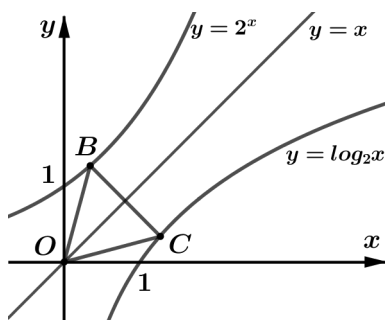


HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

120 câu – Vận dụng cao



Phần 1. Tính chất và các phép toán.....

Phần 2. Đồ thị

Phần 3. Dãy logarit

Phần 4. Cực trị nghiệm

Phần 5. Bài toán tìm GTLN – GTNN

Phần 1. Tính chất và các phép toán

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $a \in (0; 2)$. B. $a \in (0; 2) \setminus \{1\}$. C. $a \in \mathbb{R} \setminus [0; 2]$. D. $a \in \mathbb{R} \setminus (0; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = -\log_{2018} \left(-\frac{1}{x} \right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
B. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
D. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Câu 3. Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \ln(x^3 + mx + 2)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27$, $b^{\log_7 11} = 49$, $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$.

Giá trị của biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$ bằng

- A. $76 + \sqrt{11}$. B. 469. C. 2017. D. 31141.

Câu 6. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

- A. $T = \frac{1}{10}$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = 2$. D. $T = \sqrt{10}$.

Câu 7. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$ và

$\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$ với a, b là hai số nguyên dương. Tổng $a + b$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 11.

Câu 8. Cho các số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a \neq 1$ thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một

cấp số cộng. Giá trị biểu thức $P = \frac{3x}{y} + \frac{7y}{z} + \frac{2020z}{x}$ bằng

- A. $\frac{2030}{3}$. B. 1015. C. 2030. D. 4038.

Câu 9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $\log(x + y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$.

Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$. Tổng $a + b$ bằng

A. $-\frac{31}{2}$.

B. $-\frac{25}{2}$.

C. $\frac{29}{2}$.

D. $\frac{31}{2}$.

Câu 10. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y}-x}$. Gọi $S = xy + yz + zx$.
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S \in (1; 2016)$. B. $S \in (0; 2017)$. C. $S \in (0; 2018)$. D. $S \in (2016; 2017)$.

Câu 11. Tìm bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+\dots+19) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3.$$

A. $(1; 3; 2)$.

B. $(2; 4; 3)$.

C. $(2; 4; 4)$.

D. $(2; 6; 4)$.

Câu 12. Cho $f(1) = 1$ và $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị biểu

thức $T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right]$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 9.

Câu 13. Cho a, b, c là ba số thực dương không cùng bằng nhau, đồng thời khác 1 và thỏa mãn $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a + b + c$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{3}$.

Câu 14. Cho $a > 0$ và $b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{27}{4}$.

C. 6.

D. 9.

Câu 15. Cho $a > 1$ và $b > 1$ thỏa $\log_b(a^3 + a^2 - 4b + 4) + \log_a(b^2 + \sqrt[3]{b} - 16b + 64) = 2$.

Giá trị của biểu thức $P = \frac{a+2b+1}{a+b}$ bằng

A. $\frac{15}{10}$.

B. $\frac{17}{10}$.

C. $\frac{19}{10}$.

D. $\frac{21}{10}$.

Câu 16. Cho $x > 0$ và số thực y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2[14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 17. Cho $x > 0$ và $y > 0$ thỏa mãn $2^{-x^3+x^2+x-2} = \log_2\left(y + \frac{1}{2y}\right)$. Giá trị của biểu

thức $P = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tổng $S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$ bằng

A. 1007.

B. 1008.

C. 2016.

D. 2017.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tổng $P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$ bằng

- A. 1009. B. $\frac{4035}{4}$. C. $\frac{4039}{12}$. D. $\frac{12103}{12}$.

Câu 20. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 21. Xét hàm số $f(t) = \frac{4^t}{4^t + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot (x+y) + \frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{4}$.

Câu 22. Cho a là số thực dương. Xét hàm số $f(x) = \frac{a^x}{a^x + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết $f(x) + f(y) = 1$ với mọi $x + y = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m = \sqrt[4]{a}$. B. $m = \sqrt{a}$. C. $m = a$. D. $m = a^2$.

Câu 23. Xét hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tích các phần tử của S bằng

- A. -3. B. -9. C. -81. D. 81.

Câu 24. Xét hàm số $f(x) = \log_2 \sqrt{2+4^x}$ và a, b là hai số thực dương thỏa mãn $f'(a) + f'(b) = 1$. Đặt $T = \sqrt[27]{a^{12}} + \sqrt[2018]{b^{2017}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $0 < T < \frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2} < T \leq 1$. D. $T > 1$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

- A. $S = 1008$. B. $S = 2016$. C. $S = 2017$. D. $S = 4032$.

Câu 26. Xét hàm số $f(x) = 2018 \ln \left(e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e} \right)$. Tính $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017)$.

- A. $T = 1008$. B. $T = 1009$. C. $T = \frac{2017}{2}$. D. $T = \frac{2019}{2}$.

Câu 27. Xét hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tích các phần tử của S bằng

- A. -27. B. $-3\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. 27.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \log^{2019}(\sqrt{x^2+1} + x) + b \sin x \cdot \cos(2018x) + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(2018^{\ln 2019}) = 10$. Giá trị của biểu thức $f(-2019^{\ln 2018})$ bằng

- A. -10. B. 2. C. 8. D. 10.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \log(2x + \sqrt{4x^2+1}) + b \cdot \sin \pi x + c \cdot e^x$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 2$. Khi đó hằng số c thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. B. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right]$. D. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \ln^3(x + \sqrt{x^2+1}) + bx \cdot \cos(5x) + 1$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e)) \cdot f(\log(\ln 10)) = m$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m thỏa mãn $f^2(\log(\log e)) + f^2(\log(\ln 10)) = -m^2 + m + 8$. Số phần tử của tập S bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Phần 2. Đồ thị và các vấn đề liên quan

Câu 1. Cho bốn hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ (1), $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2),

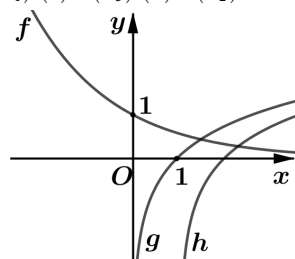
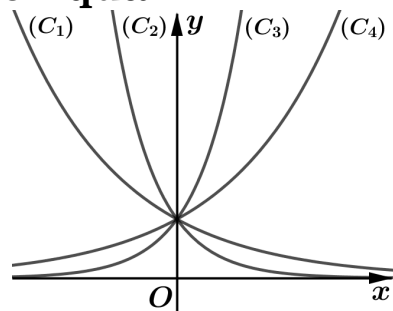
$y = 4^x$ (3), $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là bốn đường cong

như hình bên. Tương ứng hàm số - đồ thị đúng là

- A. (3) - (C₄), (2) - (C₁), (1) - (C₃), (4) - (C₂).
B. (1) - (C₄), (3) - (C₁), (2) - (C₃), (4) - (C₂).
C. (1) - (C₄), (2) - (C₁), (3) - (C₃), (4) - (C₂). D. (2) - (C₄), (1) - (C₁), (3) - (C₃), (4) - (C₂).

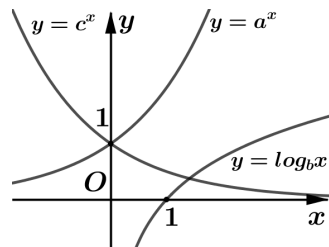
Câu 2. Cho các hàm số $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$ và $h(x) = \log_b(x+c)$ (trong đó a, b lớn hơn 0 và khác 1; $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < c < b$. B. $a < b < c$.
C. $a < 1 < b, c > 0$. D. $c < a < b$.



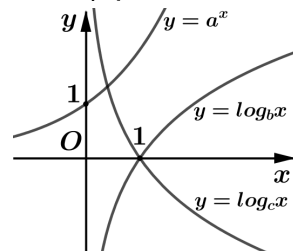
Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = c^x$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > b > a$. B. $c < a < b$.
C. $c < b < a$. D. $b > c > a$.



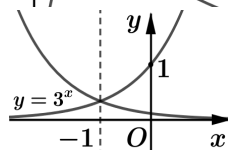
Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b < c < a$. B. $a < c < b$.
C. $c < b < a$. D. $c < a < b$.



Câu 5. Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = 3^x$ qua đường thẳng $x = -1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $f(x) = \frac{1}{3 \cdot 3^x}$. B. $f(x) = \frac{1}{9 \cdot 3^x}$. C. $f(x) = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{2}$. D. $f(x) = -2 + \frac{1}{3^x}$.



Câu 6. Biết hàm số $y = g(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

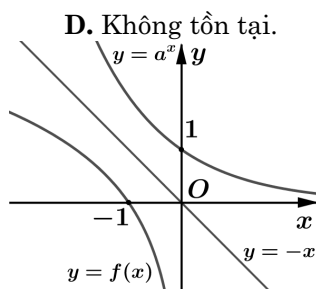
- A. -2020. B. -2016. C. 2016. D. 2020.

Câu 7. Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_{2018}\left(\frac{1}{x}\right)$ qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $f(-2018)$.

- A. -1. B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

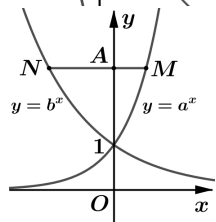
Câu 8. Cho hai hàm số $y = a^x$ và $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường $d: y = -x$. Giá trị của $f(-a^3)$ bằng

- A. $-\frac{1}{a^{3a}}$. B. $-\frac{1}{3}$.
C. -3. D. $-a^{3a}$.



Câu 9. Cho a, b là các số thực dương khác 1. Các hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng bất kỳ song song với trục hoành và cắt đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, trục tung lần lượt tại M, N, A đều thỏa mãn $AN = 2AM$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b = 2a$. B. $a^2 = b$. C. $ab = \frac{1}{2}$. D. $ab^2 = 1$.



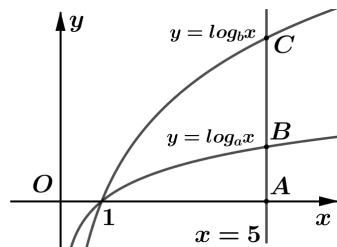
Câu 10. Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = b^2$.

B. $a^3 = b$.

C. $a = b^3$.

D. $a = 5b$.



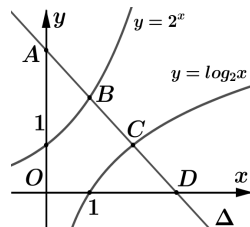
Câu 11. Cho hai hàm số $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng Δ cắt trục tung, đồ thị hàm số $y = 2^x$, đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ và trục hoành lần lượt tại A, B, C, D thỏa mãn $AB = BC = CD$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng Δ như thế?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.



Câu 12. Gọi B và C lần lượt là các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ sao cho tam giác OBC đều. Giả sử điểm B có hoành độ là a khi đó tỉ số $\frac{2^x}{a}$ bằng

A. $2 - \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. $2 + \sqrt{2}$.

Câu 13. Gọi A, B là các điểm lần lượt thuộc đồ thị các hàm số $y = e^x$ và $y = e^{-x}$ sao cho tam giác OAB nhận điểm $M(1;1)$ làm trọng tâm. Khi đó tổng các giá trị của hoành độ và tung độ điểm A gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 3.

B. 3,5.

C. 4.

D. 4,5.

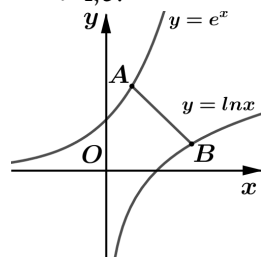
Câu 14. Gọi A và B lần lượt là hai điểm di động trên hai đồ thị hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ như hình vẽ. Khoảng cách giữa hai điểm A, B nhỏ nhất gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. 1,2.

B. 1,3.

C. 1,4.

D. 1,5.



Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = e^{-x^2}$ như hình vẽ.

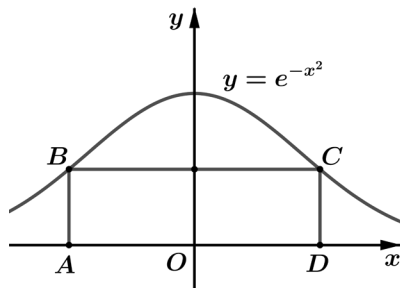
$ABCD$ là một hình chữ nhật thay đổi sao cho B và C luôn thuộc đồ thị hàm số đã cho, A và D thuộc trục hoành. Giá trị lớn nhất của diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{e}}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{e}$.

D. $\frac{2}{e}$.



Phần 3. Dãy loga

Câu 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_2^2 u_4 - 3\log_2 u_4 + 2 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 2018$ bằng

- A. 999. B. 1000. C. 1010. D. 1011.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2\log u_8} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 10u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

- A. 10^{2000} . B. 10^{2008} . C. 10^{2017} . D. 10^{2018} .

Câu 3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$. Biết số hạng đầu $u_1 \neq 1$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 3$ là

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^3 u_1 - 2\log^2 u_1 + \log u_1 - 2 = 0$ và $u_{n+1} = 2u_n + 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 10^{100} - 10$ là

- A. 225. B. 226. C. 326. D. 327.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho $3^{u_n} < 5^{100}$.

- A. $n = 71$. B. $n = 72$. C. $n = 73$. D. $n = 74$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) thỏa $\sqrt{\ln^2 u_1 + \sqrt{\ln^2 u_2 + \dots + \sqrt{\ln^2 u_{n-1} + \sqrt{\ln^2 u_n + \ln u_{n+1} + 1}}} = 3$ và $u_{n+1} = u_n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2017^{2018}$.

- A. 11. B. 12. C. 14. D. 15.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa $u_{n+1} = \frac{u_n \cdot \log_2(n+1)}{10}$, với mọi $n \geq 1$. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của u_n . Có bao nhiêu số tự nhiên n để $u_n = a$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho cấp số cộng (a_n) thỏa $a_2 > a_1 \geq 0$; cấp số nhân (b_n) thỏa $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$; $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018a_n$.

- A. $n = 15$. B. $n = 16$. C. $n = 17$. D. $n = 18$.

Phần 4. Cực trị nghiệm

Câu 1. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

- A. 17. B. 25. C. 30. D. 33.

Câu 2. Với m, n là các số nguyên dương sao cho phương trình $\ln^2 x - (m+1) \ln x + n = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $\ln^2 x - (n+1) \ln x + m = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2m + 3n$ bằng

- A. 46. B. 48. C. 51. D. 53.

Câu 3. Cho hai phương trình

$$\ln^2 x - (m-1) \ln x + n = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad \ln^2 x - (n-1) \ln x + m = 0 \quad (2).$$

Biết phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là x_0, x_1 và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là x_0, x_2 (tức là x_0 là nghiệm chung của hai phương trình) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \cdot 4^x - b \cdot 2^x + 50 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b \cdot 3^x + 50a = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng

- A. 49. B. 51. C. 59. D. 81.

Câu 5. Cho a, b là hai số thực dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$ bằng

- A. $\sqrt[3]{4}$. B. $3\sqrt[3]{4}$. C. $3\sqrt[3]{2}$. D. 4.

Câu 6. Cho a, b là hai số nguyên dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng

- A. 40. B. 41. C. 44. D. 46.

Câu 7. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2} b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$ bằng

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 10.

Câu 8. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = mn$ bằng

- A. $\frac{16875}{16}$. B. $\frac{4000}{27}$. C. 3456. D. 15625.

Câu 9. Cho a, b là các số thực lớn hơn 1 và phương trình $\log_a(ax) \cdot \log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m, n . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4a^2 + 9b^2)(36m^2n^2 + 1)$ bằng

- A. 36. B. 72. C. 144. D. 288.

Câu 10. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a + 2b + 3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

- A. $S = 200$. B. $S = \frac{500}{3}$. C. $S = \frac{650}{3}$. D. $S = \frac{700}{3}$.

Phần 5. Bài toán tìm GTNN-GTLN

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log(x + 3y) + \log(x - 3y) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - |y|$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. 1. C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 2. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x + 20y - 40) = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{y}{x}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{14}$. C. $\frac{11}{6}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 2m + 3M$ bằng

- A. $S = \frac{1}{3}$. B. $S = \frac{2}{3}$. C. $S = 2$. D. $S = 3$.

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3\log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$
 bằng

- A. 10. B. 12. C. 18. D. 20.

Câu 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt[3]{4}$. C. $4\sqrt[3]{2}$. D. 4.

Câu 6. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_3(1+2a) + \log_3\left(1 + \frac{b}{2a}\right) + 2\log_3\left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}}\right)$$

- A. 1. B. 4. C. 7. D. 9.

Câu 7. Cho a, b là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng

- A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$. B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$.
C. $\frac{1}{2}(\log_3 2 + \log_2 3)$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Câu 8. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$ bằng

- A. $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$. B. $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$. C. $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$. D. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Câu 9. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{10}$.

Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$ (*). Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x + y$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $a+b$ bằng

- A. 11. B. 13. C. 15. D. 17.

Câu 11. Cho các số thực a, b, c thỏa $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$ bằng

- A. $\frac{4+\sqrt{30}}{3}$. B. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$. C. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$. D. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$.

Câu 12. Cho các số thực x, y thỏa mãn $4^{x^2+4y^2} - 2^{x^2+4y^2+1} = 2^{3-x^2-4y^2} - 4^{2-x^2-4y^2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x-2y-1}{x+y+4}$. Tổng $M+m$ bằng

- A. $-\frac{36}{59}$. B. $-\frac{18}{59}$. D. $\frac{18}{59}$. C. $\frac{36}{59}$.

Câu 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $5\log_2^2 a + 16\log_2^2 b + 27\log_2^2 c = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_2 a \log_2 b + \log_2 b \log_2 c + \log_2 c \log_2 a$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 14. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 10\log_2^2 a + 10\log_2^2 b + \log_2^2 c$ bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 3. D. 4.

Câu 15. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_5 \sqrt{a^2 + b^2} + \log_5 \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 16. Cho $m = \log_x \sqrt{\frac{y}{x}}$ với $x > 1, 0 < y < 1$. Giá trị của lớn nhất của biểu thức $T = \log_x y + \log_y x$ bằng

- A. -2. B. -1. C. 0. D. 2.

Câu 17. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{2^b} (2^{a+b}) = 2^a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{3b(1-2^a)}{a+1}$ bằng

- A. $\sqrt{3} - 1$. B. $1 - \sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3} - 2$. D. $2\sqrt{3} - 4$.

Câu 18. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng $P = \frac{1}{\log_{(ab)} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $k \in (-1; 0)$. C. $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $k \in (2; 3)$.

Câu 19. Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ và thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Giá trị lớn nhất của a bằng

- A. 1. B. $\log(2^e - 1)$. C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$. D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$.

Câu 20. Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho tồn tại số thực $0 < x \neq 1$ thỏa $a^{\log_a x} = b^{\log_a x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$ bằng

- A. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{e}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 21. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < 1 < b, ab > 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a ab + \frac{4}{(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} ab}$ bằng

- A. -4. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 22. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tổng $M + 2m$ bằng

A. 6.

B. 11.

C. $\frac{11}{2}$.D. $\frac{21}{2}$.

Câu 23. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 19.

Câu 24. Xét các số thực a, b thỏa $b > 1$, $\sqrt{a} \leq b < a$. Biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $a = b^2$.B. $a^2 = b^3$.C. $a^3 = b^2$.D. $a^2 = b$.

Câu 25. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b^2$ và $b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + \log_b \frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. 3.

D. 9.

Câu 26. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $y > e$ và $\ln \frac{x}{y} = \frac{\ln x}{\ln y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy$ bằng

A. $e^{3+2\sqrt{2}}$.B. $e^{4\sqrt{2}+\frac{3}{2}}$.C. e^6 .D. e^8 .

Câu 27. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ bằng

A. -4.

B. $4\log_2 6$.C. $4(1 - \log_2 3)$.D. $\frac{4}{\ln 2} - 4\log_2\left(\frac{4}{\ln 2}\right)$.

Câu 28. Cho x, y là hai số thực dương thỏa $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x+2y}{y}\right)$ bằng

A. $3 + \ln 4$.B. $12 + \ln 4$.C. $\frac{3}{2} + \ln 6$.D. $24 + \ln 6$.

Câu 29. Cho x, y là hai số thực dương thỏa $\log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$.

Biết giá trị nhỏ nhất của $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $(a, b) = 1$. Tổng $a + b$ bằng

A. 2.

B. 9.

C. 12.

D. 13.

Câu 30. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ bằng

A. $2\sqrt{2} + 3$.B. $3\sqrt{2} + 2$.C. $\sqrt{17} + \sqrt{3}$.

D. 6.

Câu 31. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 (x + 3y) \leq 2 + 2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

- A. 10. B. 15. C. 17. D. 30.

Câu 32. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1 và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$ bằng

- A. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. B. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. C. 20. D. 24.

Câu 33. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a^2 \left(\frac{a^4}{128} + 32 \right) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right)$ bằng

- A. 13. B. 14. C. 15. D. 19.

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^3 a - \frac{9}{2} \log_2 (16a - 64) - 3 \log_2^2 a + 7$ với $a \in [1; 16]$ bằng

- A. -20. B. -13. C. 7. D. 8.

Câu 35. Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Khi biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_b^2 a - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất, tổng $a^3 + 2b$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 6. D. 7.

Câu 36. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Biểu thức $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\log_a b$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 37. Cho a, b là hai số thực thuộc $(1; 2]$ và $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \log_a (b^2 + 4b - 4) + \log_b^2 a$ là $m + \sqrt[3]{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Tổng $m+n$ bằng

- A. $\frac{37}{3}$. B. 12. C. 15. D. 249.

Câu 38. Cho a, b là hai số thực thỏa $\frac{1}{3} < b < a < 1$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_b^2 a$ là m khi $b = a^n$. Tổng $m+n$ bằng

- A. 12. B. 15. C. $\frac{37}{3}$. D. $\frac{46}{3}$.

Câu 39. Cho a, b là hai số thực thỏa $a > b > \frac{4}{3}$ và $P = 16 \log_a \left(\frac{a^3}{12b-16} \right) + 3 \log_{\frac{a}{b}}^2 a$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b$ bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{11}{2}$. C. 4. D. 6.

Câu 40. Cho a, b là hai số thực thỏa $3a-4 > b > 0$ và $P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a \right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $3a+b$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{25}{2}$. C. 8. D. 14.

Câu 41. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} - y = \frac{y^2-x}{4}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ bằng

- A. 2. B. $\frac{58}{27}$. C. $\frac{115}{27}$. D. $\frac{122}{27}$.

Câu 42. Cho x, y là hai số thực thuộc $[0;1]$ và thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$ bằng

- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{136}{3}$. C. $\frac{383}{16}$. D. $\frac{391}{16}$.

Câu 43. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ bằng

- A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 44. Xét các số thực dương x, y thỏa $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 45. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ bằng

- A. $-5+6\sqrt{3}$. B. $-3+6\sqrt{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{27}{5}$.

Câu 46. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$ bằng

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. -2 . D. -1 .

Câu 47. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2} \log_2(x-y) = \frac{1}{2}[1 + \log_2(1-xy)]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{17}{2}$. C. 3 . D. 7 .

Câu 48. Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $2 \cdot 4^{2x^2} + \ln\left(\frac{4x^2+1}{2xy}\right) = 4^{xy}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x(y-2x) - \sqrt{2}(x+y)$ bằng

- A. $1-2\sqrt{3}$. B. $1-\sqrt{3}$. C. $1+\sqrt{3}$. D. $1+2\sqrt{3}$.

Câu 49. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $4 + 9 \cdot 3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+18}{x}$ bằng

- A. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. B. $1+9\sqrt{2}$. C. 9 . D. 17 .

Câu 50. Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in (0; +\infty)$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y = \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$.

Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^y + \cos y - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 \in (0; 1)$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 \in [1; 2)$. D. $x_0 = 2$.

Câu 51. Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in [-1; 1]$ và

$$\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}.$$

Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 \in (-1; 0)$. C. $x_0 \in [0; 1)$. D. $x_0 = 1$.

Câu 52. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x-y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tổng $a+2b$ bằng

- A. 25 . B. 32 . C. 34 . D. 41 .

Câu 53. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ bằng

- A. $-3 - \log_5 3$. B. $-2 - \log_3 5$. C. $-2 - \sqrt{3}$. D. -4 .

Câu 54. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa $5^x + 25^y + 125^z = 2018$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$ bằng

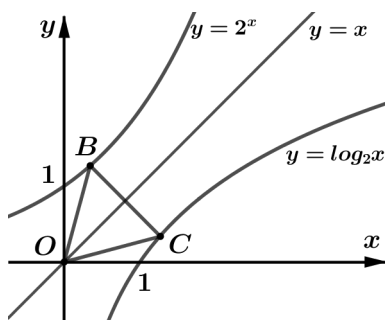
- A. $\frac{1}{3}\log_5 2018$. B. $\frac{1}{6}\log_5 2016$. C. $\log_5 2016$. D. $\frac{1}{2}\log_5 2017$.

Câu 55. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $64^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{y}} + 4^{\frac{1}{z}} = 3.4^{2018}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x+4y+3z} + \frac{1}{2x+2y+3z} + \frac{1}{x+2y+6z} + \frac{3029}{2}$ bằng

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

120 câu – Vận dụng cao



Phần 1. Tính chất và các phép toán.....	2
Phần 2. Đồ thị	11
Phần 3. Dãy logarit	16
Phần 4. Cực trị nghiệm	20
Phần 5. Bài toán tìm GTLN – GTNN	23

Phần 1. Tính chất và các phép toán

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $a \in (0; 2)$. B. $a \in (0; 2) \setminus \{1\}$. C. $a \in \mathbb{R} \setminus [0; 2]$. D. $a \in \mathbb{R} \setminus (0; 2)$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < a^2 - 2a + 1 \neq 1 \end{cases}$.

Theo tính chất của hàm số logarit, ta có hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ đồng biến khi và chỉ khi $a^2 - 2a + 1 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = -\log_{2018} \left(-\frac{1}{x} \right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
B. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
D. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x < 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2018} < 0, \forall x \in (-\infty; 0)$. Lại có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập BBT và kết luận được hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. **Chọn C.**

Câu 3. Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x^2 + mx + 1 > 0$. Ta có $y' = \frac{2x+m}{x^2+mx+1}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{2x+m}{x^2+mx+1} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+m \geq 0 \\ x^2+mx+1 > 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2x \\ m > -x - \frac{1}{x} \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0 \xrightarrow[m < 10]{m \in \mathbb{Z}} \text{có 10 giá trị. Chọn C.}$

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \ln(x^3 + mx + 2)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x^3 + mx + 2 > 0$. Ta có $y' = \frac{3x^2+m}{x^3+mx+2}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2} \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + m \geq 0 \\ x^3 + mx + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 \\ m > -x^2 - \frac{2}{x} \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} \text{có 2 giá trị. Chọn B.}$$

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$.

Giá trị của biểu thức $T = a^{\log_3 7} + b^{\log_7 11} + c^{\log_{11} 25}$ bằng

- A. $76 + \sqrt{11}$. B. 469. C. 2017. D. 31141.

Lời giải. Có $T = (a^{\log_3 7})^{\log_3 7} + (b^{\log_7 11})^{\log_7 11} + (c^{\log_{11} 25})^{\log_{11} 25} = (27)^{\log_3 7} + (49)^{\log_7 11} + (\sqrt{11})^{\log_{11} 25}$.

$$\text{Áp dụng } a^{\log_a b} = b, \text{ ta được } \begin{cases} (27)^{\log_3 7} = (3^3)^{\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^3 = 7^3 = 343 \\ (49)^{\log_7 11} = (7^2)^{\log_7 11} = (7^{\log_7 11})^2 = 11^2 = 121 \\ (\sqrt{11})^{\log_{11} 25} = \left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 25} = (11^{\log_{11} 25})^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}.$$

Vậy $T = 343 + 121 + 5 = 469$. **Chọn B.**

Câu 6. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

- A. $T = \frac{1}{10}$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = 2$. D. $T = \sqrt{10}$.

Lời giải. Giả sử $4^a = 25^b = 10^c = t \longrightarrow \begin{cases} a = \log_4 t \\ b = \log_{25} t \\ c = \log_{10} t \end{cases}$.

$$\text{Ta có } T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{\log_{10} t}{\log_4 t} + \frac{\log_{10} t}{\log_{25} t} = \frac{\log_t 4}{\log_t 10} + \frac{\log_t 25}{\log_t 10} = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$$

$$= \log_{10} (4 \cdot 25) = \log_{10} 100 = 2. \text{ Chọn C.}$$

Câu 7. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$ và

$$\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tổng } a + b \text{ bằng}$$

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 11.

Lời giải. Ta có $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t} \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6. \text{ Chọn B.}$$

Câu 8. Cho các số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a \neq 1$ thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị biểu thức $P = \frac{3x}{y} + \frac{7y}{z} + \frac{2020z}{x}$ bằng

A. $\frac{2030}{3}$.

B. 1015.

C. 2030.

D. 4038.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} xz = y^2 \\ \log_a x + \log_{\sqrt{a}} z = 2 \log_{\sqrt{a}} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ \log_a (x \cdot z^3) = \log_a y^4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ xz^3 = y^4 \end{cases} \Rightarrow x = y = z > 0$. Khi đó $P = 3 + 7 + 2020 = 2030$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z+1$. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{31}{2}$.

B. $-\frac{25}{2}$.

C. $\frac{29}{2}$.

D. $\frac{31}{2}$.

Lời giải. Đặt $t = 10^z$. Khi đó $x^3 + y^3 = at^3 + bt^2$.

Từ giả thiết $\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z = t \\ x^2 + y^2 = 10 \cdot 10^z = 10t \end{cases} \longrightarrow xy = \frac{t^2 - 10t}{2}$.

Khi đó $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = t^3 - \frac{3t(t^2 - 10t)}{2} = -\frac{1}{2}t^3 + 15t^2 \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases}$.

Vậy $a+b = \frac{29}{2}$. **Chọn C.**

Câu 10. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y}-x}$. Gọi $S = xy + yz + zx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S \in (1; 2016)$.

B. $S \in (0; 2017)$.

C. $S \in (0; 2018)$.

D. $S \in (2016; 2017)$.

Lời giải. Đặt $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y}-x} = t$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} x = \log_3 t \\ y = \log_5 t \\ \frac{2017}{x+y} - z = \log_{15} t \end{cases}$.

Suy ra $\frac{2017}{x+y} - z = \log_{15} t = \frac{1}{\log_t 15} = \frac{1}{\log_t 3 + \log_t 5} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y}$.

