THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Có 7 tấm bìa ghi 7 chữ "HIỀN", "TÀI", "LÀ", "NGUYÊN", "KHÍ","QUỐC", "GIA". Một người xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa cạnh nhau. Tính xác suất để khi xếp các tấm bìa được dòng chữ "HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA".

A. $\frac{1}{25}$. **B.** $\frac{1}{5040}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** $\frac{1}{13}$.

Câu 2. Cho phương trình

$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}.$$

Khi đặt $t=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $4t^2-8t+3=0$. **B.** $4t^2-8t-3=0$.

C. $4t^2+8t-5=0$. **D.** $4t^2-8t+5=0$.

Câu 3. Trong các hàm số dưới đây, hàm nào **không** nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3+2x^2-7x$. **B.** $y=-4x+\cos x$.

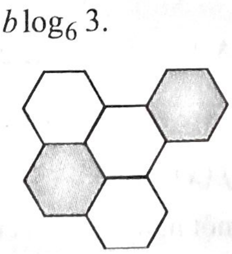
C. $y=-\frac{1}{x^2+1}$. **D.** $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Câu 4. Với hai số thực dương a, b tùy ý và $\frac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a=b\log_6 2$. **B.** $a=36b$.

C. $2a+3b=0$. **D.** $a=b\log_6 3$.

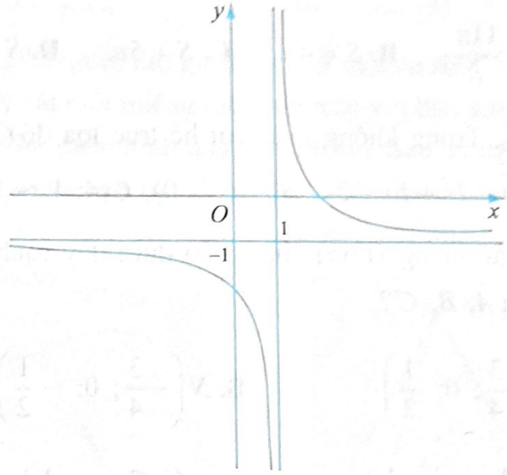
Câu 5. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi 68,5cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49{,}83\text{cm}^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?



A. ≈ 40 (miếng da) **B.** ≈ 20 (miếng da)

C. ≈ 35 (miếng da) **D.** ≈ 30 (miếng da)

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$.

C. $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=2^x$. Xét các mệnh đề sau:

(I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

(II). Tập xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{R}$.

(III). Đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng 1 điểm.

(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S=S_1+S_2$ (cm^2).

A. $S=4(2400+\pi)$. **B.** $S=2400(4+\pi)$.

C. $S=2400(4+3\pi)$. **D.** $S=4(2400+3\pi)$.

Câu 9. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2+2z+10=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=i^{2017}z_0$?

A. $M(3;\ -1)$. B. $M(3;\ 1)$.

C. $M(-3;\ 1)$. D. $M(-3;\ -1)$.

Câu 10. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x+5)(\sin^4 x-\cos^4 x)+3=0$ trong khoảng $(0;\ 2\pi)$.

A. $S=\frac{11\pi}{6}$. B. $S=4\pi$. C. $S=5\pi$. D. $S=\frac{7\pi}{6}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;\ 2;\ 0)$, $C(4;\ 1;\ -1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) điểm nào dưới đây cách đều ba điểm $A,\ B,\ C$?

A. $M\left(\frac{3}{4};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$. B. $N\left(-\frac{3}{4};\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

C. $P\left(\frac{3}{4};\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$. D. $Q\left(-\frac{3}{4};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2ax+b$ có điểm cực tiểu $A(2;\ -2)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=4$. B. $a+b=2$.

C. $a+b=-4$. D. $a+b=-2$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AHK$ và $S.ACD$ với H và K lần lượt là trung điểm của SC và SD. Tính độ dài đường cao h của khối chóp $S.ABCD$ và tỷ số $k=\frac{V_1}{V_2}$.

A. $h=a,\ k=\frac{1}{4}$. B. $h=a,\ k=\frac{1}{6}$.

C. $h=2a,\ k=\frac{1}{8}$. D. $h=2a,\ k=\frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\ln^2(x^2-2x+4)$. Tìm các giá trị của x để $f'(x)>0$.

A. $x\neq 1$. B. $x>0$. C. $x>1$. D. mọi x.

Câu 15. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x=0\end{cases}$$

, với $a\neq 0$. Tìm giá trị của a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

A. $a=1$. B. $a=\frac{1}{2}$. C. $a=-1$. D. $a=-\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như dưới đây:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. B. $m>0$.

C. $0<m<\frac{27}{4}$. D. $m>\frac{27}{4}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $A(1;\ 3;\ 2)$ là trung điểm của cạnh MN. Tính độ dài đoạn MN.

A. $MN=4\sqrt{33}$. B. $MN=2\sqrt{26,5}$.

C. $MN=4\sqrt{16,5}$. D. $MN=2\sqrt{33}$.

Câu 18. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x>0$ nếu biết rằng $C_n^2-C_n^1=44$.

A. 165. B. 238. C. 485. D. 525.

Câu 19. Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$ và $f(x)=(-x^2+3x+6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a=1, b=-7$. B. $a=-1, b=-7$.

C. $a=-1, b=7$. D. $a=1, b=7$.

Câu 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

C. $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 22. Biết đường thẳng $y = -\dfrac{9}{4}x - \dfrac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;\, y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = \dfrac{13}{12}$. **B.** $y_0 = \dfrac{12}{13}$.

C. $y_0 = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $y_0 = -2$.

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số đầu tiên của nó. Biết $S_7 = 77$ và $S_{12} = 192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó.

A. $u_n = 5 + 4n$. **B.** $u_n = 3 + 2n$.

C. $u_n = 2 + 3n$. **D.** $u_n = 4 + 5n$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;\, 2;\, -4), B(1;\, -3;\, 1), C(2;\, 2;\, 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l = 2\sqrt{13}$. **B.** $l = 2\sqrt{41}$.

