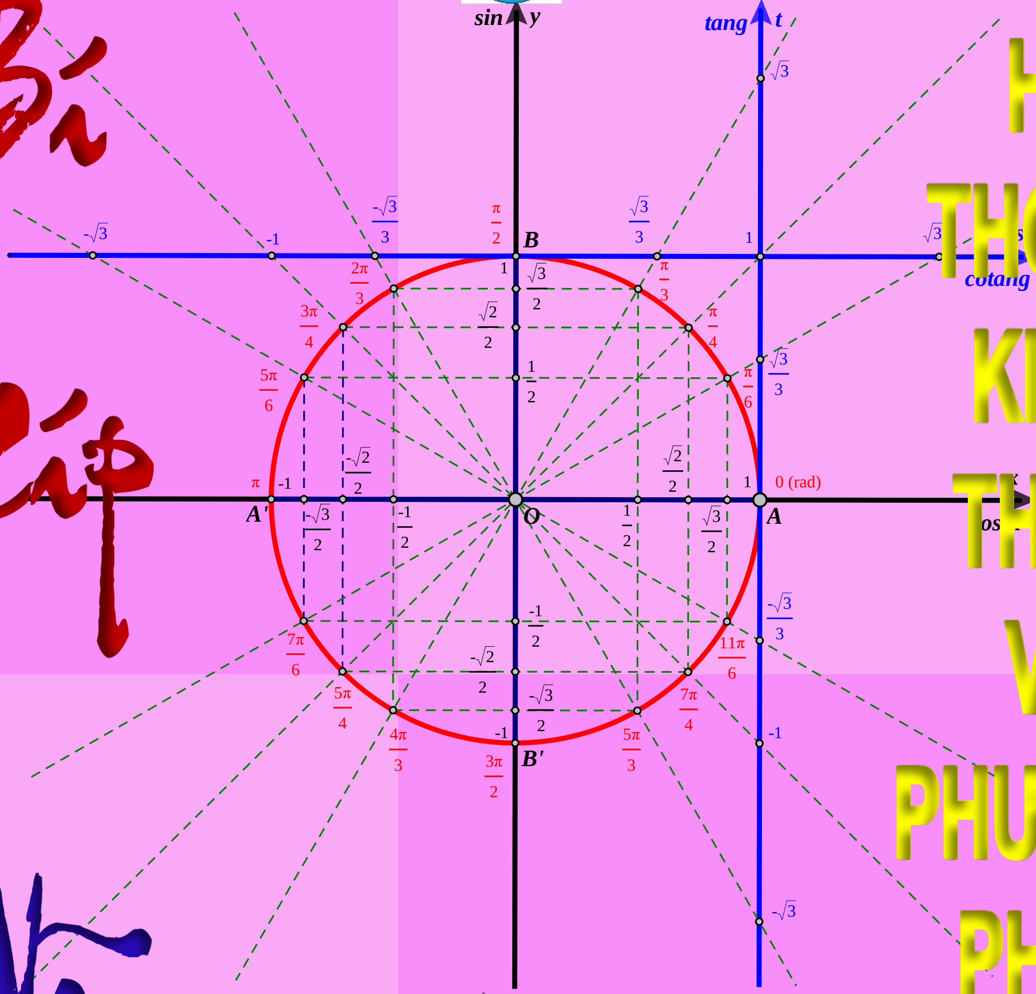
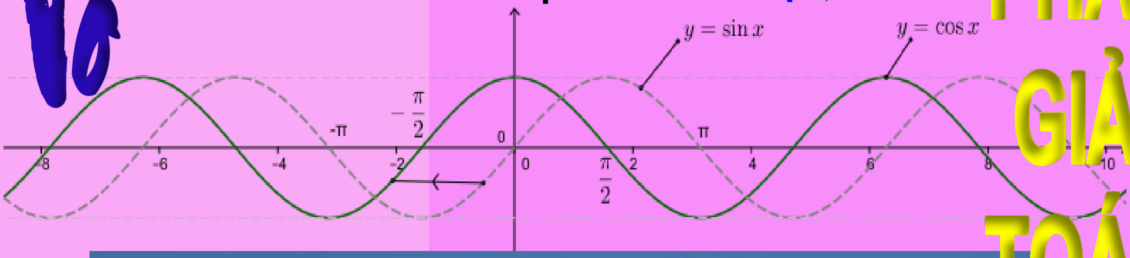
Bí Kíp Võ Công