Suy ra $\frac{2017}{x+y} = \frac{xy + (x+y)z}{x+y} \Leftrightarrow 2017 = xy + yz + zx$. **Chọn C.**

Câu 11. Tìm bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \dots + \log(1+3+\dots+19) - 2 \log 5040 = a + b \log 2 + c \log 3.$$

A. (1;3;2).**B. (2;4;3).****C. (2;4;4).****D. (2;6;4).****Lời giải.** Ta có công thức quy nạp: $1+3+5+\dots+2n-1=n^2$.Khi đó vế trái của giả thiết bằng: $\log 2^2 + \log 3^2 + \dots + \log 10^2 - 2 \log 5040$

$$= 2 \log 10! - 2 \log 5040 = 2 \log \frac{10!}{5040} = 2 \log 720 = 2 + 6 \log 2 + 4 \log 3. \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 12. Cho $f(1)=1$ và $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị biểuthức $T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right]$ bằng**A. 3.****B. 4.****C. 6.****D. 9.****Lời giải.** Theo giả thiết, ta có

$$f(2) = f(1) + f(1) + 1.1$$

$$f(3) = f(2) + f(1) + 2.1$$

$$f(4) = f(3) + f(1) + 3.1$$

.....

$$f(n+1) = f(n) + f(1) + n.1$$

$$\text{Suy ra } f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n+1) = [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)] + n.f(1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) = (n+1)f(1) + \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \begin{cases} f(96) = 4656 \\ f(69) = 2415 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = \log \left[\frac{f(96) - f(69) - 241}{2} \right] = \log \frac{4656 - 2415 - 241}{2} = 3. \quad \text{Chọn A.}$$

Câu 13. Cho a, b, c là ba số thực dương không cùng bằng nhau, đồng thời khác 1 và thỏa mãn $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b+c$ bằng**A. $2\sqrt{2}$.****B. $2\sqrt{3}$.****C. $3\sqrt{2}$.****D. $3\sqrt{3}$.**

$$\text{Lời giải. Giả thiết } \Leftrightarrow \frac{\ln a \cdot \ln c}{\ln b} = \frac{\ln b \cdot \ln a}{\ln c} = \frac{\ln c \cdot \ln b}{\ln a} \Leftrightarrow \ln^2 a = \ln^2 b = \ln^2 c. \quad (1)$$

$$\text{Vì } a, b, c \text{ không cùng bằng nhau, nên } (1) \longrightarrow \begin{cases} \ln a = \ln b = -\ln c \\ \ln a = -\ln b = -\ln c \\ \ln a = \ln c = -\ln b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{c} \\ b = c = \frac{1}{a} \\ a = c = \frac{1}{b} \end{cases}$$

Với $a = b = \frac{1}{c}$, khi đó $a+b+c = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + c = \frac{2}{c} + c \geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉkhi $(a; b; c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} \right)$. Tương tự cho các trường hợp còn lại. **Chọn A.****Câu 14.** Cho $a > 0$ và $b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a+5b+1) = 2$.Giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{27}{4}$.

C. 6.

D. 9.

Lời giải. Ta có $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$

$$\geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)$$

$$\geq 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}(8ab + 1) \cdot \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1)} = 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 = b^2 \\ \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{27}{4}$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho $a > 1$ và $b > 1$ thỏa $\log_b(a^3 + a^2 - 4b + 4) + \log_a(b^2 + \sqrt[3]{b} - 16b + 64) = 2$.

Giá trị của biểu thức $P = \frac{a + 2b + 1}{a + b}$ bằng

A. $\frac{15}{10}$.

B. $\frac{17}{10}$.

C. $\frac{19}{10}$.

D. $\frac{21}{10}$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} \log_b(a^3 + a^2 - 4a + 4) = \log_b[a^3 + (a - 2)^2] \geq 3\log_b a \\ \log_a(b^2 + \sqrt[3]{b} - 16b + 64) = \log_a[\sqrt[3]{b} + (b - 8)^2] \geq \frac{1}{3}\log_a b \end{cases}$$

Suy ra $\log_b(a^3 + a^2 - 4b + 4) + \log_a(b^2 + \sqrt[3]{b} - 16b + 64)$

$$\geq 3\log_b a + \frac{1}{3}\log_a b \geq 2\sqrt{3\log_b a \cdot \frac{1}{3}\log_a b} = 2. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 16. Cho $x > 0$ và số thực y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2[14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}]$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Theo BĐT Côsi: $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. Suy ra $2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4$.

Ta có $14 - (y - 2)\sqrt{y + 1} = 14 - (y + 1)\sqrt{y + 1} + 3\sqrt{y + 1} \xrightarrow{t = \sqrt{y + 1} \geq 0} -t^3 + 3t + 14$.

Xét hàm $f(t) = -t^3 + 3t + 14$ trên $[0; +\infty)$ có kết quả $\max_{[0; +\infty)} f(t) = f(1) = 16$.

Suy ra $14 - (y - 2)\sqrt{y + 1} \leq 16$. Do đó $\log_2[14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}] \leq 4$.

Vậy $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2[14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 2$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho $x > 0$ và $y > 0$ thỏa mãn $2^{-x^3+x^2+x-2} = \log_2\left(y + \frac{1}{2y}\right)$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải. Với $x > 0$, ta có $2^{-x^3+x^2+x-2} \leq 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Với $y > 0$, ta có $\log_2 \left(y + \frac{1}{2y} \right) \geq \log_2 \left(2\sqrt{y \cdot \frac{1}{2y}} \right) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } 2^{-x^3+x^2+x-2} = \log_2 \left(y + \frac{1}{2y} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+x^2+x-2=-1 \\ y=\frac{1}{2y} \\ x, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow P=\frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tổng $S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$ bằng

- A. 1007. B. 1008. C. 2016. D. 2017.

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được "Nếu $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=1$ ".

$$\text{Do đó } S = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \right] \\ = 1 + 1 + \dots + 1 = 1008. \text{ Chọn B.}$$

Bài toán tổng quát: Nếu $f(x) = \frac{M^x}{M^x + \sqrt{M}}$ ($M > 0$) thì ta có kết quả

- a) $f(x) + f(1-x) = 1$.
b) $f(\sin^2 \alpha) + f(\cos^2 \alpha) = 1$.
c) $f(a) + f(b-2) = 1$ với $a+b=3$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tổng $P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$ bằng

- A. 1009. B. $\frac{4035}{4}$. C. $\frac{4039}{12}$. D. $\frac{12103}{12}$.

Lời giải. Ta tính được $f(x) + f(1-x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x} - 2}{9^{1-x} + 3} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó } P = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \right] + f\left(\frac{2017}{2017}\right) \\ = 1008 \cdot \frac{3}{4} + f(1) = 336 + \frac{7}{12} = \frac{4039}{12}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 20. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Xét hàm $g(t) = e^t - et, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $g'(t) = e^t - e; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Ta có $g(x+y) = e^{x+y} - e(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+y} \geq e(x+y)$.

Kết hợp với giả thiết $e^{x+y} \leq e(x+y)$, suy ra $e^{x+y} = e(x+y) \Leftrightarrow x+y=1$.

$$\text{Khi đó } f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^y}{9^y + m^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 9^{x+y} + m^2 \cdot (9^x + 9^y) = 9^{x+y} + m^2 \cdot (9^x + 9^y) + m^4 \Leftrightarrow m^4 = 9^{x+y} = 9 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 21. Xét hàm số $f(t) = \frac{4^t}{4^t + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot (x+y) + \frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải. Từ điều kiện bài toán ta có: $x + y = 1$ (đưa về hằng đẳng thức).

Như các bài trên ta dễ dàng suy ra $\begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } f(t) = \frac{1}{1 + \frac{4^t}{4^t}} \geq \min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 22. Cho a là số thực dương. Xét hàm số $f(x) = \frac{a^x}{a^x + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết $f(x) + f(y) = 1$ với mọi $x + y = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m = \sqrt[4]{a}$.

B. $m = \sqrt{a}$.

C. $m = a$.

D. $m = a^2$.

$$\text{Lời giải. Ta có } f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^x + m} + \frac{a^y}{a^y + m} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot a^{x+y} + m \cdot (a^x + a^y) = a^{x+y} + m \cdot (a^x + a^y) + m^2 \Leftrightarrow m^2 = a^{x+y} = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m = a^{\frac{1}{4}}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 23. Xét hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tích các phần tử của S bằng

A. -3 .

B. -9 .

C. -81 .

D. 81 .

Lời giải. Theo giả thiết ta có: $e^{a+b-2} \leq a+b-1 \Leftrightarrow e^{a+b-2} \leq 1 + (a+b-2)$.

Tương tự như Câu 20, ta có $e^{a+b-2} \geq 1 + (a+b-2)$. Do đó dấu bằng phải xảy ra

$$\Leftrightarrow a+b-2=0 \Leftrightarrow a+b=2. \text{ Biến đổi như câu trên ta được } m^4 = 9^{a+b} = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-3 \end{cases}.$$

Vậy tích các phần tử của tập hợp S là $3 \cdot (-3) = -9$. **Chọn B.**

Câu 24. Xét hàm số $f(x) = \log_2 \sqrt{2+4^x}$ và a, b là hai số thực dương thỏa mãn $f'(a) + f'(b) = 1$. Đặt $T = \sqrt[27]{a^{12}} + \sqrt[2018]{b^{2017}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $0 < T < \frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2} < T \leq 1$. D. $T > 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Do đó $f'(a) + f'(b) = 1 \Leftrightarrow \frac{4^a}{4^a + 1} + \frac{4^b}{4^b + 1} = 1$

$$\Leftrightarrow 4^{a+b} = 4 \longrightarrow a+b=1 \longrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}.$$

Khi đó ta có $T = \sqrt[27]{a^{12}} + \sqrt[2018]{b^{2017}} = a^{\frac{4}{9}} + b^{\frac{2017}{2018}} > a+b=1$ với mọi $a, b \in (0;1)$. **Chọn D.**

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

A. $S = 1008$. B. $S = 2016$. C. $S = 2017$. D. $S = 4032$.

Lời giải. Xét $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2(1-x)}{1-(1-x)} \right)$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2(1-x)}{x} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{2(1-x)}{x} \right] = \frac{1}{2} \log_2 4 = 1.$$

Áp dụng tính chất trên, ta được

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \right]$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 = 1008. \text{ Chọn A.}$$

Câu 26. Xét hàm số $f(x) = 2018 \ln \left(e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e} \right)$. Tính $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017)$.

A. $T = 1008$. B. $T = 1009$. C. $T = \frac{2017}{2}$. D. $T = \frac{2019}{2}$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2018}}}{e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e}}$ và $f'(2018-x) = \frac{e^{1-\frac{x}{2018}}}{e^{1-\frac{x}{2018}} + \sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e}}$.

Suy ra $f'(x) + f'(2018-x) = 1$. Lại có $f'(1009) = \frac{1}{2}$.

Vậy $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017) = 1008 + \frac{1}{2} = \frac{2017}{2}$. **Chọn C.**

Câu 27. Xét hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tích các phần tử của S bằng

A. -27 . B. $-3\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. 27 .

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} \frac{x}{1-x} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. Như Câu 20 ta được $a+b=1$.

Ta có $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x} = \log_3 m^2 + \log_3 x - \log_3 (1-x)$.

Suy ra $f(a) + f(b) = 3 \Leftrightarrow f(a) + f(1-a) = 3$

$$\Leftrightarrow (\log_3 m^2 + \log_3 a - \log_3 (1-a)) + (\log_3 m^2 + \log_3 (1-a) - \log_3 a) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 m^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m^2 - \sqrt{27} = 0 \longrightarrow m = \pm \sqrt{\sqrt{27}}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \log^{2019}(\sqrt{x^2+1}+x) + b \sin x \cdot \cos(2018x) + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(2018^{\ln 2019}) = 10$. Giá trị của biểu thức $f(-2019^{\ln 2018})$ bằng

A. -10. B. 2. C. 8. D. 10.

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - 6 = a \cdot \log^{2019}(\sqrt{x^2+1}+x) + b \sin x \cdot \cos(2018x)$.

Dễ dàng chứng minh $g(x)$ là hàm lẻ nên $g(-2019^{\ln 2018}) = g(-2018^{\ln 2019}) = -g(2018^{\ln 2019})$ hay $f(-2019^{\ln 2018}) - 6 = -[f(2018^{\ln 2019}) - 6]$.

Mà $f(2018^{\ln 2019}) = 10$ nên suy ra $f(-2019^{\ln 2018}) = 2$. **Chọn B.**

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \log(2x + \sqrt{4x^2+1}) + b \cdot \sin \pi x + c \cdot e^x$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 2$. Khi đó hằng số c thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. B. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $\left[1; \frac{3}{2}\right]$. D. $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - c \cdot e^x$. Dễ dàng chứng minh $g(x)$ là hàm lẻ nên

$$g(\ln 2) + g\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ suy ra } f(\ln 2) - c \cdot e^{\ln 2} + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) - c \cdot e^{\ln \frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) \right] - \left[c \cdot e^{\ln 2} + c \cdot e^{\ln \frac{1}{2}} \right] = 0 \Leftrightarrow 2 - \left(2c + \frac{1}{2}c \right) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{4}{5}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \ln^3(x + \sqrt{x^2+1}) + bx \cdot \cos(5x) + 1$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e)) \cdot f(\log(\ln 10)) = m$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m thỏa mãn $f^2(\log(\log e)) + f^2(\log(\ln 10)) = -m^2 + m + 8$. Số phần tử của tập S bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Chứng minh $g(x) = f(x) - 1$ là hàm lẻ nên $g(\log(\log e)) + g(\log(\ln 10)) = 0$

(do $\log(\log e) = \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right) = -\log(\ln 10)$). Suy ra $f(\log(\log e)) + f(\log(\ln 10)) = 2$. Bình phương hai vế ta được $f^2(\log(\log e)) + f^2(\log(\ln 10)) + 2(\log(\log e)) \cdot f(\log(\ln 10)) = 4$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m + 8 + 2m = 4 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4(\text{loại}) \end{cases} \text{ Chọn B.}$$

Phần 2. Đồ thị và các vấn đề liên quan

Câu 1. Cho bốn hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ (1), $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2),

$y = 4^x$ (3), $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là bốn đường cong

như hình bên. Tương ứng hàm số - đồ thị đúng là

A. (3) - (C₄), (2) - (C₁), (1) - (C₃), (4) - (C₂).

B. (1) - (C₄), (3) - (C₁), (2) - (C₃), (4) - (C₂).

C. (1) - (C₄), (2) - (C₁), (3) - (C₃), (4) - (C₂). D. (2) - (C₄), (1) - (C₁), (3) - (C₃), (4) - (C₂).

Lời giải. Kẻ đường $x=1$ để so sánh cơ số. Ta thấy cơ số của (C₂) nhỏ nhất nên (4) - (C₂), tiếp theo là (C₁) nên (2) - (C₁) và cơ số lớn nhất là của (C₃). **Chọn C.**

Câu 2. Cho các hàm số $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$ và $h(x) = \log_b(x+c)$ (trong đó a, b lớn hơn 0 và khác 1; $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < c < b$.

B. $a < b < c$.

C. $a < 1 < b, c > 0$.

D. $c < a < b$.

Lời giải. Dễ dàng nhận thấy $0 < a < 1$ và $b > 1$.

Đồ thị hàm số $h(x) = \log_b(x+c)$ được suy từ đồ thị của hàm $g(x) = \log_b x$ qua phép tịnh tiến sang phải c đơn vị nên $c < 0$. Vậy $c < a < b$. **Chọn D.**

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = c^x$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > b > a$.

B. $c < a < b$.

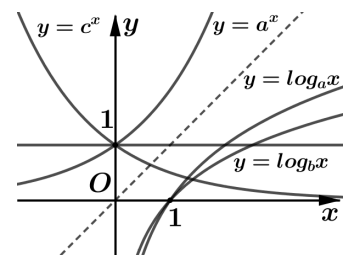
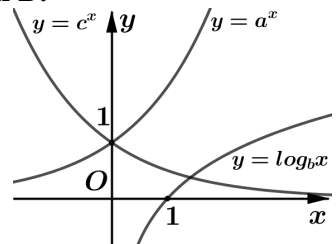
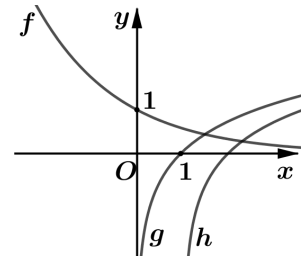
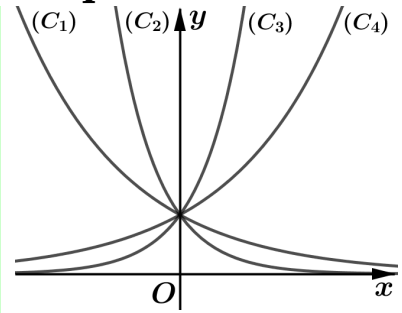
C. $c < b < a$.

D. $b > c > a$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy: Hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ là các hàm đồng biến nên $a > 1, b > 1$. Hàm số $y = c^x$ là hàm nghịch biến nên $0 < c < 1$.

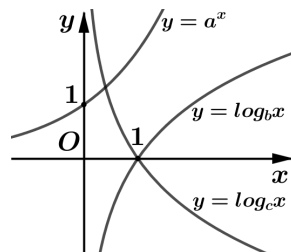
Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_a x$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = a^x$ qua đường thẳng $y = x$ (như hình vẽ). Đến đây ta kẻ đường thẳng $y = 1$ để dàng so sánh được $a < b$.

Vậy $c < a < b$. **Chọn B.**



Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

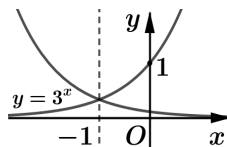
- A. $b < c < a$. B. $a < c < b$.
C. $c < b < a$. D. $c < a < b$.



Lời giải. Tương tự như câu trên. **Chọn D.**

Câu 5. Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = 3^x$ qua đường thẳng $x = -1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $f(x) = \frac{1}{3.3^x}$. B. $f(x) = \frac{1}{9.3^x}$. C. $f(x) = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{2}$. D. $f(x) = -2 + \frac{1}{3^x}$.



Lời giải. Gọi $M(x; y)$ và $M'(x'; y')$ là hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $x = -1$ nên $\begin{cases} x + x' = -2 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - x' \\ y = y' \end{cases}$. Khi đó $y = 3^x \Leftrightarrow y' = 3^{-2-x'} = \frac{1}{9.3^{x'}}$. **Chọn B.**

Trắc nghiệm: Chọn $A(0; 1) \in y = 3^x \xrightarrow{\text{đối xứng qua } x=-1} A'(-2; 1)$ chỉ có đáp án B thỏa.

Câu 6. Biết hàm số $y = g(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua điểm $I(1; 1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

- A. -2020. B. -2016. C. 2016. D. 2020.

Lời giải. Gọi $M(x; y)$ và $M'(x'; y')$ là hai điểm đối xứng nhau qua điểm $I(1; 1)$ nên ta có $\begin{cases} x + x' = 2 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$. Khi đó $y = a^x \Leftrightarrow 2 - y' = a^{2-x'} \Leftrightarrow y' = 2 - a^{2-x'}$.

Suy ra $y = g(x) = 2 - a^{2-x} \longrightarrow g\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = 2 - a^{2 - \left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)} = -2016$. **Chọn B.**

Câu 7. Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_{2018} \left(\frac{1}{x}\right)$ qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $f(-2018)$.

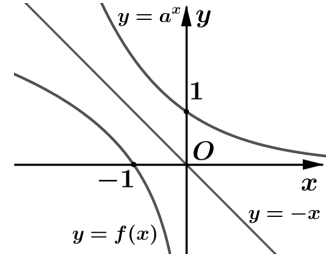
- A. -1. B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

Lời giải. Gọi $M(x; y)$ và $M'(x'; y')$ là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ nên ta có $\begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$. Khi đó $y = \log_{2018} \left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow -y' = \log_{2018} \left(-\frac{1}{x'}\right)$.

Suy ra $y = f(x) = -\log_{2018} \left(-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow f(-2018) = 1$. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hai hàm số $y = a^x$ và $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường $d: y = -x$. Giá trị của $f(-a^3)$ bằng

- A. $-\frac{1}{a^{3a}}$. B. $-\frac{1}{3}$.
C. -3 . D. $-a^{3a}$.



Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} y = a^x \xrightarrow{\text{đối xứng qua } Oy} y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \\ y = f(x) \xrightarrow{\text{đối xứng qua } Oy} y = f(-x) \end{cases}$$

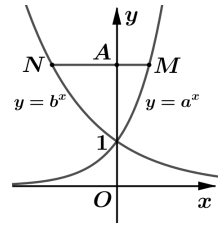
Theo giả thiết, ta có đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = f(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$ nên suy ra đồ thị của hai hàm số $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ và $y = f(-x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. (1)

Mà $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(-x) = \log_{\frac{1}{a}} x \xrightarrow{x=a^3} f(-a^3) = \log_{\frac{1}{a}} a^3 = -3$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho a, b là các số thực dương khác 1. Các hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng bất kỳ song song với trục hoành và cắt đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, trục tung lần lượt tại M, N, A đều thỏa mãn $AN = 2AM$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b = 2a$. B. $a^2 = b$. C. $ab = \frac{1}{2}$. D. $ab^2 = 1$.

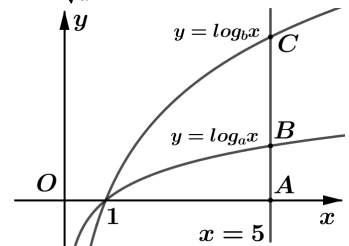


Lời giải. Gọi $A(0; t)$ với $t > 0$. Suy ra $\begin{cases} M(\log_a t; t) \\ N(\log_b t; t) \end{cases}$. Theo giả thiết $AN = 2AM$ nên

suy ra $|\log_b t| = 2|\log_a t| \xrightarrow{M, N \text{ khác phía với } Oy} \log_b t = -2\log_a t \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{a}}$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

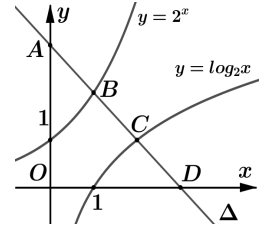
- A. $a = b^2$. B. $a^3 = b$.
C. $a = b^3$. D. $a = 5b$.



Lời giải. Theo giả thiết, ta có $A(5; 0)$, $B(5; \log_a 5)$, $C(5; \log_b 5)$.

Do $CB = 2AB \longrightarrow \overline{CB} = 2\overline{BA} \Leftrightarrow \log_a 5 - \log_b 5 = 2 \cdot (-\log_a 5) \longrightarrow a = b^3$. **Chọn C.**

Câu 11. Cho hai hàm số $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng Δ cắt trục tung, đồ thị hàm số $y = 2^x$, đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ và trục hoành lần lượt tại A, B, C, D thỏa mãn $AB = BC = CD$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng Δ như thế?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải. Gọi $\begin{cases} B(b; 2^b) \in y = 2^x \\ C(c; \log_2 c) \in y = \log_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2b - c; 2^{b+1} - \log_2 c) \text{ (do B là trung điểm AC)} \\ D(2c - b; 2 \log_2 c - 2^b) \text{ (do C là trung điểm DB)} \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} A \in Oy \\ D \in Ox \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - c = 0 \\ 2 \log_2 c - 2^b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ \log_2 c = 2^{b-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ c = 2^{2^{b-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, c = 2 \\ b = 2, c = 4 \end{cases}$. Vậy có hai bộ điểm A, B, C, D thỏa yêu cầu bài toán. Hay có hai đường thẳng Δ như thế. **Chọn B.**

Câu 12. Gọi B và C lần lượt là các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ sao cho tam giác OBC đều. Giả sử điểm B có hoành độ là a khi đó tỉ số $\frac{2^x}{a}$ bằng

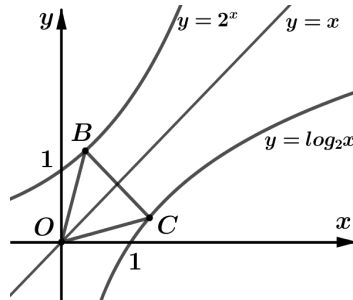
A. $2 - \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. $2 + \sqrt{2}$.

Lời giải.



Đồ thị hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$ và theo yêu cầu bài toán là tam giác OBC đều nên suy ra $B(a; 2^a)$, $C(2^a; a)$ (theo đề điểm B có hoành độ là a).

Tam giác OBC đều $\longrightarrow OB = BC \Leftrightarrow OB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2^{2a} - 4a \cdot 2^a + a^2 = 0$. Đây là phương trình bậc hai và tìm được $\frac{2^x}{a} = 2 \pm \sqrt{3}$. Vì B là điểm nằm trên đồ thị hàm số $y = 2^x$

suy ra $2^a > a$ nên $\frac{2^x}{a} = 2 + \sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 13. Gọi A, B là các điểm lần lượt thuộc đồ thị các hàm số $y = e^x$ và $y = e^{-x}$ sao cho tam giác OAB nhận điểm $M(1;1)$ làm trọng tâm. Khi đó tổng các giá trị của hoành độ và tung độ điểm A gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 3.

B. 3,5.

C. 4.

D. 4,5.

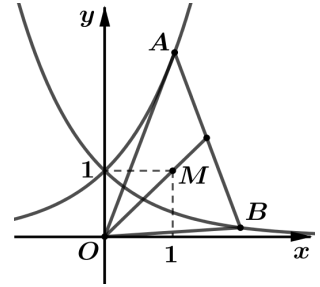
Lời giải. Gọi $A(a; e^a)$, $B(b; e^{-b})$. Vì tam giác OAB nhận

điểm $M(1;1)$ làm trọng tâm nên $\begin{cases} a+b=3 \\ e^a+e^{-b}=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow e^a + e^{a-3} = 3 \Leftrightarrow e^a = \frac{3e^3}{1+e^3} \Leftrightarrow a = \ln \frac{3e^3}{1+e^3}.$$

Khi đó tổng hoành độ và tung độ điểm A là

$$\ln \frac{3e^3}{1+e^3} + \frac{3e^3}{1+e^3} \approx 4. \text{ Chọn C.}$$



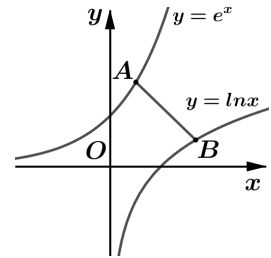
Câu 14. Gọi A và B lần lượt là hai điểm di động trên hai đồ thị hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ như hình vẽ. Khoảng cách giữa hai điểm A, B nhỏ nhất gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. 1,2.

B. 1,3.

C. 1,4.

D. 1,5.



Lời giải. Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ nên AB đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, B$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$.

Gọi $A(a; e^a)$, khi đó

$$AB = 2d(A, d) = \sqrt{2}|a - e^a| = \sqrt{2}|f(a)| \geq \sqrt{2} \min_{\mathbb{R}} |f(x)| = \sqrt{2}|f(0)| = \sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

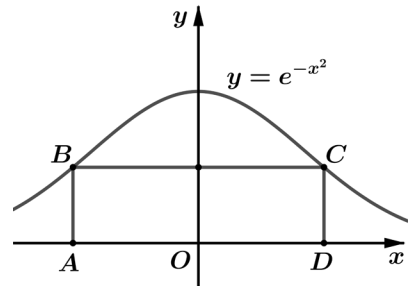
Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = e^{-x^2}$ như hình vẽ. $ABCD$ là một hình chữ nhật thay đổi sao cho B và C luôn thuộc đồ thị hàm số đã cho, A và D thuộc trục hoành. Giá trị lớn nhất của diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}.$

B. $\frac{2}{\sqrt{e}}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{e}.$

D. $\frac{2}{e}.$



Lời giải. Hàm số $y = e^{-x^2}$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục

đối xứng. Giả sử $C(x; e^{-x^2})$ với $x > 0$. Suy ra $\begin{cases} D(x; 0) \\ B(-x; e^{-x^2}) \end{cases}.$

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = CB \cdot CD = 2x \cdot e^{-x^2} = f(x) \leq \max_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}. \text{ Chọn A.}$$

Phần 3. Dãy loga

Câu 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_2^2 u_4 - 3\log_2 u_4 + 2 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 2018$ bằng

- A. 999. B. 1000. C. 1010. D. 1011.

Lời giải. Do $u_{n+1} = u_n + 2$ nên (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

$$\text{Ta có } \log_2^2 u_4 - 3\log_2 u_4 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_4 = 1 \\ \log_2 u_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 2 \\ u_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 2 \\ u_1 + 3d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ u_1 = -2 \end{cases}.$$

- Với $u_1 = -4 \xrightarrow{d=2} u_n = -4 + (n-1)2$. Khi đó $u_n < 2018 \Leftrightarrow -4 + (n-1)2 < 2018 \Leftrightarrow n < 1012$ nên giá trị lớn nhất của n là 1011.
- Với $u_1 = -2 \xrightarrow{d=2} u_n = -2 + (n-1)2$. Khi đó $u_n < 2018 \Leftrightarrow -2 + (n-1)2 < 2018 \Leftrightarrow n < 1011$ nên giá trị lớn nhất của n là 1010.

Vậy giá trị lớn nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 1011$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2\log u_8} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 10u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

- A. 10^{2000} . B. 10^{2008} . C. 10^{2017} . D. 10^{2018} .

Lời giải. Do $u_{n+1} = 10u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 10 \Rightarrow \begin{cases} u_8 = 10^7 u_1 \\ u_{10} = 10^9 u_1 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } \log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2\log u_8} = 2\log u_{10}$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2\log(10^7 u_1)} = 2\log(10^9 u_1).$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 + \sqrt{-2 + \log u_1 - 2(7 + \log u_1)} = 2(9 + \log u_1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\log u_1 - 16} = \log u_1 + 18 \Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \geq -18 \\ -\log u_1 - 16 = (\log u_1 + 18)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \geq -18 \\ \log^2 u_1 + 37\log u_1 + 340 = 0 \end{cases} \Rightarrow \log u_1 = -17 \Leftrightarrow u_1 = 10^{-17}.$$

Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = 10^{n-1} \cdot 10^{-17} = 10^{n-18}$. Do đó $u_{2018} = 10^{2000}$. **Chọn A.**

Câu 3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$. Biết số hạng đầu $u_1 \neq 1$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải. Do $u_{n+1} = 7u_n$ nên dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 7$.

$$\text{Ta có } \log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7.$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 5 + \log_2 u_1)^2 + (\log_2 7 + \log_2 u_1)^2 = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 u_1 + 2(\log_2 5 + \log_2 7)\log_2 u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ \log_2 u_1 = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \text{ (loại)} \\ u_1 = \frac{1}{35} \end{cases}.$$

Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1}$.

Ta có $u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} > 1111111 \Leftrightarrow n \geq 10$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của n là 10. **Chọn C.**

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 3$ là

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Lời giải. Do $u_{n+1} = u_n + 3$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3 \Rightarrow u_9 = u_1 + 24$.

Ta có $4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \Leftrightarrow (2e^{u_9} - e^{u_1})^2 + (2e^{u_9} - e^{u_1}) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{u_9} - e^{u_1} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ 2e^{u_9} - e^{u_1} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{u_1+24} - e^{u_1} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ 2e^{u_1+24} - e^{u_1} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{u_1}(2e^{24} - 1) = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ e^{u_1}(2e^{24} - 1) = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Suy ra $e^{u_1} = \frac{-1+\sqrt{13}}{4e^{24}-2} \longrightarrow u_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4e^{24}-2}\right)$.

Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4e^{24}-2}\right) + 3(n-1)$.

Ta có $u_n > 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4e^{24}-2}\right) + 3(n-1) > 3 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(6 - \ln\frac{\sqrt{13}-1}{4e^{24}-2}\right) \approx 10,142$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của n là 11. **Chọn C.**

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Vì (u_n) là cấp số cộng nên $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$

$$\Leftrightarrow \frac{2018(2u_1 + 2017d)}{2} = 4 \cdot \frac{1009(2u_1 + 1008d)}{2} \Leftrightarrow u_1 = \frac{d}{2}.$$

Do đó $u_2 = u_1 + d = \frac{3d}{2}$, $u_5 = u_1 + 4d = \frac{9d}{2}$, $u_{14} = u_1 + 13d = \frac{27d}{2}$.