C. $l = 2\sqrt{26}$. **D.** $l = 2\sqrt{11}$.

Câu 25. Đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - 3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

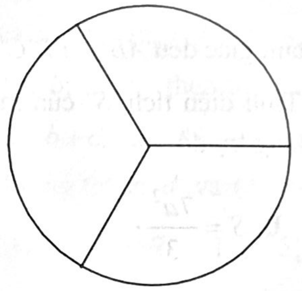
A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

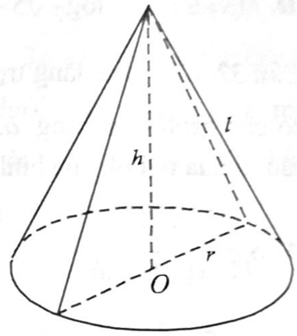
Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C'): x^2 + y^2 + 2(m-2)y - 6x + 12 + m^2 = 0$ và $(C): (x+m)^2 + (y-2)^2 = 5$. Vectơ $\vec{v}$ nào dưới đây là vectơ của phép tịnh tiến biến (C) thành (C')?

A. $\vec{v} = (2;\, 1)$. **B.** $\vec{v} = (-2;\, 1)$.

C. $\vec{v} = (-1; 2)$. **D.** $\vec{v} = (2; -1)$.

Câu 27. Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miền hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?





A. $V = \dfrac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

C. $V = \dfrac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V = \dfrac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. Ông *An* muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng$/\text{m}^2$. Nếu ông *An* biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông *An* trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 108 triệu đồng. **B.** 54 triệu đồng.

C. 168 triệu đồng. **D.** 90 triệu đồng.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$, $A(2;\ 1;\ 4)$. Gọi $H(a;\ b;\ c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất.Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=8$. **B.** $T=62$. **C.** $T=13$. **D.** $T=\sqrt{5}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=5^x.8^{2x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2 5+2x^3\le 0$.

B. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x+6x^3\log_5 2\le 0$.

C. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2 5+3x^3\le 0$.

D. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2 \sqrt{5}+3x^3\le 0$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S=\frac{49\pi a^2}{144}$. **B.** $S=\frac{7a^2}{3}$.

C. $S=\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S=\frac{49a^2}{144}$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 2. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)dx=2;\ \int_0^3 f(x)dx=6$. Tính $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)dx$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d=d_1+d_2$.

A. $d=\frac{2a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d=\frac{2a\sqrt{22}}{33}$.

C. $d=\frac{8a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $d=\frac{8a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 36. Gọi $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a,\ b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=11$.

C. $a+b=4$. **D.** $a+b=8$.

Câu 37. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{343}{12}$. **B.** $S=\frac{793}{4}$.

C. $S=\frac{397}{4}$. **D.** $S=\frac{937}{12}$.

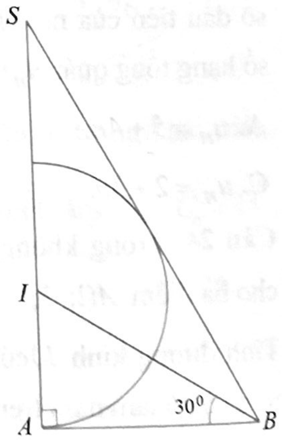
Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m>-3$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m>0$.

Câu 39. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D=(-\infty;\ -1]\cup\left[1;\ \frac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$.

A. $T=\frac{1}{9}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\frac{3}{2}$.

Câu 40. Cho tam giác SAB vuông tại A, $\widehat{ABS}=60^0$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối tròn xoay có thể tích tương ứng V_1, V_2.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $4V_1=9V_2$. **B.** $9V_1=4V_2$.

C. $V_1=3V_2$. **D.** $2V_1=3V_2$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1)dx=4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp chúng bằng 1 ?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 43. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB=a$, diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2. Tiếp tục như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5,...$ Tính $S=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{100}$.

A. $S=\dfrac{2^{100}-1}{2^{99}a^2}$. B. $S=\dfrac{a(2^{100}-1)}{2^{99}}$.

C. $S=\dfrac{a^2(2^{100}-1)}{2^{99}}$. D. $S=\dfrac{a^2(2^{99}-1)}{2^{99}}$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2(3^x+1)\right)>\log_{0,02}m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;\ 0)$.

A. $m>9$. B. $m<2$. C. $0<m<1$. D. $m\geq 1$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;\ 2;\ 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với điểm gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$. B. $2x+y+3z+9=0$.

C. $3x+2y+z-14=0$. D. $2x+y+z-9=0$.

Câu 46. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4;\ 3)$ và bán kính $R=3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F=4a+3b-1$. Tính giá trị $M+m$.

A. $M+m=63$. B. $M+m=48$.

C. $M+m=50$. D. $M+m=41$.

Câu 47. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$$

và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=16$. B. $a+b=11$.

C. $a+b=14$. D. $a+b=13$.

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ có bán kính $R=\sqrt{19}$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=5+t\\y=-2-4t\\z=-1-4t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-y-3z-1=0$. Trong các số $\{a;\ b;\ c;\ d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a+b+c+d=43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P)?

A. $\{-6;\ -12;\ -14;\ 75\}$. B. $\{6;\ 10;\ 20;\ 7\}$.

C. $\{-10;\ 4;\ 2;\ 47\}$. D. $\{3;\ 5;\ 6;\ 29\}$.

Câu 49. Đặt $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$.

Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$. B. $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. D. $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 50. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;\ a]$ thỏa mãn $\begin{cases}f(x).f(a-x)=1\\f(x)>0, \forall x\in[0;\ a]\end{cases}$ và $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b,c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;\ 22)$. B. $(0;\ 9)$.

C. $(7;\ 21)$. D. $(2017;\ 2020)$.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ THÁNG 10/2017

Câu 1. **[1D2-2]** Có 7 tấm bìa ghi 7 chữ “HIỀN”, “TÀI”, “LÀ”, “NGUYÊN”, “KHÍ”, “QUỐC”, “GIA”. Một người xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa cạnh nhau. Tính xác suất để khi xếp các tấm bìa được dòng chữ “HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA”.

A. $\frac{1}{25}$. **B.** $\frac{1}{5040}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** $\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn B.

Xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa có $7!=5040$ (cách xếp) $\Rightarrow n(\Omega)=5040$.

