.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{IA} \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{IA}, \vec{v}\right] = (-1; 4; -1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(4;\,2;\,2)\\ \text{vtcp } \vec{u}(-1;\,4;\,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x = 4 - t\\ y = 2 + 4t\\ z = 2 - t\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

e. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\,b;\,c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d) tiếp xúc với (S) tại A nên:

  $$\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = -2a - 2c.$$

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:

  $$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left|-a + 2b + 2c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}}$$

  $$\Leftrightarrow 9[a^2 + (-2a - 2c)^2 + c^2] = 2[-a + 2(-2a - 2c) + 2c]^2$$

  $$\Leftrightarrow 9[5a^2 + 8ac + 5c^2] = 2(-5a - 2c)^2$$

  $$\Leftrightarrow 5a^2 + 32bc - 37c^2 = 0 \Leftrightarrow a = -c \text{ hoặc } a = \frac{37}{5}c.$$

Khi đó:

- Với $a = -c$ thì $b = 0$ nên $\overrightarrow{u_d}(-c;\,0;\,c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-1;\,0;\,1)$, từ đó:

  $$(d_1):\begin{cases}\text{Qua } A(4;2;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-1;0;1)\end{cases} \Leftrightarrow (d_1):\begin{cases}x = 4 - t\\ y = 2\\ z = 2 + t\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

- Với $a = \frac{37}{5}c$ thì $b = -\frac{84}{5}c$ nên $\overrightarrow{u_d}\left(\frac{37}{5}c;\,-\frac{84}{5}c;\,c\right)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(37;\,-84;\,5)$, từ đó:

  $$(d_2):\begin{cases}\text{Qua } A(4;2;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(37;-84;5)\end{cases} \Leftrightarrow (d_2):\begin{cases}x = 4 + 37t\\ y = 2 - 84t\\ z = 2 + 5t\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a;\,b;\,c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (a) với vtcp $\overrightarrow{u_a}(-1;\,2;\,1)$ khi:

  $$\vec{u} \perp \overrightarrow{u_a} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_a} = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow a = 2b + c.$$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

  $$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(4;\,2;\,2)\\ \text{vtcp } \vec{u}(a;\,b;\,c)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x = 4 + at\\ y = 2 + bt\\ z = 2 + ct\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

- Toạ độ điểm B (B $\neq$ A) được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

$$(at + 2)^2 + (bt + 1)^2 + (ct + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2(2a + b + 2c)t = 0$$

$$\overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t = -\frac{2(2a+b+2c)}{a^2+b^2+c^2}.$$

- Với A(4; 2; 2) và B(at + 4; bt + 2; ct + 2) thì:

$$AB = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 20 = AB^2 = a^2t^2 + b^2t^2 + (c^2t^2 = (a^2 + b^2 + c^2)t^2$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{4(2a+b+2c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} = \frac{4(2a+b+2c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow 5[(2b + c)^2 + b^2 + c^2] = [2(2b + c) + b + 2c]^2$$

$$\Leftrightarrow 5(5b^2 + 4cb + 2c^2) = (5b + 4c)^2 \Leftrightarrow 6c^2 + 20bc = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ hoặc } c = -\frac{10}{3}b.$$

Khi đó:

- Với c = 0 thì a = 2b nên $\vec{u}(2b; b; 0)$ chọn $\vec{u}(2; 1; 0)$, do đó ta được:

$$(d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + t \quad, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

- Với $c = -\frac{10}{3}b$ thì $a = -\frac{4}{3}b$ nên $\vec{u}\left(-\frac{4}{3}b; b; -\frac{10}{3}b\right)$ chọn $\vec{u}(4; -3; 10)$, do đó ta được:

$$(d_2): \frac{x-4}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{10}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

<u>Ví dụ 1:</u> (Đề thi đại học khối B – 2003): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hai điểm* A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) *và điểm* C *sao cho* $\overrightarrow{AC}$ (0; 6; 0). *Tính khoảng cách từ trung điểm* I *của* BC *đến đường thẳng* OA.

✍ *Giải*

Giả sử C(x; y;, z) suy ra:

$$(0; 6; 0) = (x - 2; y; z) \Rightarrow C(2; 6; 0) \Rightarrow I(1; 3; 4).$$

$$d(I, OA) = \frac{\left|[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}]\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} = 5.$$

Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho ba điểm* A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) *và mặt phẳng* (P): $x + y + z - 2 = 0$. *Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A, B, C *và có tâm thuộc mặt phẳng* (P).