HỆ THỐNG KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 11





TRƯỜNG

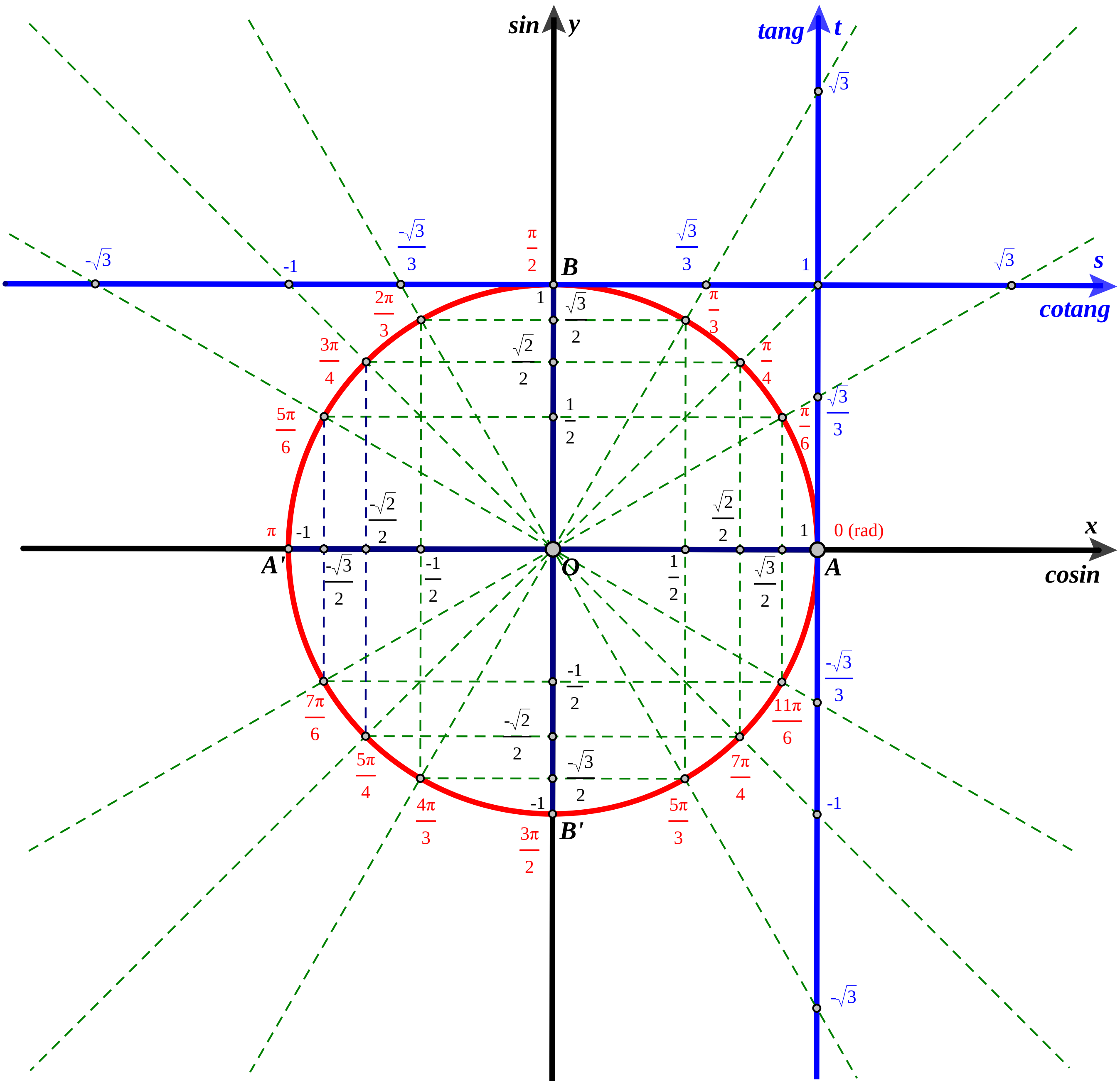
0983.900.570

2020-2021

MỤC LỤC

VẤN ĐỀ 1. LƯỢNG GIÁC

I. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC



II. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1) Hằng đẳng thức cơ bản: $\sin^2 a+\cos^2 a=1$ $\tan a.\cot a=1$ $1+\tan^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a}$ $1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a}$	**2) Cung liên kết:** ***Cos đối*** $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ ***Sin bù*** $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
3) Công thức cộng: $\sin(a\pm b)=\sin a.\cos b\pm\cos a.\sin b$ $\cos(a\pm b)=\cos a.\cos b\mp\sin a.\sin b$ $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a.\tan b}$	

4) Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Chéo phụ

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha,\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha\end{array}}$$

Tang, Cotang hơn kém π

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha\\ \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha\\ \tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha\end{array}}$$

Sin hơn = Cos kém ($\pi/2$)

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha,\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha\end{array}}$$

5) Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

6) Công thức nhân ba

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

7) Công thức biên tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

8) Công thức biến tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

9) Công thức đặc biệt

$$(\cos x \pm \sin x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x.\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x.\sin^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

III. *HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC*

1. $y = \sin x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. ***TGT:*** $T = [-1;1]$

Tính chẵn lẻ: Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ

Tính tuần hoàn: Tuần hoàn với chu kì 2π

Sự biến thiên: Đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; Nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Đồ thị:

2. $y = \cos x$

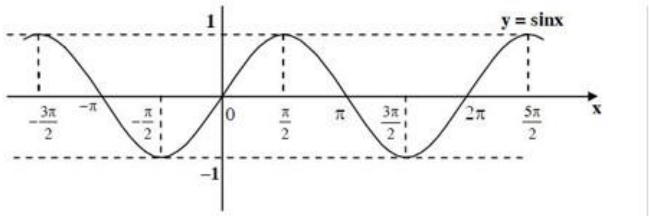
TXĐ: $D = \mathbb{R}$. ***TGT:*** $T = [-1;1]$

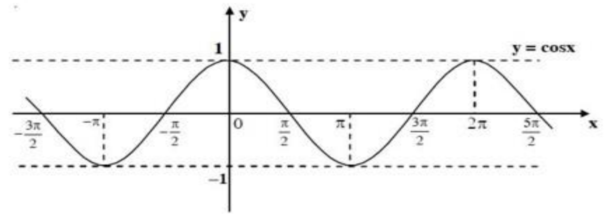
Tính chẵn chẵn: Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua trục tung.

Tính tuần hoàn: Tuần hoàn với chu kì 2π

Sự biến thiên: Nghịch biến trên $(0;\pi)$; Đồng biến trên $(\pi;2\pi)$

Đồ thị:





3. $y = \tan x$

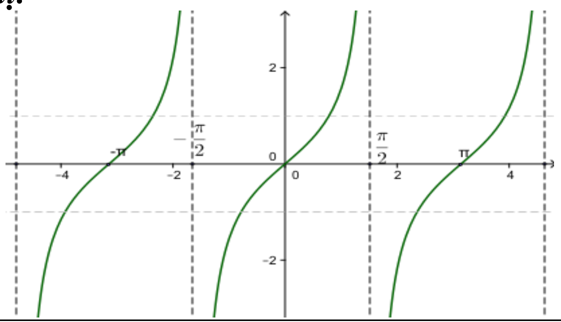
TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. ***TGT:*** $T = \mathbb{R}$