Đặt A là biến cố “xếp được chữ HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA”. Ta có $n(A)=1$.

Vậy $P(A)=\frac{1}{5040}$.

Câu 2. **[1D2-2]** Cho phương trình $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}$. Khi đặt $t=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $4t^2-8t+3=0$. **B.** $4t^2-8t-3=0$.

C. $4t^2+8t-5=0$. **D.** $4t^2-8t+5=0$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình tương đương với: $-\cos 2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\frac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+8\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-3=0$, nên nếu đặt $t=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ phương trình trở thành $-4t^2+8t-3=0 \Leftrightarrow 4t^2-8t+3=0$.

Câu 3. **[2D1-2]** Trong các hàm sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=-x^3+2x^2-7x$. **B.** $y=-4x+\cos x$.

C. $y=-\frac{1}{x^2+1}$. **D.** $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Lời giải

Chọn C.

Với $y=-\frac{1}{x^2+1}$ ta có $y'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$y'>0$ khi $x>0$ và $y'<0$ khi $x<0$. Nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Câu 4. **[2D2-2]** Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\dfrac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. $a=b\log_6 2$.

B. $a=36b$.

C. $2a+3b=0$.

D. $a=b\log_6 3$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\dfrac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2\Leftrightarrow\dfrac{\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2\Leftrightarrow\log_6 a-\log_6 b=2$

$\Leftrightarrow\log_6\dfrac{a}{b}=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=36\Leftrightarrow a=36b$.

Câu 5. **[2H2-3]** Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là $68.5\left(\text{cm}\right)$. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49.83\ \left(\text{cm}^2\right)$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. ≈ 40 (miếng da).

B. ≈ 20 (miếng da).

C. ≈ 35 (miếng da).

D. ≈ 30 (miếng da).

Lời giải

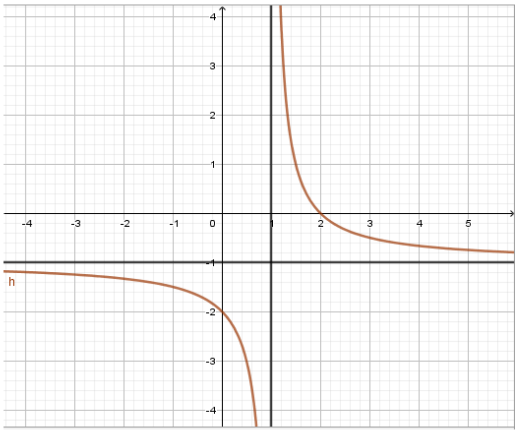
Chọn D.

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là $68.5\left(\text{cm}\right)$, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có: $2\pi R=68.5\Rightarrow R=\dfrac{68.5}{2\pi}$

Diện tích mặt cầu: $S_{xq}=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{68.5}{2\pi}\right)^2\approx 1493.59\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Vì mỗi miếng da có diện tích $49.83\ \left(\text{cm}^2\right)$ nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\dfrac{1493.59}{49.83}\approx 29.97$. Vậy phải cần ≈ 30 (miếng da).

Câu 6. **[2D1-2]** Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị, ta có: $\begin{cases} \dfrac{a}{1}=-1 \\ -a+b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ -b<-1=a \end{cases} \Rightarrow b<a<0$.

Câu 7. **[2D2-2]** Cho hai hàm số $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=2^x$. Xét các mệnh đề sau:

(I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.
(II). Tập xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{R}$.
(III). Đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng 1 điểm.
(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.
Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

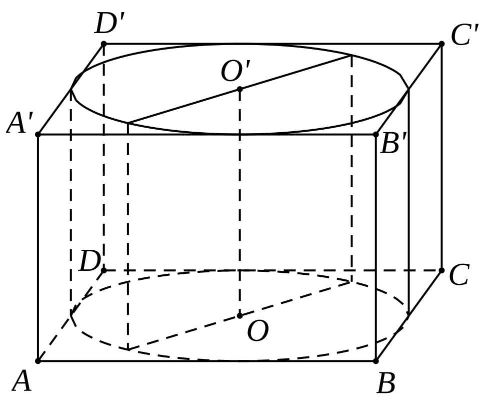
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Các mệnh đề đúng là:
(I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 8. **[2H2-2]** Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S=S_1+S_2$ $\left(\text{cm}^2\right)$.



A. $S=4\left(2400+\pi\right)$. **B.** $S=2400\left(4+\pi\right)$.

C. $S=2400\left(4+3\pi\right)$. **D.** $S=4\left(2400+3\pi\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $s_1 = 6.40^2 = 9600$.

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r = 20$ cm; hình trụ có đường sinh $h = 40$ cm

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2 = 2.\pi.20^2 + 2\pi.20.40 = 2400\pi$.

Vậy: $S = S_1 + S_2 = 9600 + 2400\pi = 2400(4+\pi)$.

Câu 9. **[2D4-2]** Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2017}z_0$?

A. $M(3;\ -1)$. **B.** $M(3;\ 1)$. **C.** $M(-3;\ 1)$. **D.** $M(-3;\ -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1+3i \\ z = -1-3i \end{array}\right.$. Suy ra $z_0 = -1+3i$.

$w = i^{2017}z_0 = i.(-1+3i) = -3-i$.

Suy ra : Điểm $M(-3;\ -1)$ biểu diễn số phức w.

Câu 10. **[1D1-3]** Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $S = \dfrac{11\pi}{6}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = 5\pi$. **D.** $S = \dfrac{7\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $$\begin{aligned} &(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\cos^2(2x) - 5\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \end{aligned}.$$

$\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \,(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

Do đó: $S = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{11\pi}{6} = 4\pi.$

Câu 11: [2H3-2] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;\,2;0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz), điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A,B,C.

A. $M\left(\frac{3}{4};\,0;\,\frac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\frac{-3}{4};\,0;\,\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{4};\,0;\,\frac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{-3}{4};\,0;\,\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $A(2;2;2)$ và $PA=PB=PC=\frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Câu 12: [2D1-2] Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2ax+b$ có điểm cực tiểu $A(2;-2)$. Khi đó $a+b=$

A. 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6x+2a$. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2;-2)$ nên ta có:

$y'(2)=0\Leftrightarrow 2a=0\Leftrightarrow a=0$.