✍ *Giải*

1. Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

   (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

- Điểm $A\in(S) \Leftrightarrow 5 - 4a - 2c + d = 0$. (1)
- Điểm $B\in(S) \Leftrightarrow 1 - 2a + d = 0$. (2)
- Điểm $C\in(S) \Leftrightarrow 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0$. (3)
- Tâm $I(a; b; c)\in(P) \Leftrightarrow a + b + c - 2 = 0$. (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), (4), ta được

$a = 1, b = 0, c = 1, d = 1$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Ví dụ 3: (Đề thi đại học khối A – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho đường thẳng* (d) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1};\ (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

a. *Tìm toạ độ điểm* I *thuộc* (d) *sao cho khoảng cách từ* I *tới* (P) *bằng* 2.

b. *Tìm toạ độ giao điểm* A *của* (d) *và* (P). *Viết phương trình tham số của đường thẳng* (Δ) *nằm trong mặt phẳng* (P), *biết* (Δ) *đi qua* A *và vuông góc với* (d).

✍ *Giải*

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Với giả thiết $I \in (d)$ suy ra $I(1 - t; 2t - 3; 3 + t)$.

Với điều kiện $d(I, P) = 2$, ta được:

$$\frac{|2(1-t)+(2t-3)-2(3+t)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right..$$

- Với $t = 4$, ta được $I_1(-3; 5; 7)$.
- Với $t = -2$, ta được $I_2(3; -7; 1)$.

Vậy, tồn tại hai điểm I_1, I_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$2(1 - t) + (2t - 3) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0; -1; 4)$.

Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ), vtpt của (P), ta có

$\vec{a}(-1; 2; 1)$ và $\vec{n}(2; 1; -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}(\Delta)\subset(P)\\(\Delta)\perp(d)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{b}\perp\vec{n}\\ \vec{b}\perp\vec{a}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{b} = [\vec{n}, \vec{a}] = (5; 0; 5) \text{ chọn } \vec{b}(1; 0; 1).$$

Khi đó:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{qua } A(0,-1,4)\\ \text{vtct } \vec{b}(1,0,1)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases}x = t\\ y = -1\\ z = 4+t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 4: (Đề thi đại học khối D – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hai đường thẳng*

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } (d_2): \begin{cases}x+y-z-2=0\\ x+3y-12=0\end{cases}.$$

a. *Chứng minh rằng* (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa cả hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2).

b. *Mặt phẳng toạ độ* Oxz *cắt hai đường thẳng* d_1, d_2 *lần lượt tại các điểm* A, B. *Tính diện tích* ΔOAB, *với* O *là gốc toạ độ.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

- (d_1) có vtcp $\vec{a_1}(3; -1; 2)$ và đi qua điểm $M_1(1; -2; -1)$.
- (d_2) có vtcp $\vec{a_2}(3; -1; 2)$ và đi qua điểm $M_2(0; 4; 2)$.

Nhận xét rằng $\vec{a_1} = \vec{a_2}$ và điểm $M_1 \notin (d_2)$.

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Để lập phương trình mặt phẳng (P) chúng ta có hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng chùm mặt phẳng*): Mặt phẳng (P) chứa (d_2) nên có dạng:

$$(P): A(x + y - z - 2) + B(x + 3y - 12) = 0. \quad (1)$$

Để (P) chứa (d_1) điều kiện là:

$$M_1 \in (P) \Leftrightarrow A(1-2+1-2) + B(1-6-12) = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{17}{2}B. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được (P): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$.

Cách 2: Ta có ngay:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } M_1\\ \text{cặp vtcp } \vec{a_1} \text{ và } \overrightarrow{M_1M_2}\end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases}\text{qua } M_1(1,-2,-1)\\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a_1}, \overrightarrow{M_1M_2}] = (15,11,-17)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $15(x - 1) + 11(y + 2) - 17(z + 1) = 0 \Leftrightarrow$ (P): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$.

b. Ta lần lượt có:

- Toạ độ của A là nghiệm của hệ tạo bởi (d_1) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}\\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -5\\ y = 0\\ z = -5\end{cases} \Rightarrow A(-5; 0; -5).$$

- Toạ độ của B là nghiệm của hệ tạo bởi (d_2) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=0 \\ z=10 \end{cases} \Rightarrow B(12;\ 0;\ 10).$$

Khi đó, diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(-5;\ 0;\ -5), (12;\ 0;\ 10)]\right| = 5 \text{ đvdt.}$$