Ta có $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} = \log_3^2\left(\frac{3d}{2}\right) + \log_3^2\left(\frac{9d}{2}\right) + \log_3^2\left(\frac{27d}{2}\right)$

$$= \left(1 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2 + \left(2 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2 + \left(3 + \log_3 \frac{d}{2}\right)^2 = 3\left(\log_3 \frac{d}{2} + 2\right)^2 + 2 \geq 2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^3 u_1 - 2\log^2 u_1 + \log u_1 - 2 = 0$ và $u_{n+1} = 2u_n + 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 10^{100} - 10$ là

- A. 225. B. 226. C. 326. D. 327.

Lời giải. Ta có $\log^3 u_1 - 2\log^2 u_1 + \log u_1 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\log u_1 - 2)(\log^2 u_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow \log u_1 = 2 \Leftrightarrow u_1 = 100.$$

Ta có $u_{n+1} = 2u_n + 10 \Leftrightarrow u_{n+1} + 10 = 2(u_n + 10)$.

Đặt $v_n = u_n + 10 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = u_1 + 10 = 110 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ là cấp số nhân với công bội $q = 2 \Rightarrow v_n = 110 \cdot 2^{n-1}$.

Mà $v_n = u_n + 10$ suy ra $u_n = 110 \cdot 2^{n-1} - 10$.

Ta có $u_n > 10^{100} - 10 \Leftrightarrow 110 \cdot 2^{n-1} - 10 > 10^{100} - 10 \Leftrightarrow 2^{n-1} > \frac{10^{100}}{110} \Leftrightarrow n > \log_2 \left(\frac{10^{100}}{110} \right) + 1$

Ta có $\log_2 \left(\frac{10^{100}}{110} \right) + 1 \approx \log_2 \left(\frac{10^{100}}{100} \right) + 1 = \log_2 (10^{98}) + 1 = 98 \log_2 10 + 1 = 326,54$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của n là 327. **Chọn D.**

Câu 7. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho $3^{u_n} < 5^{100}$.

A. $n = 71$.

B. $n = 72$.

C. $n = 73$.

D. $n = 74$.

Lời giải. ĐK $\begin{cases} u_1 > 0, u_{19} > 0 \\ \log u_{19} - \log u_1 + 3 \geq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} \\ b = \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^3 - b^2 = -3$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 3 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ (a-1)(a^2 + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Do $u_{n+1} = u_n + 2$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2 \Rightarrow u_{19} = u_1 + 18d = u_1 + 36$.

Với $a = 1$ suy ra $\log u_{19} - \log u_1 = 1 \Leftrightarrow \log \frac{u_{19}}{u_1} = 1 \Leftrightarrow u_{19} = 10u_1 \Leftrightarrow u_1 + 36 = 10u_1 \Leftrightarrow u_1 = 4$.

Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$.

Ta có $3^{u_n} < 5^{100} \Leftrightarrow 3^{2n+2} < 5^{100} \Leftrightarrow n < \frac{1}{2}(\log_3 5^{100} - 2) \approx 72,2$. Do đó giá trị lớn nhất của n

là $n = 72$. **Chọn B.**

Câu 8. Cho dãy số (u_n) thỏa $\sqrt{\ln^2 u_1 + \sqrt{\ln^2 u_2 + \dots + \sqrt{\ln^2 u_{n-1} + \sqrt{\ln^2 u_n + \ln u_{n+1} + 1}}} = 3$ và $u_{n+1} = u_n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2017^{2018}$.

A. 11.

B. 12.

C. 14.

D. 15.

Lời giải. Vì $u_{n+1} = u_n^2$ nên $\ln u_{n+1} = \ln u_n^2 = 2 \ln u_n$.

Khi đó $\sqrt{\ln^2 u_n + \ln u_{n+1} + 1} = \sqrt{\ln^2 u_n + 2 \ln u_n + 1} = |\ln u_n + 1|$.

• Nếu $u_1 < 1 \Rightarrow u_n < 1$ thì không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

• Nếu $u_1 > 1 \Rightarrow u_n > 1$ thì $|\ln u_n + 1| = \ln u_n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp tục quá trình như thế ta được

$$\sqrt{\ln^2 u_1 + \sqrt{\ln^2 u_2 + \dots + \sqrt{\ln^2 u_{n-1} + \sqrt{\ln^2 u_n + \ln u_{n+1} + 1}}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\ln^2 u_1 + \ln u_2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \ln u_1 + 1 = 3 \Leftrightarrow \ln u_1 = 2 \Leftrightarrow u_1 = e^2.$$

Ta có $u_n = u_{n-1}^2 = u_{n-2}^4 = u_{n-3}^8 = \dots = u_1^{2^{n-1}} = (e^2)^{2^{n-1}} = e^{2^n}$

Theo giả thiết $u_n > 2017^{2018} \Leftrightarrow e^{2^n} > 2017^{2018} \Leftrightarrow 2^n > \ln(2017^{2018}) \Leftrightarrow 2^n > 2018 \ln 2017$

$\Leftrightarrow n > 13,9$. Do đó giá trị nhỏ nhất của n là 14. **Chọn C.**

Câu 9. Cho dãy số (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa $u_{n+1} = \frac{u_n \cdot \log_2(n+1)}{10}$,

với mọi $n \geq 1$. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của u_n . Có bao nhiêu số tự nhiên n để $u_n = a$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Từ giả thiết có $u_n = \frac{u_{n-1} \cdot \log_2 n}{10}$. Do a là giá trị nhỏ nhất của u_n nên khi

$$u_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq u_{n+1} \\ u_n \leq u_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq \frac{u_n \cdot \log_2(n+1)}{10} \\ \frac{u_{n-1} \cdot \log_2 n}{10} \leq u_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(n+1) \geq 10 \\ \log_2 n \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{10} - 1 \leq n \leq 2^{10}.$$

Vậy có

hai số tự nhiên n là $2^{10} - 1$ và 2^{10} thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 10. Cho cấp số cộng (a_n) thỏa $a_2 > a_1 \geq 0$; cấp số nhân (b_n) thỏa $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$; $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018a_n$.

A. $n = 15$.

B. $n = 16$.

C. $n = 17$.

D. $n = 18$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f						

0 -2

• Ta có $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \\ f(a_1) - f(a_2) = 2 > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Kết hợp BTT}} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = n - 1$ (do (a_n) là cấp số cộng).

• Lại có $b_2 > b_1 \geq 1$ nên $\log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0$. Vì $\begin{cases} \log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0 \\ f(\log_2 b_1) - f(\log_2 b_2) = 2 > 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{Kết hợp BTT}} \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1 \\ \log_2 b_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}$ (do (b_n) là cấp số nhân).

Khi đó yêu cầu bài toán: $b_n > 2018a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2018(n-1)$. Thử cả bốn đáp án ta được $n = 16$ là giá trị nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn. **Chọn B.**

Phần 4. Cực trị nghiệm

Câu 1. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

A. 17.

B. 25.

C. 30.

D. 33.

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Để $\begin{cases} (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow b^2 > 20a \\ (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow b^2 > 20a \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 20a$.

Ta có $\begin{cases} \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{b}{a} \longrightarrow x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}} \\ \log(x_3 x_4) = \log x_3 + \log x_4 = -\frac{b}{5} \longrightarrow x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}$

Yêu cầu bài toán: $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}^+} a \geq 3$.

Suy ra $b^2 > 20a \geq 60 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}^+} b \geq 8$.

Khi đó $S = 2a + 3b \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 2. Với m, n là các số nguyên dương sao cho phương trình $\ln^2 x - (m+1) \ln x + n = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $\ln^2 x - (n+1) \ln x + m = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2m + 3n$ bằng

A. 46.

B. 48.

C. 51.

D. 53.

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Để $\begin{cases} (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4n > 0 \\ (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow (n+1)^2 - 4m > 0 \end{cases} (*)$

Ta có $x_1 x_2 = (x_3 x_4)^2 \Leftrightarrow \ln x_1 + \ln x_2 = 2(\ln x_3 + \ln x_4) \xrightarrow{\text{Vi-et}} m+1 = 2(n+1) \Leftrightarrow m = 2n+1$.

Thay $m = 2n+1$ vào (*) ta được $n > 3 + 2\sqrt{3} \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}^+} n \geq 7$.

Khi đó $P = 2m + 3n = 2(2n+1) + 3n = 7n + 2 \geq 51$. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hai phương trình

$$\ln^2 x - (m-1) \ln x + n = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad \ln^2 x - (n-1) \ln x + m = 0 \quad (2).$$

Biết phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là x_0, x_1 và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là x_0, x_2 (tức là x_0 là nghiệm chung của hai phương trình) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Điều kiện: $m \neq n$. Để hai phương trình đã cho mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} (m-1)^2 - 4n > 0 \\ (n-1)^2 - 4m > 0 \end{cases}$.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2). Khi đó

$$\begin{cases} \ln^2 x_0 - (m-1)\ln x_0 + n = 0 \\ \ln^2 x_0 - (n-1)\ln x_0 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow (m-n)\ln x_0 + m - n = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -1 \longrightarrow m + n = 0.$$

Theo Vi-et, ta có $\begin{cases} \ln x_0 + \ln x_1 = m-1 \\ \ln x_0 + \ln x_2 = n-1 \end{cases} \xrightarrow{\ln x_0 = -1} \begin{cases} \ln x_1 = m \\ \ln x_2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^m \\ x_2 = e^n \end{cases}$.

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = e^{2m} + e^{2n} \geq 2\sqrt{e^{2m+2n}} = 2$. **Chọn B.**

Câu 4. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a.4^x - b.2^x + 50 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b.3^x + 50a = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng

A. 49.

B. 51.

C. 59.

D. 81.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} (1) \xrightarrow{t=2^x} at^2 - bt + 50 = 0 & (1') \\ (2) \xrightarrow{\ell=3^x} \ell^2 - b\ell + 50a = 0 & (2') \end{cases}$.

Để $\begin{cases} (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow (1') \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow (2') \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt} \end{cases} \Leftrightarrow b^2 - 200a > 0.$

Ta có $\begin{cases} 2^{x_1+x_2} = 2^{x_1}.2^{x_2} = \frac{50}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \log_2 \frac{50}{a} \\ 3^{x_3+x_4} = 3^{x_3}.3^{x_4} = 50a \Leftrightarrow x_3 + x_4 = \log_3 (50a) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán: $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Rightarrow \log_3 (50a) > \log_2 \left(\frac{50}{a} \right) \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}^+} a \geq 3$.

Suy ra $b^2 > 200a \geq 600 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}^+} b \geq 25$. Khi đó $S = 3a + 2b \geq 3.3 + 2.25 = 59$. **Chọn C.**

Câu 5. Cho a, b là hai số thực dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$ bằng

A. $\sqrt[3]{4}$.

B. $3\sqrt[3]{4}$.

C. $3\sqrt[3]{2}$.

D. 4.

Lời giải. Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \xrightarrow{\text{lấy logarit cơ số } b \text{ hai vế}} x^2 + x \log_b a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$.

Khi đó $S = \frac{1}{(\log_b a)^2} + 2\log_b a + 2\log_b a \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(\log_b a)^2} \cdot 2\log_b a \cdot 2\log_b a} = 3\sqrt[3]{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{(\log_b a)^2} = 2 \log_b a \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$. **Chọn B.**

Câu 6. Cho a, b là hai số nguyên dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng

- A. 40. B. 41. C. 44. D. 46.

Lời giải. Ta có $a^{x^2+1} = b^x \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \log_a b \Leftrightarrow x^2 - x \log_a b + 1 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 2 \Leftrightarrow b > a^2$.

Tương tự từ phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ ta có $(\log_b (9a))^2 + 4 > 0$: luôn đúng.

Theo Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b (9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b (9a) < 3$

$$\Leftrightarrow \log_a (9a) < 3 \Leftrightarrow 9a < a^3 \Rightarrow a > 3 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}^+} a \geq 4.$$

Suy ra $b > a^2 \geq 16 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}^+} b \geq 17$. Khi đó $S = 3a + 2b \geq 3 \cdot 4 + 2 \cdot 17 = 46$. **Chọn D.**

Câu 7. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2} b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$ bằng

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 10.

Lời giải. Ta có $a^{x^2} b^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x+1) \log_a b = 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_a b + \log_a b = 0$.

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4 \log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b \leq 0 \\ \log_a b \geq 4 \end{cases} \quad (*)$

Vì $a > 1$ và $b > 1$ nên $\log_a b > 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow \log_a b \geq 4$.

Khi đó $P = 1 + \log_a b + \frac{4}{\log_a b} \stackrel{t = \log_a b}{=} 1 + t + \frac{4}{t} = \frac{t^2 + t + 4}{t} = f(t) \geq \min_{[4; +\infty)} f(t) = 6$. **Chọn C.**

Câu 8. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2 \log_a x - 3 \log_b x - 1 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = mn$ bằng

- A. $\frac{16875}{16}$. B. $\frac{4000}{27}$. C. 3456. D. 15625.

Lời giải. Phương trình tương đương với $\log_b a \cdot (\log_a x)^2 - (2 + 3 \log_b a) \cdot \log_a x - 1 = 0$.

Theo Vi-ét ta có $\log_a m + \log_a n = \frac{2 + 3 \log_b a}{\log_b a} = 2 \log_a b + 3 = \log_a (a^3 b^2) \Leftrightarrow mn = a^3 b^2$.

Khi đó $S = a^3 b^2 = a^3 (10 - a)^2 = f(a) \leq \max_{(1;9)} f(a) = f(6) = 3456$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho a, b là các số thực lớn hơn 1 và phương trình $\log_a(ax) \cdot \log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m, n . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4a^2 + 9b^2)(36m^2 n^2 + 1)$ bằng

A. 36.**B. 72.****C. 144.****D. 288.**

Lời giải. Ta có $\log_a(ax) \cdot \log_b(bx) = 2018 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018$

$$\Leftrightarrow \log_a x + \log_b x + \log_a x \cdot \log_b x = 2017$$

$$\Leftrightarrow \log_a b \cdot (\log_b x)^2 + (\log_a b + 1) \log_b x - 2017 = 0.$$

Theo Vi-et: $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n = -1 - \frac{1}{\log_a b} = \log_b \frac{1}{ab}$. Suy ra $mn = \frac{1}{ab}$.

$$\text{Khi đó } P = (4a^2 + 9b^2)(36m^2n^2 + 1) = (4a^2 + 9b^2) \left(\frac{36}{a^2b^2} + 1 \right) = \frac{144}{b^2} + 4a^2 + \frac{324}{a^2} + 9b^2$$

$$\geq 2\sqrt{4a^2 \cdot \frac{324}{a^2}} + 2\sqrt{\frac{144}{b^2} \cdot 9b^2} = 72 + 72 = 144. \text{ Chọn C.}$$

Câu 10. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a + 2b + 3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $S = 200$.**B. $S = \frac{500}{3}$.****C. $S = \frac{650}{3}$.****D. $S = \frac{700}{3}$.**

Lời giải. Theo Vi-et $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n = 1 + 2\log_a b + 3\log_a c = \log_a(ab^2c^3)$.

$$\text{Suy ra } mn = ab^2c^3 \xrightarrow{a+b+c=100} mn = ab^2(100-a-b)^3$$

$$= \frac{4}{27} \left[3a \cdot \frac{3b}{2} \cdot \frac{3b}{2} (100-a-b)(100-a-b)(100-a-b) \right]$$

$$\leq \frac{4}{27} \left[\frac{3a + 2\left(\frac{3b}{2}\right) + 3(100-a-b)}{6} \right]^6 = \frac{625 \cdot 10^8}{27}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 3a = \frac{3b}{2} = 100 - a - b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}, c = \frac{150}{3}. \text{ Khi đó } S = \frac{700}{3}. \text{ Chọn D.}$$

Phần 5. Bài toán tìm GTNN-GTLN

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y) + \log(x-3y) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - |y|$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.**B. 1.****C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.****D. $\sqrt{10}$.**

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+3y > 0 \\ x-3y > 0 \end{cases}$. (suy ra $x > 0$)

$$\text{Ta có } \log(x+3y) + \log(x-3y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 10.$$

$$\text{Ta từ } S = x - |y| \text{ suy ra } |y| = x - S.$$

$$\text{Thay vào trên ta được } x^2 - 9(x-S)^2 = 10 \Leftrightarrow 8x^2 + 18Sx + 9S^2 + 10 = 0.$$

Để phương trình có nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} (18S)^2 - 4.8.(9S^2 + 10) \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow S \geq \frac{4\sqrt{5}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{y}{x}$. Tổng $a+b$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{14}$. C. $\frac{11}{6}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải. Giả thiết tương đương với $2x^2 + xy + 3y^2 - 11x - 20y + 40 = 0$.

Từ $S = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Sx$. Thay vào trên ta được $2x^2 + S^2x^2 + 3S^2x^2 - 11x - 20Sx + 40 = 0$

$$\Leftrightarrow (4S^2 + 2)x^2 - (20S + 11)x + 40 = 0. \quad (*)$$

Nhận xét: Vì $x > 0, y > 0$ nên $S > 0$. Suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{20S + 11}{4S^2 + 2} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{40}{4S^2 + 2} > 0 \end{cases}$. Khi phương trình

(*) có nghiệm thì luôn có hai nghiệm dương.

Để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \leq 0$.

Suy ra $a+b = \frac{440}{240} = \frac{11}{6}$. **Chọn C.**

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a b - \log_b c$. Giá trị của biểu thức $S = 2m + 3M$ bằng

- A. $S = \frac{1}{3}$. B. $S = \frac{2}{3}$. C. $S = 2$. D. $S = 3$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = \log_a b \\ y = \log_b c \end{cases} \Rightarrow P = x - y$ và giả thiết trở thành $x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1$.

Suy ra $x^2 + (x - P)^2 = x(x - P) - x - 2(x - P) - 1 \Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + (P - 1)^2 = 0$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$. **Chọn D.**

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3\log_{ab} \sqrt[3]{c}}$ bằng

- A. 10. B. 12. C. 18. D. 20.

Lời giải. Ta có $P = \frac{4}{2\log_{bc} a} + \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{ac} b} + \frac{8}{\log_{ab} c} = 2\log_a bc + 2\log_b ac + 8\log_c ab$

$$\begin{aligned}
&= 2\log_a b + 2\log_a c + 2\log_b a + 2\log_b c + 8\log_c a + 8\log_c b \\
&= (2\log_a b + 2\log_b a) + (2\log_a c + 8\log_c a) + (2\log_b c + 8\log_c b).
\end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b$ đều là những số dương. Do đó áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \geq 2\sqrt{2\log_a b \cdot 2\log_b a} + 2\sqrt{2\log_a c \cdot 8\log_c a} + 2\sqrt{2\log_b c \cdot 8\log_c b} = 4 + 8 + 8 = 20.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4\log_c a \\ \log_b c = 4\log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1. \text{ Chọn D.}$

Câu 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt[3]{4}$. C. $4\sqrt[3]{2}$. D. 4.

Lời giải. Ta có $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x + y) \Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 \sqrt{x + y} \Leftrightarrow \sqrt{x + y} = xy$.

$$\text{Mà } \sqrt{x + y} = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x + y} \left[(\sqrt{x + y})^3 - 4 \right] \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x + y} \geq \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow x + y \geq \sqrt[3]{16}.$$

$$\text{Do đó } S = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{16^2} = 2\sqrt[3]{4}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 6. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_3 (1 + 2a) + \log_3 \left(1 + \frac{b}{2a} \right) + 2\log_3 \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right)$$

- A. 1. B. 4. C. 7. D. 9.

Lời giải. Ta có $P = \log_3 \left[(1 + 2a) \left(1 + \frac{b}{2a} \right) \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right)^2 \right]$.

- $(1 + 2a) \left(1 + \frac{b}{2a} \right) = 1 + \frac{b}{2a} + 2a + b \geq 1 + 2\sqrt{b} + b = (\sqrt{b} + 1)^2$.
- $\left(1 + \frac{b}{2a} \right) \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right)^2 \geq \left[(\sqrt{b} + 1) \left(1 + \frac{4}{\sqrt{b}} \right) \right]^2 = \left(1 + \sqrt{b} + \frac{4}{\sqrt{b}} + 4 \right)^2 \geq (1 + 2.2 + 4)^2 = 81$.

Suy ra $P \geq \log_3 81 = 4$. **Chọn B.**

Câu 7. Cho a, b là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng

- A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$. B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$.
C. $\frac{1}{2}(\log_3 2 + \log_2 3)$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Lời giải. Ta có $P^2 = \left(\sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} \right)^2 = \left(\sqrt{\log_3 2 \cdot \log_2 a} + \sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 b} \right)^2$
 $\leq (\log_3 2 + \log_2 3)(\log_2 a + \log_3 b) = \log_3 2 + \log_2 3$.

Suy ra $P \leq \sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$. **Chọn A.**

Câu 8. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$ bằng

- A. $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$. B. $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$. C. $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$. D. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Lời giải. Đặt $a = 2^x, b = 3^y, c = 4^z$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \end{cases} \left\{ \begin{aligned} &a, b, c > 0 \\ &\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned} \right. \quad (*)$$

Ta cần tìm GTNN của $P = 2a + 3b + 4c = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 3\left(b - \frac{1}{2}\right) + 4\left(c - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky, ta có

$$\left[2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 3\left(b - \frac{1}{2}\right) + 4\left(c - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq (2^2 + 3^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 29 \cdot \frac{3}{4}.$$

Suy ra $P \leq \frac{9+\sqrt{87}}{2}$. **Chọn D.**

Cách khác. Ta xem (*) là mặt cầu và $P = 2a + 3b + 4c \Leftrightarrow (\alpha): 2a + 3b + 4c - P = 0$ là mặt phẳng. Tìm điều kiện để mặt phẳng cắt mặt cầu.

Câu 9. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải. Ta có $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1 \xrightarrow{a^2+b^2 > 1} a+b \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Ta có $a + 2b = \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky, ta có

$$\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq (1^2 + 2^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right] \leq 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Do đó $\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{10}}{2} \longrightarrow a + 2b \leq \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{3}{2} \longrightarrow P = 2a + 4b - 3 \leq \sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{5+\sqrt{10}}{10}; b = \frac{5+2\sqrt{10}}{10}$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta thấy (1) là hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $P = 2a + 4b - 3 \Leftrightarrow \Delta: 2a + 4b - 3 - P = 0$. Xem đây là phương trình đường thẳng.

Để đường thẳng và hình tròn có điểm chung $\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left| 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 - P \right|}{\sqrt{4+16}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |P| \leq \sqrt{10} \longrightarrow P \leq \sqrt{10}.$$

Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$ (*). Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x + y$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $a + b$ bằng

A. 11.

B. 13.

C. 15.

D. 17.

Lời giải. Với $0 < x^2 + 2y^2 < 1$ thì (*) $\Leftrightarrow 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1$ hay $P < 1$.

Với $x^2 + 2y^2 > 1$ thì (*) $\Leftrightarrow 2x + y \geq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \leq \frac{9}{8}$.

Khi đó $P = 2x + y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{9}{4}$
 $\leq \sqrt{4 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Cách khác. Từ $2x + y \geq x^2 + 2y^2$ ta đặt $t = \sqrt{2}y$ thì trở thành phương trình hình tròn $x^2 + t^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}t \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \leq \frac{9}{8}$ (ta dùng phương pháp hình học).

Câu 11. Cho các số thực a, b, c thỏa $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$ bằng

A. $\frac{4+\sqrt{30}}{3}$.

B. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$.

C. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$.

D. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải. Ta có $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$

$\Leftrightarrow \log_2 (4a+4b+4c) + (4a+4b+4c) = \log_2 (a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2$.

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ ta đi đến kết quả $4a+4b+4c = a^2+b^2+c^2+2$

$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10$.

Ta lại có $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-1)a + (P-2)b + (P-3)c = 0$. Đến đây ta dùng điều kiện

để mặt phẳng và mặt cầu có điểm chung. **Chọn C.**

Câu 12. Cho các số thực x, y thỏa mãn $4^{x^2+4y^2} - 2^{x^2+4y^2+1} = 2^{3-x^2-4y^2} - 4^{2-x^2-4y^2}$. Gọi m ,

M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x-2y-1}{x+y+4}$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-\frac{36}{59}$.

B. $-\frac{18}{59}$.

D. $\frac{18}{59}$.

C. $\frac{36}{59}$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 4y^2$, ta được $4^t - 2 \cdot 2^t = \frac{8}{2^t} - \frac{16}{4^t} \Leftrightarrow (2^t - 2)(8^t - 8) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $x^2 + 4y^2 = 1 \xrightarrow{Y=2y} x^2 + Y^2 = 1. \quad (*)$

Từ $P = \frac{x-2y-1}{x+y+4}$ suy ra $(P-1)x + (P+2)y = -1-4P$
 $\Rightarrow 2(P-1)x + (P+2)Y = -2-8P. \quad (**)$

Sử dụng điều kiện có nghiệm (đường thẳng có điểm chung với đường tròn) ta thu được kết quả $\frac{|2+8P|}{\sqrt{4(P^2-2P+1)+(P^2+4P+4)}} \leq 1 \Leftrightarrow 59P^2 + 36P - 4 \leq 0. \text{ Chọn A.}$

Câu 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $5\log_2^2 a + 16\log_2^2 b + 27\log_2^2 c = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_2 a \log_2 b + \log_2 b \log_2 c + \log_2 c \log_2 a$ bằng

- A. $\frac{1}{16}.$ B. $\frac{1}{12}.$ C. $\frac{1}{9}.$ D. $\frac{1}{8}.$

Lời giải. Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c$. Giả thiết trở thành $5x^2 + 16y^2 + 27z^2 = 1$.

Ta đi tìm GTLN của $S = xy + yz + zx$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$11x^2 + 22y^2 + 33z^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{11}} + \frac{y^2}{\frac{1}{22}} + \frac{z^2}{\frac{1}{33}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33}} = 6(x+y+z)^2.$$

Suy ra $5x^2 + 16y^2 + 27z^2 \geq 12(xy + yz + zx)$. Do đó $S \leq \frac{1}{12}$. **Chọn B.**

Cách 2. Ghép cặp và dùng BĐT Cauchy. Cụ thể $\begin{cases} 3x^2 + 12y^2 \geq 12xy \\ 2x^2 + 18z^2 \geq 12xz \Rightarrow (\text{đpcm}). \\ 4y^2 + 9z^2 \geq 12yz \end{cases}$

Câu 14. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 10\log_2^2 a + 10\log_2^2 b + \log_2^2 c$ bằng

- A. $\frac{7}{2}.$ B. $\frac{9}{2}.$ C. 3. D. 4.

Lời giải. Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c$. Suy ra $x, y, z > 0$.

Khi đó ta có $x \geq \frac{1}{y+z}(1-yz) \Leftrightarrow xy + yz + xz \geq 1$ và $P = 10(x^2 + y^2) + z^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$12x^2 + 12y^2 + 3z^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = 2(x+y+z)^2.$$

Suy ra $10(x^2 + y^2) + z^2 \geq 4(xy + yz + xz) = 4$. **Chọn D.**

Câu 15. Cho a, b là hai số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_5 \sqrt{a^2 + b^2} + \log_5 \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4^2}{2a} + \frac{1}{b} \geq \frac{(4+1)^2}{2a+b} \Rightarrow \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{5^2}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} \\ (2a+b) \leq \sqrt{5(a^2+b^2)} \end{cases}$$

Do đó $P \geq \log_5 \sqrt{a^2+b^2} + \log_5 \frac{5^2}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \log_5 \frac{5^2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$. **Chọn C.**

Cách khác. $P = \log_5 \left[\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] = \log_5 \left(8\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} \right)$. Đặt $t = \frac{b^2}{a^2}$ và xét

hàm số $f(t) = 8\sqrt{1+t} + \sqrt{\frac{1}{t}+1}$ trên $(0; +\infty)$ và có $f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = 5\sqrt{5}$.

Câu 16. Cho $m = \log_x \sqrt{\frac{y}{x}}$ với $x > 1$, $0 < y < 1$. Giá trị của lớn nhất của biểu thức $T = \log_x y + \log_y x$ bằng

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải. Ta có $m = \log_x \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}(\log_x y - 1)$. Suy ra $\log_x y = 2m + 1$.

Vì $x > 1$, $0 < y < 1$ nên $\log_x y < 0 \Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Khi đó $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = (2m + 1) + \frac{1}{2m + 1} = f(m) \leq \max_{\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)} f(m) = f(-1) = -2$. **Chọn A.**

Câu 17. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{2^b}(2^{a+b}) = 2^a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{3b(1-2^a)}{a+1}$ bằng

A. $\sqrt{3} - 1$.

B. $1 - \sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3} - 2$.

D. $2\sqrt{3} - 4$.

Lời giải. Có $\log_{2^b}(2^{a+b}) = 2^a \Leftrightarrow 2^{b \cdot 2^a} = 2^{a+b} \Leftrightarrow a + b = b \cdot 2^a \Leftrightarrow a = b(2^a - 1) \Leftrightarrow 1 - 2^a = -\frac{a}{b}$.

Khi đó $S = a + \frac{3b(1-2^a)}{a+1} = a - \frac{3a}{a+1} = f(a) \geq \min_{(0; +\infty)} f(a) = f(-1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4$. **Chọn D.**

Cách 2. Biến đổi $S = (a+1) + \frac{3}{a+1} - 4$ sau đó dùng Côsi.

Câu 18. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng $P = \frac{1}{\log_{(ab)} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $k \in (-1; 0)$.

C. $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

D. $k \in (2; 3)$.

Lời giải. Ta có $P = \frac{1}{\log_{(ab)} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a(ab) + \sqrt{1 - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$

Khi $b = a^k \longrightarrow P = 1 + k + \sqrt{1 - k}$.

Đặt $t = \sqrt{1 - k}$ ($k \leq 1$), ta được $P = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \longrightarrow k = \frac{3}{4} \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Câu 19. Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ và thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Giá trị lớn nhất của a bằng

- A. 1. B. $\log(2^e - 1)$. C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$. D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$.

Lời giải. Ta có $\log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \log_a x = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \log^2 a$.

Do $\log^2 a \geq 0$ nên suy ra $x \geq 1$.

Xét hàm $f(x) = \frac{\log x}{x}$ trên $[1; +\infty)$ ta tìm được $\max_{x \geq 1} f(x) = \frac{\log e}{e}$.

Suy ra $\log^2 a = \frac{\log e}{e} \longrightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$. **Chọn D.**

Câu 20. Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho tồn tại số thực $0 < x \neq 1$ thỏa $a^{\log_b x} = b^{\log_a x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$ bằng

- A. $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{e}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a x^2} \Leftrightarrow \log_b x \cdot \ln a = \log_a x^2 \cdot \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln b} \cdot \ln a = 2 \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln b$

$\Leftrightarrow \ln x (\ln^2 a - 2 \ln^2 b) = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln a - \sqrt{2} \ln b)(\ln a + \sqrt{2} \ln b) = 0$. (*)

Theo giả thiết $a, b > 1$ và $x \neq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \ln a - \sqrt{2} \ln b = 0 \Leftrightarrow a = b^{\sqrt{2}}$.

Khi đó $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 3 \ln^2 b - (\sqrt{2} + 1) \ln b$.

Đặt $t = \ln b$ với $t > 0$. Xét hàm ta được $P_{\min} = -\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$ tại $t = \frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **Chọn A.**

Câu 21. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a ab + \frac{4}{(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} ab}$ bằng

- A. -4. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Dễ dàng biến đổi được $P = 1 + \log_a b + \frac{4}{1 + \log_a b}$.

Do $0 < a < 1 < b$ và $ab > 1$ nên suy ra $\log_a b < 0$.

Xét hàm $f(t) = 1 + t + \frac{4}{1+t} \leq \max_{(-\infty;0)} f(t) = f(-3) = -4$. **Chọn A.**

Câu 22. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tổng $M + 2m$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{21}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $x = \frac{y}{4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y \leq 8$.