Do đồ thị qua $A(2;-2)\Rightarrow -2=8-12+b\Leftrightarrow b=2$

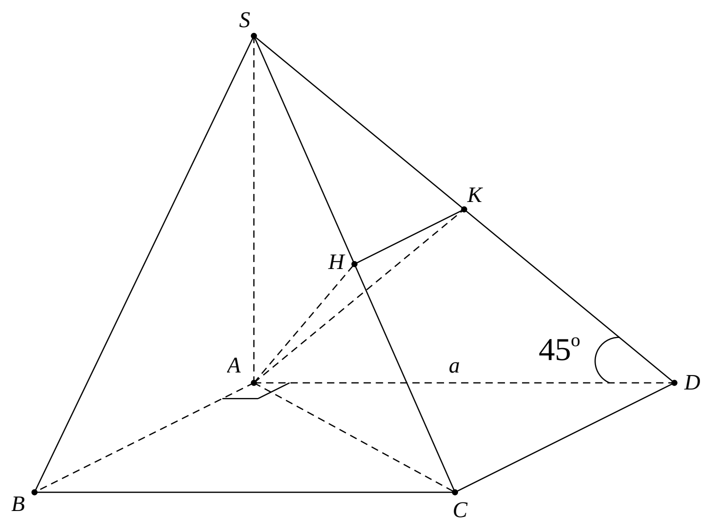
Vậy $a+b=2$.

Câu 13: [2H1-2] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích khối chóp $S.AHK$ và $S.ACD$ với $H;K$ lần lượt là trung điểm của SC và SD. Tính độ dài đường cao của khối chóp $S.ABCD$ và tỉ số $k=\frac{V_1}{V_2}$.

A. $h=a;k=\frac{1}{4}$. **B.** $h=a;k=\frac{1}{6}$. **C.** $h=2a;k=\frac{1}{8}$. **D.** $h=2a;k=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy nên $SA\perp(ABCD)$.

Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng $(SCD)\&(ABCD)$ là $SDA = 45^o$.

Ta có tam giác SAD là tam giác vuông cân đỉnh A. Vậy $h = SA = a$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích có: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SH}{SC}.\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 14: [2D2-2] Cho hàm số $f(x) = \ln^2(x^2 - 2x + 4)$. Tìm các giá trị của x để $f'(x) > 0$.

A. $x \neq 1$. **B.** $x > 0$. **C.** $x > 1$. **D.** $\forall x$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+4}\ln(x^2-2x+4).$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (4x-4)\ln(x^2-2x+4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0 \\ \ln(x^2-2x+4)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0 \\ \ln(x^2-2x+4)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x+4>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2-2x+4<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2-2x+3<0 \end{cases} (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x>1.$$

Câu 15: [1D4-2] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

A. $a = 1$. **B.** $a = \dfrac{1}{2}$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

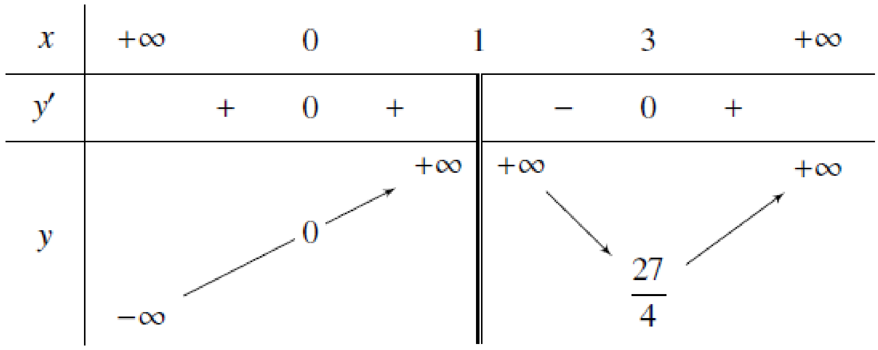
Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}.a = a.$$

$f(0) = \dfrac{1}{2}$; hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Câu 16. **[2D1-3]** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau



Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $0<m<\frac{27}{4}$. **D.** $m>\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Qua bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt khi $m>\frac{27}{4}$.

Câu 17. [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm MN. Tính độ dài đoạn MN.

A. $MN=4\sqrt{33}$. **B.** $MN=2\sqrt{26,5}$. **C.** $MN=4\sqrt{16,5}$. **D.** $MN=2\sqrt{33}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì $N=\Delta\cap d$ nên $N\in d$, do đó $N(-2+2t;1+t;1-t)$.

Mà $A(1;3;2)$ là trung điểm MN nên $\begin{cases} x_M=2x_A-x_N \\ y_M=2y_A-y_N \\ z_M=2z_A-z_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=4-2t, \\ y_M=5-t, \\ z_M=3+t. \end{cases}$

Vì $M=\Delta\cap(P)$ nên $M\in(P)$, do đó $2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Suy ra $M(8;7;1)$ và $N(-6;-1;3)$.

Vậy $MN=2\sqrt{66}=4\sqrt{16,5}$.

Câu 18. [1D2-3] Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x>0$, nếu biết rằng $C_n^2-C_n^1=44$.

A. 165. **B.** 238. **C.** 485. **D.** 525.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n = 11$ hoặc $n = -8$ (loại).

Với $n = 11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$$C_{11}^k \left(x\sqrt{x}\right)^{11-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = C_{11}^k x^{\frac{33}{2} - \frac{11}{2}k}.$$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{33}{2} - \dfrac{11k}{2} = 0$ hay $k = 3$.

Vậy, số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 19. **[2D3-2]** Cho hai hàm số $F(x) = \left(x^2 + ax + b\right)e^{-x}$ và $f(x) = \left(-x^2 + 3x + 6\right)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7$. **B.** $a = -1, b = -7$. **C.** $a = -1, b = 7$. **D.** $a = 1, b = 7$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $F'(x) = \left(-x^2 + (2-a)x + a - b\right)e^{-x} = f(x)$ nên $2 - a = 3$ và $a - b = 6$.