<u>Ví dụ 5:</u> (Đề thi đại học khối A – 2002): *Trong không gian* Oxyz, *cho* 2 *đường thẳng*:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases}, (\Delta_2): \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (Δ_1) *và song song với* (Δ_2).
b. *Cho điểm* M(2; 1; 4). *Tìm toạ độ điểm* H *thuộc* (Δ_2) *sao cho độ dài* MH *ngắn nhất*.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

a. (P) chứa (Δ_1) ⇔ (P) thuộc chùm tạo bởi (Δ_1), có dạng:

(P): A(x – 2y + z – 4) + B(x + 2y – 2z + 4) = 0

⇔ (P): (B + A)x + 2(B – A)y + (A – 2B)z – 4A + 4B = 0

⇒ vtpt $\overrightarrow{n_P}$ (B + A; 2B – 2A; A – 2B).

Gọi $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (Δ_2), ta được $\overrightarrow{a_2}$ (1; 1; 2).

Vì $(P)//(\Delta_2)$ nên:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_2} = 0 \Leftrightarrow 1.(B+A)+1.2(B-A)+2.(A-2B)=0 \Leftrightarrow B=A.$$

Vậy, ta được (P): 2x – z = 0.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để $H\in(\Delta_2)$: MH_{Min} ⇔ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2)

Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\vec{a}_2$ (1; 1; 2).

Vì $H \in (\Delta_2)$ nên:

H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) ⇒ $\overrightarrow{MH}$ (t – 1; 1 + t; 2t – 3),

$MH \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}_2 = 0$

⇔ 1.(t – 1) + 1.(1 + t) + 2.(2t – 3) = 0 ⇔ t = 1 ⇒ H(2; 3; 3).

Cách 2: Để $H\in(\Delta_2)$: MH_{Min}

⇔ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2) ⇔ $H = (Q)\cap(\Delta_2)$,

trong đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } M \\ (Q) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } M(2,1,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(1,1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x = y + 2z - 11 = 0.$$

Bằng cách thay x, y, z từ (Δ_2) vào (Q), ta được t = 1 nên H(2; 3; 3).

Ví dụ 6: (Đề thi đại học khối B – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho* A(–4; –2; 4) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 1 - t \\ z = 4t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) *đi qua điểm* A, *cắt và vuông góc với đường thẳng* (d).

✍ *Giải*

1. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1; 4)$, lấy điểm B(– 3; 1; – 1)∈(d).

Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{chứa (d)} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (1, -2, -1) \end{cases}$$

⇔ (P_1): x – 2y – z + 4 = 0.

Gọi (P_2) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_2) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2, -1, 4) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 2x - y + 4z - 10 = 0.$$

Nhận xét rằng, (Δ) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) do đó có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + 4z - 10 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1; 4)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d), suy ra:

H(2t – 3; 1 – t; 4t – 1) ⇒ $\overrightarrow{AH}(2t + 1; 3 - t; 4t - 5)$,

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t + 1) - (3 - t) + 4(4t - 5) = 0$

⇔ t = 1 ⇒ $\overrightarrow{AH}(3; 2; -1)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(3, 2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

Ví dụ 7: (Đề thi đại học khối A – 2003): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình hộp chữ nhật* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *có* A *trùng với gốc của hệ toạ độ*, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A_1(0; 0; b) *với* a, b > 0. *Gọi* G *là trung điểm cạnh* CC_1.

a. *Tính thể tích khối tứ diện* BDA_1M *theo* a *và* b.

b. *Xác định tỉ số* $\frac{a}{b}$ *để* $(A_1BD) \perp (MBD)$.

✍ *Giải*

Từ giả thiết suy ra C(a; a; 0) và C_1(a; a; b) ⇒ M(a; a; $\frac{b}{2}$).

a. Ta có ngay:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA_1}].\overrightarrow{BM}\right|. \qquad (1)$$

trong đó:

$\overrightarrow{BD}(-a; a; 0)$, $\overrightarrow{BA_1}(-a; 0; b)$, $\overrightarrow{BM}(0; a; \frac{b}{2})$, $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA_1}] = (ab; ab; a^2)$.

Từ đó, suy ra:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|(ab; ab; a^2).(0; a; \frac{b}{2})\right| = \frac{a^2b}{4}.$$

b. Gọi $\vec{n}_{A_1BD}$, $\vec{n}_{MBD}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (A_1BD) và (MBD), ta có ngay:

$$\vec{n}_{A_1BD} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA_1}] = (ab; ab; a^2), \qquad \vec{n}_{MBD} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = (\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2)$$

Để (A_1BD) $\perp$ (MBD) điều kiện là:

$$\vec{n}_{A_1BD} \perp \vec{n}_{MBD} \Leftrightarrow \vec{n}_{A_1BD}.\vec{n}_{MBD} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy, với a = b thoả mãn điều kiện đầu bài.