Tính chẵn lẻ: Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ

Tính tuần hoàn: Tuần hoàn với chu kì π

Sự biến thiên: Luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$

Đồ thị:



4. $y = \cot x$

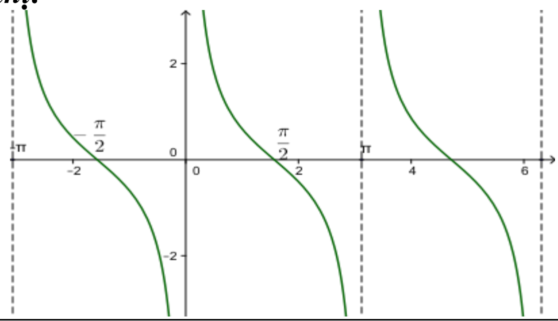
TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$. ***TGT:*** $T = \mathbb{R}$

Tính chẵn lẻ: Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ

Tính tuần hoàn: Tuần hoàn với chu kì π

Sự biến thiên: Luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $(0;\pi)$; $(\pi;2\pi)$

Đồ thị:



IV. *TÌM TẬP XÁC ĐỊNH:*

1. *Phương pháp:*

B1: Lập điều kiện xác định (ĐKXĐ):

$\frac{u}{v}$ xác định khi $v \neq 0$	$\sqrt{u}$ xác định khi $u \geq 0$	$\tan u$ xác định khi $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$	$\cot u$ xác định khi $u \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B2: Giải ĐKXĐ → Tìm điều kiện của biến

B3: Tùy theo ĐK của biến, Ta kết luận TXĐ như sau:

① $\begin{cases} x \neq a \\ x \neq b \\ \ldots\ldots \end{cases} \rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; \ldots\}$; ② $a < x \leq b \rightarrow D = (a; b]$; ③ $\begin{cases} x = a \\ x = b \\ \ldots\ldots \end{cases} \rightarrow D = \{a; b; \ldots\}$

V. *SỰ BIẾN THIÊN:*

1. *Hàm số LG sơ cấp:*

Hàm số	***Chiều biến thiên***	***Khoảng***
$y = \sin x$	Nghịch biến	Bên trái Oy
	Đồng biến	Bên phải Oy
$y = \cos x$	Nghịch biến	Phía trên Ox
	Đồng biến	Phía dưới Ox
$y = \tan x$	Luôn Đồng biến	Không chứa $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
$y = \cot x$	Luôn Nghịch biến	Không chứa $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

2. *Tính chất cơ bản:*

a) Nếu $y = f(x)$ Đồng biến (Nghịch biến) trên K thì $y = a.f(x) + b$ cũng đồng biến (Nghịch biến) trên K

b) Nếu $y = f(x)$ Đồng biến (Nghịch biến) trên K thì $y = -f(x)$ Nghịch biến (Đồng biến) trên K

VI. TÍNH CHẴN LẺ:

1. Định nghĩa:

$f(x)$ là hàm chẵn $\Leftrightarrow f(-x)=f(x), \forall x\in D$

$f(x)$ là hàm lẻ $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in D$

2. Tính chất:

x^{2n} → Chẵn; x^{2n+1} → Lẻ Hằng số → Chẵn	$f(x)$ Chẵn $\Rightarrow f(ax)$ Chẵn	$f(x)$ Lẻ $\Rightarrow f(ax)$ Lẻ
Chẵn ± Chẵn → Chẵn	Lẻ ± Lẻ → Lẻ	Chẵn ± Lẻ → Không Chẵn, Không Lẻ
Chẵn x(÷) Chẵn → Chẵn	Lẻ x(÷) Lẻ → Chẵn	Chẵn x(÷) Lẻ → Lẻ
(Chẵn)^n → Chẵn	(Lẻ)$^{2n+1}$ →Lẻ	(Lẻ)^{2n} →Chẵn
k.Chẵn → Chẵn	k.Lẻ → Lẻ	|Chẵn| → Chẵn; |Lẻ| → Chẵn
f Lẻ, g Chẵn $\Rightarrow f(g)$ Chẵn	f Lẻ, g Lẻ$\Rightarrow f(g)$ Lẻ	f Chẵn, g Chẵn (hay Lẻ)$\Rightarrow f(g)$ Chẵn

VII. TÍNH TUẦN HOÀN:

1. Định nghĩa:

$f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T \Leftrightarrow$ Tồn tại số T dương nhỏ nhất sao cho: $f(x\pm T)=f(x)$

2. Tính chất:

$y=\sin x,\ y=\cos x$ tuần hoàn chu kì $T=2\pi$	$y=\tan x,\ y=\cot x$ tuần hoàn chu kì $T=\pi$
Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì T thì $f(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T'=\dfrac{T}{\lvert a\rvert}$	$y=\sin(ax+b),\ y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn chu kì $T=\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ $y=\tan(ax+b),\ y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn chu kì $T=\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$
Nếu $y=\sin u,\ y=\cos u$ tuần hoàn chu kì T thì $y=\sin^2 u,\ y=\cos^2 u$ tuần hoàn chu kì $\dfrac{T}{2}$	Nếu $y=\tan u,\ y=\cot u$ tuần hoàn chu kì T thì $y=\tan^2 u,\ y=\cot^2 u$ tuiần hoàn chu kì T
Nếu $f(x),\ g(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 , T_2 thì $f(x)\pm g(x)$ tuần hoàn với chu kì $T=BCNN(T_1,T_2)$ (Máy tính: $LCM(T_1,T_2)$)	Nếu $f(x),\ g(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 , T_2 thì $f(x).g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tuần hoàn với chu kì $T=BC(T_1,T_2)=k.BCNN(T_1,T_2)\ (k\in\mathbb{N}^*)$ (Máy tính: $k.LCM(T_1,T_2)$)

VIII. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT– NHỎ NHẤT CỦA HSLG:

1. Định nghĩa:

$$m\le f(x)\le M \Rightarrow \begin{cases}\min f(x)=m\\ \max f(x)=M\end{cases} (*)$$