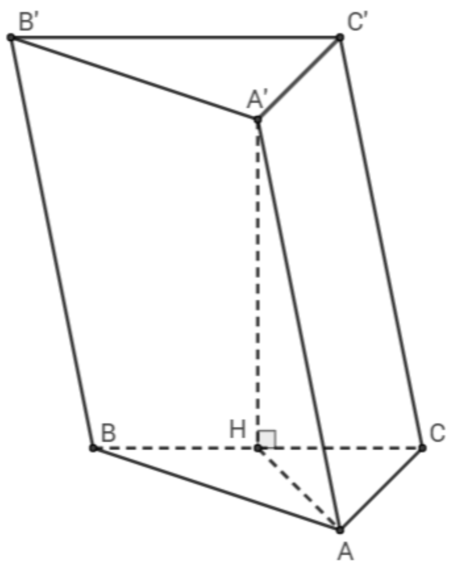
Vậy $a = -1$ và $b = -7$.

Câu 20. **[2H1-2]** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là

$$V = S_{\Delta ABC}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 21: **[1D4-2]** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & khi \quad x<1\\ \dfrac{1}{x} & khi \quad x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

B. Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=1$.

C. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm tại $x=1$.

D. Hàm số $f\left(x\right)$ không có đạo hàm tại $x=1$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3-x^2}{2}=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$. Do đó, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{2\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1+x}{-2}=-1$ và

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{x\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x}=-1$. Do đó, Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=1$.

Câu 22: **[2D1-1]** Biết đường thẳng $y=-\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$ tại một điểm duy nhất; ký hiệu $\left(x_0;\, y_0\right)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=\dfrac{13}{12}$. **B.** $y_0=\dfrac{12}{13}$. **C.** $y_0=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $y_0=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$-\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{24}=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x \iff \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{24}=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó, $y_0=y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{13}{12}$.

Câu 23: **[1D3-2]** Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ và gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $S_7=77$ và $S_{12}=192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó

A. $u_n=5+4n$. **B.** $u_n=3+2n$. **B.** $u_n=2+3n$. **C.** $u_n=4+5n$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases}S_7=77\\ S_{12}=192\end{cases} \iff \begin{cases}7u_1+\dfrac{7.6.d}{2}=77\\ 12u_1+\dfrac{12.11.d}{2}=192\end{cases} \iff \begin{cases}7u_1+21d=77\\ 12u_1+66d=192\end{cases} \iff \begin{cases}u_1=5\\ d=2\end{cases}$.

Khi đó: $u_n=u_1+\left(n-1\right)d=5+2\left(n-1\right)=3+2n$.

Câu 24: **[2H3-3]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l=2\sqrt{13}$. **B.** $l=2\sqrt{41}$. **C.** $l=2\sqrt{26}$. **D.** $l=2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi tâm mặt cầu là : $I(x;\ y;\ 0)$.

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2 \\ x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow l=2R=2\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=2\sqrt{26}.$$

Câu 25: **[2D1-2]** Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định : $\begin{cases} x^2-4x\ge 0 \\ x^2-3x\ge 0 \\ \sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \ \vee x\ge 4 \\ x\le 0 \ \vee x\ge 3 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x<0 \ \vee x\ge 4$.

Nên tập xác định : $D=(-\infty;\ 0)\cup[4;\ +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1}=-2 \Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1}=2 \Rightarrow y=2 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Câu 26: **[1H1-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C'):x^2+y^2+2(m-2)y-6x+12+m^2=0$ và $(C):(x+m)^2+(y-2)^2=5$. Vectơ $\vec{v}$ nào dưới đây là vectơ của phép tịnh tiến biến (C) thành (C')?

A. $\vec{v}=(2;1)$. **B.** $\vec{v}=(-2;1)$. **C.** $\vec{v}=(-1;2)$. **D.** $\vec{v}=(2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để (C') là đường tròn $(m-2)^2+9-12-m^2>0 \Leftrightarrow -4m+1>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$.

Khi đó

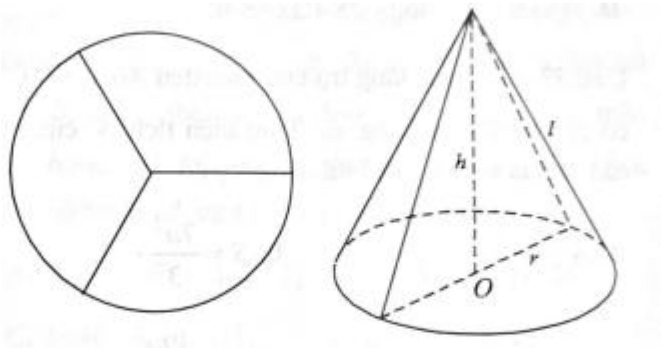
Đường tròn (C') có tâm là $I'(3;2-m)$, bán kính $R'=\sqrt{-4m+1}$.

Đường tròn (C) có tâm là $I(-m;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến (C) thành (C') khi và chỉ khi $\begin{cases} R'=R \\ \overrightarrow{II'}=\vec{v} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-4m+1}=\sqrt{5} \\ \vec{v}=\overrightarrow{II'}=(3+m;-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ \vec{v}=(2;1) \end{cases}$.

Câu 27: **[2H2-3]** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miến tôn hình tròn với bán kính $60\,cm$ thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $V=\dfrac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

C. $V=\dfrac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V=\dfrac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Lời giải

Chọn B

Đổi $60\,cm=6\,dm$.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $l=6\,dm$.

Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành bằng $2\pi.r=\dfrac{2\pi.6}{3}=4\pi\,dm$.

Suy ra bán kính đáy của hình nón tạo thành bằng $r=\dfrac{4\pi}{2\pi}=2\,dm$.

Đường cao của khối nón tạo thành là $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi cái phễu là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.2^2.4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}dm^3=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 28: **[1D5-2]** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x+1$ có đồ thị $\left(C\right)$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm thuộc đồ thị $\left(C\right)$ có hoành độ là nghiệm phương trình $2f'\left(x\right)-x.f''\left(x\right)-6=0$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-12x+9$; $f''\left(x\right)=6x-12$.

$2f'\left(x\right)-x.f''\left(x\right)-6=0\Leftrightarrow 2\left(3x^2-12x+9\right)-x\left(6x-12\right)-6=0$

$\Leftrightarrow -12x+12=0\Leftrightarrow x=1$.