Ta có $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2 = \log_2^2 \frac{4}{y} + (\log_2 y - 1)^2 = (\log_2 y - 2)^2 + (\log_2 y - 1)^2$.

Vì $1 \leq y \leq 8$ nên $0 \leq \log_2 y \leq 3$.

Xét hàm $f(t) = (t-2)^2 + (t-1)^2$ trên $[0;3]$ ta được $f(t) \in \left[\frac{1}{2};5\right]$. **Chọn A.**

Câu 23. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

- A. 13. B. 14. C. 15. D. 19.

Lời giải. Dễ dàng biến đổi được $P = 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

Do $a > b > 1$ nên suy ra $\log_{\frac{a}{b}} b > 0$.

Xét hàm $f(t) = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t}$ trên $(0;+\infty)$, ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$. **Chọn C.**

Câu 24. Xét các số thực a, b thỏa $b > 1, \sqrt{a} \leq b < a$. Biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

- A. $a = b^2$. B. $a^2 = b^3$. C. $a^3 = b^2$. D. $a^2 = b$.

Lời giải. Dễ dàng biến đổi được $P = \frac{1}{1-\log_a b} + \frac{4}{\log_a b} - 4$.

Từ điều kiện, suy ra $a > 1$.

Do $\sqrt{a} \leq b < a \xrightarrow{a>1} \log_a \sqrt{a} \leq \log_a b < \log_a a$ hay $\frac{1}{2} \leq \log_a b < 1$.

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi

$\log_a b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 = b^3$. **Chọn B.**

Câu 25. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b^2$ và $b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + \log_b \frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. 3.

D. 9.

Lời giải. Dễ dàng biến đổi được $P = \frac{1}{1 - \log_a b} + \frac{1 - \log_a b}{\log_a b}$.

Từ điều kiện, suy ra $a > 1 \xrightarrow{b > 1} \log_a b > 0$.

Do $a \geq b^2 \xrightarrow{b > 1} \log_b a \geq \log_b b^2 = 2$ hay $\frac{1}{\log_a b} \geq 2 \xrightarrow{\log_a b > 0} \log_a b \leq \frac{1}{2}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1-t}{t}$ trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$. **Chọn C.**

Câu 26. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $y > e$ và $\ln \frac{x}{y} = \frac{\ln x}{\ln y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy$ bằng

A. $e^{3+2\sqrt{2}}$.

B. $e^{4\sqrt{2}+\frac{3}{2}}$.

C. e^6 .

D. e^8 .

Lời giải. Đặt $a = \ln x$, $b = \ln y$. Do $y > e \Rightarrow b > 1$.

Từ giả thiết ta có $a - b = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \frac{b^2}{b-1}$.

Suy ra $a + b = \frac{b^2}{b-1} + b = 2(b-1) + \frac{1}{b-1} + 3 \geq 2\sqrt{2} + 3$.

Khi đó $P = xy = e^{\ln xy} = e^{\ln x + \ln y} = e^{a+b} \geq e^{2\sqrt{2}+3}$. **Chọn A.**

Câu 27. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ bằng

A. -4.

B. $4\log_2 6$.

C. $4(1 - \log_2 3)$.

D. $\frac{4}{\ln 2} - 4\log_2\left(\frac{4}{\ln 2}\right)$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a = \frac{4}{b^2}$. Đặt $t = 4a^3 + b^3 = \frac{256}{b^6} + b^3 \geq 3\sqrt[3]{\frac{256}{b^6} \cdot \frac{b^3}{2} \cdot \frac{b^3}{2}} = 12$.

Khi đó $P = f(t) = t - 4\log_2 t = f(t) \geq \min_{[12; +\infty)} f(t) \geq f(12) = 4(1 - \log_2 3)$. **Chọn C.**

Câu 28. Cho x, y là hai số thực dương thỏa $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x+2y}{y}\right)$ bằng

A. $3 + \ln 4$.

B. $12 + \ln 4$.

C. $\frac{3}{2} + \ln 6$.

D. $24 + \ln 6$.

Lời giải. Có $xy \leq 4y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{4}{y} - \frac{1}{y^2} = -4 + \frac{4}{y} - \frac{1}{y^2} + 4 = 4 - \left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 \leq 4$.

Đặt $t = \frac{x}{y} \in (0; 4]$. Khi đó $P = \frac{6}{t} + \ln(t+2) = f(t) \geq \min_{(0; 4]} f(t) \geq f(4) = \frac{3}{2} + \ln 6$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho x, y là hai số thực dương thỏa $\log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$.

Biết giá trị nhỏ nhất của $\frac{x^2+y^2}{xy}$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $(a, b) = 1$. Tổng $a+b$ bằng

A. 2.

B. 9.

C. 12.

D. 13.

Lời giải. Ta có $\log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right) \Leftrightarrow x+y+2 = 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = x + \frac{3}{y} + y + \frac{3}{x} + 2 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) + 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^2 - 2. \text{ Ta được } 3(t^2 - 2) \geq 2\sqrt{3}t + 2 \Rightarrow t \geq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^2 - 2 \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=13. \text{ Chọn D.}$$

Câu 30. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ bằng

A. $2\sqrt{2} + 3$.

B. $3\sqrt{2} + 2$.

C. $\sqrt{17} + \sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải. Ta có $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \xrightarrow{x>0} y(x-1) > 0$

$$\xrightarrow{y>0} x > 1. \text{ Do đó } y(x-1) \geq x^2 \Rightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}.$$

$$\text{Khi đó } P = x + y \geq x + \frac{x^2}{x-1} = f(x) \geq \min_{(1;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 3. \text{ Chọn A.}$$

Câu 31. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2(x+3y) \leq 2 + 2\log_2 y$.

Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c

là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 10.

B. 15.

C. 17.

D. 30.

Lời giải. Ta có $\log_2(x^2+3xy) \leq \log_2 4y^2 \Leftrightarrow (x+4y)(x-y) \leq 0 \xrightarrow{x>0, y>0} x \leq y$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y} = \frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 2}} - \frac{\frac{2x}{y}+3}{\frac{x}{y}+2}. \text{ Đặt } t = \frac{x}{y} \in (0;1].$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}} - \frac{2t+3}{t+2} \geq \min_{(0;1]} f(t) = f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow a+b+c=10. \text{ Chọn A.}$$

Câu 32. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1 và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$ bằng

A. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

B. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

C. 20.

D. 24.

Lời giải. Có $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a t = \frac{1}{\log_t a} \\ y = \log_b t = \frac{1}{\log_t b} \\ z = \log_c t = \frac{1}{\log_t c} \\ \frac{1}{2} = \log_{abc} t = \frac{1}{\log_t abc} = \frac{1}{\log_t a + \log_t b + \log_t c} \end{cases}.$

Suy ra $\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{z}.$

Khi đó $P = 32 - \frac{16}{z} - z^2 = f(z) \leq f(2) = 20.$ **Chọn C.**

Câu 33. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \log_{\frac{a}{b}}^2 \left(\frac{a^4}{128} + 32 \right) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right)$ bằng

A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 19.

Lời giải. Ta có $\frac{a^4}{128} + 32 \geq 2\sqrt{\frac{a^4}{128} \cdot 32} = a^2$. Do $a > b > 1$ suy ra $\frac{a}{b} > 1$.

Khi đó $P \geq \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) = 4 \left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b \right]^2 + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right).$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P \geq 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 15.$ **Chọn C.**

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^3 a - \frac{9}{2} \log_2(16a - 64) - 3 \log_2^2 a + 7$ với $a \in [1; 16]$ bằng

A. -20.

B. -13.

C. 7.

D. 8.

Lời giải. Ta có $16a - 64 = 8(2a - 8) \leq \left(\frac{8 + 2a - 8}{2} \right)^2 = a^2.$

Khi đó $P \geq \log_2^3 a - 9 \log_2 a - 3 \log_2^2 a + 7.$

Đặt $t = \log_2 a \xrightarrow{a \in [1; 16]} t \in [0; 4].$ Ta có $P \geq t^3 - 3t^2 - 9t + 7 = f(t) \geq f(3) = -20.$ **Chọn A.**

Câu 35. Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Khi biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}} a - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất, tổng $a^3 + 2b$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 6. D. 7.

Lời giải. Ta có $4(3b-1) = 12b-4 \leq 9b^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$.

Vì $0 < a < 1$ nên $\log_a \frac{12b-4}{9} \geq \log_a \frac{9b^2}{9} = 2 \log_a b$

Khi đó $P = \log_a \frac{12b-4}{9} + \frac{8}{(\log_a b - 1)^2} - 1 \geq 2 \log_a b + \frac{8}{(\log_a b - 1)^2} - 1$.

Do $0 < b < a < 1$ nên suy ra $\log_a b > \log_a a = 1$. Đặt $t = \log_a b$ ($t > 1$) ta được

$$P \geq 2t + \frac{8}{(t-1)^2} - 1 = (t-1) + (t-1) + \frac{8}{(t-1)^2} + 1 \geq 3 \sqrt[3]{(t-1)(t-1)\frac{8}{(t-1)^2}} + 1 = 7.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t-1 = \frac{8}{(t-1)^2} \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow b = a^3$. **Chọn B.**

Câu 36. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Biểu thức

$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\log_a b$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải. Ta có $b - \frac{1}{4} \leq b^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$.

Do $a < 1$ nên $\log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b$.

Khi đó $P \geq 2 \log_a b - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a b}{1 - \log_a b} \xrightarrow[b < a < 1 \rightarrow t > 1]{t = \log_a b} 2t + \frac{t}{2t-2} = f(t) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$. **Chọn D.**

Câu 37. Cho a, b là hai số thực thuộc $(1; 2]$ và $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \log_a (b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $m + \sqrt[3]{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Tổng $m + n$ bằng

- A. $\frac{37}{3}$. B. 12. C. 15. D. 249.

Lời giải. Có $b^3 - b^2 - 4b + 4 = (b-1)(b+2)(b-2) \leq 0 \forall b \in (1; 2]$. Suy ra $b^3 \leq b^2 + 4b - 4$.

Do $a > 1$ nên $\log_a (b^2 + 4b - 4) \geq \log_a b^3$.

Khi đó $P \geq 2 \log_a b^3 + \log_{\frac{b}{a}}^2 a = 6 \log_a b + \frac{1}{(\log_a b - 1)^2}$

$= 3(\log_a b - 1) + 3(\log_a b - 1) + \frac{1}{(\log_a b - 1)^2} + 6 \geq 3\sqrt[3]{9} + 6 = 6 + \sqrt[3]{243}$. **Chọn D.**

Câu 38. Cho a, b là hai số thực thỏa $\frac{1}{3} < b < a < 1$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{a}{b}}^2 a$ là m khi $b = a^n$. Tổng $m+n$ bằng

- A. 12. B. 15. C. $\frac{37}{3}$. D. $\frac{46}{3}$.

Lời giải. Ta có $4b^3 - 3b + 1 = (2b-1)^2(b+1) \geq 0, \forall b > \frac{1}{3}$.

Suy ra $4b^3 \geq 3b - 1 \xrightarrow{\frac{1}{3} < a < 1} \frac{3b-1}{4a^3} \leq \frac{4b^3}{4a^3} \xrightarrow{a < 1} \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) \geq \log_a \left(\frac{b}{a} \right)^3$.

Khi đó $P \geq \log_a \left(\frac{b}{a} \right)^3 + 12 \log_{\frac{a}{b}}^2 a = 3(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$
 $= \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \geq 9$ (vì $\frac{1}{3} < b < a < 1$ nên $\log_a b > 1$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \log_a b = 3 \Leftrightarrow b = a^3$. Suy ra $\begin{cases} m=9 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow m+n=12$. **Chọn A.**

Câu 39. Cho a, b là hai số thực thỏa $a > b > \frac{4}{3}$ và $P = 16 \log_a \left(\frac{a^3}{12b-16} \right) + 3 \log_{\frac{a}{b}}^2 a$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b$ bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{11}{2}$. C. 4. D. 6.

Lời giải. Ta có $12b-16 \leq b^3 \Leftrightarrow (b-2)^2(b+4) \geq 0$ luôn đúng $\forall b > \frac{4}{3}$.

Suy ra $\frac{a}{\sqrt[3]{12b-16}} \geq \frac{a}{b} > 1$, suy ra $\log_a \left(\frac{a}{\sqrt[3]{12b-16}} \right) \geq \log_a \frac{a}{b} > \log_a 1 = 0$.

Do đó $P = 48 \log_a \left(\frac{a}{\sqrt[3]{12b-16}} \right) + 3 \log_{\frac{a}{b}}^2 a \geq 48 \log_a \frac{a}{b} + 3 \log_{\frac{a}{b}}^2 a$.

Đặt $t = \log_a \frac{a}{b}$, vì $\log_a \frac{a}{b} > \log_a 1 = 0$ nên $t > 0$.

Khi đó $P \geq 48t + \frac{3}{t^2} = f(t) \geq \min_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 36$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \log_a \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=6$. **Chọn D.**

Câu 40. Cho a, b là hai số thực thỏa $3a-4 > b > 0$ và $P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a \right)^2$ đạt

giá trị nhỏ nhất. Tổng $3a+b$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{25}{2}$. C. 8. D. 14.

Lời giải. Ta có $b+4 = b+2+2 \geq 3\sqrt[3]{4b}$. (*)

$$\text{Do } \begin{cases} 3a-4 > 0 \Rightarrow \frac{3a}{b+4} \leq \frac{a}{\sqrt[3]{4b}} \\ 3a-4 > b > 0 \Rightarrow 3a > b+4 > 1 \Rightarrow \frac{3a}{b+4} > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{\frac{3a}{b+4}} a \geq \log_{\sqrt[3]{4b}} a.$$

$$\text{Khi đó } P \geq \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\sqrt[3]{4b}} a \right)^2$$

$$\text{Đặt } t = \log_a \frac{a}{\sqrt[3]{4b}} > 0, \text{ ta được } P \geq 3t + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{3t}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{16t^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{27t^2}{64t^2}} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow 3a+b=14. \text{ Chọn D.}$$

Câu 41. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} - y = \frac{y^2-x}{4}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ bằng

- A. 2. B. $\frac{58}{27}$. C. $\frac{115}{27}$. D. $\frac{122}{27}$.

Lời giải. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } 4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} + x - 4y + \sqrt{1-x^2} = 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} + y^2 + \sqrt{1-x^2}.$$

Xét hàm $f(t) = 4e^t + t$ trên $\mathbb{R}$ và đi đến kết quả $x - 4y + \sqrt{1-x^2} = y^2 + \sqrt{1-x^2}$ hay $\Leftrightarrow x = y^2 + 4y$. Khi đó $P = x^3 - 2x^2 + x + 2 = f(x) \leq \max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$. **Chọn B.**

Câu 42. Cho x, y là hai số thực thuộc $[0;1]$ và thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ bằng

- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{136}{3}$. C. $\frac{383}{16}$. D. $\frac{391}{16}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $1-x-y = \log_{2017}(x^2+2018) - \log_{2017}(y^2-2y+2019)$
 $\Leftrightarrow \log_{2017}(x^2+2018) + x = \log_{2017}[(1-y)^2+2018] + 1-y.$

Xét $f(t) = t + \log_{2017}(t^2+2018)$ trên $[0;1]$ và đi đến kết quả $x = 1-y$ hay $y = 1-x$.

Khi đó $P = [4x^2 + 3(1-x)][4(1-x)^2 + 3x] + 25x(1-x) \in \left[\frac{191}{16}; \frac{25}{2}\right]$ với $x \in [0;1]$.

Suy ra $M+m = \frac{391}{16}$. **Chọn D.**

Câu 43. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ bằng

A. -1.

B. $-\frac{1}{2}$.C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $2(x+1)^2 + \log_2 2(x+1)^2 = \log_2 (2y+1) + 2y+1$.

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $2(x+1)^2 = 2y+1$.

Khi đó $P = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x - 2 = g(x)$.

Ta có $g'(x) = 2e^{2x-1} + 4x - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x-1} = 4 - 4x$. Ta thấy vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất. Vì $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

nên $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của $g'(x) = 0$. Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$ và kết luận được giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 44. Xét các số thực dương x, y thỏa $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} [3(x+y)] = (x^2+y^2+xy+2) + \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2).$$

Xét hàm $f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $3(x+y) = x^2+y^2+xy+2$

$$\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.$$

$$\text{Suy ra } x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2(x+y)^2 + 6(x+y) - 4 = 5 - (x+y-3)^2 \leq 5.$$

$$\text{Từ } P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6} \Leftrightarrow (P-3)x + (P-2)y = 1-6P.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } (1-6P)^2 &= [(P-3)x + (P-2)y]^2 \stackrel{\text{Bunhiacopskixia}}{\leq} (x^2+y^2)[(P-3)^2 + (P-2)^2] \\ &\leq 5(2P^2 - 10P + 13). \end{aligned}$$

$$\text{Hay } 26P^2 + 38P - 64 \leq 0 \text{ suy ra } P \leq 1. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 45. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ bằng

A. $-5 + 6\sqrt{3}$.B. $-3 + 6\sqrt{2}$.C. $\frac{11}{2}$.D. $\frac{27}{5}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $(y+1)\log_3 [(x+1)(y+1)] = 9 - (x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow \log_3 [(x+1)(y+1)] = \frac{9}{y+1} - (x-1) \Leftrightarrow \log_3 (x+1) + (x+1) = \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1}.$$

Xét hàm $f(t) = t + \log_3 t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $x + 1 = \frac{9}{y+1}$ hay $x = \frac{8-y}{y+1}$.

Vì $x > 0 \Rightarrow \frac{8-y}{y+1} > 0 \xrightarrow{y>0} y < 8$.

Khi đó $P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = \frac{2y^2 + y + 8}{y+1} = g(y) \geq \min_{(0;8)} g(y) = -3 + 6\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 46. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$ bằng

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. -2 . D. -1 .

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có $\log_2 y - 1 - \log_2 \sqrt{1+x} = 3y - 3\sqrt{1+x} - y^2 + x$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + \log_2 y = (\sqrt{1+x})^2 - 3\sqrt{1+x} + \log_2 \sqrt{1+x}.$$

Xét hàm $f(t) = t^2 - 3t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $y = \sqrt{1+x}$.

Khi đó $P = x - y = x - \sqrt{1+x} = g(x) \geq \min_{(-1; +\infty)} g(x) = g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{4}$. **Chọn B.**

Câu 47. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2} \log_2 (x-y) = \frac{1}{2}[1 + \log_2 (1-xy)]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng

- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{17}{2}$. C. 3 . D. 7 .

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x > y \\ xy < 1 \end{cases}$. Từ giả thiết ta có $3^{(x-y)^2} \log_2 (x-y)^2 = 3^{2-2xy} \log_2 (2-2xy)$.

Xét hàm $f(t) = 3^t \cdot \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $(x-y)^2 = 2-2xy$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 2 + 2xy \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}.$$

Đặt $t = x + y$. Ta có $t^2 = 2 + 2xy \xrightarrow{xy < 1} t^2 < 4 \Rightarrow t \in (-2; 2)$.

Khi đó $P = 2t^3 - 6t \left(\frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \left(\frac{t^2 - 2}{2} \right) = g(t) \leq \max_{(-2; 2)} g(t) = \frac{13}{2}$. **Chọn A.**

Câu 48. Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $2 \cdot 4^{2x^2} + \ln \left(\frac{4x^2 + 1}{2xy} \right) = 4^{xy}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x(y-2x) - \sqrt{2}(x+y)$ bằng

- A. $1 - 2\sqrt{3}$. B. $1 - \sqrt{3}$. C. $1 + \sqrt{3}$. D. $1 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải. Điều kiện $xy > 0$. Giả thiết $\Leftrightarrow 2^{4x^2+1} + \ln(4x^2 + 1) = 2^{2xy} + \ln(2xy)$.

Xét hàm $f(t) = 2^t + \ln t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $4x^2 + 1 = 2xy \Leftrightarrow y = 2x + \frac{1}{2x}$.

Ta có $P = 2x(y - 2x) - \sqrt{2}(x + y) = 1 - \sqrt{2}\left(3x + \frac{1}{2x}\right) \leq 1 - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 1 - 2\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 49. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $4 + 9 \cdot 3^{x^2 - 2y} = (4 + 9^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + 2y + 18}{x}$ bằng

- A. $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$. B. $1 + 9\sqrt{2}$. C. 9. D. 17.

Lời giải. Đặt $t = x^2 - 2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$$4 + 9 \cdot 3^t = (4 + 9^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow 4 + 3^{t+2} = (4 + 3^{2t}) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{4 + 3^{t+2}}{7^{t+2}} = \frac{4 + 3^{2t}}{7^{2t}}.$$

Xét hàm $f(a) = \frac{4 + 3^a}{7^a} = 4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^a + \left(\frac{3}{7}\right)^a$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên đi đến kết quả $t + 2 = 2t \Leftrightarrow t = 2$ suy ra $x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$.

Khi đó $P = \frac{x + x^2 - 2 + 18}{x} = x + \frac{16}{x} + 1 \geq 2\sqrt{14} + 1 = 9$. **Chọn C.**

Câu 50. Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in (0; +\infty)$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y = \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^y + \cos y - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 \in (0; 1)$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 \in [1; 2)$. D. $x_0 = 2$.

Lời giải. Giả thiết $\Leftrightarrow \left(\frac{4^x + 1}{2^x}\right)^y = \left(\frac{4^y + 1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow (4^x + 1)^y = (4^y + 1)^x$

$$\Leftrightarrow y \cdot \ln(4^x + 1) = x \cdot \ln(4^y + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(1 + 4^x)}{x} = \frac{\ln(1 + 4^y)}{y}. \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = \frac{\ln(1 + 4^t)}{t}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{t \cdot 4^t \cdot \ln 4^t - (1 + 4^t) \cdot \ln(1 + 4^t)}{(1 + 4^t)^2 t^2} < 0$

với mọi $t > 0$. Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Nhận thấy (1) có dạng $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó $P = e^x + \cos x - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$.

Xét hàm số $g(x) = e^x + \cos x - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $g'(x) = e^x - \sin x - 2 + x$;

$g''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} g'(0) = -1 < 0 \\ g'(1) = e - 1 - \sin 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho $g'(x_0) = 0$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 1)$. **Chọn A.**

Câu 51. Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in [-1; 1]$ và

$$\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}.$$

Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 \in (-1; 0)$. C. $x_0 \in [0; 1)$. D. $x_0 = 1$.

Lời giải. Điều kiện : $x - y > 0$.

Giả thiết tương đương với $x \ln(x-y) - 2017x = y \ln(x-y) - 2017y - e^{2018}$

$$\Leftrightarrow (x-y) \ln(x-y) - 2017(x-y) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(x-y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0. \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = \ln t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t}$ trên $(0; +\infty)$.

Đạo hàm $f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0$ với mọi $t > 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $f(e^{2018}) = 0$ nên $(*) \Leftrightarrow f(x-y) = f(e^{2018}) \Leftrightarrow x-y = e^{2018} \Leftrightarrow y = x - e^{2018}$.

Khi đó $P = e^{2018x}(1+x-e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$. Xét hàm $g(x)$ có $g''(x) < 0$ với mọi

$x \in [-1; 1]$ nên $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Mà $\begin{cases} g'(-1) = e^{-2018} + 2018 > 0 \\ g'(0) = 2019 - 2018e^{2018} < 0 \end{cases}$ nên tồn

tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g'(x_0) = 0$ và khi đó $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(x_0)$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2+y^2+1) = 3$. Biết giá

trị lớn nhất của biểu thức $S = |x-y| + |x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tổng $a+2b$ bằng

- A. 25. B. 32. C. 34. D. 41.

Lời giải. Xét hàm $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Mà $f(2) = 3 = f(x^2+y^2) \Leftrightarrow 2 = x^2+y^2$.

Khi đó $S^2 = (x-y)^2 [1 + (x^2+xy+y^2)]^2 = (2-2xy)(3+xy)^2$.

Đặt $t = xy$, vì $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = 1$ nên $t \in [-1; 1]$.

Do đó $S^2 = f(t) = (2-2t)(3+t)^2 \leq \max_{[-1; 1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{512}{27} \longrightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}$. **Chọn C.**

Câu 53. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ bằng

- A. $-3 - \log_5 3$. B. $-2 - \log_3 5$. C. $-2 - \sqrt{3}$. D. -4 .

Lời giải. Theo giả thiết $3^a = 5^b = 15^{-c} = t$. Suy ra $a = \log_3 t$; $b = \log_5 t$; $-c = \log_{15} t$.

Ta có $-c = \log_{15} t = \frac{1}{\log_5 15} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Suy ra $ab + bc + ca = 0$.

Khi đó $P = \left[(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \right] - 4(a + b + c) = (a + b + c)^2 - 4(a + b + c) \geq -4$.

Chọn D.

Câu 54. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa $5^x + 25^y + 125^z = 2018$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \log_5 2018$. B. $\frac{1}{6} \log_5 2016$. C. $\log_5 2016$. D. $\frac{1}{2} \log_5 2017$.

Lời giải. Đặt $a = 5^x$; $b = 5^{2y}$; $c = 5^{3z}$. Ta có $\begin{cases} a + b + c = 2018 \\ a, b, c \geq 1 \end{cases}$.

Suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1$. (1)

Nhân c hai vế ta được $abc \geq ac + bc - c$. (2)

Tương tự (1), ta cũng có $ac \geq a + c - 1$ và $bc \geq b + c - 1$. (3)

Từ (2) và (3) ta có $abc \geq a + b + c - 2$.

Ta có $5^{x+2y+3z} = 5^x \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = abc \geq a + b + c - 2 = 2018 - 2 = 2016$.

Suy ra $x + 2y + 3z \geq \log_5 2016$ hay $6S \geq \log_5 2016 \longrightarrow S = \frac{1}{6} \log_5 2016$. **Chọn B.**

Câu 55. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $64^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{y}} + 4^{\frac{1}{z}} = 3.4^{2018}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x+4y+3z} + \frac{1}{2x+2y+3z} + \frac{1}{x+2y+6z} + \frac{3029}{2}$ bằng

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \frac{16}{x+4y+3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \\ \frac{16}{2x+2y+3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \\ \frac{16}{x+2y+6z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z} \end{cases} \Rightarrow P \leq \frac{1}{16} \cdot 4 \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3029}{2}$.

Mà $3.4^{2018} = 64^{\frac{1}{x}} + 8^{\frac{1}{y}} + 4^{\frac{1}{z}} \geq 3\sqrt[3]{4^{\frac{3}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{z}}}$ suy ra $\frac{3}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{z} \leq \log_4 \left(\frac{3.4^{2018}}{3} \right)^3 = 3.2018$.

Suy ra $P \leq \frac{2018}{4} + \frac{3029}{2} = 2019$. **Chọn C.**

Ứng dụng

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



Sự phân rã của các chất phóng xạ

Phần 1. Một số bài toán áp dụng

(tăng trưởng, phóng xạ, động đất,...)

Phần 2. Bài toán lãi suất

Phần 1. Một số bài toán áp dụng

Dạng 1. Áp dụng công thức có sẵn

Câu 1. Một lon nước soda $80^{\circ}F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32^{\circ}F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48 \cdot (0,9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $37^{\circ}F$. Chọn đáp án gần nhất với kết quả?

- A. 15,6 phút. B. 17 phút. C. 21,5 phút. D. 25,6 phút.

Câu 2. với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Nếu điện thoại nạp pin từ lúc cạn pin (tức là dung lượng pin lúc bắt đầu nạp là 0%) thì sau bao lâu sẽ nạp được 90% (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $t \approx 1,21$ giờ. B. $t \approx 1,22$ giờ. C. $t \approx 1,34$ giờ. D. $t \approx 1,54$ giờ.

Câu 3. Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}$ %. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A. 3475 (năm). B. 3547 (năm). C. 3574 (năm). D. 3754 (năm).

Câu 4. Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở Nhật Bản có cường độ đo được là 9 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Trung Quốc có cường độ đo được là 7 độ Richter. Hỏi trận động đất ở Nhật Bản có biên độ gấp bao nhiêu lần trận động đất ở Trung Quốc?

- A. 10 lần. B. 20 lần. C. 100 lần. D. 200 lần.

Câu 5. Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ xấp xỉ

- A. 8,4 Richter. B. 8,6 Richter. C. 10 Richter. D. 12 Richter.

Câu 6. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ

trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^{\circ}\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k.a^t$ (trong đó a, k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

- A. $6,7^{\circ}\text{C}$. B. $7,6^{\circ}\text{C}$. C. $8,4^{\circ}\text{C}$. D. $9,3^{\circ}\text{C}$.

Câu 7. Cho biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ radi Ra^{226} là 1602 năm (tức là một lượng Ra^{226} sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam Ra^{226} sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số phần thập phân)?

- A. 0,795 (gam). B. 0,886 (gam). C. 0,923 (gam). D. 1,023 (gam).

Câu 8. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm ước tính theo công thức $S_t = S_0.2^t$, trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn A ban đầu, S_t là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

- A. 6 phút. B. 7 phút. C. 8 phút. D. 9 phút.

Câu 9. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn ước tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần?

- A. $t = \frac{5}{\log 3}$ giờ. B. $t = \frac{3}{\log 5}$ giờ. C. $t = \frac{5 \ln 3}{\ln 10}$ giờ. D. $t = \frac{3 \ln 5}{\ln 10}$ giờ.

Câu 10. Biết rằng cuối năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

- A. 2020. B. 2022. C. 2025. D. 2026.

Câu 11. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Theo số liệu thực tế, dân số của tỉnh A đầu năm 2010 là 1.038.229 người, tính đến đầu năm năm 2015 là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh trong khoảng nào?

- A. (1.424.000; 1.424.100). B. (1.424.100; 1.424.200).

C. (1.424.200;1.424.300).

D. (1.424.300;1.424.400).

Câu 12. Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1)$, ($t \in \mathbb{N}$) (đơn vị %). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. Khoảng 22 tháng.

B. Khoảng 24 tháng.

C. Khoảng 25 tháng.

D. Khoảng 32 tháng.

Câu 13. Giả sử $n = f(t) = n_0 \cdot 2^t$ là số lượng cá thể trong một đám vi khuẩn tại thời điểm t giờ, n_0 là số lượng cá thể lúc ban đầu. Biết tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t chính là $f'(t)$. Giả sử mẫu thử ban đầu có $n_0 = 100$ con vi khuẩn. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ là bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 500 con.

B. 1109 con.

C. 1600 con.

D. 3200 con.

Dạng 2. Sử dụng công thức lãi kép

Câu 14. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của tổng cục thống kê, dân số của Việt Nam giữa năm 2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào giữa năm 2030 thì dân số của Việt Nam xấp xỉ là bao nhiêu người?

A. 107026537 người.

B. 107232574 người.

C. 105971355 người.

D. 106118331 người.

Câu 15. Hết ngày 31 tháng 12 năm 2017, dân số tỉnh X là 1,5 triệu người. Với tốc độ tăng dân số hàng năm không thay đổi là 1,5% và chỉ có sự biến động do sinh - tử thì trong năm 2027 (từ 1/1/2017 đến hết 31/12/2027) tại tỉnh X có tất cả bao nhiêu trẻ em được sinh ra, giả sử rằng tổng số người tử vong trong năm 2027 là 2700 người và chỉ là những người trên hai tuổi.