2. *Phương pháp:* Chặn hàm số

B1: Biến đổi hàm số đã cho đến khi chỉ còn chứa 1 HSLG (nếu được)

B2: Dùng Bất đẳng thức LG và Tính chất Bất đẳng thức → Biến đổi và dạng: $m\le f(x)\le M$

B3: Dùng định nghĩa (công thức (*)) → Xác định GTLN–GTNN: $\begin{cases}\min f(x)=m\\ \max f(x)=M\end{cases}$

3. *Bất đẳng thức LG:*

$-1\le\sin u\le 1$ $-1\le\cos u\le 1$	$0\le\sin^2 u\le 1$ $0\le\cos^2 u\le 1$	$0\le\lvert\sin u\rvert\le 1$ $0\le\lvert\cos u\rvert\le 1$	$\tan^2 u\ge 0$ $\cot^2 u\ge 0$
$-\sqrt{2}\le\sin u\pm\cos u\le\sqrt{2}$	$\dfrac{-1}{2}\le\sin u.\cos u\le\dfrac{1}{2}$	$-1\le\sin^2 u-\cos^2 u\le 1$	

4. *Tính chất Bất đẳng thức:*

$A > B \Rightarrow A + C > B + C$	$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$	$A > B > 0 \Rightarrow \begin{cases} A^2 > B^2 \\ \sqrt{A} > \sqrt{B} \end{cases}$
$A > B \Rightarrow \begin{cases} A.C > B.C & (C > 0) \\ A.C < B.C & (C < 0) \end{cases}$	$\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow A.C > B.D$	$A > B \Rightarrow \begin{cases} A^3 > B^3 \\ \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B} \end{cases}$
$0 < A < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} > 1$	$m > A > n > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{A} < \dfrac{1}{n}$	

IX. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Dạng $f(u) = a$	**Dạng $f(u) = f(v)$**
$\sin u = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \alpha + k2\pi \\ u = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., (\lvert a\rvert \le 1)$ (Với $\alpha = \arcsin(a) = \sin^{-1}(a)$)	$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$
$\cos u = a \Leftrightarrow u = \pm\alpha + k2\pi, (\lvert a\rvert \le 1)$ (Với $\alpha = \arccos(a) = \cos^{-1}(a)$)	$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$
$\tan u = a \Leftrightarrow u = \alpha + k\pi$ (Với $\alpha = \arctan(a) = \tan^{-1}(a)$)	$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$
$\cot u = a \Leftrightarrow u = \alpha + k\pi$ (Với $\alpha = \text{arccot}(a) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)$)	$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

<u>Trường hợp đặc biệt</u>: Đối với PT $\sin u = a, \cos u = a$

- ❖ Nếu $a = \pm 1$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm.
- ❖ Nếu $a = 0$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm và thay $k2\pi$ thành $k\pi$

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$
$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$	$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$	$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

X. PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

1. Phương trình bậc hai đối với một HSLG là PT có dạng: $a\sin^2 u + b\sin u + c = 0$ ***(1)***

(Tương tự cho $\cos u, \tan u, \cot u$)

Cách giải: Xem $\sin u$ là ẩn, Ta có PT bậc 2 với ẩn là $\sin u$ → Giải PT bậc 2, Ta được PTLG cơ bản → Giải PTLG cơ bản, tìm nghiệm.

2. Phương trình bậc nhất đối với sinu; cosu là PT có dạng: $a.\sin u + b.\cos u = c \quad (a^2 + b^2 \ne 0)$ ***(2)***

Cách giải: ***B1.*** Kiểm tra điều kiện có nghiệm: Nếu $a^2 + b^2 \ge c^2$ thì PT có nghiệm

B2. $a.\sin u + b.\cos u = c$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\sin u + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\cos u = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (Chia 2 vế PT cho $\sqrt{a^2 + b^2}$)

$\Leftrightarrow \sin u.\cos\alpha + \cos u.\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (Đặt: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha; \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha$)

$\Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (*) (Áp dụng công thức cộng)

B3. Giải PT cơ bản (*) → Tìm nghiệm.

MỞ RỘNG:

Loại 1: $a.\sin u + b.\cos u = c.\sin v \; (a^2 + b^2 = c^2)$ hay $a.\sin u + b.\cos u = c.\cos v \; (a^2 + b^2 = c^2)$

Loại 2: $a.\sin u + b.\cos u = c.\sin v + d.\cos v \ \left(a^2 + b^2 = c^2 + d^2\right)$

Cách giải: Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ → Biến đổi đưa về dạng $\sin t = \sin w$ hay $\cos t = \cos w$

3. **Phương trình thuần nhất (đẳng cấp) bậc hai đối với sinu, cosu** là PT có dạng:

$a\sin^2 u + b\cos^2 u + c\sin u.\cos u = d, (a^2 + b^2 \neq 0)$ ***(3)***

Cách giải 1: Dùng công thức nhân đôi và hạ bậc →Biến đổi đưa về PT bậc nhất đối với sin và cos.

Cách giải 2: Chia 2 vế cho $\cos^2 u$ $\left(\text{hay } \sin^2 u\right)$→Thu gọn, ta được PT bậc 1 hay bậc 2 đối với $\tan u$ $\left(\text{hay } \cot u\right)$

Chú ý KT: Nếu $\cos u = 0$ (hay $\sin u = 0$) thỏa PT(3) thì nghiệm của $\cos u = 0$ (hay $\sin u = 0$) là nghiệm của PT(3)

4. **Phương trình đưa về phương trình tích:** $A.B.C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right.$

XI. PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH:

Cách 1: → Biểu diễn điểm xác định công thức điều kiện và công thức nghiệm lên Đường tròn lượng giác
→ Loại bỏ điểm trùng của nghiệm so với điểm của điều kiện
→ Kết luận: Nghiệm PT là những điểm còn lại (Mỗi điểm cộng thêm $k2\pi$).