Khi $x=1\Rightarrow f'\left(1\right)=0;\ f\left(1\right)=5$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y=5$.

Câu 29: **[2D1-3]** Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,cm^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2. Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 108 triệu đồng. **B.** 54 triệu đồng.

C. 168 triệu đồng. **D.** 90 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, $2a$, c.

Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

Thể tích bể $V=a.2a.c=2a^2c=288\Rightarrow c=\dfrac{144}{a^2}$.

Vậy $S=2a^2+6a.\dfrac{144}{a^2}=2a^2+\dfrac{864}{a}=2a^2+\dfrac{432}{a}+\dfrac{432}{a}\geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{432}{a}.\dfrac{432}{a}}=216$.

Vậy $S_{min}=216\,cm^2=2{,}16\,m^2$.

Chi phí thấp nhất là $2{,}16\times 500000=108$ triệu đồng.

Câu 30: **[2H3-2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $A\left(2;1;4\right)$. Gọi $H\left(a;b;c\right)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=8$. **B.** $T=62$. **C.** $T=13$. **D.** $T=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=1+2t\end{cases}\ \left(t\in\mathbb{R}\right)$.

$H\in d\Rightarrow H\left(1+t;2+t;1+2t\right)$.

Độ dài $AH=\sqrt{\left(t-1\right)^2+\left(t+1\right)^2+\left(2t-3\right)^2}=\sqrt{6t^2-12t+11}=\sqrt{6\left(t-1\right)^2+5}\geq\sqrt{5}$.

Độ dài AH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t=1\Rightarrow H\left(2;3;3\right)$.

Vậy $a=2$, $b=3$, $c=3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=62$.

Câu 35 bị sai đề nên đã sửa lại đề.

Câu 31 có 2 đáp án sai là A và C nên đã sửa đề.

Câu 31. **[2D2-3]** Cho hàm số $f(x)=5^x.8^{2x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2 5+2.x^3\le 0$.

B. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x+6x^3\log_5 2\le 0$.

C. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2 5+6x^3\le 0$.

D. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\log_2\sqrt{5}+3x^3\le 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x\log_2 5+2x^3\le 0 \Leftrightarrow \log_2 5^x+\log_2 2^{2x^3}\le 0 \Leftrightarrow \log_2\left(5^x.2^{2x^3}\right)\le 0 \Leftrightarrow 5^x.2^{2x^3}\le 1$.

Vậy A sai.

Câu 32. **[2H2-3]** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S=\dfrac{49\pi a^2}{144}$.

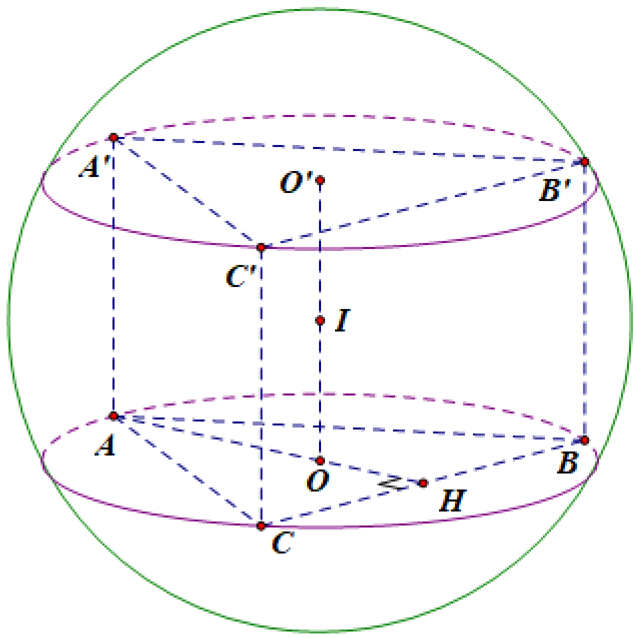
B. $S=\dfrac{7a^2}{3}$.

C. $S=\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

D. $S=\dfrac{49a^2}{144}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi mặt cầu đi qua 6 đỉnh của lăng trụ là (S) tâm I, bán kính R.

Do $IA=IB=IC=IA'=IB'=IC'=R \Rightarrow$ hình chiếu của I trên các mặt $(ABC),(A'B'C')$ lần lượt là tâm O của ΔABC và tâm O' của $\Delta A'B'C'$.

Mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều $\Rightarrow I$ là trung điểm của $OO' \Rightarrow OI=\dfrac{OO'}{2}=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Do O là tâm tam giác đều ABC cạnh a $\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông OAI có: $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích của mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 33. **[2D1-2]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 2. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 - m \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -m - 7 \end{array}\right.$.

Lập bbt ta thấy hàm số có hai giá trị cực trị là y_1, y_2.

Để hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow (1-m)(-m-7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Vậy phương án D đúng.

Câu 34. **[2D3-3]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2; \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{2}{3}$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \frac{3}{2}$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn B

Có $I = \int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1/2} f(1-2x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1/2} f(1-2x)\mathrm{d}(1-2x)\Big|_{t=1-2x} + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)\Big|_{t=2x-1}$$