A. 28812.

B. 28426.

C. 23026.

D. 23412.

Câu 16. Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5 \text{ (m}^3\text{)}$. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $r\%$. Biết sau 5 năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4,8666 \cdot 10^5 \text{ (m}^3\text{)}$. Giá trị của r xấp xỉ bằng

A. 3,5.

B. 4.

C. 4,5.

D. 5.

Câu 17. Số lượng động vật nguyên sinh tăng trưởng với tốc độ 0,7944 con/ngày. Giả sử vào cuối ngày đầu tiên, số lượng động vật nguyên sinh là 2 con. Hỏi sau 6 ngày (kể cả ngày đầu tiên), số lượng động vật nguyên sinh là bao nhiêu con?

A. 37 con.

B. 48 con.

C. 67 con.

D. 106 con.

Câu 18. Cục điều tra dân số thế giới cho biết: Trong chiến tranh thế giới thứ hai (kéo dài 6 năm); dân số mỗi năm giảm đi 2% so với dân số năm liền trước đó. Vào thời hòa

binh sau chiến tranh thế giới thứ hai thì dân số tăng 4% so với dân số năm liền trước đó. Giả sử rằng, vào cuối năm thứ 2 diễn ra chiến tranh dân số thế giới là 4 tỷ người. Kể từ thời điểm đó thì 10 năm sau thì dân số thế giới khoảng bao nhiêu tỷ người (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

- A. 4,40. B. 4,67. C. 4,88. D. 4,95.

Câu 19. Biết thể tích khí CO_2 đầu năm 2002 là V (m^3). Thời gian 10 năm tiếp theo, thể tích khí CO_2 tăng $m\%$; thời gian 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 đầu năm 2020 là

- A. $V \times \frac{[(100+m)(100+n)]^{10}}{10^{20}}$ (m^3). B. $V \times \frac{(100+m)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}}$ (m^3).
C. $V \times [1 + (1+m+n)^{18}]$ (m^3). D. $V \times (1+m+n)^{18}$ (m^3).

Dạng 3. Thiết lập công thức

Câu 20. Quan sát quá trình sao chép tế bào trong phòng thí nghiệm sinh học, nhà sinh vật học nhận thấy các tế bào tăng gấp đôi mỗi phút. Biết sau một thời gian t phút thì có 100000 tế bào và ban đầu có 1 tế bào duy nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $14 < t < 15$. B. $15 < t < 16$. C. $16 < t < 17$. D. $17 < t < 18$.

Câu 21. E.coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.coli lại tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 60 vi khuẩn E.coli trong đường ruột. Sau 8 giờ, số lượng vi khuẩn E.coli là bao nhiêu?

- A. 158.159.469 vi khuẩn. B. 1.006.632.960 vi khuẩn.
C. 2.108.252.760 vi khuẩn. D. 3.251.603.769 vi khuẩn.

Câu 22. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu với 100 con. Cứ sau 3 giờ đồng hồ thì số lượng vi khuẩn lại tăng gấp đôi. Hỏi khi nào số lượng vi khuẩn đạt đến 50000 con?

- A. 26,06 giờ. B. 26,6 giờ. C. 26,09 giờ. D. 26,9 giờ.

Câu 23. Một bể nước có dung tích 1 (m^3) (không có nước). Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể. Trong giờ đầu, vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/phút. Trong các giờ tiếp theo, vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể nước đầy?

- A. 3,14 giờ. B. 5,14 giờ. C. 350 phút. D. 14915 giây.

Câu 24. Một người thả một lượng bào hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bào phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bào ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày, lượng bào sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

- A. $7 \times \log_3 25$. B. $3^{\frac{25}{7}}$. C. $7 \times \frac{24}{3}$. D. $\log_3 25$.

Câu 25. Người ta thả một lượng bèo vào một hồ nước. Kết quả cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lượng bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

- A. 3 giờ. B. $9 - \log 3$ giờ. C. $\frac{10^9}{3}$ giờ. D. $\frac{9}{\log 3}$ giờ.

Phần 2. Bài toán lãi suất

Dạng 1. Cho vay một lần (lãi kép)

Câu 1. (ĐỀ THAM KHẢO 2017 – 2018) Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

- A. 102.016.000 đồng. B. 102.017.000 đồng.
C. 102.423.000 đồng. D. 102.424.000 đồng.

Câu 2. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 5%/năm trong thời gian 10 năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau định kỳ, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho định kỳ tiếp theo. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}$ %/tháng (lãi suất tháng so với lãi suất năm)?

- A. Ít hơn 1.811.486,1 đồng. B. Ít hơn 1.911.486,1 đồng.
C. Bằng nhau. D. Nhiều hơn 1.811.486,1 đồng.

Câu 3. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2%/quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được một năm sau khi gửi tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 210 triệu. B. 212 triệu. C. 216 triệu. D. 220 triệu.

Câu 4. Một người dự định sẽ mua xe Honda SH với giá 80.990.000 đồng. Người đó gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền 60.000.000 đồng với lãi suất 0,8%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Do sức ép thị trường nên mỗi tháng loại xe Honda SH giảm 500.000 đồng. Vậy sau bao lâu người đó sẽ đủ tiền mua xe máy?

- A. 20 tháng. B. 21 tháng. C. 22 tháng. D. 23 tháng.

Câu 5. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 15/3/2020 rút được khoản tiền là 50.000.000 đồng. Lãi suất ngân hàng là 0,55%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 15/4/2018 người đó phải gửi ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền?

- A. 43.593.000 đồng. B. 43.833.000 đồng.
C. 44.316.000 đồng. D. 44.074.000 đồng.

Câu 6. Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính số tiền tối thiểu x triệu đồng ($x \in \mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

- A. $x = 140$ triệu đồng. B. $x = 145$ triệu đồng.
C. $x = 150$ triệu đồng. D. $x = 154$ triệu đồng.

Câu 7. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 200 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi được cộng vào vốn kỳ tiếp theo). Ban đầu người đó gửi với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2%/ kỳ hạn, sau hai năm người đó thay đổi phương thức gửi, chuyển thành kỳ hạn một tháng với lãi suất 0,6%/tháng. Tính tổng số tiền lãi và gốc nhận được sau 5 năm (kết quả làm tròn tới đơn vị nghìn đồng).

- A. 290.640.000 đồng. B. 290.642.000 đồng.
C. 290.646.000 đồng. D. 290.644.000 đồng.

Câu 8. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 11 năm. B. 12 năm. C. 13 năm. D. 14 năm.

Câu 9. Ông An gửi 320 triệu đồng vào ngân hàng ACB và VietinBank theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng ACB với lãi suất 2,1%/quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng VietinBank với lãi suất 0,73%/tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai ngân hàng là 26670725,95 đồng. Hỏi số tiền ông An lần lượt ở hai ngân hàng ACB và VietinBank là bao nhiêu?

- A. 120 triệu đồng và 200 triệu đồng. B. 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.
C. 180 triệu đồng và 140 triệu đồng. D. 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.

Câu 10. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đầu năm 2016, ông An thành lập một công ty. Tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ

đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- A. Năm 2020. B. Năm 2021. C. Năm 2022. D. Năm 2023.

Dạng 2. Gửi tiền đầu mỗi định kỳ (gửi tiết kiệm)

Cứ đầu mỗi định kỳ gửi vào ngân hàng M triệu, lãi suất kép $r\%$ /định kỳ. Hỏi sau n định kỳ số tiền thu được là bao nhiêu?

Ta xây dựng bảng sau:

Định kỳ	Đầu định kỳ	Cuối định kỳ
1	M	$M(1+r)$
2	$M(1+r) + M$	$[M(1+r) + M](1+r)$ $= M[(1+r)^2 + (1+r)]$
3	$M[(1+r)^2 + (1+r)] + M$	$[M[(1+r)^2 + (1+r)] + M] \cdot (1+r)$ $= M[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$
...	...	...
n	...	$M[(1+r)^n + \dots + (1+r)]$.

Vậy sau n định kỳ ta được số tiền: $T = M[(1+r)^n + \dots + (1+r)] = M(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Từ đó suy ra $M = \frac{Tr}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$ và $n = \log_{1+r} \left[\frac{Tr}{M(1+r)} + 1 \right]$.

Câu 11. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 1 triệu đồng với lãi suất kép 1% /tháng. Gửi được hai năm ba tháng người đó rút toàn bộ tiền vốn và lãi. Số tiền người đó nhận được là

- A. $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng. B. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.
C. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng. D. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.

Câu 12. Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền M theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng (cả vốn và lãi). Hỏi số tiền M gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

- A. 535.000 đồng. B. 613.000 đồng. C. 635.000 đồng. D. 643.000 đồng.

Câu 13. Một người muốn có 2 tỷ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số

tiền hàng năm là bao nhiêu? Giả thiết rằng lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng.

- A. 251 triệu. B. 252,5 triệu. C. 253 triệu. D. 253,5 triệu.

Câu 14. Đúng ngày 01 mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất 0,7% /tháng. Biết không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì anh A có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 100 triệu đồng? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi, được tính lãi ngay từ ngày gửi và anh A không rút tiền ra.

- A. 28 tháng. B. 29 tháng. C. 30 tháng. D. 33 tháng.

Dạng 3. Vay trả góp

Vay ngân hàng M triệu đồng, lãi suất $r\%$ /định kỳ. Cứ cuối mỗi định kỳ trả ngân hàng m triệu. Hỏi sau n định kỳ số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Ta xây dựng bảng sau:

Định kỳ	Đầu định kỳ	Cuối định kỳ
1	M	$M(1+r) - m$
2	$M(1+r) - m$	$[M(1+r) - m](1+r) - m$ $= M(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$
3		$[M(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]](1+r) - m$ $= M(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$
...	...	...
n	...	$M(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + 1]$

Vậy sau n định kỳ, số tiền còn nợ $T = M(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + 1]$

$$= M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1].$$

Từ đó suy ra nếu định kỳ thứ n mà trả hết nợ thì $T = 0 \Rightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$.

Câu 15. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Ông Việt vay ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 1% /tháng. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông Việt sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông Việt hoàn nợ.

$$\text{A. } m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3} \text{ (triệu đồng).}$$

$$\text{B. } m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

$$\text{C. } m = \frac{100 \times 1,03}{3} \text{ (triệu đồng).}$$

$$\text{D. } m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 16. Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng, với lãi suất 1,2%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 10 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời người đó hoàn nợ.

- A. 70 tháng. B. 77 tháng. C. 80 tháng. D. 85 tháng.

Câu 17. Bạn Hùng trúng tuyển Đại học nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm 4.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp Đại học, bạn Hùng phải trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền m (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Tính số tiền m hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị).

- A. 309.604,14 đồng. B. 309.718,166 đồng.
C. 312.518,166 đồng. D. 398.402,12 đồng.

Dạng 4. Bài tập tổng hợp

Câu 18. [Lãi suất tăng dần] Ông Bách dự định đầu tư khoản tiền 20 triệu đồng vào một dự án với lãi suất tăng dần: 3,35%/năm trong 3 năm đầu, 3,75%/năm trong 2 năm kế tiếp và 4,8%/năm ở 5 năm cuối. Khoản tiền mà ông Bách nhận được (cả vốn và lãi) cuối năm thứ 10 là

- A. 25 triệu. B. 30 triệu. C. 35 triệu. D. 40 triệu.

Câu 19. Năm 2017 số tiền để đổ đầy bình xăng cho một chiếc xe máy trung bình là 70000 đồng. Giả sử tỉ lệ lạm phát hàng năm của Việt Nam trong 10 năm tới không đổi với mức 5%, tính số tiền để đổ đầy bình xăng cho chiếc xe đó vào năm 2022.

- A. 70000.0,05⁵ đồng. B. 70000.0,05⁶ đồng.
C. 70000.1,05⁵ đồng. D. 70000.1,05⁶ đồng.

Câu 20. Một người mua chiếc xe máy Air Blade với giá 45 triệu đồng. Biết rằng giá trị khấu hao tài sản xe giảm 60% mỗi năm. Biết rằng sau n năm thì giá trị xe chỉ còn 5 triệu đồng. Giá trị n gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A. 2 năm. B. 2,5 năm. C. 3 năm. D. 3,5 năm.

Câu 21. Đầu năm 2017, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời anh Hùng làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau đúng một năm, tổng số

tiền (bao gồm tiền giá xe công nông và tiền anh Hùng làm ra) mà anh Hùng có là bao nhiêu?

- A. 172 triệu. B. 167,3042 triệu. C. 144 triệu. D. 120,3042 triệu.

Câu 22. Theo thống kê tài chính của thị xã An Nhơn, tỉnh Bình Định, trong dịp Tết Nguyên Đán năm 2015, làng nghề trồng mai cảnh xã An Nhơn đạt tổng doanh thu khoảng 15 tỷ đồng nhờ vào việc bán mai cảnh. Biết rằng trong các năm tiếp theo tổng doanh thu luôn tăng ổn định và doanh thu trong năm đó cao hơn so với năm trước 6,27%. Hỏi tổng doanh thu của làng nghề trồng mai cảnh xã An Nhơn vào dịp Tết Nguyên Đán năm 2018 là bao nhiêu? (làm tròn đến tỷ đồng)

- A. 17 tỷ đồng. B. 18 tỷ đồng. C. 19 tỷ đồng. D. 20 tỷ đồng.

Câu 23. [Tiền lương tăng theo chu kỳ] Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là 8000000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tổng số tiền kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc

- A. 633600000 đồng. B. 635520000 đồng.
C. 696960000 đồng. D. 766656000 đồng.

Câu 24. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm tới. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết?

- A. 40. B. 41. C. 42. D. 43.

Câu 25. Sau một tháng thi công công trình xây dựng Nhà học thể dục của Trường X đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, công ty xây dựng quyết định từ tháng thứ 2, mỗi tháng tăng 4% khối lượng công việc so với tháng kể trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

- A. 17. B. 18. C. 19. D. 20.

Câu 26. [So sánh lãi không kỳ hạn và lãi có kỳ hạn] Ngân hàng BIDV Việt Nam đang áp dụng hình thức lãi kép với mức lãi suất: không kỳ hạn là 0,2%/năm, kỳ hạn 3 tháng là 1,2%/quý. Ông A đến ngân hàng BIDV để gửi tiết kiệm với số tiền ban đầu là 300 triệu đồng. Nếu gửi không kỳ hạn mà ông A muốn thu về cả vốn và lãi bằng hoặc vượt quá 305 triệu đồng thì ông A phải gửi ít nhất n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$). Hỏi nếu cùng số tiền ban đầu và cùng số tháng đó, ông A gửi tiết kiệm có kỳ hạn 3 tháng thì ông A sẽ nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

- A. 444.785.421 đồng. B. 444.711.302 đồng.
C. 446.490.147 đồng. D. 447.190.465 đồng.

Câu 27. [Gửi tiết kiệm nhưng số tiền tăng dần] Một người lập kế hoạch gửi tiết kiệm ngân hàng như sau: Đầu tháng 01 năm 2018, người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là 0,5% mỗi tháng và

được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạch như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng nghìn)

A. 832.765.000 đồng.

B. 918.165.000 đồng.

C. 922.756.000 đồng.

D. 926.281.000 đồng.

Câu 28. [Gửi và rút hàng tháng] Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An gửi 800 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% /tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

A. $800 \cdot (1,005)^{11} - 72$ (triệu đồng).

B. $800 \cdot (1,005)^{12} - 72$ (triệu đồng).

C. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{11}$ (triệu đồng).

D. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{12}$ (triệu đồng).

Câu 29. [Gửi và rút hàng tháng] Một hội khuyến học đã kêu gọi sự ủng hộ của các nhà hảo tâm được 120 triệu đồng. Hội khuyến học gửi số tiền đó vào ngân hàng với lãi suất 0,75% /tháng với dự định hàng tháng rút m triệu đồng làm khuyến học cho học sinh nghèo vượt khó. Hội khuyến học bắt đầu trao quà cho học sinh sau một tháng gửi tiền vào ngân hàng. Để số tiền (cả lãi và 120 triệu đồng tiền gốc) đủ trao cho học sinh trong 10 tháng thì số tiền m mà hàng tháng Hội khuyến học rút ra tối đa (lấy kết quả chính xác đến chữ số thập phân thứ nhất) là

A. 12,3.

B. 12,4.

C. 12,5.

D. 12,6.

Câu 30. [Trả góp nhưng bị điều chỉnh lãi suất] Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng, với lãi suất 0,85% /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 500 nghìn đồng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,15% /tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thỏa thuận trả 1 triệu 500 nghìn đồng cho mỗi tháng. Hỏi phải mất bao nhiêu lâu người đó mới trả hết nợ?

A. 30 tháng.

B. 31 tháng.

C. 42 tháng.

D. 43 tháng.

HUỲNH ĐỨC KHÁNH

0975120189

Ứng dụng

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT



Sự phân rã của các chất phóng xạ

Phần 1. Một số bài toán áp dụng

(tăng trưởng, phóng xạ, động đất,...)

Phần 2. Bài toán lãi suất

Phần 1. Một số bài toán áp dụng

Dạng 1. Áp dụng công thức có sẵn

Câu 1. Một lon nước soda $80^{\circ}F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32^{\circ}F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48 \cdot (0,9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $37^{\circ}F$. Chọn đáp án gần nhất với kết quả?

- A. 15,6 phút. B. 17 phút. C. 21,5 phút. D. 25,6 phút.

Lời giải. Thay vào công thức ta được: $37 = 32 + 48 \cdot (0,9)^t \Rightarrow t \approx 21,5$. **Chọn C.**

Câu 2. với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Nếu điện thoại nạp pin từ lúc cạn pin (tức là dung lượng pin lúc bắt đầu nạp là 0%) thì sau bao lâu sẽ nạp được 90% (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $t \approx 1,21$ giờ. B. $t \approx 1,22$ giờ. C. $t \approx 1,34$ giờ. D. $t \approx 1,54$ giờ.

Lời giải. Với $Q = \frac{90}{100}Q_0$, thay vào ta được $\frac{90}{100} = 1 - e^{-\frac{3t}{2}} \Rightarrow t = 1,535$ giờ. **Chọn D.**

Câu 3. Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}$ %. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A. 3475 (năm). B. 3547 (năm). C. 3574 (năm). D. 3754 (năm).

Lời giải. Thay số ta được $65,21\% = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} \% \Rightarrow t = 3547$. **Chọn B.**

Câu 4. Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở Nhật Bản có cường độ đo được là 9 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Trung Quốc có cường độ đo được là 7 độ Richter. Hỏi trận động đất ở Nhật Bản có biên độ gấp bao nhiêu lần trận động đất ở Trung Quốc?

- A. 10 lần. B. 20 lần. C. 100 lần. D. 200 lần.

Lời giải. Cường độ trận động đất ở Nhật Bản là: $9 = \log A_1 - \log A_0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_0} = 10^9$. (1)

Cường độ trận động đất ở Trung Quốc là: $7 = \log A_2 - \log A_0 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_0} = 10^7$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $A_1 = 100A_2$. **Chọn C.**

Câu 5. Cường độ một trận động đất được tính bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ XX, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ xấp xỉ

- A. 8,4 Richter. B. 8,6 Richter. C. 10 Richter. D. 12 Richter.

Lời giải. Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter, khi đó áp dụng công thức $M_1 = \log A - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A - \log A_0$. (1)

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là: $M_2 = \log(4A) - \log A_0 \Leftrightarrow M_2 = \log 4 + \log A - \log A_0 \xrightarrow{(1)} M_2 = \log 4 + 8 \approx 8,6$ độ Richter. **Chọn B.**

Câu 6. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k.a^t$ (trong đó a, k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

- A. $6,7^\circ\text{C}$. B. $7,6^\circ\text{C}$. C. $8,4^\circ\text{C}$. D. $9,3^\circ\text{C}$.

Lời giải. Theo đề bài, ta có $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases}$ (1). Cần tìm t thỏa mãn $k.a^t = 20\%$.

Từ (1) $\Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2}$ và $a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$.

Khi đó $k.a^t = 20\% \longrightarrow \frac{3\%}{a^2} \cdot a^t = 20\% \Leftrightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \longrightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \approx 6,7$. **Chọn A.**

Câu 7. Cho biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ radi Ra^{226} là 1602 năm (tức là một lượng Ra^{226} sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam Ra^{226} sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số phần thập phân)?

- A. 0,795 (gam). B. 0,886 (gam). C. 0,923 (gam). D. 1,023 (gam).

Lời giải. Khi $t = T$ (chu kỳ bán rã) thì $S = \frac{A}{2}$.

Thay vào công thức ta được $\frac{1}{2}A = A.e^{r.T} \Rightarrow r = \frac{-\ln 2}{T}$.

Khi đó $S = A.e^r = A.e^{\frac{\ln 2}{T}t} = A.(e^{-\ln 2})^{\frac{t}{T}} = A.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow[t=4000, T=1602]{A=5} \approx 0,886$ (gam). **Chọn B.**

Chú ý: $S = A.e^r = A.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow[A=m_0]{S=m}$ công thức trở thành $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Câu 8. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm ước tính theo công thức $S_t = S_0.2^t$, trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn A ban đầu, S_t là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 6 phút. B. 7 phút. C. 8 phút. D. 9 phút.

Lời giải. Vì sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con nên ta có phương trình $625.000 = S_0.2^3 \Rightarrow S_0 = 78125$ con.

Để số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con thì $10^7 = 78125.2^t \Rightarrow t = 7$. **Chọn B.**

Câu 9. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn ước tính theo công thức $S = A.e^r$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần?

A. $t = \frac{5}{\log 3}$ giờ. B. $t = \frac{3}{\log 5}$ giờ. C. $t = \frac{5 \ln 3}{\ln 10}$ giờ. D. $t = \frac{3 \ln 5}{\ln 10}$ giờ.

Lời giải. Thay các dữ kiện ta có phương trình $300 = 100.e^{5r} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$.

Để số lượng vi khuẩn tăng 10 lần (tức 1000 con), ta có $1000 = 100.e^{\frac{\ln 3}{5}t} \Rightarrow t = \frac{5}{\log 3}$.

Chọn A.

Câu 10. Biết rằng cuối năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2020. B. 2022. C. 2025. D. 2026.

Lời giải. Ta có $S = A.e^{N.r} \longrightarrow N = \frac{1}{r} \cdot \ln \frac{S}{A} = \frac{100}{1,7} \cdot \ln \frac{120.10^6}{78685800} \approx 24,825$.

Lúc đấy là năm $2001 + 25 = 2026$. **Chọn D.**

Câu 11. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Theo số liệu thực tế, dân số của tỉnh A đầu năm 2010 là 1.038.229 người, tính đến đầu năm năm 2015 là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh trong khoảng nào?

A. (1.424.000;1.424.100).

B. (1.424.100;1.424.200).

C. (1.424.200;1.424.300).

D. (1.424.300;1.424.400).

Lời giải. Gọi S_1 là dân số đầu năm 2015, ta có
$$\begin{cases} S_1 = 1.153.600 \text{ (người)} \\ N = 5 \text{ (năm)} \\ A = 1.038.229 \text{ (người)} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $S_1 = A.e^{N.r} \Rightarrow r = \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{N} = \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{5}.$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2 = A.e^{15.r} = 1.038.229.e^{15 \cdot \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{5}} \approx 1.424.227,71.$

Chọn C.

Câu 12. Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1)$, ($t \in \mathbb{N}$) (đơn vị %). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. Khoảng 22 tháng.

B. Khoảng 24 tháng.

C. Khoảng 25 tháng.

D. Khoảng 32 tháng.

Lời giải. Yêu cầu bài toán tương đương với $75 - 20 \ln(t+1) \leq 10$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) \geq \frac{13}{4} \Rightarrow t+1 \geq e^{\frac{13}{4}} \Rightarrow t \geq e^{\frac{13}{4}} - 1 \xrightarrow{t \in \mathbb{N}} t_{\min} = 25.$ **Chọn C.**

Câu 13. Giả sử $n = f(t) = n_0 \cdot 2^t$ là số lượng cá thể trong một đám vi khuẩn tại thời điểm t giờ, n_0 là số lượng cá thể lúc ban đầu. Biết tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t chính là $f'(t)$. Giả sử mẫu thử ban đầu có $n_0 = 100$ con vi khuẩn. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ là bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 500 con.

B. 1109 con.

C. 1600 con.

D. 3200 con.

Lời giải. Tốc độ phát triển của vi khuẩn tại thời điểm t là $f'(t) = n_0 \cdot 2^t \cdot \ln 2.$

Khi đó tốc độ phát triển sau 4 giờ là $f'(4) = 100 \cdot 2^4 \cdot \ln 2 \approx 1109$ con. **Chọn B.**

Dạng 2. Sử dụng công thức lãi kép

Câu 14. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của tổng cục thống kê, dân số của Việt Nam giữa năm 2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào giữa năm 2030 thì dân số của Việt Nam xấp xỉ là bao nhiêu người?

A. 107026537 người.

B. 107232574 người.

C. 105971355 người.

D. 106118331 người.

Lời giải. Với bài này khác với hai bài trước là đề không cho công thức $S = A.e^{N.r}$. Do đó ta áp dụng cách tính lãi kép $T = M(1+r)^n$ với $M = 90728900$, $r = 1,05\%$, $n = 16$. Ta tính được $T \approx 107232574,1$. **Chọn B.**

Câu 15. Hết ngày 31 tháng 12 năm 2017, dân số tỉnh X là 1,5 triệu người. Với tốc độ tăng dân số hàng năm không thay đổi là 1,5% và chỉ có sự biến động do sinh - tử thì trong năm 2027 (từ 1/1/2017 đến hết 31/12/2027) tại tỉnh X có tất cả bao nhiêu trẻ em được sinh ra, giả sử rằng tổng số người tử vong trong năm 2027 là 2700 người và chỉ là những người trên hai tuổi.

- A. 28812. B. 28426. C. 23026. D. 23412.

Lời giải. Đề không cho công thức $S = A.e^{N.r}$ nên ta sử dụng công thức tính lãi kép.

Dân số tỉnh X đến cuối năm 2026 là $T_{2026} = 1,5.(1+1,5\%)^9 \approx 1.715.085$ người.

Dân số tỉnh X đến cuối năm 2027 là $T_{2027} = 1,5.(1+1,5\%)^{10} \approx 1.740.811$ người.

Suy ra dân số tỉnh X tăng lên trong năm 2027 là $T_{2027} - T_{2026} = 25.726$ người.

Mà số dân tăng trong thời gian từ 2026 đến 2027 là số trẻ em được sinh ra trừ số người tử vong. Do đó số trẻ em sinh ra trong năm 2027 là: $25726 + 2700 = 28426$ người. **Chọn B.**

Câu 16. Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4.10^5 \text{ (m}^3\text{)}$. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $r\%$. Biết sau 5 năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4,8666.10^5 \text{ (m}^3\text{)}$. Giá trị của r xấp xỉ bằng

- A. 3,5. B. 4. C. 4,5. D. 5.

Lời giải. Trữ lượng gỗ sau một năm của khu rừng là:

$$T_1 = 4.10^5 + 4.10^5.r\% = 4.10^5(1+r\%).$$

Trữ lượng gỗ sau năm thứ hai của khu rừng là: $T_2 = 4.10^5(1+r\%)^2$.

Trữ lượng gỗ sau 5 năm của khu rừng là: $T_5 = 4.10^5(1+r\%)^5 = 4,8666.10^5 \Rightarrow r \approx 4$.

Chọn B.

Câu 17. Số lượng động vật nguyên sinh tăng trưởng với tốc độ 0,7944 con/ngày. Giả sử vào cuối ngày đầu tiên, số lượng động vật nguyên sinh là 2 con. Hỏi sau 6 ngày (kể cả ngày đầu tiên), số lượng động vật nguyên sinh là bao nhiêu con?

- A. 37 con. B. 48 con. C. 67 con. D. 106 con.

Lời giải. Ta xem đây là bài toán lãi kép với công thức $T = M(1+r)^n$.

Với $M = 2$, $r = 0,7944$ và $n = 5$ (chú ý) nên $T = 2.(1+0,7944)^5 \approx 37$ con. **Chọn A.**

Câu 18. Cục điều tra dân số thế giới cho biết: Trong chiến tranh thế giới thứ hai (kéo dài 6 năm); dân số mỗi năm giảm đi 2% so với dân số năm liền trước đó. Vào thời hòa bình sau chiến tranh thế giới thứ hai thì dân số tăng 4% so với dân số năm liền trước đó. Giả sử rằng, vào cuối năm thứ 2 diễn ra chiến tranh dân số thế giới là 4 tỷ người.

Kể từ thời điểm đó thì 10 năm sau thì dân số thế giới khoảng bao nhiêu tỷ người (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

A. 4,40.

B. 4,67.

C. 4,88.

D. 4,95.

Lời giải. 10 năm đó gồm 4 năm chiến tranh và 6 năm hòa bình. Do đó, dân số sẽ được tính là: $4 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 4 \cdot (0,98)^4 \cdot (1,04)^6 \approx 4,67$ tỷ người. **Chọn B.**

Câu 19. Biết thể tích khí CO_2 đầu năm 2002 là V (m^3). Thời gian 10 năm tiếp theo, thể tích khí CO_2 tăng $m\%$; thời gian 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 đầu năm 2020 là

A. $V \times \frac{[(100+m)(100+n)]^{10}}{10^{20}}$ (m^3).

B. $V \times \frac{(100+m)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}}$ (m^3).

C. $V \times [1 + (1+m+n)^{18}]$ (m^3).

D. $V \times (1+m+n)^{18}$ (m^3).

Lời giải. Đầu năm 2003 thể tích khí CO_2 là: $V_{2003} = V + V \cdot \frac{m}{100} = V \cdot \frac{100+m}{100}$.

Đầu năm 2004 thể tích khí CO_2 là: $V_{2004} = V \left(\frac{100+m}{100}\right)^2$. Vậy ta có quy luật nên sẽ nhanh như sau: từ đầu năm 2002 đến đầu năm 2020 là 18 năm, trong đó 10 năm đầu chỉ số tăng là $m\%$, 8 năm sau chỉ số tăng là $n\%$.

Vậy thể tích cần tính $V_{2020} = V \left(\frac{100+m}{100}\right)^{10} \left(\frac{100+n}{100}\right)^8 = V \times \frac{(100+m)^{10} (100+n)^8}{10^{36}}$. **Chọn B.**

Dạng 3. Thiết lập công thức

Câu 20. Quan sát quá trình sao chép tế bào trong phòng thí nghiệm sinh học, nhà sinh vật học nhận thấy các tế bào tăng gấp đôi mỗi phút. Biết sau một thời gian t phút thì có 100000 tế bào và ban đầu có 1 tế bào duy nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $14 < t < 15$.

B. $15 < t < 16$.

C. $16 < t < 17$.

D. $17 < t < 18$.

Lời giải. Do ban đầu có một tế bào duy nhất nên:

Sau phút sao chép thứ nhất số tế bào là: $T_1 = 2$;

Sau phút sao chép thứ hai số tế bào là: $T_2 = 2^2$;

...

Sau phút sao chép thứ t số tế bào là: $T_t = 2^t = 100000 \rightarrow t \approx 16,61$. **Chọn C.**

Câu 21. E.coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.coli lại tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 60 vi khuẩn E.coli trong đường ruột. Sau 8 giờ, số lượng vi khuẩn E.coli là bao nhiêu?

A. 158.159.469 vi khuẩn.

B. 1.006.632.960 vi khuẩn.

C. 2.108.252.760 vi khuẩn.

D. 3.251.603.769 vi khuẩn.

Lời giải. Tương tự như bài trên, sau n lần 20 phút thì số vi khuẩn có là $T_n = 60.2^n$.