Cách 2: → Cho tham số nguyên (*k*) trong công thức điều kiện và công thức nghiệm chạy từ 0 đến khi tìm đủ số điểm trên đoạn $\left[0;\pi\right]$
→ Loại bỏ điểm trùng của nghiệm so với điểm của điều kiện
→ Kết luận: Nghiệm PT là những điểm còn lại (Mỗi điểm cộng thêm $k2\pi$).

VẤN ĐỀ 2. TỔ HỢP XÁC SUẤT

I. QUY TẮC ĐẾM

1. **Qui tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, hành động thứ hai có m cách thực hiện (không trùng với bất cứ cách nào của cảu hành động thứ nhất). Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n+m$ cách.
2. **Qui tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất có m cách thực hiện hành động thứ hai. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n.m$ cách.

II. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Loại	*Định nghĩa*	*Công thức tính số lượng*	*Dấu hiệu nhận biết*
Hoán vị	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự của n phần tử $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ gọi là một hoán vị của n phần tử.	$\boxed{P_n = n.(n-1).(n-2).....2.1 = n!}$	Lấy hết ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Chỉnh hợp	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự k phần tử được lấy trong n phần tử $\left(n\geq k\right)$ gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.	$\boxed{A_n^k = n(n-1).....(n-k+1) = \dfrac{n!}{\left(n-k\right)!}}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Tổ hợp	Mỗi tập hợp k phần tử được lấy trong n phần tử $\left(n\geq k\right)$ gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.	$\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử và ***không sắp xếp*** thứ tự

CÔNG THỨC TỔ HỢP MỞ RỘNG

Loại	*Công việc thực hiện*	*Công thức đếm*
Hoán vị vòng quanh	Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn	$\left(n-1\right)!$
Chỉnh tổ hợp	Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp vào m vị trí $\left(k\leq n,\ k\leq m\right)$	$C_n^k.A_m^k$

- **Công thức đặc biệt:**

$0!=1$	Nếu $k=n$ thì $A_n^n=\dfrac{n!}{0!}=\dfrac{n!}{1}=n!=P_n$.
$C_n^0=C_n^n=1$	$C_n^1=n$
$C_n^k=C_n^{n-k}\quad\left(0\leq k\leq n\right)$	$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}\quad\left(0\leq k<n\right)$
$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n\ \ \left(0\leq k\leq n\right)$	$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}=\dfrac{A_n^k}{k!}$

III. NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. **Công thức nhị thức Niu-Tơn:**

$$\boxed{\left(a+b\right)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

2. **Tính chất của nhị thức Niu-tơn**

- Số các số hạng của công thức là $n+1$
- Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng từ 0 đến n; đồng thời tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử đều bằng n
- Số hạng tổng quát thứ $k+1$ có dạng $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k\quad(k=0,1,...,n)$
- Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau: $C_n^k=C_n^{n-k};0\leq k\leq n$

3. **Một số dạng đặc biệt**

Dạng 1. Thay $a=1$ và $b=x$ vào (1), ta được: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$

→ Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Dạng 2. Thay $a=1,\ b=-x$ vào (1), ta được: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - ... + (-1)^kC_n^kx^k + ... + (-1)^nC_n^nx^n$

→ Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n = 0$

4. Tính chất lũy thừa:

• $a^n = a.a...a$ (tích của n thừa số a) • $a^0 = 1\ ,(a \neq 0)$ • $a^{-n} = \frac{1}{a^n},(a \neq 0)$	• $a^{m+n} = a^m.a^n$ • $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ • $(a.b)^n = a^n.b^n$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ • $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$	• $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ • $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

IV. XÁC SUẤT

1. Không gian mẫu: Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Kí hiệu: Ω

2. Biến cố:

Kí hiệu	*Thuật ngữ biến cố*
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$\overline{A} = \Omega \setminus A$	$\overline{A}$ là biến cố đối của A

Kí hiệu	*Thuật ngữ biến cố*
$C = A \cup B$	C là biến cố: "A hoặc B"
$C = A \cap B = A.B$	C là biến cố: "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

3. Xác suất của biến cố.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất:

b) Xác suất của biến cố A là: $\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}}$

Trong đó: $n(A) = |\Omega_A|$ là số phần tử (hay kết quả thuận lợi) của biến cố A;

$n(\Omega) = |\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu (hay tất cả kết quả có thể xảy ra của phép thử).

c) Tính chất: • $P(\varnothing) = 0$; • $P(\Omega) = 1$; • $0 \le P(A) \le 1$ • $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

d) Công thức cộng xác suất:

➢ $\boxed{\text{Nếu } A \text{ và } B \text{ xung khắc thì } P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

➢ ***Mở rộng:*** $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B),\ (\forall A, B)}$

e) Công thức nhân xác suất:

$$\boxed{\text{Hai biến cố } A \text{ và } B \text{ độc lập} \Leftrightarrow P(A.B) = P(A).P(B)}$$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Bài toán đếm:

Quy tắc: *Hành động nào có điều kiện mạnh nhất thì thực hiện đếm trước nhất,...*

Dạng 1.1: Đếm số lượng số tự nhiên:

B1: Gọi số tự nhiên có dạng: $x = \overline{a_1...a_n}$, $a_1 \neq 0$ và a_i thuộc tập chứa các chữ số theo đề.

B2: Chọn chữ số thỏa điều kiện bài toán đặt vào các hàng số theo thứ tự ưu tiên: ***Hàng nào có điều kiện "mạnh" nhất thì thực hiện trước nhất.*** *(Chú ý phân ra nhiều trường hợp nếu bị trùng điều kiện)*

B3: Dùng Quy tắc nhân để tính kết quả từng trường hợp và Dùng Quy tắc cộng để tính Kết quả cả bài.