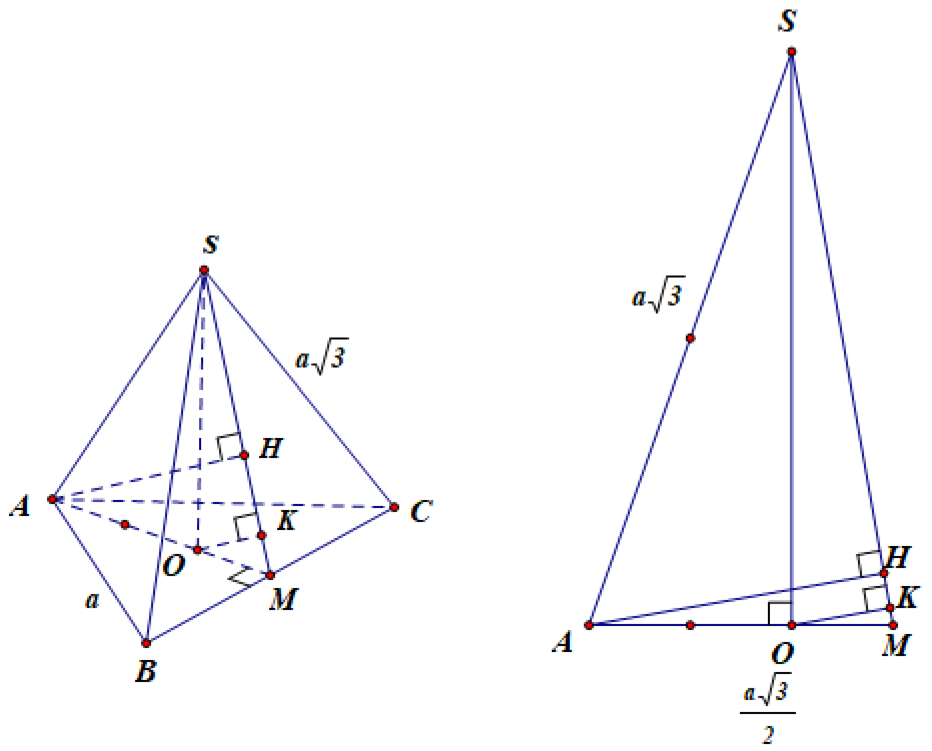
$$= -\frac{1}{2}\int_3^0 f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times 6 + \frac{1}{2}\times 2 = 4.$$

Câu 35. **[1H3-3]** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{33}$. **C.** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$. **D.** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{11}$.

Lời giải

Chọn C



Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO \perp BC$ tại M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, MO = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO \perp (ABC)$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng $OK \perp SM, AH \perp SM \Rightarrow AH // OK; \dfrac{OK}{AH} = \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{1}{3}$.

Có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp OK$.

Có $\begin{cases} OK \perp SM \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SBC), AH \perp (SBC)$ (do $AH // OK$).

Từ đó có $d_1 = d(A,(SBC)) = AH = 3OK; d_2 = d(O,(SBC)) = OK$.

Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên:

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{36}{3a^2}+\frac{9}{24a^2}=\frac{99}{8a^2}\Rightarrow OK=\frac{2a\sqrt{2}}{33}.$$

Vậy $d=d_1+d_2=4OK=\dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Câu 36. **[2D2-3]** Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=8$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\log_9 x=t$

Theo đề ra có

$$\begin{cases}\log_9 x=\log_6 y=t\\ \log_9 x=\log_4(x+y)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9^t & (1)\\ y=6^t & (2)\\ x+y=4^t & (3)\\ \dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (4)\end{cases}$$

Từ (1), (2), và (3) ta có

$9^t+6^t=4^t$

$$\Leftrightarrow\left(3^t\right)^2+(3.2)^t-4^t=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & (TM)\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & (L)\end{array}\right.$$

Thế vào (4) ta được $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow a=1;b=5$

Thử lại ta thấy $a=1;b=5$ thõa mãn dữ kiện bài toán. Suy ra $a+b=6$.

Câu 37. **[2D3-2]** Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$

A. $S=\dfrac{343}{12}$ **B.** $S=\dfrac{793}{4}$ **C.** $S=\dfrac{397}{4}$ **D.** $S=\dfrac{937}{12}$

Lời giải

Chọn D.

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình;

$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow -x^3+12x+x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-3\\ x=0\end{array}\right.$$

Ta có

$$S=\int_{-3}^{o}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^{0}\left(x^3-12x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left(-x^3+12x+x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}.$$

Câu 38. **[2D1-4]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3x-3\cos^2x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m>-3$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $\sin x=t, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2-mt-4$

Ta có $f'(t)=3t^2+6t-m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ cần:

$f'(t)\ge 0 \quad \forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 3t^2+6t-m\ge 0 \quad \forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 3t^2+6t\ge m \quad \forall t\in[0;1]$

Xét hàm số $g(t)=3t^2+6t$

$g'(t)=6t+6$

$g'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0	1	$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0		$+$		
$g(t)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	9	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m\le 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 39. **[2D1-2]** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$

A. $T=\frac{1}{9}$ **B.** $T=\frac{3}{2}$ **C.** $T=0$ **D.** $T=-\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C.

$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$

Tập xác định $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\setminus\{2\}$

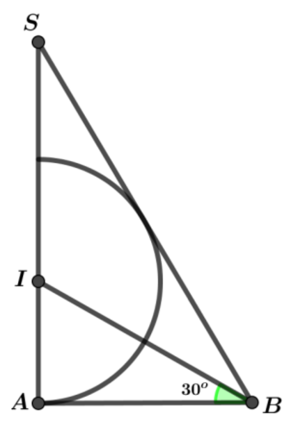
$$y'=\dfrac{\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}$$

$y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$			$-$	
$f(x)$	-1 ↗	0		0 ↘	$-\sqrt{5}$

Vậy $M.m=0$

Câu 40. **[2H2-2]** Cho tam giác SAB vuông tại A, $ABS=60^o$, đường phân giác trong của ABS cắt SA tại điểm I. Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối cầu và khối nón có thể tích tương ứng V_1,V_2. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $4V_1=9V_2$ **B.** $9V_1=4V_2$

C. $V_1=3V_2$ **D.** $2V_1=3V_2$

Lời giải

Chọn B

Đặt $AB=x$

Khối cầu: $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi IA^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(x\tan 30^o\right)^3$

Khối nón $V_2=\dfrac{1}{3}\pi AB^2SA=\dfrac{1}{3}\pi x^2.\left(x\tan 60^o\right)$

$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{9}$

Câu 41. [2D3-3]Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int\limits_1^k(2x-1)\mathrm{d}x=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_1^k (2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^k (2x-1)d(2x-1) = \left.\frac{(2x-1)^2}{4}\right|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$

Mà $4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

Khi đó: $\int_1^k (2x-1)dx = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-1 \end{array}\right.$.

Câu 42. [2D1-3]Có bao nhiêu giá tri thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp chúng bằng 1?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng công thức giải nhanh cực trị, ta có:

$$\begin{cases} ab<0 \\ R = \dfrac{b^3-8a}{8|a|b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m<0 \\ 1 = \dfrac{-8m^3-8}{8.(-2m)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -8m^3+16m-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Vậy có 2 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. [1D3-3]Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2. Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \ldots$ Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{100}$.