Vì 8 giờ tương đương với 24 lần 20 phút. Do đó số lượng vi khuẩn E.coli sau 8 giờ là $T_{24} = 60.2^{24} = 1.006.632.960$ vi khuẩn. **Chọn B.**

Câu 22. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu với 100 con. Cứ sau 3 giờ đồng hồ thì số lượng vi khuẩn lại tăng gấp đôi. Hỏi khi nào số lượng vi khuẩn đạt đến 50000 con?

A. 26,06 giờ.

B. 26,6 giờ.

C. 26,09 giờ.

D. 26,9 giờ.

Lời giải. Tương tự như bài trên, sau n lần 3 giờ thì số vi khuẩn có là $T_n = 100.2^n$.

Theo đề bài, ta có $T_n = 50000 \Leftrightarrow 50000 = 100.2^n \Leftrightarrow n = \log_2 \left(\frac{50000}{100} \right) \approx 8,9657$.

Suy ra số thời gian cần thiết là $n \times 3 \approx 8,9657 \times 3 \approx 26,9$ giờ. **Chọn D.**

Câu 23. Một bể nước có dung tích 1 (m^3) (không có nước). Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể. Trong giờ đầu, vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/phút. Trong các giờ tiếp theo, vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể nước đầy?

A. 3,14 giờ.

B. 5,14 giờ.

C. 350 phút.

D. 14915 giây.

Lời giải. Gọi n là số giờ vòi nước chảy để đầy bể.

Trong giờ đầu vòi chảy được 60 lit;

Trong giờ thứ hai vòi chảy được 60.2 lit;

Trong giờ thứ ba vòi chảy được 60.2² lit;

...

Trong giờ thứ n vòi chảy được 60.2 ^{$n-1$} lit;

Tổng lượng nước chảy sau n giờ là 60.(1 + 2 + 2² + ... 2 ^{$n-1$}) = 1000

$\Leftrightarrow 60(2^n - 1) = 1000 \Rightarrow 2^n = \frac{53}{3} \Rightarrow n = \log_2 \left(\frac{53}{3} \right) \approx 4,142957$ giờ ≈ 14915 giây. **Chọn D.**

Câu 24. Một người thả một lượng bào hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bào phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bào ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày, lượng bào sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7 \times \log_3 25$.

B. $3^{\frac{25}{7}}$.

C. $7 \times \frac{24}{3}$.

D. $\log_3 25$.

Lời giải. Gọi A là lượng bào ban đầu $\longrightarrow$ phủ kín mặt hồ thì cần lượng bào $\frac{100}{4} A$.

Sau một tuần số lượng bào là $3A \longrightarrow$ sau n tuần lượng bào là $3^n A$.

Lượng bào phủ kín mặt hồ khi $3^n A = \frac{100}{4} A \Rightarrow n = \log_3 25$ tuần = $7 \log_3 25$ ngày. **Chọn A.**

Câu 25. Người ta thả một lượng bào vào một hồ nước. Kết quả cho thấy sau 9 giờ bào sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bào tăng gấp 10 lần lượng bào trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lượng bào phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

A. 3 giờ.

B. $9 - \log 3$ giờ.

C. $\frac{10^9}{3}$ giờ.

D. $\frac{9}{\log 3}$ giờ.

Lời giải. Gọi A là lượng bèo ban đầu. Sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần nên sau 9 giờ ta có lượng bèo là $A \cdot 10^9$. Gọi t là số giờ để lượng bèo trong hồ phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ. Khi đó ta có phương trình $A \cdot 10^t = \frac{1}{3} \times A \cdot 10^9 \Rightarrow t = \log \frac{10^9}{3} = 9 - \log 3$. **Chọn B.**

Phần 2. Bài toán lãi suất

Dạng 1. Cho vay một lần (lãi kép)

Câu 1. (ĐỀ THAM KHẢO 2017 – 2018) Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.016.000 đồng.

B. 102.017.000 đồng.

C. 102.423.000 đồng.

D. 102.424.000 đồng.

Lời giải. Công thức lãi kép $T_n = A(1+r)^n$ với A số tiền gửi vào lần đầu tiên, r là lãi suất mỗi kỳ, n là số kỳ hạn. Ta được $T_6 = 100 \times 10^6 \left(1 + \frac{0,4}{100}\right)^6 \approx 102.424.000$ đồng.

Chọn D.

Câu 2. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 5%/năm trong thời gian 10 năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau định kỳ, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho định kỳ tiếp theo. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}\%$ /tháng (lãi suất tháng so với lãi suất năm)?

A. Ít hơn 1.811.486,1 đồng.

B. Ít hơn 1.911.486,1 đồng.

C. Bằng nhau.

D. Nhiều hơn 1.811.486,1 đồng.

Lời giải. Số tiền nhận được sau 10 năm với

• Lãi suất là 5%/năm $\longrightarrow 10000000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 16288946,27$ đồng.

• Lãi suất là $\frac{5}{12}\%$ /tháng $\longrightarrow 10000000 \cdot \left(1 + \frac{5}{12 \cdot 100}\right)^{120} = 16470094,98$ đồng.

Suy ra số tiền gửi theo lãi suất tháng nhiều hơn: 1.811.486,1 đồng. **Chọn D.**

Câu 3. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2%/quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền

người đó nhận được một năm sau khi gửi tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 210 triệu. B. 212 triệu. C. 216 triệu. D. 220 triệu.

Lời giải. Số tiền nhận về sau 1 năm của 100 triệu gửi trước là $100(1+2\%)^4$ triệu.

Số tiền nhận về sau 6 tháng của 100 triệu gửi sau là $100(1+2\%)^2$ triệu.

Vậy tổng số tiền nhận là $100(1+2\%)^4 + 100(1+2\%)^2 = 212,283216$ triệu. **Chọn B.**

Câu 4. Một người dự định sẽ mua xe Honda SH với giá 80.990.000 đồng. Người đó gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền 60.000.000 đồng với lãi suất 0,8%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Do sức ép thị trường nên mỗi tháng loại xe Honda SH giảm 500.000 đồng. Vậy sau bao lâu người đó sẽ đủ tiền mua xe máy?

- A. 20 tháng. B. 21 tháng. C. 22 tháng. D. 23 tháng.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép, ta có số tiền người đó nhận được (cả vốn ban đầu và lãi) sau n tháng là: $T = A(1+r)^n = 60.10^6 \cdot \left(1 + \frac{0,8}{100}\right)^n$.

Số tiền xe Honda SH giảm trong n tháng là: $p = 80990000 - 500000n$.

Để người đó mua được xe Honda SH thì: $T = p$

$$\Leftrightarrow 60.10^6 \left(1 + \frac{0,8}{100}\right)^n = 80990000 - 500000n \longrightarrow n = 20,58771778. \text{ Chọn B.}$$

Câu 5. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 15/3/2020 rút được khoản tiền là 50.000.000 đồng. Lãi suất ngân hàng là 0,55%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 15/4/2018 người đó phải gửi ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền?

- A. 43.593.000 đồng. B. 43.833.000 đồng.
C. 44.316.000 đồng. D. 44.074.000 đồng.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép $T_n = A(1+r)^n$ với A số tiền gửi vào lần đầu tiên, $r = 0,55\%$ là lãi suất mỗi tháng, $n = 23$ tháng và $T_n = 50.000.000$ đồng. Ta được

$$50000000 = A \cdot \left(1 + \frac{0,55}{100}\right)^{23} \longrightarrow A = 44074000 \text{ đồng. Chọn D.}$$

Câu 6. Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính số tiền tối thiểu x triệu đồng ($x \in \mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

- A. $x = 140$ triệu đồng. B. $x = 145$ triệu đồng.

C. $x = 150$ triệu đồng.

D. $x = 154$ triệu đồng.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép $T_n = A(1+r)^n$ với $A = x$ số tiền gửi vào lần đầu tiên, $r = 6,5\%$ là lãi suất mỗi năm, $n = 3$ năm. Suy ra số tiền người đó nhận được (cả vốn ban đầu và lãi) là: $T = x\left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^3$.

Suy ra số tiền lãi người đó nhận được là: $T - x = x\left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^3 - x$.

Theo đề, ta có $T - x = 30 \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^3 - x = 30 \longrightarrow x \approx 144,27$ triệu đồng. **Chọn B.**

Câu 7. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 200 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi được cộng vào vốn kỳ tiếp theo). Ban đầu người đó gửi với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất $2\%/kỳ$ hạn, sau hai năm người đó thay đổi phương thức gửi, chuyển thành kỳ hạn một tháng với lãi suất $0,6\%/tháng$. Tính tổng số tiền lãi và gốc nhận được sau 5 năm (kết quả làm tròn tới đơn vị nghìn đồng).

A. 290.640.000 đồng.

B. 290.642.000 đồng.

C. 290.646.000 đồng.

D. 290.644.000 đồng.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép, ta có

• Sau 2 năm đầu tiên người đó có số tiền cả gốc và lãi là: $T = 200\left(1 + \frac{2}{100}\right)^8$.

• Sau 5 năm người đó có số tiền cả gốc và lãi là: $T' = T\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{36}$

$= 200\left(1 + \frac{2}{100}\right)^8 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{36} = 290642000$ đồng. **Chọn B.**

Câu 8. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6\%/năm$. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 11 năm.

B. 12 năm.

C. 13 năm.

D. 14 năm.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép $T_n = A(1+r)^n$.

Theo đề bài ta cần có: $T_n > 100 \Leftrightarrow 50 \cdot (1 + 6\%)^n > 100 \Leftrightarrow 1,06^n > 2 \longrightarrow n > 11$. Vì n là số tự nhiên và người đó chỉ được nhận lãi vào cuối năm nên ta chọn $n = 12$. **Chọn B.**

Câu 9. Ông An gửi 320 triệu đồng vào ngân hàng ACB và VietinBank theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng ACB với lãi suất $2,1\%/quý$ trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng VietinBank với lãi suất $0,73\%/tháng$ trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai

ngân hàng là 26670725,95 đồng. Hỏi số tiền ông An lần lượt ở hai ngân hàng ACB và VietinBank là bao nhiêu?

A. 120 triệu đồng và 200 triệu đồng. **B.** 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.

C. 180 triệu đồng và 140 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.

Lời giải. Gọi số tiền ông An gửi ở ngân hàng ACB là x triệu đồng. Suy ra số tiền ông An gửi ở ngân hàng VietinBank là $320 - x$ triệu đồng.

• Số tiền cả vốn và lãi ông An nhận được khi gửi ở ngân hàng ACB sau 15 tháng là:

$x \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^5$. Suy ra số tiền lãi ông An nhận được khi gửi ở ngân hàng ACB sau 15

tháng là: $x \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^5 - x$.

• Số tiền cả vốn và lãi ông An nhận được khi gửi ở ngân hàng VietinBank sau 9

tháng là: $(320 - x) \left(1 + \frac{0,73}{100}\right)^9$. Suy ra số tiền lãi ông An nhận được khi gửi ở ngân

hàng VietinBank sau 9 tháng là: $(320 - x) \left(1 + \frac{0,73}{100}\right)^9 - (320 - x)$.

Tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai ngân hàng là 26670725,95 đồng nên ta có

phương trình $x \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^5 - x + (320 - x) \left(1 + \frac{0,73}{100}\right)^9 - (320 - x) = 26,67072595 \Leftrightarrow x = 120$.

Vậy ông An gửi ở ACB là 120 triệu và VietinBank 200 triệu. **Chọn A.**

Câu 10. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đầu năm 2016, ông An thành lập một công ty. Tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2020.

B. Năm 2021.

C. Năm 2022.

D. Năm 2023.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép $T_n = A(1 + r)^n$.

Trong năm 2016 ông An trả lương nhân viên là 1 tỷ đồng.

Trong năm 2017 ông An trả lương nhân viên là $1 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^1 = 1,15$ tỷ đồng.

Trong năm 2018 ông An trả lương nhân viên là $1 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2 = 1,32$ tỷ đồng.

Trong năm 2019 ông An trả lương nhân viên là $1 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^3 = 1,52$ tỷ đồng.

Trong năm 2020 ông An trả lương nhân viên là $1 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^4 = 1,75$ tỷ đồng.

Trong năm 2021 ông An trả lương nhân viên là $1\left(1+\frac{15}{100}\right)^5 \approx 2,011$ tỷ đồng. **Chọn B.**

Bình luận. Nếu xem là bài toán lãi kép thì từ đầu năm 2017 mới sinh lãi.

Dạng 2. Gửi tiền đầu mỗi định kỳ (gửi tiết kiệm)

Cứ đầu mỗi định kỳ gửi vào ngân hàng M triệu, lãi suất kép $r\%$ /định kỳ. Hỏi sau n định kỳ số tiền thu được là bao nhiêu?

Ta xây dựng bảng sau:

Định kỳ	Đầu định kỳ	Cuối định kỳ
1	M	$M(1+r)$
2	$M(1+r) + M$	$[M(1+r) + M](1+r)$ $= M[(1+r)^2 + (1+r)]$
3	$M[(1+r)^2 + (1+r)] + M$	$[M[(1+r)^2 + (1+r)] + M] \cdot (1+r)$ $= M[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$
...	...	...
n	...	$M[(1+r)^n + \dots + (1+r)]$.

Vậy sau n định kỳ ta được số tiền: $T = M[(1+r)^n + \dots + (1+r)] = M(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Từ đó suy ra $M = \frac{Tr}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$ và $n = \log_{1+r} \left[\frac{Tr}{M(1+r)} + 1 \right]$.

Câu 11. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 1 triệu đồng với lãi suất kép 1% /tháng. Gửi được hai năm ba tháng người đó rút toàn bộ tiền vốn và lãi. Số tiền người đó nhận được là

A. $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng. B. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.

C. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng. D. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.

Lời giải. Áp dụng công thức $T = M(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ với $\begin{cases} M = 1 \\ r = 1\%. \\ n = 27 \end{cases}$ **Chọn D.**

Câu 12. Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền M theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng (cả vốn và lãi). Hỏi số tiền M gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 535.000 đồng. B. 613.000 đồng. C. 635.000 đồng. D. 643.000 đồng.

Lời giải. Áp dụng $M = \frac{Tr}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$ với $\begin{cases} T = 10 \\ r = 0,6\% \\ n = 15 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 13. Một người muốn có 2 tỷ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu? Giả thiết rằng lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng.

- A. 251 triệu. B. 252,5 triệu. C. 253 triệu. D. 253,5 triệu.

Lời giải. Áp dụng $M = \frac{Tr}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$ với $\begin{cases} T = 2.10^{10} \\ r = 8\% \\ n = 6 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 14. Đúng ngày 01 mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Biết không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì anh A có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 100 triệu đồng? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi, được tính lãi ngay từ ngày gửi và anh A không rút tiền ra.

- A. 28 tháng. B. 29 tháng. C. 30 tháng. D. 33 tháng.

Lời giải. Áp dụng $n = \log_{1+r} \left[\frac{Tr}{M(1+r)} + 1 \right]$ với $\begin{cases} T > 100.10^6 \\ r = 0,7\% \\ M = 3 \end{cases}$. **Chọn C.**

Dạng 3. Vay trả góp

Vay ngân hàng M triệu đồng, lãi suất $r\%$ /định kỳ. Cứ cuối mỗi định kỳ trả ngân hàng m triệu. Hỏi sau n định kỳ số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Ta xây dựng bảng sau:

Định kỳ	Đầu định kỳ	Cuối định kỳ
1	M	$M(1+r) - m$
2	$M(1+r) - m$	$[M(1+r) - m](1+r) - m$ $= M(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$
3		$[M(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]](1+r) - m$ $= M(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$
...	...	...
n	...	$M(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + 1]$

$$\begin{aligned}\text{Vậy sau } n \text{ định kỳ, số tiền còn nợ } T &= M(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1] \\ &= M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1].\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra nếu định kỳ thứ } n \text{ mà trả hết nợ thì } T = 0 \Rightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Câu 15. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Ông Việt vay ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 1% /tháng. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông Việt sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông Việt hoàn nợ.

A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{100 \times 1,03}{3}$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Lời giải. Áp dụng công thức $m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$ với $\begin{cases} M = 100 \\ r = 1\% \\ n = 3 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 16. Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng, với lãi suất 1,2%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 10 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời người đó hoàn nợ.

A. 70 tháng.

B. 77 tháng.

C. 80 tháng.

D. 85 tháng.

Lời giải. Áp dụng công thức $T = M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1]$ với $\begin{cases} T = 0 \\ M = 500 \\ m = 10 \\ r = 1,2\% \end{cases}$.

Đặt $a = 1 + r$, ta được $0 = 500 \cdot a^n - 10 \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \Leftrightarrow a^n = \frac{5}{2} \Leftrightarrow n = \log_{1,012} \frac{5}{2} \simeq 76,8$. **Chọn B.**

Câu 17. Bạn Hùng trúng tuyển Đại học nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm 4.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3% / năm. Sau khi tốt nghiệp Đại học, bạn Hùng phải trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền m (không đổi) cùng với lãi suất 0,25% /tháng trong vòng 5 năm. Tính số tiền m hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị).

A. 309.604,14 đồng.

B. 309.718,166 đồng.

C. 312.518,166 đồng.

D. 398.402,12 đồng.

Lời giải. Giai đoạn 1: Số tiền bạn Hùng nợ ngân hàng sau 4 năm. Ta xem đây là bài toán gửi tiết kiệm (Dạng 2) với người cho vay là ngân hàng. Áp dụng công thức

$$\text{gửi tiết kiệm } T = M(1+r)^n \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \text{ với } \begin{cases} M = 4000000 \\ r = 3\% \\ n = 4 \end{cases} \text{ được } T = 17236543,24 \text{ đồng.}$$

Giai đoạn 2. Ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu 17236543,24 đồng. Số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm (= 60 tháng).

$$\text{Áp dụng } m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} \text{ với } \begin{cases} M = 17236543,24 \\ r = 0,25\% \\ n = 60 \end{cases} \text{ ta được } m = 309718,166. \text{ Chọn B.}$$

Dạng 4. Bài tập tổng hợp

Câu 18. [Lãi suất tăng dần] Ông Bách dự định đầu tư khoản tiền 20 triệu đồng vào một dự án với lãi suất tăng dần: 3,35%/năm trong 3 năm đầu, 3,75%/năm trong 2 năm kế tiếp và 4,8%/năm ở 5 năm cuối. Khoản tiền mà ông Bách nhận được (cả vốn và lãi) cuối năm thứ 10 là

A. 25 triệu.

B. 30 triệu.

C. 35 triệu.

D. 40 triệu.

Lời giải. Số tiền ông Bách nhận được sau 3 năm đầu là $T_1 = 20 \cdot \left(1 + \frac{3,35}{100}\right)^3$.

Số tiền ông Bách nhận được sau 2 năm tiếp theo là $T_2 = T_1 \cdot \left(1 + \frac{3,75}{100}\right)^2$.

Số tiền ông Bách nhận được vào cuối năm thứ 10 là

$$T_3 = T_2 \cdot \left(1 + \frac{4,8}{100}\right)^5 = 20 \cdot \left(1 + \frac{3,35}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{3,75}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{4,8}{100}\right)^5 \simeq 30 \text{ triệu đồng. Chọn B.}$$

Câu 19. Năm 2017 số tiền để đổ đầy bình xăng cho một chiếc xe máy trung bình là 70000 đồng. Giả sử tỉ lệ lạm phát hàng năm của Việt Nam trong 10 năm tới không đổi với mức 5%, tính số tiền để đổ đầy bình xăng cho chiếc xe đó vào năm 2022.

A. 70000.0,05⁵ đồng.

B. 70000.0,05⁶ đồng.

C. 70000.1,05⁵ đồng.

D. 70000.1,05⁶ đồng.

Lời giải. Số tiền để đổ đầy bình xăng vào năm 2018 là $T_1 = 70000 \cdot (1 + 0,05)$.

Số tiền để đổ đầy bình xăng vào năm 2019 là $T_2 = T_1 \cdot (1 + 0,05) = 70000 \cdot (1 + 0,05)^2$.

...

Số tiền để đổ đầy bình xăng vào năm 2022 là $T_5 = 70000 \cdot (1 + 0,05)^5$. **Chọn C.**

Câu 20. Một người mua chiếc xe máy Air Blade với giá 45 triệu đồng. Biết rằng giá trị khấu hao tài sản xe giảm 60% mỗi năm. Biết rằng sau n năm thì giá trị xe chỉ còn 5 triệu đồng. Giá trị n gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A. 2 năm. B. 2,5 năm. C. 3 năm. D. 3,5 năm.

Lời giải. Theo đề bài suy ra giá trị còn lại của chiếc xe sau mỗi năm là 40%.

Giá trị của chiếc xe sau 1 năm là $T_1 = 45 \times 40\%$.

Giá trị của chiếc xe sau 2 năm là $T_2 = (45 \times 40\%) \times 40\% = 45 \times (40\%)^2$.

Giá trị của chiếc xe sau n năm là $T_n = 45 \times (40\%)^n$.

Theo đề bài, ta có $T_n = 5 \Leftrightarrow 45 \times (40\%)^n = 5 \Leftrightarrow n = \log_{0,4} \left(\frac{1}{9} \right) \approx 2,39$. **Chọn B.**

Câu 21. Đầu năm 2017, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời anh Hùng làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau đúng một năm, tổng số tiền (bao gồm tiền giá xe công nông và tiền anh Hùng làm ra) mà anh Hùng có là bao nhiêu?

- A. 172 triệu. B. 167,3042 triệu. C. 144 triệu. D. 120,3042 triệu.

Lời giải. Số tiền anh Hùng làm ra sau 1 năm là $6 \cdot 12 = 72$ triệu đồng.

Sau 1 năm giá trị xe công nông còn $100 \cdot (1 - 0,4)^{12} \simeq 95,3042$ triệu đồng.

Vậy sai một năm số tiền anh Hùng có 167,3042 triệu. **Chọn B.**

Câu 22. Theo thống kê tài chính của thị xã An Nhơn, tỉnh Bình Định, trong dịp Tết Nguyên Đán năm 2015, làng nghề trồng mai cảnh xã An Nhơn đạt tổng doanh thu khoảng 15 tỷ đồng nhờ vào việc bán mai cảnh. Biết rằng trong các năm tiếp theo tổng doanh thu luôn tăng ổn định và doanh thu trong năm đó cao hơn so với năm trước 6,27%. Hỏi tổng doanh thu của làng nghề trồng mai cảnh xã An Nhơn vào dịp Tết Nguyên Đán năm 2018 là bao nhiêu? (làm tròn đến tỷ đồng)

- A. 17 tỷ đồng. B. 18 tỷ đồng. C. 19 tỷ đồng. D. 20 tỷ đồng.

Lời giải. Tổng doanh thu vào dịp tết năm 2016 là $T_1 = 15(1 + 6,27\%)$.

Tổng doanh thu vào dịp tết năm 2017 là $T_2 = T_1(1 + 6,27\%) = 15(1 + 6,27\%)^2$.

Tổng doanh thu vào dịp tết năm 2018 là $T_3 = 15(1 + 6,27\%)^3 \approx 18$ tỷ đồng. **Chọn B.**

Câu 23. [Tiền lương tăng theo chu kỳ] Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là 8000000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tổng số tiền kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc

- A. 633600000 đồng. B. 635520000 đồng.
C. 696960000 đồng. D. 766656000 đồng.

Lời giải. Tổng tiền lương 2 năm đầu tiên: $T_1 = 8 \cdot 10^6 \times 24 = 192 \cdot 10^6$ đồng.

Theo công thức tính lãi kép, tổng tiền lương 2 năm tiếp theo công nhân đó nhận được là: $T_2 = 8 \cdot 10^6 \times 24 \cdot (1 + 10\%)^1 = 212,2 \cdot 10^6$ đồng.

Tổng tiền lương 2 năm cuối cùng: $T_3 = 8 \cdot 10^6 \times 24(1 + 10\%)^2 = 232,32 \cdot 10^6$ đồng.

Vậy tổng số tiền lương kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc là

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635.520.000 \text{ đồng. Chọn B.}$$

Câu 24. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm tới. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết?

- A. 40. B. 41. C. 42. D. 43.

Lời giải. Gọi mức tiêu thụ dầu hàng năm của nước A theo dự báo là M
 $\longrightarrow$ lượng dầu của nước A là $100M$.

Trên thực tế ta có

Lượng dầu tiêu thụ năm thứ 2 là: $x_2 = M + 4\%M = M(1 + 4\%) = 1,04M$.

Lượng dầu tiêu thụ năm thứ 3 là: $x_3 = M(1 + 4\%) + M(1 + 4\%).4\% = 1,04^2 M$.

.....

Lượng dầu tiêu thụ năm thứ n là: $x_n = 1,04^{n-1} M$.

Theo đề bài ta có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 100M$

$$\Leftrightarrow (1 + 1,04 + 1,04^2 + \dots + 1,04^{n-1})M = 100M \Leftrightarrow \frac{1,04^n - 1}{0,04} = 100 \longrightarrow n \approx 41,0354. \text{ Chọn B.}$$

Câu 25. Sau một tháng thi công công trình xây dựng Nhà học thể dục của Trường X đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, công ty xây dựng quyết định từ tháng thứ 2, mỗi tháng tăng 4% khối lượng công việc so với tháng kể trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

- A. 17. B. 18. C. 19. D. 20.

Lời giải. Dự kiến hoàn thành công việc trong 24 tháng.

Như bài trên ta có phương trình $\Leftrightarrow (1 + 1,04 + 1,04^2 + \dots + 1,04^{n-1})M = 24M$

$$\Leftrightarrow \frac{1,04^n - 1}{0,04} = 24 \Leftrightarrow 1,04^n = 1,96 \Leftrightarrow n = \log_{1,04} 1,96 \approx 17,2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 26. [So sánh lãi không kỳ hạn và lãi có kỳ hạn] Ngân hàng BIDV Việt Nam đang áp dụng hình thức lãi kép với mức lãi suất: không kỳ hạn là 0,2%/năm, kỳ hạn 3 tháng là 1,2%/quý. Ông A đến ngân hàng BIDV để gửi tiết kiệm với số tiền ban đầu là 300 triệu đồng. Nếu gửi không kỳ hạn mà ông A muốn thu về cả vốn và lãi bằng hoặc vượt quá 305 triệu đồng thì ông A phải gửi ít nhất n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$). Hỏi nếu cùng số tiền ban đầu và cùng số tháng đó, ông A gửi tiết kiệm có kỳ hạn 3 tháng thì ông A sẽ nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

- A. 444.785.421 đồng. B. 444.711.302 đồng.
 C. 446.490.147 đồng. D. 447.190.465 đồng.

Lời giải. Áp dụng công thức lãi kép: $T_n = A(1 + r)^n \xrightarrow[n=0,2\%]{T_n \geq 305; A=300} n \approx 99,18$. Như vậy, khi gửi không kỳ hạn để được số tiền gồm cả vốn lẫn lãi lớn hơn hoặc bằng 305 triệu đồng thì ông A phải gửi tối thiểu là 100 tháng.

Nếu cũng gửi với số tiền ban đầu là 300 triệu đồng với lãi suất 1,2%/quý trong thời gian 100 năm (gồm 33 kỳ hạn và 1 tháng không kỳ hạn)

- Số tiền ông A có được sau 33 định kỳ là: $T = 3000000000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^{33}$ đồng.
- Số tiền ông A có được sau 100 tháng là $T \cdot \left(1 + \frac{0,2}{100}\right) = 3000000000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^{33} \cdot \left(1 + \frac{0,2}{100}\right)$
 $= 444.785.421$ đồng. **Chọn A.**

Câu 27. [Gửi tiết kiệm nhưng số tiền tăng dần] Một người lập kế hoạch gửi tiết kiệm ngân hàng như sau: Đầu tháng 01 năm 2018, người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là 0,5% mỗi tháng và được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạch như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 832.765.000 đồng. B. 918.165.000 đồng.
 C. 922.756.000 đồng. D. 926.281.000 đồng.

Lời giải. Với $A = 10$ triệu đồng, $a = 10\%$ và $r = 0,5\%$. Ta có

Số tiền gửi ban đầu	Số tiền cuối tháng 1	Đầu tháng 2 gửi thêm
A	$A(1+r)$	$A(1+a)$

- Suy ra số tiền đầu tháng 2 (sau khi đã gửi thêm) là: $A(1+r) + A(1+a)$.
- Số tiền đầu tháng 3 (sau khi đã gửi thêm): $A(1+r)^2 + A(1+a)(1+r) + A(1+a)^2$.
- Số tiền đầu tháng 4 (sau khi đã gửi thêm):
 $A(1+r)^3 + A(1+a)(1+r)^2 + A(1+a)^2(1+r) + A(1+a)^3$.

.....

- Số tiền đầu tháng n (sau khi đã gửi thêm):
 $A[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+a) + \dots + (1+r)(1+a)^{n-2} + (1+a)^{n-1}]$.

Cuối tháng n : $A[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+a) + \dots + (1+r)(1+a)^{n-2} + (1+a)^{n-1}](1+r)$
 $= A \frac{(1+a)^n - (1+r)^n}{a-r} (1+r)^{n-24} = 922756396,2$ đồng. **Chọn C.**

Câu 28. [Gửi và rút hàng tháng] Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An gửi 800 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,5%/tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

- A. $800 \cdot (1,005)^{11} - 72$ (triệu đồng). B. $800 \cdot (1,005)^{12} - 72$ (triệu đồng).
 C. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{11}$ (triệu đồng). D. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{12}$ (triệu đồng).

Lời giải. Gọi $M = 800$ triệu đồng, $r = 0,5\%$, $m = 6$ triệu đồng.

- Số tiền cuối tháng 1 (sau khi đã rút): $M(1+r) - m$.
- Số tiền cuối tháng 2 (sau khi đã rút): $[M(1+r) - m](1+r) - m$

$$= M(1+r)^2 - m[(1+r) + 1].$$

...

- Số tiền cuối tháng n (sau khi đã rút): $M(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1]$

$$= M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] \xrightarrow{n=12} \text{Chọn D.}$$

Câu 29. [Gửi và rút hàng tháng] Một hội khuyến học đã kêu gọi sự ủng hộ của các nhà hảo tâm được 120 triệu đồng. Hội khuyến học gửi số tiền đó vào ngân hàng với lãi suất $0,75\%$ /tháng với dự định hàng tháng rút m triệu đồng làm khuyến học cho học sinh nghèo vượt khó. Hội khuyến học bắt đầu trao quà cho học sinh sau một tháng gửi tiền vào ngân hàng. Để số tiền (cả lãi và 120 triệu đồng tiền gốc) đủ trao cho học sinh trong 10 tháng thì số tiền m mà hàng tháng Hội khuyến học rút ra tối đa (lấy kết quả chính xác đến chữ số thập phân thứ nhất) là

- A. 12,3. B. 12,4. C. 12,5. D. 12,6.

Lời giải. Áp dụng công thức như câu trên. Số tiền cuối tháng n (sau khi đã rút) là:

$$M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1].$$

Vì trao tối tháng thứ 10 thì hết tiền nên $M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] = 0$.

Suy ra $m = \frac{M(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} \xrightarrow{M=120; r=0,75\%; n=10} m \simeq 12,5$. **Chọn C.**

Câu 30. [Trả góp nhưng bị điều chỉnh lãi suất] Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng, với lãi suất $0,85\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 500 nghìn đồng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là $1,15\%$ /tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thỏa thuận trả 1 triệu 500 nghìn đồng cho mỗi tháng. Hỏi phải mất bao nhiêu lâu người đó mới trả hết nợ?

- A. 30 tháng. B. 31 tháng. C. 42 tháng. D. 43 tháng.