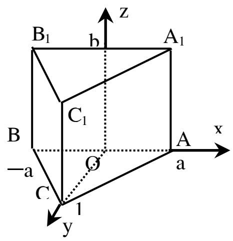
<u>Ví dụ 8:</u> (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABCA_1B_1C_1$. *Biết* A(a; 0; 0), B(– a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(–a; 0; b), a > 0, b > 0. *Gọi* M *là trung điểm cạnh* SC.

a. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1.

b. *Cho* a, b *thay đổi nhưng luôn thoả mãn* a + b = 4. *Tìm* a, b, *để khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1 *lớn nhất*.

✍ *Giải*

Ta có A_1(a; 0; b), C_1(0; 1; b).



a. Ta có:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}].\overrightarrow{CC_1}|}{|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}]|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $d_{max} = \sqrt{2}$, đạt được khi a = b $\overset{a+b=4}{\Leftrightarrow}$ a = b = 2.

<u>Ví dụ 9:</u> (Đề thi đại học khối B – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B_1(4; 0; 4).

a. *Tìm toạ độ các đỉnh* A_1, C_1.

b. *Viết phương trình mặt cầu có tâm* A *và tiếp xúc với mặt phẳng* (BCC_1B_1).

c. *Gọi* M *là trung điểm của* A_1B_1. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, M *và song song với* BC_1.

d. *Mặt phẳng* (P) *cắt đường thẳng* (A_1C_1) *tại* N. *Tính độ dài đoạn* MN.

✍ *Giải*

a. $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$.

b. Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) được cho bởi:

$$(BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{BC} \text{ vµ } \overrightarrow{BB_1} \end{cases} \Leftrightarrow (BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B(4,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (3,4,0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3(x - 4) + 4y = 0 \Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3x + 4y - 12 = 0.$

Mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) khi:

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|4.(-3) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu S(A, R) có dạng:

$$(S): x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}.$$

c. Ta có $M(2; -\frac{3}{2}; 4)$ và khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{AM} \text{ vµ } \overrightarrow{BC_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (1, 4, -2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): x + 4(y + 3) - 2z = 0 \Leftrightarrow (P): x + 4y - 2z + 12 = 0.$

d. Phương trình tham số của đường thẳng (A_1C_1) được cho bởi:

$$(A_1C_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0,-3,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1C_1}(0,6,0) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1C_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}, \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (A_1C_1) vào phương trình của (P) ta được:

$0 + 4(-3 + t) - 2.4 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(0; -1; 4)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(0-2)^2 + (-1 + \frac{3}{2})^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

PHẦN I: GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.. 7

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN.................. 12

§ 1: Tính đơn điệu của hàm số .. .. .12

§ 2: Cực trị của hàm số 28

§ 3: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số 41

§ 4: Đồ thị của hàm số và phép tịnh tiến hệ tọa độ.. 50

§ 5: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số 55

§ 6: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm đa thức 63

§ 7: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ.. 69

§ 8: Một số bài toán thường gặp về đồ thị 77

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC................................... ... .95

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.. 139

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN....... ... .143

§ 1: Hàm số mũ và hàm số logarit. Hàm số lũy thừa....... 143

§ 2: Phương trình mũ và lôgarit.. ... .149

§ 3: Hệ phương trình mũ và lôgarit.. ... .163

§ 4: Bất phương trình mũ và lôgarit... 169

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC.. 170

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ... 201

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN 207

§ 1: Nguyên hàm 207

§ 2: Tích phân 229

§ 3: Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.... ... .245

§ 4: Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.... ... .248

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC....................... 255

CHƯƠNG 4
SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 273
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN 278
§ 1: Số phức 278
§ 2: Căn bậc hai của số phức và phương trình bậc hai . ... .285
§ 3: Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng ... .291

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 294

PHẦN II: HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1
KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 303
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN 304
C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 311

CHƯƠNG 2
MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 323
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN 323
C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 329

CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 339
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN 345
§ 1: Hệ tọa độ trong không gian .... .345
§ 2: Phương trình mặt phẳng 363
§ 3: Phương trình đường thẳng 396

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC 480

MỤC LỤC 487