Tính chất chia hết	*Dấu hiệu chia hết*
Số lẻ	Chữ số tận cùng là chữ số lẻ
Số chẵn (Số chia hết cho 2)	Chữ số tận cùng là chữ số chẵn
Chia hết cho 3	Tổng các chữ số chia hết cho 3
Chia hết cho 4	Số gồm 2 chữ số cuối là số chia hết cho 4

Chia hết cho 5	Chữ số tận cùng là 0 hoặc 5
Chia hết cho 8	Số gồm 3 chữ số cuối là số chia hết cho 8
Chia hết cho 9	Tổng các chữ số chia hết cho 9
Chia hết cho 11	Tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.
Chia hết cho 25	Hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50 hoặc 75.

Dạng 1.2: Đếm số cách sắp xếp:

- ***Sắp xếp xen kẽ 2 nhóm A, B:***
  - ✓ TH1. Số phần tử 2 nhóm bằng nhau: $n(A)=n(B)=m$ → Số cách sắp xếp là $2.m!.m!$.
  - ✓ TH2. Số phần tử 2 nhóm hơn kém 1 đơn vị: $n(A)=m,\ n(B)=m+1$ → Số cách sắp xếp là $m!.(m+1)!$
- ***Sắp xếp theo nhóm A, B, C:*** $n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$
  - ✓ TH1. Chỉ có các phần tử nhóm A kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.(b+c+1)!$
  - ✓ TH2. Các phần tử 2 nhóm A, B kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.(c+2)!$
  - ✓ TH2. Các phần tử 3 nhóm A, B, C kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.c!.3!$

  ☺ ***Tương tự cho sắp xếp n nhóm.***
- ***Sắp xếp nhóm A có*** n ***phần tử sao cho có*** k ***phần tử*** $a_1, a_2,...,a_k$ ***không kề nhau*** $\left(k\le\dfrac{n+1}{2}\right)$***:***
  - ✓ B1. Xem số vị trí cần sắp xếp là $2(n-k)+1$ → Sắp xếp $n-k$ phần tử $a_{k+1}, a_{k+2},...,a_n$ vào các vị trí chẵn → Có $(n-k)!$ cách
  - ✓ B2. Sắp xếp k phần tử $a_1, a_2,...,a_k$ vào m vị trí còn lại ($m=\left[2(n-k)+1\right]-k$) → Có A_m^k cách
  - ✓ B3. Số cách sắp xếp là $(n-k)!.A_m^k$

Dạng 1.3: Đếm số cách chọn:

- ***Chọn không sắp xếp:***
  - ✓ Chọn *k* phần tử loại *I* từ các nhóm *A, B, C,...* → Phân nhiều Trường hợp, chọn mỗi nhóm 1 số lượng phần tử loại *I* , sao cho tổng số lượng phần tử loại *I* ở mỗi trường hợp phải bằng *k* phần tử.
  - ✓
- ***Chọn có sắp xếp:***

Dạng 2: Xác định các hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Dạng 2.1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^m ***trong KT:*** $\left(ax^p+bx^q\right)^n$

B1: Khai triển: $\left(ax^p+bx^q\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(ax^p\right)^{n-k}\left(bx^q\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k x^{np-pk+qk}$

B2: Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa: $np-pk+qk=m$. Từ đó tìm $k=\dfrac{m-np}{p-q}$

B3: Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^k a^{n-k}.b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

Nếu k không nguyên hoặc $k>n$ thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.

Dạng 2.2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^m ***trong khai triển:*** $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=a_0+a_1x+...+a_{2n}x^{2n}$.

B1: Viết $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$;

B2: Viết số hạng tổng quát trong khai triển $\left(bx^p+cx^q\right)^k$ thành một đa thức theo luỹ thừa của x.

B3: Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m.

Dạng 2.3: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn

B1: Tính hệ số a_k theo k và n;

B2: Giải bất phương trình $a_{k-1}\le a_k$ với ẩn số k;

B3: Hệ số lớn nhất phải tìm ứng với số tự nhiên *k* lớn nhất thoả mãn bất phương trình trên.

Dạng 3: Bài toán tổng $\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k b^k$.

Phương pháp 1: Dựa vào khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + a^{n-1}bC_n^1 + a^{n-2}b^2C_n^2 + ... + b^nC_n^n$.

Ta chọn những giá trị a, b thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

* $C_n^k = C_n^{n-k}$ * $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ * $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$ * $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = (1+a)^n$.

Phương pháp 2: Dựa vào đẳng thức đặc trưng

Mấu chốt của cách giải trên là ta tìm ra được đẳng thức (*) và ta thường gọi (*) là đẳng thức đặc trưng.

Cách giải ở trên được trình bày theo cách xét số hạng tổng quát ở vế trái (thường có hệ số chứa k) và biến đổi số hạng đó có hệ số không chứa k hoặc chứa k nhưng tổng mới dễ tính hơn hoặc đã có sẵn.

Dạng 4: Tính xác suất

B1. Mô tả không gian mẫu Ω (Nếu được). Kiểm tra tính hữu hạn của Ω, tính đồng khả năng của các kết quả → Đếm số kết quả có thể xảy ra của phép thử: $n(\Omega)$

B2. Xác định biến cố A → Đếm số kết quả có thể xảy ra của biến cố: $n(A)$

B3. Tính xác suất của biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

VẤN ĐỀ 3. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

1. ***Quy tắc:*** Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:
   - ***Bước 1:*** Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
   - ***Bước 2:*** Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tuỳ ý $(k \geq 1)$, chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k+1$.
2. ***Chú ý:*** Nếu phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ là đúng với với mọi số nguyên dương $n \geq p$ thì :
   - Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$
   - Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$.