Lời giải. Sau 1 năm số tiền còn nợ ngân hàng là:

$$T = M(1+r)^n - \frac{m}{r}[(1+r)^n - 1] \quad \text{với} \quad \begin{cases} M = 40000000 \\ m = 500000 \\ r = 0,85\% \\ n = 12 \end{cases} \quad \text{ta được } T = 37987647 \text{ đồng.}$$

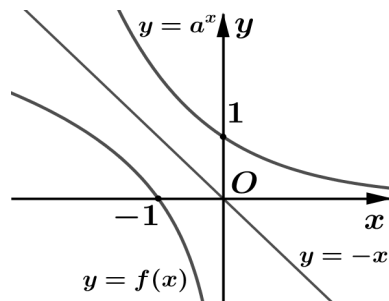
Để trả hết số nợ còn lại ta cần có

$$M_1(1+r_1)^{n_1} - \frac{m_1}{r_1}[(1+r_1)^{n_1} - 1] = 0 \quad \text{với} \quad \begin{cases} M_1 = T = 37987647 \\ m = 1500000 \\ r = 1,15\% \end{cases} \quad \text{ta được } n_1 \simeq 30,1 \text{ tháng.}$$

Vậy cần $12 + 31 = 43$ tháng để trả hết nợ. **Chọn D.**

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT



Phần 1. Phương trình mũ – phương trình logarit.....

Phần 2. Phương trình mũ chứa tham số.....

Phần 3. Phương trình logarit chứa tham số.....

Phần 1. Phương trình mũ–Phương trình logarit

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 2. Cho $0 < a \neq 1$, phương trình $\log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = (x+1)^2 + \log_a\left(a + \frac{1}{a}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 3. Phương trình $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$?

- A. 321. B. 322. C. 642. D. 643.

Câu 4. Phương trình $\log_3(x+2)^3 = 2\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 5. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $(3^x - 3)^2 - (4^x - 4)^2 = (3^x + 4^x - 7)^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x_0 < 0$. B. $x_0 \in (0; 1)$. C. $x_0 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\right)$. D. $x_0 \in [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4.5^{x-5} \leq 5^{1+3\sqrt{x-2}}$ là đoạn $[a; b]$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 14. B. 16. C. 18. D. 20.

Câu 7. Phương trình $x^3 + x^2 + 1 = (x^3 - 3x + 2).2018^{x^2+3x-1} + (x^2 + 3x - 1).2018^{x^3-3x+2}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $(3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} + x.(3 - \sqrt{5})^{\log_4 x} = x^2 + 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 9. Trên $[0; 2018]$ phương trình $\left(\frac{1}{27}\right)^{\sin x} - \left(\frac{1}{81}\right)^{\sin^3 x} = \sin 3x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1925. B. 1927. C. 1928. D. 1930.

Câu 10. Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin 2x - \cos x = 1 + \log_2(\sin x)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 11. Bất phương trình $3^{\sqrt{2(x-1)}+1} - 3^x \leq x^2 - 4x + 3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 10?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 12. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$

trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ trên đoạn $[0; 50\pi]$ bằng

- A. $\frac{1853\pi}{2}$. B. $\frac{2105\pi}{2}$. C. $\frac{2475\pi}{2}$. D. $\frac{2671\pi}{2}$.

Câu 14. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(\sqrt{x}+1) = 2^x + x - \sqrt{x} - 1$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^3-3x+2} + (x^3 - 3x + 2)2^{4-3x} - 1 = 0$ bằng

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 16. Phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2+1}+1) + |x| = \log_2(\sqrt{2x^2+1}-1) + \sqrt{2x^2+1}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(x-1)} = x - 2$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Phương trình $\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2(8x + 16)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 19. Cho phương trình $5x + x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2}$.

Gọi $S = (a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình đã cho. Khi đó $b - a$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 20. Tích các nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2}+2) + 5^{x^2-3x+1} = 2$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 9.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $3^{x-1} = \sqrt{x^2-2x+2} + x - 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 22. Cho phương trình $\log_2(\sqrt{x^2-5x+5}+1) + \log_3(x^2-5x+7) = 2$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng

- A. 5. B. 9. C. 10. D. 15.

Câu 23. Số nghiệm của phương trình $2^{x+1} + 2^{3-x} = \frac{8}{\log_2(x^2-2x+3)}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $2x^3 - 3x^2 + \log_2(x^2+1) - \log_2 x = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 25. Cho phương trình $2016^{x^2-1} + (x^2-1).2017^x = 1$. Khẳng định sau đây đúng?

- A. Phương trình có tổng các nghiệm bằng 0.
- B. Phương trình có nghiệm duy nhất.
- C. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- D. Phương trình có nhiều hơn hai nghiệm.

Phần 2. Phương trình mũ chứa tham số

Câu 1. Cho phương trình $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ với m là tham số. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 > 2$ là

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.
- C. $(-1; +\infty)$.
- D. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 2. Biết phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $(x_1+1)(x_2+1) = 6$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 0$.
- B. $0 < m < 2$.
- C. $1 < m < 3$.
- D. $m \geq 3$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2018; 2018)$ để phương trình $6.2^{2x-1} - (7m-48).2^x + 2m^2 - 16m = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 \geq 15$?

- A. 1993.
- B. 1994.
- C. 3986.
- D. 3988.

Câu 4. Cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $(2; +\infty)$.
- B. $[2; +\infty)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $m.9^{x^2-2x} - (2m+1).6^{x^2-2x} + m.4^{x^2-2x} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$?

- A. 2010.
- B. 2011.
- C. 2012.
- D. 2013.

Câu 6. Cho phương trình $(\sqrt{5}-1)^{x^2} + m(\sqrt{5}+1)^{x^2} = 2^{x^2-2}$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có đúng bốn nghiệm phân biệt là $(a; b)$. Hiệu $b-a$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$.
- B. $\frac{1}{16}$.
- C. $\frac{1}{64}$.
- D. $\frac{49}{64}$.

Câu 7. Cho phương trình $(4-\sqrt{7})^{x^2} + m(4+\sqrt{7})^{x^2} - 3^{x^2-1} = 0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho $36m \in \mathbb{Z}$ và phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 1.
- B. 24.
- C. 25.
- D. 26.

Câu 8. Cho phương trình $m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc $(0;1]$.

- A. $m \geq -6$. B. $-6 \leq m \leq -4$. C. $m \geq -4$. D. $m \leq 6$.

Câu 9. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^x + 3 = m \cdot \sqrt{9^x + 1}$ có đúng 1 nghiệm có dạng $(a;b] \cup \{\sqrt{c}\}$. Tổng $a+b+c$ bằng

- A. 4. B. 11. C. 14. D. 15.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực.

- A. $-1 < m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $0 < m \leq \frac{2}{e}$. D. $\frac{1}{e} \leq m < 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1)2^{7-x} - 6x + 3$. Khi phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 3m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [0;1)$. B. $m_0 \in [1;2)$. C. $m_0 \in [2;3)$. D. $m_0 \in [3;4]$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 10.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2000;2000)$ để $2a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 1$ với a, b là các số thực lớn hơn 1?

- A. 1999. B. 2000. C. 2001. D. 2199.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{|x|} = \sqrt{m^2 - x^2}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $-3 < m < -1$.

Câu 15. Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a;b)$. Giá trị biểu thức $T = b^2 - a^2$ bằng

- A. 36. B. 48. C. 64. D. 72.

Câu 16. Cho phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm là

- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$. D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 2018 để phương trình

$$e^{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x + \frac{1}{x} + m}} = \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1} \text{ có nghiệm thực dương?}$$

A. 2014.

B. 2015.

C. 2016.

D. 2017.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. Vô số.

Câu 19. Biết rằng a là số thực để phương trình $9^x + 9 = a \cdot 3^x \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Hỏi a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-8; -4)$.B. $(-4; 2)$.C. $(4; 10)$.D. $(12; 18)$.

Câu 20. Cho tham số thực a , biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos(ax)$ (1) có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos(ax) + 4$ (2) có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5.

B. 10.

C. 11.

D. 20.

Phần 3. Phương trình logarit chứa tham số

Câu 1. Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

A. 16.

B. 119.

C. 120.

D. 159.

Câu 2. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{7}{2}; 0\right)$.B. $\left(0; \frac{7}{2}\right)$.C. $\left(\frac{7}{2}; 7\right)$.D. $\left(7; \frac{21}{2}\right)$.

Câu 3. Cho phương trình $(m+2)\log_3^2 x + 4\log_3 x + (m-2) = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $0 < x_1 < 1 < x_2$ là

A. $(-\infty; -2)$.B. $(-2; 2)$.C. $(2; +\infty)$.D. $\mathbb{R} \setminus [2; 2]$.

Câu 4. Cho phương trình $\log_2^2 x - 2(m+1)\log_2 x + m^2 + 2m \leq 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ là

A. $-1 < m < 0$.B. $-1 \leq m \leq 0$.C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$.D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 5. Cho phương trình $\log_4 [2^{2x} + 2^{x+2} + 2^2] = \log_2 |m-2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 6. Cho phương trình $2\log_4 (2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + mx - 2m^2) = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$ có dạng $(a; b) \cup (c; d)$ với $a < b < c < d$. Tổng $a + b + 5c + 2d$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 7. Cho phương trình $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 8. Cho phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình có nghiệm duy nhất. Số phần tử của S bằng

- A. 13. B. 14. C. 15. D. 16.

Câu 9. Cho phương trình $\log_3(x^2 + 2mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - m - 1) = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Câu 11. Tìm m để bất phương trình $\log_m(x^2 + 2x + m + 1) > 0$ đúng với mọi x .

- A. $m > 0$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Câu 12. Cho phương trình $\log_2[a^2 x^2(x - 5) + \sqrt{6 - x}] = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x - 1})$. Có bao nhiêu giá trị của biến x để phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực a ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 13. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 19. C. 20. D. 21.

Câu 14. Cho phương trình $\ln[m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x)] = \sin x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 15. Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 16. Cho phương trình $\log_2(mx - x^3) + \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ với m là tham số thực. Gọi $S = (a, b)$ là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Hiệu $b - a$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 17. Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ là

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $0 \leq m < \frac{13}{6}$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 18. Cho phương trình $m \ln x = \ln(1-x) + m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ là

- A. $-e < m < e$. B. $1 < m < e$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 19. Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ với m là tham số thực. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[16; +\infty)$ là

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m \leq \sqrt{5}$. C. $1 \leq m \leq \sqrt{5}$. D. $\frac{3}{4} \leq m \leq \sqrt{5}$.

Câu 20. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$ với m là tham số dương khác 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm $x \in (2; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 21. Cho phương trình $(x^2 - 1) \cdot \log^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $[-10; 10]$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $1 \leq |x| \leq 3$?

- A. 7. B. 9. C. 12. D. 14.

Câu 22. Cho bất phương trình $\log_x[x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m] > -1$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để bất phương trình luôn đúng với $x > 2$?

- A. 2010. B. 2017. C. 2018. D. 2019.

Câu 23. Cho phương trình $2018^{x^2 + (2-m)x + 2} + [(x+1)^2 - mx] \ln(x^2 + 1) = 2018$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Câu 24. Cho phương trình $2\sin^2 x - 3\cos^2 x = \log_2\left(2^{m^2 + 4m + 3} + \frac{7}{2}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

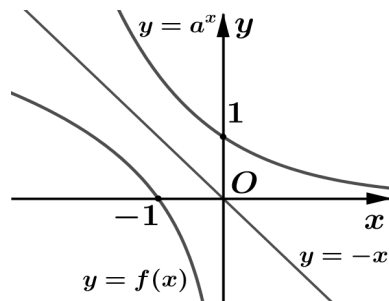
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = m$ có ba nghiệm phân biệt?

- A. 8. B. 10. C. 11. D. 12.

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT



Phần 1. Phương trình mũ – phương trình logarit..... 02

Phần 2. Phương trình mũ chứa tham số..... 10

Phần 3. Phương trình logarit chứa tham số.....18

Phần 1. Phương trình mũ – phương trình logarit

Câu 1. Biết phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$ có nghiệm $x = a + b\sqrt{c}$ với $(a, c) = 1$. Tổng $a + b + c$ bằng

- A. -2. B. -1 C. 1. D. 5.

Lời giải. Điều kiện: $0 < x < 1$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log_2 x^2 - \log_2(1 - \sqrt{x}) = \log_2(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2}{1 - \sqrt{x}} = \log_2(x - 2\sqrt{x} + 2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{1 - \sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{x}{1 - \sqrt{x}} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1 - \sqrt{x}} = -1 \text{ (vô nghiệm) hoặc } \frac{x}{1 - \sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 2. Cho $0 < a \neq 1$, phương trình $\log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = (x+1)^2 + \log_a\left(a + \frac{1}{a}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = x^2 + 2x + \log_a(a^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_a(a^{2x^2+4x} + a^2) = \log_a a^{x^2+2x} + \log_a(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (a^{x^2+2x})^2 + a^2 = (a^{x^2+2x})(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (a^{x^2+2x} - a^2)(a^{x^2+2x} - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 3. Phương trình $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$?

- A. 321. B. 322. C. 642. D. 643.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cot x > 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Đặt } 2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = (\sqrt{3})^t \\ \cos x = 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 x = 3^t \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3^t} \\ \cos^2 x = 4^t \end{cases}$$

$$\text{Do } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ nên ta có } 1 + \frac{1}{3^t} = \frac{1}{4^t} \Leftrightarrow t = -1.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (0; 2018)$ nên $0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < -\frac{1}{6} + \frac{2018}{2\pi} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1, \dots, 321\}$.

Chọn B.

Câu 4. Phương trình $\log_3(x+2)^3 = 2\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải. Điều kiện: $x > -1$. Phương trình $\Leftrightarrow 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$.

$$\text{Đặt } 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6t \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2t} \\ x+1 = 2^{3t} \end{cases} \Rightarrow 9^t = 8^t + 1 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{8}{9}\right)^t + \left(\frac{1}{9}\right)^t. (*)$$

Vế phải là hàm nghịch biến-Vế trái là hằng số nên phương trình có nghiệm duy nhất.

Mà $1 = \left(\frac{8}{9}\right)^1 + \left(\frac{1}{9}\right)^1 \Rightarrow t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Suy ra $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. **Chọn B.**

Câu 5. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $(3^x - 3)^2 - (4^x - 4)^2 = (3^x + 4^x - 7)^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_0 < 0$. B. $x_0 \in (0; 1)$. C. $x_0 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\right)$. D. $x_0 \in [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} 3^x - 3 = a \\ 4^x - 4 = b \end{cases}$. Phương trình trở thành $a^2 - b^2 = (a + b)^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2b^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow b(a + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -b \end{cases}.$$

$$\bullet b = 0 \Rightarrow 4^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\bullet a = -b \Rightarrow 3^x + 4^x = 7. \text{ Phương trình có nghiệm duy nhất } x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x_0 = 1$. **Chọn C.**

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4.5^{x-5} \leq 5^{1+3\sqrt{x-2}}$ là đoạn $[a; b]$.

Tổng $a + b$ bằng

A. 14. B. 16. C. 18. D. 20.

Lời giải. Điều kiện $x \geq 2$. Đặt $\begin{cases} u = 5^{x-5} > 0 \\ v = 5^{3\sqrt{x-2}} > 0 \end{cases}$, ta được $\frac{u^2}{v} - 4u \leq 5v$

$$\Leftrightarrow u^2 - 4uv - 5v^2 \leq 0 \Leftrightarrow (u - 5v)(u + v) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 5v.$$

$$\text{Hay } 5^{x-5} \leq 5^{3\sqrt{x-2}+1} \Leftrightarrow x-6 \leq 3\sqrt{x-2} \longrightarrow S = [2; 18]. \text{ Chọn D.}$$

Câu 7. Phương trình $x^3 + x^2 + 1 = (x^3 - 3x + 2).2018^{x^2+3x-1} + (x^2 + 3x - 1).2018^{x^3-3x+2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 3x - 1 \\ b = x^3 - 3x + 2 \end{cases}$, phương trình trở thành

$$a + b = b \cdot 2018^a + a \cdot 2018^b \Leftrightarrow a(2018^b - 1) + b(2018^a - 1) = 0.$$

• Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ chia hai vế cho ab , ta được $\frac{2018^a - 1}{a} + \frac{2018^b - 1}{b} = 0$. Phương trình này vô nghiệm do $\frac{2018^a - 1}{a} > 0$ và $\frac{2018^b - 1}{b} > 0$ với mọi $a, b \neq 0$. Thật vậy: nếu $a > 0$ thì $2018^a - 1 > 0$; nếu $a < 0$ thì $2018^a - 1 < 0$.

• Kiểm tra thấy $a = 0$ hoặc $b = 0$ thỏa mãn. Suy ra $\begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^3 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $(3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} + x \cdot (3 - \sqrt{5})^{\log_4 x} = x^2 + 1$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Ta có $(3 - \sqrt{5})^{\log_4 x} = \left(\frac{4}{3 + \sqrt{5}}\right)^{\log_4 x} = \frac{x}{(3 + \sqrt{5})^{\log_4 x}}$.

Do đó phương trình tương đương với $(3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} + \frac{x^2}{(3 + \sqrt{5})^{\log_4 x}} = x^2 + 1$.

Đặt $\begin{cases} a = (3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} > 0 \\ b = x^2 \geq 0 \end{cases}$, phương trình trở thành $a + \frac{b}{a} = b + 1$

$$\Leftrightarrow (a - b) + \left(\frac{b}{a} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (a - b)\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1 \end{cases}.$$

$$\bullet a = 1 \Rightarrow (3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} = 1 \Leftrightarrow \log_4 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet a = b \Rightarrow (3 + \sqrt{5})^{\log_4 x} = x^2 \Leftrightarrow x^2 = x^{\log_4 (3 + \sqrt{5})} \Leftrightarrow x = 1. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 9. Trên $[0; 2018]$ phương trình $\left(\frac{1}{27}\right)^{\sin x} - \left(\frac{1}{81}\right)^{\sin^3 x} = \sin 3x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1925.

B. 1927.

C. 1928.

D. 1930.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \sin x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{4 \sin^3 x} = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \sin x} - 3 \sin x = \left(\frac{1}{3}\right)^{4 \sin^3 x} - 4 \sin^3 x.$$

Xét hàm $f(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t - t$ trên $\mathbb{R}$ và đi đến kết quả $3 \sin x = 4 \sin^3 x \longrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$.

Vì $x \in [0; 2018]$ nên $0 \leq \frac{k\pi}{3} \leq 2018 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{2018 \cdot 3}{\pi} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in [0; 1927]$. **Chọn C.**

Câu 10. Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin 2x - \cos x = 1 + \log_2(\sin x)$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$. Do đó phương trình tương đương với

$$\sin 2x - \cos x + \log_2(\cos x) = 1 + \log_2(\sin x) + \log_2(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\cos x) - \cos x = \log_2(\sin 2x) - \sin 2x.$$

Xét $f(t) = \log_2 t - t$ trên $(0; 1)$ và đi đến kết quả $\cos x = \sin 2x \xrightarrow{x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} x = \frac{\pi}{6}$. **Chọn B.**

Câu 11. Bất phương trình $3^{\sqrt{2(x-1)}+1} - 3^x \leq x^2 - 4x + 3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 10 ?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$. Phương trình $\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \leq 3^x + x^2 - 2x + 1$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \leq 3^{(x-1)+1} + (x-1)^2.$$

Xét hàm $f(t) = 3^{t+1} + t^2$ trên $[0; +\infty)$ và đi đến kết quả $\sqrt{2(x-1)} \leq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Mà $x < 10$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị nguyên thỏa mãn bất phương trình. **Chọn C.**

Câu 12. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. 5.

Lời giải. Điều kiện: $x > 1$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \log_5(2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = 2[\log_3(x-1) - \log_3 2\sqrt{x}]$$

$$\Leftrightarrow \log_5(2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 2\sqrt{x} = \log_5 x + 2\log_3(x-1).$$

Xét $f(t) = \log_5 t + 2\log_3(t-1)$ với $t > 1$, ta được $2\sqrt{x}+1 = x \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ trên đoạn $[0; 50\pi]$ bằng

A. $\frac{1853\pi}{2}$.

B. $\frac{2105\pi}{2}$.

C. $\frac{2475\pi}{2}$.

D. $\frac{2671\pi}{2}$.

Lời giải. Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Phương trình $\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}} = \frac{\sin x}{\cos x}. (*)$

Do $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình nên $(*) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}}{\cos x}.$

Xét hàm $f(t) = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{t}$ trên $(-1;1) \setminus \{0\}$. Ta có $f'(t) = -\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 1\right)}{t^2} < 0, \forall t \in (-1;1) \setminus \{0\}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Mà $f(\sin x) = f(\cos x) \Rightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mà $x \in [0;50\pi] \Rightarrow k \in [0;49]$.

Vậy tổng các nghiệm cần tính $\sum_{k=0}^{49} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 50 \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \sum_{k=0}^{49} k = \frac{2475\pi}{2}$. **Chọn C.**

Câu 14. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(\sqrt{x} + 1) = 2^x + x - \sqrt{x} - 1$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1) = 2^x + x$
 $\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1) = \log_2 2^x + 2^x$.

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$ và đi đến kết quả $\sqrt{x} + 1 = 2^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 15. Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^3-3x+2} + (x^3 - 3x + 2)2^{4-3x} - 1 = 0$ bằng

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{2^{x^3-3x+2}}{2^{4-3x}} + x^3 - 3x + 2 - 2^{3x-4} = 0$
 $\Leftrightarrow 2^{x^3-2} + (x^3 - 2) = 2^{3x-4} + (3x - 4)$.

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$ và đi đến kết quả $x^3 - 2 = 3x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 16. Phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2 + 1} + 1) + |x| = \log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + \sqrt{2x^2 + 1}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} - 1} + |x| = \log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + \sqrt{2x^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow \log_2(2x^2) - \log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + |x| = \log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + \sqrt{2x^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow 1 + 2\log_2|x| + |x| = 2\log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + \sqrt{2x^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow 2\log_2|x| + |x| = 2\log_2(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) + (\sqrt{2x^2 + 1} - 1)$.

Xét hàm $f(t) = 2\log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ và đi đến kết quả $|x| = \sqrt{2x^2 + 1} - 1$

$\Leftrightarrow |x| + 1 = \sqrt{2x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \pm 2$. **Chọn C.**

Sai lầm hay gặp là biến đổi $\log_2(\sqrt{2x^2 + 1} + 1) + |x| = \log_2 \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + 1} + \sqrt{2x^2 + 1}$

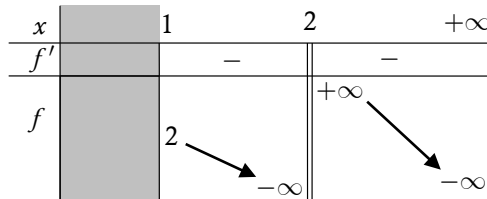
$\Leftrightarrow 2\log_2(\sqrt{2x^2+1}+1)-(\sqrt{2x^2+1}+1)=2\log_2|x|-|x|$ và xét hàm $f(t)=2\log_2 t-t$ trên $(0;+\infty)$ nhưng hàm này không đơn điệu trên $(0;+\infty)$.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x-1)}=x-2$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Điều kiện: $1 < x \neq 2$.

Xét hàm $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x-1)}-x+2$. Ta có $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}-1 < 0$ với mọi x thuộc tập xác định. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.



Dựa vào BBT suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. **Chọn B.**

Câu 18. Phương trình $\log_2(x^2-4)+x=\log_2(8x+16)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Điều kiện: $x > 2$. Phương trình tương đương $\log_2[2^x(x^2-4)]=\log_2(8x+16)$

$$\Leftrightarrow 2^x(x^2-4)=8x+16 \xrightarrow{x>2} (x-2)2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=\frac{8}{x-2}.$$

Ta có $f(x)=2^x$ là hàm đồng biến; $g(x)=\frac{8}{x-2}$ là hàm nghịch biến nên phương trình có nghiệm duy nhất. Mà $f(3)=g(3)$ suy ra $x=3$ là nghiệm duy nhất. **Chọn B.**

Câu 19. Cho phương trình $5x+x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$.

Gọi $S=(a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình đã cho. Khi đó $b-a$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải. Điều kiện $0 < x \leq 3$.

$$\text{Bất phương trình đã cho} \Leftrightarrow x\log_2 x(x-1-\sqrt{6+x-x^2})-5(x-1-\sqrt{6+x-x^2}) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x\log_2 x-5)\left[(x-1)-\sqrt{6+x-x^2}\right] < 0. \quad (*)$$

Xét $f(x)=x\log_2 x$ trên $(0;3]$. Lập BBT ta có $\max_{(0;3]} f(x)=f(3)=3\log_2 3 < 5$.

Suy ra $x\log_2 x-5 < 0, \forall x \in (0;3]$. Do đó $(*) \Leftrightarrow x-1-\sqrt{6+x-x^2} > 0$. Giải bất phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left[\frac{5}{2};3\right]$. **Chọn A.**

Câu 20. Tích các nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 9.

Lời giải. Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành $\log_3(t + 2) + 5^{t^2 - 1} = 2$. (*)

Xét $f(t) = \log_3(t + 2) + 5^{t^2 - 1}$ với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{(t + 2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2 - 1} \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Mà $f(t) = f(1)$ suy ra $t = 1$ là nghiệm của phương trình (*). Với $t = 1$, ta có $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$. **Chọn B.**

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $3^{x-1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Đặt $t = x - 1$. Ph trình trở thành $3^t = \sqrt{t^2 + 1} + t \Leftrightarrow 3^t (\sqrt{t^2 + 1} - t) = 1$. (*)

Xét $f(t) = 3^t (\sqrt{t^2 + 1} - t) - 1$.

Ta có $f'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - 1 \right) 3^t + 3^t \ln 3 (\sqrt{t^2 + 1} - t) = 3^t (\sqrt{t^2 + 1} - t) \left(\frac{\ln 3}{\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) > 0$.

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm. Mà $f(0) = 0$.

Do đó $t = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$. **Chọn B.**

Câu 22. Cho phương trình $\log_2(\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3(x^2 - 5x + 7) = 2$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng

A. 5.

B. 9.

C. 10.

D. 15.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x + 5} \geq 0$. Phương trình trở thành $\log_2(t + 1) + \log_3(t^2 + 2) = 2$.

• Xét $t > 1$, ta có $\begin{cases} \log_2(t + 1) > \log_2 2 = 1 \\ \log_3(t^2 + 2) > \log_3 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \log_2(t + 1) + \log_3(t^2 + 2) > 2$.

• Xét $0 \leq t \leq 1$, ta có $\begin{cases} \log_2(t + 1) \leq \log_2 2 = 1 \\ \log_3(t^2 + 2) \leq \log_3 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \log_2(t + 1) + \log_3(t^2 + 2) \leq 2$. Dấu "="

xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \longrightarrow x_1 + x_2 = 5$. **Chọn A.**

Câu 23. Số nghiệm của phương trình $2^{x+1} + 2^{3-x} = \frac{8}{\log_2(x^2 - 2x + 3)}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $2^{x+1} + 2^{3-x} \geq 2\sqrt{2^{x+1} \cdot 2^{3-x}} = 8 \longrightarrow VT \geq 8$.

Lại có $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$ nên suy ra $\log_2(x^2 - 2x + 3) \geq \log_2 2 = 1 \longrightarrow VP \geq 8$.

Do đó $2^{x+1} + 2^{3-x} = \frac{8}{\log_2(x^2 - 2x + 3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+1} + 2^{3-x} = 8 \\ \log_2(x^2 - 2x + 3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Chọn B.}$

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $2x^3 - 3x^2 + \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Phương trình tương đương $2x^3 - 3x^2 + \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2$ suy ra $\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \log_2 2 = 1$.

Do đó $2x^3 - 3x^2 + \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1) \geq 0, \forall x > 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow x = 1$. **Chọn B.**

Câu 25. Cho phương trình $2018^{x^2-1} + (x^2-1).2019^x = 1$. Khẳng định sau đây đúng?

A. Phương trình có tổng các nghiệm bằng 0.

B. Phương trình có nghiệm duy nhất.

C. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

D. Phương trình có nhiều hơn hai nghiệm.

Lời giải. Nếu $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ thì $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2018^{x^2-1} > 1 \\ (x^2-1).2019^x > 0 \end{cases}$.

Suy ra $2018^{x^2-1} + (x^2-1).2019^x > 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $x \in (-1; 1)$ thì $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 2018^{x^2-1} < 1 \\ (x^2-1).2019^x < 0 \end{cases}$.

Suy ra $2018^{x^2-1} + (x^2-1).2019^x < 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

Kiểm tra thấy $x = \pm 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có tổng các nghiệm bằng 0. **Chọn A.**

Phần 2. Phương trình mũ chứa tham số

Câu 1. Cho phương trình $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3) \cdot 3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ với m là tham số. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 > 2$ là

- A. $(0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = 3^{\log_2 x} > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+3)t + m^2 + 3 = 0$. (*)

Nhận xét: 1) Cứ một nghiệm $t > 0$ thì cho một nghiệm $x > 0$.

2) Ta có $3^{\log_2 x_1} \cdot 3^{\log_2 x_2} = 3^{\log_2 x_1 + \log_2 x_2} = 3^{\log_2 x_1 x_2} > 3^{\log_2 2} = 3$ hay $t_1 t_2 > 3$.

Do đó để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 > 2$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 t_2 > 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 3 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (m^2 + 3) > 0 \\ m^2 + 3 > 3 \\ 2(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 2. Biết phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 2$. C. $1 < m < 3$. D. $m \geq 3$.

Lời giải. Đặt $t = 2^{x+1} > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4(m+1)t + 32 = 0$. (*)

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai

$$\text{nghiệm } t_1, t_2 \text{ đều dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 7 \geq 0 \\ m > -1 \end{cases}. \quad (1)$$

Gọi $t_1 \geq t_2 > 0$ là hai nghiệm của phương trình (*), suy ra $\begin{cases} x_1 + 1 = \log_2 t_1 \\ x_2 + 1 = \log_2 t_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = 6.$$

$$\text{Lại có } \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2 (t_1 t_2) = \log_2 32 = 5.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} \log_2 t_1 = 3 \\ \log_2 t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \log_2 t_1 = 2 \\ \log_2 t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 8 \end{cases}.$$

Với hai trường hợp ta đều có $t_1 + t_2 = 4(m+1) \Rightarrow m = 2$ (thỏa mãn (1)). **Chọn C.**

Cách khác. Đặt $t = 2^x > 0$, ta được $t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0$. Ta thấy $t_1 t_2 = 8$ nên suy ra $x_1 + x_2 = 3$. Đến đây kết hợp với giả thiết $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$ để tìm x_1, x_2 .

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2018; 2018)$ để phương trình $6 \cdot 2^{2x-1} - (7m-48) \cdot 2^x + 2m^2 - 16m = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 \geq 15$?

A. 1993.

B. 1994.

C. 3986.

D. 3988.

Lời giải. Đặt $t = 2^x$, vì $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

$$\text{Phương trình trở thành } 3t^2 - (7m - 48)t + 2m^2 - 16m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2m - 16 \\ t = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 > 1 \\ t_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 16 > 1 \\ \frac{m}{3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{17}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 = \log_2(2m - 16) \\ x_2 = \log_2 \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 \geq 15 \Leftrightarrow \log_2(2m - 16) \cdot \log_2 \frac{m}{3} \geq 15. \quad (*)$$

Xét hàm $f(m) = \log_2(2m - 16) \cdot \log_2 \frac{m}{3}$ là hàm đồng biến trên $\left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$.