A. $S = \frac{2^{100}-1}{2^{99}a^2}$. **B.** $S = \frac{a\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **C.** $S = \frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **D.** $S = \frac{a^2\left(2^{99}-1\right)}{2^{99}}$.

Lời giải

Chọn C.

Dễ thấy: $S_1 = a^2; S_2 = \frac{a^2}{2}; S_3 = \frac{a^2}{4}; \ldots; S_{100} = \frac{a^2}{2^{99}}$.

Như vậy $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{100}$ là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{100} = a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{99}}\right) = \frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}.$$

Câu 44. [2D2-3]Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m>9$. **B.** $m<2$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn D.

$\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

ĐK tham số m: $m>0$

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m$

Xét hàm số $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right)$, $\forall x\in(-\infty;0)$ có $f'=\dfrac{3^x.\ln 3}{\left(3^x+1\right)\ln 2}>0$, $\forall x\in(-\infty;0)$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	$-\infty$		0
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m\ge 1$.

Câu 45. [2H3-3]Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$ **B.** $2x+y+3z+9=0$

C. $3x+2y+z-14=0$ **D.** $2x+y+z-9=0$

Lời giải

Chọn D.

Gọi $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1(a.b.c\ne 0)$

Vì (P) qua M nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1);\overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1);\overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=c\\ 3a=c\end{cases}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=\dfrac{14}{3};b=\dfrac{14}{2};c=14$. Khi đó phương trình (P): $3x+2y+z-14=0$

Vậy mặt phẳng song song với (P)là: $3x+2y+z+14=0.$

Câu 46: [2D4-4] Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(4;3\right)$ và bán kính $R=3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F=4a+3b-1$. Tính giá trị $M+m$.

A. $M+m=63$. **B.** $M+m=48$. **C.** $M+m=50$. **D.** $M+m=41$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có phương trình đường tròn $\left(C\right):\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn $\left(C\right)$ nên ta có $\left(a-4\right)^2+\left(b-3\right)^2=9$.

Mặt khác $F=4a+3b-1=4\left(a-4\right)+3\left(b-3\right)+24$.

$F-24=4\left(a-4\right)+3\left(b-3\right)$.

Ta có $\left[4\left(a-4\right)+3\left(b-3\right)\right]^2\le\left(4^2+3^2\right)\left[\left(a-4\right)^2+\left(b-3\right)^2\right]=25.9=255$.

$\Rightarrow -15\le 4\left(a-4\right)+3\left(b-3\right)\le 15$.

$\Leftrightarrow -15\le F-24\le 15$.

$\Leftrightarrow 9\le F\le 39$.

Khi đó $M=39$, $m=9$.

Vậy $M+m=48$.

Cách 2

Ta có $F=4a+3b-1\Rightarrow a=\dfrac{F+1-3b}{4}$

$\left(a-4\right)^2+\left(b-3\right)^2=9\Rightarrow\left(\dfrac{F+1-3b}{4}-4\right)^2+b^2-6b+9=9$

$\Leftrightarrow 25b^2-2\left(3F+3\right)b+F^2+225=0$

$\Delta'=\left(3F+3\right)^2-25F^2-5625$

$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow -16F^2+18F-5625\ge 0\Leftrightarrow 9\le F\le 39.$

Câu 47. [2D2-4] Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) có dạng $f\left((2x-t)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{l} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4}\ (l) \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4}\ (tm) \end{array}\right. \Rightarrow a=9;b=5 \Rightarrow a+b=9+5=14.$

Cách 2: Bấm Casio

Câu 48. [2H3-4] Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ có bán kính $R=\sqrt{19}$, đường thẳng $d:\begin{cases} x=5+t \\ y=-2-4t \\ z=-1-4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-y-3z-1=0$. Trong các số $\{a;b;c;d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a+b+c+d=43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P)?

A. $\{-6;-12;-14;75\}$. **B.** $\{6;10;20;7\}$. **C.** $\{-10;4;2;47\}$. **D.** $\{3;5;6;29\}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(5+t;-2-4t;-1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I;(P))=R=\sqrt{19} \Leftrightarrow |19+19t|=19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Mặt khác (S) có tâm $I\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2}\right)$; bán kính $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}=\sqrt{19}$

Xét khi $t=0 \Rightarrow I(5;-2;-1) \Rightarrow \{a;b;c;d\}=\{-10;4;2;47\}$

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d \neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t=2 \Rightarrow \{a;b;c;d\}=\{-6;-12;-14;75\}$

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=19$ nên thỏa.

Câu 49. [1D3-4] Đặt $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét $g(n)=\dfrac{f(2n-1)}{f(2n)} \Rightarrow g(n)=\dfrac{\left(4n^2-2n+1\right)^2+1}{\left(4n^2+2n+1\right)^2+1}$.

Đặt $\left.\begin{matrix} a=4n^2+1 \\ b=2n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a\pm 2b=(2n\pm 1)^2 \\ a=b^2+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(n)=\frac{(a-b)^2+1}{(a+b)^2+1}=\frac{a^2-2ab+b^2+1}{a^2+2ab+b^2+1}=\frac{a^2-2ab+a}{a^2+2ab+a}=\frac{a-2b+1}{a+2b+1}=\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow u_n=\prod_{i=1}^{n} g(i)=\frac{2}{10}.\frac{10}{26}....\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}=\frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n}=\lim\sqrt{\frac{2n^2}{4n^2+4n+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 50. [2D3-4] Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b,c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=a-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0.$

Lúc đó $I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f\left(x\right)}=\int\limits_a^0 \frac{-dt}{1+f\left(a-t\right)}=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f\left(a-x\right)}=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f\left(x\right)}}=\int\limits_0^a \frac{f\left(x\right)dx}{1+f\left(x\right)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f\left(x\right)}+\int\limits_0^a \frac{f\left(x\right)dx}{1+f\left(x\right)}=\int\limits_0^a 1dx=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1; c=2\Rightarrow b+c=3.$

Cách 2: Chọn $f\left(x\right)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được

$I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1; c=2\Rightarrow b+c=3.$