II. DÃY SỐ

1. ***Định nghĩa :*** Dãy số là hàm số với đối số là số tự nhiên

$$u: \ \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

2. ***Dãy số tăng, dãy số giảm***
   - (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
   - (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
3. ***Dãy số bị chặn***
   - (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$: $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   - (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$: $u_n > m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   - (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m , M \in \mathbb{R}$: $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

III. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

	Cấp số cộng	**Cấp số nhân**
Định nghĩa	Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$	Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d$, $(\forall n \geq 2 , n \in \mathbb{N}^*)$	$u_n = u_1 . q^{n-1}$, $(\forall n \geq 2 , n \in \mathbb{N}^*)$
Tính chất	$u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, $(\forall k \geq 2 , k \in \mathbb{N}^*)$	$u_k^2 = u_{k-1} . u_{k+1}$, $(\forall k \geq 2 , k \in \mathbb{N}^*)$
Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$	$S = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$	Khi $q = 1$: $S_n = nu_1$ Khi $q \neq 1$: $S_n = u_1 . \dfrac{1-q^n}{1-q}$

VẤN ĐỀ 5. GIỚI HẠN

I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ:

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ • $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí:*** Cho $\lim u_n=a,\ \lim v_n=b$. Ta có: • $\lim(u_n\pm v_n)=a\pm b$ • $\lim(u_n.v_n)=a.b$ • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ (nếu $b\neq0$) • $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ • $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}\ \ (u_n,\ a\ge0)$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad(\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** • $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ • $\lim\sqrt{n}=+\infty$ • $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *(Quy tắc về giới hạn vô cực)* $\boxed{\dfrac{u_n{}^{\nearrow a}}{v_{n\searrow\infty}}\to0}$ $\boxed{\dfrac{u_n{}^{\nearrow a\neq0}}{v_{n\searrow0}}\to\infty}$ $\boxed{[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{u_n}}.\underset{a\neq0}{\underset{\downarrow}{v_n}}]\to\infty}$ *(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)*

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ:

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$; • $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ *(C là hằng số)* ***2. Định lí:*** Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=M$. Ta có: • $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$; • $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$ • $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=L.M$; • $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ *(nếu $M\neq0$)* • $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}\ \ (f(x)\ge0)$ • $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=\lvert L\rvert$ ***3. Giới hạn một bên:*** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** • $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; • $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}C=C$; • $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$ ***2. Định lí:*** *(Quy tắc về giới hạn vô cực)* $\boxed{\dfrac{f(x)^{\nearrow L}}{g(x)_{\searrow\infty}}\to0}$ $\boxed{\dfrac{f(x)^{\nearrow L\neq0}}{g(x)_{\searrow0}}\to\infty}$ $\boxed{[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{f(x)}}.\underset{L\neq0}{\underset{\downarrow}{g(x)}}]\to\infty}$ $(x\to x_0$ hay $x\to\infty)$ *(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)*

PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN:

① Dạng vô định $\frac{0}{0}$: *(Là giới hạn của thương mà tử và mẫu đều có giới hạn bằng 0: $\dfrac{f(x)^{\nearrow0}}{g(x)_{\searrow0}}$)*

a) *Cách khử:* Biến tử và mẫu thành tích rồi đơn giản (hết) nhân tử chung

b) *Các dạng thường gặp:*

Dạng 1.1: Giới hạn của phân thức hữu tỷ tại một điểm: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *với* $f(x)$, $g(x)$ *là các đa thức và* $f(x_0)=g(x_0)=0$

PP: Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn nhân tử chung:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0).u(x)}{(x-x_0).v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\ldots$$

VD: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

Dạng 1.2: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *với* $f(x)$, $g(x)$ *là các biểu thức chứa căn cùng bậc và* $f(x_0)=g(x_0)=0$

PP: Nhân biểu thức liên hợp (tương ứng) ở tử và mẫu để khử căn → Biến thành tích rồi đơn giản nhân tử chung.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A-\sqrt{B}}{C}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(A-\sqrt{B}\right)\left(A+\sqrt{B}\right)}{C.\left(A+\sqrt{B}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A^2-B}{C.\left(A+\sqrt{B}\right)}=...$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A-\sqrt[3]{B}}{C}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(A-\sqrt[3]{B}\right)\left(A^2+A.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}{C.\left(A^2+A.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A^3-B}{C.\left(A^2+A.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}=...$$

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$

Dạng 1.3: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *với* $f(x)$ *là các biểu thức chứa căn không cùng bậc và* $f(x_0)=g(x_0)=0$

PP: Tách thành tổng các thương sao cho mỗi thương chỉ chứa căn cùng bậc và bảo toàn dạng VĐ $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt[3]{v(x)}}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sqrt{u(x)}+m}{h(x)}+\frac{m-\sqrt[3]{v(x)}}{h(x)}\right)=...,\ (\text{Với } m=\sqrt{u(x_0)}=\sqrt[3]{v(x_0)}\ )$$

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)=...$

② *Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$:* *(Là giới hạn của thương mà tử và mẫu đều có giới hạn vô cực:* $\dfrac{f(x)^{\nearrow\infty}}{g(x)_{\searrow\infty}}$*)*

Các dạng thường gặp:

Dạng 2.1: $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức →PP: Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của *x*.

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

Dạng 2.2: $f(x)$, $g(x)$ có chứa lũy thừa x^k và căn thức →PP: Rút lũy thừa cao nhất ra khỏi các căn rồi chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của *x*.

VD: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{-x.\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-.\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-1}=-1$

③ *Giới hạn của tổng, hiệu:* *(Chứa lũy thừa x^k)*

Các dạng thường gặp:

Dạng 3.1: Giới hạn tại vô cực của tổng, hiệu mà tổng hệ số các lũy thừa bậc cao nhất khác 0

PP: Rút lũy thừa bậc cao nhất làm nhân tử chung đưa về tích → Áp dụng quy tắc giới hạn của tích:

$[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{f(x)}}.\underset{L\neq 0}{\underset{\downarrow}{g(x)}}]\to\infty$

VD: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-2\right)\right]=-\infty$

Dạng 3.2: Giới hạn tại vô cực của tổng, hiệu mà tổng hệ số các lũy thừa bậc cao nhất bằng 0 (Dạng này thường có căn)

PP: Nhân chia biểu thức liên hợp để khử căn → Ta được giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

④ Giới hạn của tích:

Phương pháp:

TH1: Biến thành thương → Ta được dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

TH2: Biến thành tổng, hiệu → Ta được giới hạn của tổng, hiệu như mục 3.