Nhận thấy $(*)$ có dạng $f(m) \geq f(24) \Leftrightarrow m \geq 24 \xrightarrow[m \in (-2018; 2018)]{m \in \mathbb{Z}}$ có 1994 giá trị. **Chọn B.**

Câu 4. Cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(2; +\infty)$.B. $[2; +\infty)$.C. $(1; +\infty)$.D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải. Đặt $t = 2^{(x-1)^2} \geq 1$. Ph trình trở thành $t^2 - 2m \cdot t + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$. $(*)$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$ trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác $\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{BBT}} m > 2$. **Chọn A.**

t	1	1,5	2	$+\infty$			
f'	0	-	-	0	+		
f			$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
		1	$\searrow$	$-\infty$			

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $m \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1) \cdot 6^{x^2-2x} + m \cdot 4^{x^2-2x} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$?

A. 2010.

B. 2011.

C. 2012.

D. 2013.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2-2x)} - (2m+1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x} + m = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}$, vì $x \in (0; 2)$ nên $t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Phương trình trở thành $mt^2 - (2m+1)t + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t}{t^2 - 2t + 1}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{t}{t^2 - 2t + 1}$ trên $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \geq 6$. Kết hợp với giả thiết ta có $m \in \{6; 7; \dots; 2018\}$: có 2013 giá trị. **Chọn D.**

t	$\frac{2}{3}$	1
f'	+	
f	6	$-\infty$

Câu 6. Cho phương trình $(\sqrt{5}-1)^{x^2} + m(\sqrt{5}+1)^{x^2} = 2^{x^2-2}$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có đúng bốn nghiệm phân biệt là $(a; b)$. Hiệu $b-a$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{64}$.

D. $\frac{49}{64}$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{4}$.

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2}$ ($0 < t \leq 1$). Phương trình trở thành $t + \frac{m}{t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}t - t^2$. (*)

Nhận xét: 1) Cứ một nghiệm $t \in (0; 1)$ cho ta hai nghiệm x .

2) Với $t = 1$ cho ta một nghiệm $x = 0$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$.

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{4}t - t^2$ trên $(0; 1)$.

Dựa vào BBT ta có $0 < m < \frac{1}{64}$ thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra $b-a = \frac{1}{64}$. **Chọn C.**

t	0	$\frac{1}{8}$	1
f'		0	
f	0	$\frac{1}{64}$	$-\frac{3}{4}$

Câu 7. Cho phương trình $(4-\sqrt{7})^{x^2} + m(4+\sqrt{7})^{x^2} - 3^{x^2-1} = 0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho $36m \in \mathbb{Z}$ và phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 24.

C. 25.

D. 26.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{x^2} - \frac{1}{3} = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^{x^2}$ ($0 < t \leq 1$). Phương trình trở thành $t + \frac{m}{t} - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t}{3} - t^2$. (*)

Xét hàm $f(t) = \frac{t}{3} - t^2$ trên $(0;1)$.

Dựa vào BBT ta có $\begin{cases} m = \frac{1}{36} \\ -\frac{2}{3} < m \leq 0 \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài

t	0	$\frac{1}{6}$	1	
f'		+	0	-
f	0	$\nearrow \frac{1}{36}$	$\searrow -\frac{2}{3}$	

toán, suy ra $\begin{cases} 36m = 1 \\ -24 < 36m \leq 0 \end{cases}$. Vậy có tất cả 25 giá trị thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 8. Cho phương trình $m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc $(0;1]$.

A. $m \geq -6$. B. $-6 \leq m \leq -4$. C. $m \geq -4$. D. $m \leq 6$.

Lời giải. Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow m \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ với $1 < t \leq \frac{3}{2}$. Bất phương trình trở thành $mt^2 - (2m+1)t + m \leq 0$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2} = f(t), \forall t \in \left(1; \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow m \leq \min_{t \in \left[1; \frac{3}{2}\right]} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 6$. **Chọn D.**

Câu 9. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^x + 3 = m \cdot \sqrt{9^x + 1}$ có đúng 1 nghiệm có dạng $(a; b] \cup \{\sqrt{c}\}$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 4. B. 11. C. 14. D. 15.

Lời giải. Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình trở thành $t + 3 = m \sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$. (*)

Xét hàm $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có đúng 1 nghiệm dương

$\xrightarrow{\text{BBT}} \begin{cases} 1 < m \leq 3 \\ m = \sqrt{10} \end{cases}$. **Chọn C.**

t	0	$1/3$	$+\infty$	
f'		+	0	-
f	3	$\nearrow \sqrt{10}$	$\searrow 1$	

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực.

A. $-1 < m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $0 < m \leq \frac{2}{e}$. D. $\frac{1}{e} \leq m < 1$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$, vì $e^{2x} > 0$ nên $t > 1$.

Suy ra $t^4 = e^{2x} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^4 = t^4 - 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{t^4 - 1}$.

Khi đó phương trình trở thành $m + \sqrt[4]{t^4 - 1} = t \Leftrightarrow m = t - \sqrt[4]{t^4 - 1}$. (*)

Xét hàm $f(t) = t - \sqrt[4]{t^4 - 1}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4 - 1)^3}} < 0, \forall t > 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 1$. **Chọn B.**

t	1	$+\infty$
f'		-
f	1	0

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1)2^{7-x} - 6x + 3$. Khi phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 3m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [0; 1)$. B. $m_0 \in [1; 2)$. C. $m_0 \in [2; 3)$. D. $m_0 \in [3; 4]$.

Lời giải. Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2} = 7 - 4\sqrt{1 - (3x - 1)^2} \in [3; 7]$. Khi đó $f(t) = 1 - 3m$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$ trên đoạn $[3; 7]$.

Ta có $f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6$;

$$\begin{aligned} f''(t) &= 3^{t-4} (\ln 3)^2 - 2^{7-t} \ln 2 - 2^{7-t} \ln 2 + (t+1)2^{7-t} (\ln 2)^2 \\ &= 3^{t-4} (\ln 3)^2 + \underbrace{[-2 + (t+1)\ln 2]}_{>0, \forall t \in [3; 7]} 2^{7-t} \ln 2 > 0. \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$.

Lại có $\begin{cases} f'(3) < 0 \\ f'(7) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất t_0 thuộc $(3; 7)$.

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình $f(t) = 1 - 3m$ có số nghiệm nhiều nhất

$$\Leftrightarrow f(t_0) < 1 - 3m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m < \frac{1 - f(t_0)}{3}.$$

Suy ra $m_0 = \frac{5}{3} \in [1; 2)$. **Chọn B.**

t	3	t_0	7
f'	-	0	+
f	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 10.

Lời giải. Vì $e^x > 0$ nên $m \neq 0$.

Khi đó: $e^x = m(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{x+1}{e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = (x+1)e^{-x} = f(x)$.

Xét hàm $f(x) = (x+1)e^{-x}$. Ta có $f'(x) = -xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

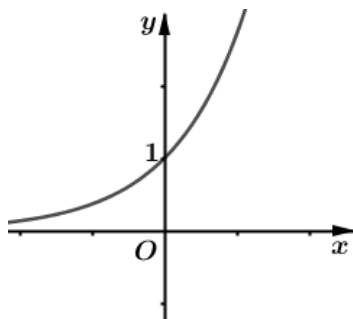
Dựa vào BBT, ta thấy phương trình có nghiệm duy

$$\text{nhất } \begin{cases} \frac{1}{m} = 1 \\ \frac{1}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

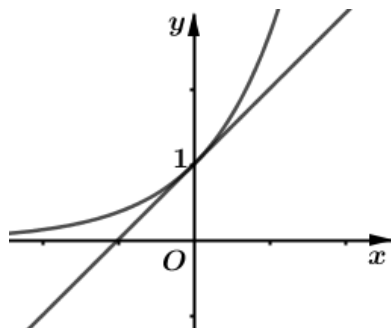
$$\frac{m \in \mathbb{Z}}{m \in [-5; 5]} \rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 1\}. \text{ Chọn B.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	1	0

Cách 2. Ta có $y = e^x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $y = e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ có đồ thị (C) (xem hình 1).



Hình 1



Hình 2

Do đó:

- Nếu $m < 0$ thì $y = m(x+1)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là một đường thẳng luôn qua điểm $(-1; 0)$ nên luôn cắt đồ thị (C): $y = e^x$ tại duy nhất một điểm.
- Nếu $m = 0$: phương trình vô nghiệm (do $y = e^x > 0$).
- Nếu $m > 0$: để phương trình có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng

$$\Delta: y = m(x+1) \text{ là tiếp tuyến của (C) (như hình 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = m(x+1) \\ e^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2000; 2000)$ để $2a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 1$ với a, b là các số thực lớn hơn 1?

A. 1999.

B. 2000.

C. 2001.

D. 2199.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{\log_a b}$ vì $a, b \in (1; +\infty)$ nên $t > 0$. Suy ra $\begin{cases} b = a^{t^2} \\ \sqrt{\log_b a} = \frac{1}{t} \end{cases}$

Bất phương trình trở thành $2a^t - (a^2)^{\frac{1}{t}} > mt + 1 \Leftrightarrow a^t > mt + 1 \Leftrightarrow m < \frac{a^t - 1}{t}, \forall t > 0$.

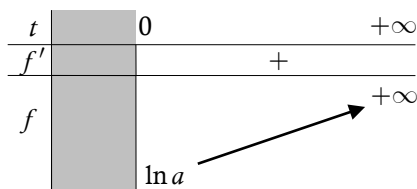
Xét hàm $f(t) = \frac{a^t - 1}{t}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{ta^t \ln a - a^t + 1}{t^2}$.

• $g(t) = ta^t \ln a - a^t + 1$ trên $[0; +\infty)$. Đạo hàm $g'(t) = ta^t \ln^2 a > 0, \forall t > 0$.

• Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên $g(t) > g(0) = 0, \forall t > 0$.

Suy ra $f'(t) > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Dựa vào BBT ta thấy $m \leq \ln a$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đúng với mọi $a > 1$ và m là số nguyên thuộc $(-2000; 2000)$ nên $m \in \{-1999; -1998; \dots; 0\}$. **Chọn B.**



Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{|x|} = \sqrt{m^2 - x^2}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $-3 < m < -1$.

Lời giải. Đặt $t = |x| \geq 0$. Phương trình trở thành $2^{2t} + t^2 = m^2$.

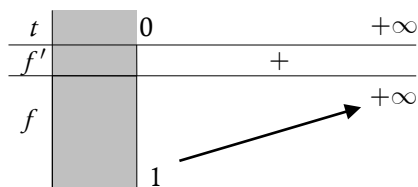
Nhận xét: Với mỗi nghiệm $t \neq 0$ ta tìm được tương ứng hai nghiệm x .

Xét hàm $f(t) = 2^{2t} + t^2$ trên $(0; +\infty)$ Ta có

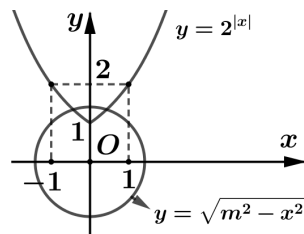
$$f'(t) = 2 \cdot 2^{2t} \cdot \ln 2 + 2t > 0, \forall t > 0.$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài

toán $m^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. **Chọn A.**



Cách 2. Phương pháp hình học. Nhận thấy phương trình $2^{|x|} = \sqrt{m^2 - x^2}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^{|x|}$ và nửa đường tròn $x^2 + y^2 = m^2$ (phần phía trên trục hoành) như hình vẽ. Dựa vào hình vẽ ta thấy để hai đường này cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $m^2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$.



Câu 15. Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Giá trị biểu thức $T = b^2 - a^2$ bằng

- A. 36. B. 48. C. 64. D. 72.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + [(x-2)^3 + m - 3x]2^{x-2} = 1$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (\sqrt[3]{m-3x})^3 = 2^{2-x} + (2-x)^3.$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t^3$ với $t \in \mathbb{R}$ và đi đến kết quả $\sqrt[3]{m-3x} = 2-x \Leftrightarrow m-3x = (2-x)^3$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8 \xrightarrow{\text{BBT}} m \in (4; 8) \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48. \text{ Chọn B.}$$

Câu 16. Cho phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm là

- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$. D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Phương trình } &\Leftrightarrow e^{3m} + e^m = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right) \left(2 + 2x\sqrt{1-x^2}\right) \\
&\Leftrightarrow e^{3m} + e^m = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right) \left[\left(x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2\right) + 1\right] \\
&\Leftrightarrow \left(e^m\right)^3 + e^m = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^3 + \left(x + \sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$ và đi đến kết quả $e^m = x + \sqrt{1-x^2} \xrightarrow{\text{BBT}} e^m \leq \sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \ln 2$. **Chọn C.**

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 2018 để phương trình

$$e^{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x + \frac{1}{x} + m}} = \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1} \text{ có nghiệm thực dương?}$$

A. 2014.

B. 2015.

C. 2016.

D. 2017.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}}{e^{\sqrt{x + \frac{1}{x} + m}}} = \frac{x + m + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) e^{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \left(x + \frac{1}{x} + m\right) e^{\sqrt{x + \frac{1}{x} + m}}.$

Xét hàm $f(t) = te^{\sqrt{t}}$ với $t \geq 0$ và đi đến kết quả $x^2 + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x} + m$

$$\Leftrightarrow m = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 \xrightarrow[\text{do } x > 0]{t = x + \frac{1}{x} \geq 2} t^2 - t - 2 \geq 0 \xrightarrow{\text{BBT}} m \geq 0.$$

Mà m là số nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m = \{1; 2; 3 \dots 2016; 2017\}$. **Chọn D.**

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình

$$\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. Vô số.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow m + \sqrt{m + e^x} = e^{2x} \Leftrightarrow m + e^x + \sqrt{m + e^x} = e^{2x} + e^x.$

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$ và đi đến kết quả $\sqrt{m + e^x} = e^x \Leftrightarrow m + e^x = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x \xrightarrow{\text{BBT}} m \geq -\frac{1}{4} \xrightarrow[\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m < 10}]{m \in \mathbb{Z}} \text{ có 10 giá trị thỏa mãn. } \mathbf{Chọn B.}$$

Câu 19. Biết rằng a là số thực để phương trình $9^x + 9 = a \cdot 3^x \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Hỏi a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-8; -4)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(4; 10)$.

D. $(12; 18)$.

Lời giải. Phương trình tương đương với $3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x)$. (*)

Nhận thấy rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình (*) thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*). Thật vậy

$$3^{2-x_0} + 3^{2-(2-x_0)} = a \cdot \cos[\pi(2-x_0)] \Leftrightarrow 3^{2-x_0} + 3^{x_0} = a \cdot \cos \pi x_0.$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $2 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Suy ra $a = -6$.

Thử lại $a = -6$, ta được $9^x + 9 = -6 \cdot 3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow (3^x - 3)^2 + 6 \cdot 3^x [1 + \cos(\pi x)] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3 = 0 \\ 1 + \cos(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } a = -6 \text{ thỏa mãn bài toán. Chọn A.}$$

Câu 20. Cho tham số thực a , biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos(ax)$ (1) có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos(ax) + 4$ (2) có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5.

B. 10.

C. 11.

D. 20.

Lời giải. Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2\left(\frac{ax}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\left(\frac{ax}{2}\right) & (2.1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\left(\frac{ax}{2}\right) & (2.2) \end{cases}$

Nhận xét: 1) $x = 0$ không là nghiệm của (1).

2) Nếu $x_0 \neq 0$ là nghiệm của (1) thì $2x_0$ là nghiệm (2.1) và $-2x_0$ là nghiệm (2.2).

Vậy phương trình (2) có 10 nghiệm thực phân biệt. **Chọn B.**

Phần 3. Phương trình logarit chứa tham số

Câu 1. Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

A. 16.

B. 119.

C. 120.

D. 159.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành $t^2 - (5m+1)t + 4m^2 + m = 0$. (*)

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \Delta = 9m^2 + 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow (3m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó phương trình (*) có 2 nghiệm là } \begin{cases} t_1 = m \\ t_2 = 4m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2^m \\ x_2 = 2^{4m+1} \end{cases}.$$

$$\text{Ycbt: } x_1 + x_2 = 165 \Leftrightarrow 2^m + 2^{4m+1} = 165 \Leftrightarrow 2^m = 3.$$

Suy ra $x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 162$. Khi đó $|x_1 - x_2| = 159$. **Chọn D.**

Câu 2. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left[-\frac{7}{2}; 0\right]$.

B. $\left[0; \frac{7}{2}\right]$.

C. $\left[\frac{7}{2}; 7\right]$.

D. $\left[7; \frac{21}{2}\right]$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0$. (*)

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4(2m - 7) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}$.

Áp dụng Vi-et ta có $t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 (x_1 x_2) = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 27$. Kết hợp với giả thiết ta được $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{cases}$.

Lại có $t_1 t_2 = 2m - 7 \Rightarrow \log_3 x_1 \cdot \log_3 x_2 = 2m - 7 \Leftrightarrow \log_3 3 \cdot \log_3 9 = 2m - 7 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$. **Chọn C.**

Câu 3. Cho phương trình $(m+2)\log_2^2 x + 4\log_2 x + (m-2) = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $0 < x_1 < 1 < x_2$ là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus [2; 2]$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, vì $0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \log_2 x_1 < \log_2 1 < \log_2 x_2$ nên $t_1 < 0 < t_2$.

Phương trình trở thành $(m+2)t^2 + 4t + m - 2 = 0$. (*)

Khi đó ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m+2)(m-2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. **Chọn B.**

Câu 4. Cho phương trình $\log_2^2 x - 2(m+1)\log_2 x + m^2 + 2m \leq 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ là

- A. $-1 < m < 0$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, vì $x \in [1; 2]$ nên $t \in [0; 1]$.

Bất phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m^2 + 2m \leq 0, \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 \leq 0 < 1 \leq t_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - m^2 - 2m > 0 \\ P \leq 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m \leq 0 \\ m^2 + 2m - 2(m+1) + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 5. Cho phương trình $\log_4 [2^{2x} + 2^{x+2} + 2^2] = \log_2 |m-2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải. Điều kiện: $m \neq 2$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_4 [(2^x + 2)^2] = \log_2 |m-2|$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2^x + 2) = \log_2 |m-2| \Leftrightarrow 2^x + 2 = |m-2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2 = m-2 \\ 2^x + 2 = 2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = m-4 \\ 2^x = -m \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m-4 \leq 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

$\xrightarrow[m \neq 2]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 3; 4\}$. **Chọn B.**

Câu 6. Cho phương trình $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$ có dạng $(a; b) \cup (c; d)$ với $a < b < c < d$. Tổng $a + b + 5c + 2d$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 & (1) \\ x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) có hai nghiệm là $x_1 = 1 - m, x_2 = 2m$ nên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \neq 2m \\ (1 - m)^2 + (2m)^2 > 1 \\ (1 - m)^2 + m(1 - m) - 2m^2 > 0 \\ (2m)^2 + m(2m) - 2m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \cdot \text{Chọn C.}$$

Câu 7. Cho phương trình $\log^2|\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log^2|\cos x| - 2m \log|\cos x| - m^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = \log|\cos x|$ ($t \leq 0$). Phương trình trở thành $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0$. (*)

Phương trình đã cho vô nghiệm khi

• Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 4(-m^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

• Phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 đều dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m < 2. \\ P > 0 \end{cases}$

Hợp hai trường hợp ta được $m \in (-\sqrt{2}; 2)$ thỏa ycbt $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên. **Chọn C.**

Câu 8. Cho phương trình $2\log_{\sqrt{mx-5}}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình có nghiệm duy nhất. Số phần tử của S bằng

- A. 13. B. 14. C. 15. D. 16.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{mx-5}}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ x = 2 \text{ hoặc } x = 5 \end{cases}$$

• Chỉ $x = 2$ là nghiệm thỏa bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2m - 5 \neq 1 \\ 5m - 5 \leq 0 \text{ hoặc } 5m - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

• Chỉ $x = 5$ là nghiệm thỏa bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 5m - 5 \neq 1 \\ 2m - 5 \leq 0 \text{ hoặc } 2m - 5 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} < m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 < 10m < 12 \\ 12 < 10m \leq 25 \\ 10m = 30 \end{cases} \xrightarrow{10m \in \mathbb{Z}} 10m \in \{11; 13; 14; \dots 25; 30\}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 9. Cho phương trình $\log_3(x^2 + 2mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - m - 1) = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2mx) = \log_3(2x - m - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - m - 1 > 0 \\ x^2 + 2mx = 2x - m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{m+1}{2} \\ x^2 + 2(m-1)x + m+1 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có một nghiệm thỏa mãn (1):

- $(*)$ có nghiệm kép thỏa (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_* = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} > \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$
- $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = \frac{m+1}{2} < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases}.$
- $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < \frac{m+1}{2} < x_2 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}.$

Vậy $\begin{cases} m = 0 \\ -1 \leq m \leq -\frac{1}{5} \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài toán: Có 2 giá trị nguyên thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Lời giải. Để bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

- Bất phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2. \quad (1)$$

- Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \Leftrightarrow \log(5x^2 + 5) \geq \log(mx^2 + 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 5x^2 + 5 \geq mx^2 + 4x + m, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -m^2 + 10m - 21 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $2 < m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 3$. **Chọn A.**

Câu 11. Tìm m để bất phương trình $\log_m(x^2 + 2x + m + 1) > 0$ đúng với mọi x .

A. $m > 0$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 2x + m + 1 > 0 \\ 0 < m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + m > 0 \\ 0 < m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1$.

Nhận xét. Với dạng $\log_a b > 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) > 0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (m-1)(x^2 + 2x + m) > 0$. (*)

Để (*) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

- Nếu $m < 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + m < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 0 \\ \Delta = 1 - m < 0 \end{cases}$: vô lí.
- Nếu $m > 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta = 1 - m < 0 \end{cases} \longleftrightarrow m > 1$: (thỏa).

Vậy $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Câu 12. Cho phương trình $\log_2[a^2 x^2(x-5) + \sqrt{6-x}] = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x-1})$. Có bao nhiêu giá trị của biến x để phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực a ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải. Vì đúng với mọi $a \in \mathbb{R}$ nên ta chọn $a = 0$.

Với $a = 0$, phương trình trở thành $\log_2 \sqrt{6-x} = \log_2(3 - \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$.

Thử lại chỉ có $x = 5$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 13. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Lời giải. Đặt $5^x + m = \log_5(x-m) = t$. Ta được hệ $\begin{cases} x-m = 5^t \\ 5^x + m = t \end{cases} \Rightarrow 5^x + x = 5^t + t$.

Xét hàm $f(x) = 5^x + x$ trên $\mathbb{R}$ và đi đến kết quả $x = t$.

Khi đó $m = x - 5^x = g(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$	$+\infty$
g'	+	0	-
g	$-\infty$	$g\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right)$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq g\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right)$.

$\frac{m \in (-20; 20)}{m \in \mathbb{Z}} \rightarrow m \in \{-19; -18; -17; \dots; -1\}$. Có 19 giá trị. **Chọn B.**

Câu 14. Cho phương trình $\ln[m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)] = \sin x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải: Phương trình $\Leftrightarrow [m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)] + \ln[m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)] = (m + 3 \sin x) + \ln(m + 3 \sin x)$.

Xét hàm $f(t) = t + \ln t$ với $t > 0$ và có được $m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) = m + 3 \sin x$

$$\Leftrightarrow \ln(m + 3 \sin x) = \sin x \xrightarrow[\substack{a = \sin x \\ a \in [-1; 1]}]{a = \sin x} \ln(m + 3a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 3a \in \left[e - 3; \frac{1}{e} + 3\right]. \text{ Chọn B.}$$

Câu 15. Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2 - 2x + 3} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-m|+2} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$.

Xét hàm $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t$ trên $[2; +\infty)$ và đi đến kết quả $x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ (x-1)^2 = -2(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 & (1) \\ x^2 = 2m - 1 & (2) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi:

- **TH1.** Phương trình (1) và (2) đều có nghiệm kép và hai nghiệm này khác nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} = 0 \\ x^2 = 2m - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow m \in \emptyset.$$

- **TH2.** Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ x^2 = 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (2m + 1) > 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

- **TH3.** Phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} < 0 \\ x^2 = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (2m + 1) < 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

● **TH4.** Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) cũng có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm của (1) giống hai nghiệm của (2) (hay nói cách khác hai phương này trình tương đương) $\longrightarrow m \in \emptyset$.

Vậy $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 16. Cho phương trình $\log_2(mx - x^3) + \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ với m là tham số thực. Gọi $S = (a, b)$ là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Hiệu $b - a$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(mx - x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 2 \\ m = 6x^2 - 14x - \frac{2}{x} + 29 \end{cases} \xrightarrow{\text{Xét hàm}} m \in \left(19; \frac{39}{2}\right). \text{ Chọn A.}$$

Câu 17. Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ là

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $0 \leq m < \frac{13}{6}$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$, vì $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}]$ nên $t \in [1; 2]$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t - 2}{2} = f(t) \in [0; 2]$ với $t \in [1; 2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$. **Chọn B.**

Câu 18. Cho phương trình $m \ln x = \ln(1 - x) + m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ là

- A. $-e < m < e$. B. $1 < m < e$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow m(\ln x - 1) = \ln(1 - x) \Rightarrow m = \frac{\ln(1 - x)}{\ln x - 1}$.

Xét $f(x) = \frac{\ln(1 - x)}{\ln x - 1}$ trên $(0; 1)$.

$$\text{Có } f'(x) = \left[\frac{\ln x - 1}{x - 1} - \frac{\ln(1 - x)}{x} \right] \cdot \frac{1}{(\ln x - 1)^2} > 0.$$

Dựa vào BBT suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m > 0$. **Chọn D.**

x	0	1
f'		+
f	0	$+\infty$

Câu 19. Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ với m là tham số thực. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[16; +\infty)$ là

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m \leq \sqrt{5}$. C. $1 \leq m \leq \sqrt{5}$. D. $\frac{3}{4} \leq m \leq \sqrt{5}$.

Lời giải. Đặt $t = \log_2 x$, vì $x \geq 16$ nên $t \geq 4$.

Phrình trở thành $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} = f(t) \in (1; \sqrt{5}]$ với $t \geq 4$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{5}$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$ với m là tham số dương khác 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm $x \in (2; +\infty)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải. Phương trình đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m 2 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \\ &\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot [\log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_m 2] = 0. \end{aligned}$$

- $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ vô nghiệm do $x > 2$.
- $\log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_m 2 = 0 \Leftrightarrow \log_m 2 = \log_5(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Xét hàm $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ trên $(2; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0, \forall x > 2$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến nên $f(x) > f(2) = 2 + \sqrt{3}$ với mọi $x > 2$.

Suy ra $\log_5(x + \sqrt{x^2 - 1}) > \log_5(2 + \sqrt{3})$.

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in (2; +\infty)$ khi và chỉ khi $\log_m 2 > \log_5(2 + \sqrt{3})$

$\xrightarrow[m \neq 1]{m \in \mathbb{Z}^+} m = 2$: Có duy nhất 1 giá trị. **Chọn A.**

Câu 21. Cho phương trình $(x^2 - 1) \cdot \log^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $[-10; 10]$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $1 \leq |x| \leq 3$?

A. 7.

B. 9.

C. 12.

D. 14.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \cdot \log^2(x^2 + 1) - 2m\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) + 2m + 8 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) \xrightarrow{\text{BBT}} t \in [0; 4]$ với $1 \leq |x| \leq 3$.

Nhận xét: Với mỗi nghiệm t ta có tương ứng 2 nghiệm x .

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t^2 - 2mt + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 8}{2t - 2}. \quad (*)$$

Do đó để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực x thỏa $1 \leq |x| \leq 3$ thì phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm $t \in [0; 4]$.

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + 8}{2t - 2}$ trên $[0; 4]$. Dựa

vào bảng biến thiên ta thấy $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$
thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

t	0	1	3
f'		-	-
f	-4	$+\infty$	4

$-\infty$

Câu 22. Cho bất phương trình $\log_x [x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m] > -1$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để bất phương trình luôn đúng với $x > 2$?

A. 2010.

B. 2017.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m > \frac{1}{x}, \forall x > 2$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2 - \frac{1}{x} > m(x-1), \forall x > 2 \Leftrightarrow x(x-1) - \frac{1}{x(x-1)} > m, \forall x > 2.$$

Đặt $t = x(x-1) > 2, \forall x > 2$. Khi đó $m < t - \frac{1}{t} = f(t), \forall t > 2$. Lập BBT của hàm $f(t)$ ta được $f(t) > \frac{3}{2}, \forall t > 2$. Suy ra $m \leq \frac{3}{2} \xrightarrow[m \in [-2017; 2017]]{m \in \mathbb{Z}}$ có 2019 giá trị. **Chọn D.**

Câu 23. Cho phương trình $2018^{x^2 + (2-m)x + 2} + [(x+1)^2 - mx] \ln(x^2 + 1) = 2018$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(-1; +\infty)$?

A. 2017.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow (1 - 2018^{x^2 + (2-m)x + 1}) \cdot 2018 = [x^2 + (2-m)x + 1] \cdot \ln(x^2 + 1)$.

• Nếu $x^2 + (2-m)x + 1 > 0$ thì $\begin{cases} VT < 0 \\ VP > 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Nếu $x^2 + (2-m)x + 1 < 0$ thì $\begin{cases} VT > 0 \\ VP < 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Thử thấy $x^2 + (2-m)x + 1 = 0$ (*) thỏa mãn phương trình. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất trên $(-1; +\infty)$. Bằng cách dùng tam thức

bậc hai hoặc xét hàm số cho ta kết quả $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases} \xrightarrow[m \in [-2018; 2018]]{m \in \mathbb{Z}}$ có 2019 giá trị. **Chọn C.**

Câu 24. Cho phương trình $2\sin^2 x - 3\cos^2 x = \log_2 \left(2^{m^2 + 4m + 3} + \frac{7}{2} \right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Phương trình $5\sin^2 x = \log_2 \left(2^{m^2 + 4m + 3} + \frac{7}{2} \right) + 3$. Ta có

- $5 \sin^2 x \leq 5$.

- $(m^2 + 4m + 3) = (m + 2)^2 - 1 \geq -1$ nên $\log_2 \left(2^{m^2 + 4m + 3} + \frac{7}{2} \right) \geq \log_2 \left(2^{-1} + \frac{7}{2} \right) = 2$.

Do đó phương trình
$$\begin{cases} 5 \sin^2 x = 5 \\ \log_2 \left(2^{m^2 + 4m + 3} + \frac{7}{2} \right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ m^2 + 4m + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $\log_{\frac{3}{2}} |x - 2| - \log_{\frac{2}{3}} (x + 1) = m$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 8.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải. Điều kiện: $-1 < x \neq 2$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}} |x - 2| + \log_{\frac{3}{2}} (x + 1) = m$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}} (|x - 2|(x + 1)) = m \Leftrightarrow |x - 2|(x + 1) = \left(\frac{3}{2} \right)^m. \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

$$f(x) = |x - 2|(x + 1) \text{ và đường thẳng } y = \left(\frac{3}{2} \right)^m \text{ (cùng phương với trục hoành).}$$

Xét hàm số $f(x) = |x - 2|(x + 1)$ xác định trên $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x) = |x - 2|(x + 1) = \begin{cases} h(x) = (x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2 & \text{khi } x > 2 \\ g(x) = -(x - 2)(x + 1) = -x^2 + x + 2 & \text{khi } -1 < x < 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi

$$0 < \left(\frac{3}{2} \right)^m < \max_{(-1; 2)} g(x) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^m < \frac{9}{4} \Leftrightarrow m < 2$$

$$\xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-10; -9; \dots; 1\}. \text{ Chọn D.}$$