VD: $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC:

1. Hàm số liên tục tại một điểm:

$$\boxed{y=f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)}$$

$$\boxed{y=f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)}$$

2. Hàm số liên tục trên một khoảng khi hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]: *y = f(x) liên tục trên (a; b) và*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

4. Tính chất:

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Tổng hiệu, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.

5. Điều kiện để phương trình có nghiệm:

Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác: Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0:

B1: Tính $f(x_0)$.

B2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ (Hay tính $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$)

B3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $f(x_0)$ → Kết luận.

Dạng 2: Tìm tham số để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0:

B1: Tính $f(x_0)$.

B2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ (Hay tính $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$)

B3: Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ (Hay cho $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$)→ Giải PT, HPT tìm tham số.

Dạng 3: Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm:

B1: Chọn đoạn $[a;b]$ sao cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và $f(a).f(b)<0$.

B2: Kết luận: PT $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$

VẤN ĐỀ 5. ĐẠO HÀM

I. CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

Hàm sơ cấp	*Hàm hợp*	*Phép toán*
$(C)'=0$	$\left[f(u)\right]'=f'(u).u'$	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
$(x)'=1$		$(u.v)'=u'.v+u.v' \;\to (k.v)'=k.v'$
$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2} \;\to \left(\dfrac{k}{v}\right)'=\dfrac{-k.v'}{v^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2.\sqrt{u}}$	***Đặc biệt***
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right)'=\dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$	$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$	
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\dfrac{adx^2+2aex+\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx+e)^2}$
$(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)'=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}$	

QUY TẮC TÌM ĐẠO HÀM

Khi tìm đạo hàm của hàm số ta thực hiện theo thứ tự ưu tiên như sau:

$\boxed{\textit{PHÉP TOÁN} \to \textit{HÀM HỢP} \to \textit{SƠ CẤP.}}$

II. TIẾP TUYẾN

1) Định lý: PT tiếp tuyến của đường cong $(C): y=f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0;\, y_0)$ có dạng:

$$\boxed{y-y_0=k.(x-x_0)} \quad (*)$$

Trong đó: $+\ x_0$: Hoành độ tiếp điểm;

$+\ y_0=y(x_0)$: Tung độ tiếp điểm;

$+\ k=f'(x_0)$: Hệ số góc của tiếp tuyến.

2) Quy tắc lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=f(x)$

B1. Tìm đạo hàm $y'=f'(x)$

B2. Dựa vào giả thiết, tính $x_0,\ y_0,\ f'(x_0)$.

B3. Thay vào PT (*), thu gọn, ta được PT tiếp tuyến cần tìm (Chú ý: So điều kiện, loại PTTT nếu có)

3) Chú ý:

- Đường thẳng $(d): y=ax+b$ → Hệ số góc $k_d=a$;
- Đường thẳng $(d): ax+by+c=0$ → Hệ số góc $k_d=\dfrac{-a}{b}$.
- $d \parallel d' \Rightarrow k_d=k_{d'}$; • $d \perp d' \Leftrightarrow k_d.k_{d'}=-1$

4) Các dạng phương trình tiếp tuyến:

Giả thiết	*Theo GT, Ta có:*	*Các đại lượng cần tính*
Biết hoành độ tiếp điểm	x_0	Tính: $y_0=y(x_0),\ k=f'(x_0)$
Biết tung độ tiếp điểm	y_0	Từ: $y_0=y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k=f'(x_0)$
Biết hệ số góc của TT	k	Từ: $k=f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0=y(x_0)$

Biết TT song song ĐT (d)	$k = k_d$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$ (***Chú ý*** loại PTTT trùng PT ĐT *d*)
Biết TT vuông góc ĐT (d)	$k.k_d = -1 \Leftrightarrow k = \dfrac{-1}{k_d}$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$
Biết TT qua $A(x_A; y_A)$	$y_A - y(x_0) = y'(x_0).(x_A - x_0)$	Giải PT tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
TT tại giao điểm của $(C): y = f(x)$ ***và*** $(d): y = ax + b$	$f(x_0) = ax_0 + b$	Giải PT tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
TT tại giao điểm của (C) ***và*** Ox	$y_0 = 0$	Từ: $y_0 = y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k = f'(x_0)$
TT tại giao điểm của (C) ***và*** Oy	$x_0 = 0$	Tính: $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$

VẤN ĐỀ 6. PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

I. PHÉP TỊNH TIẾN:

1. Định nghĩa:

$$\boxed{T_{\vec{v}}(M)=M'\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}}$$

2. Biểu thức tọa độ:

$$T_{\vec{v}(a;b)}(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=x_M+a \\ y_{M'}=y_M+b \end{cases}$$

3. Tính chất: Phép tịnh tiến biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
b) Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
c) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
d) Tam giác thành tam giác bằng nó.
e) Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

II. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM:

1. Định nghĩa:

$$Đ_I(M)=M'\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } MM'$$

2. Biểu thức tọa độ:

$$Đ_I(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=2x_I-x_M \\ y_{M'}=2y_I-y_M \end{cases}$$

3. Tính chất: Phép đối xứng tâm biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
b) Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
c) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
d) Tam giác thành tam giác bằng nó.
e) Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

III. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC:

1. Định nghĩa:

$$Đ_\Delta(M)=M'\Leftrightarrow \Delta \text{ là đường trung trực của } MM'$$

2. Biểu thức tọa độ:

$$Đ_{\Delta:ax+by+c=0}(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=x_M-2a.\dfrac{ax_M+by_M+c}{a^2+b^2} \\ y_{M'}=y_M-2b.\dfrac{ax_M+by_M+c}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$Đ_{Ox}(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=x_M \\ y_{M'}=-y_M \end{cases}$$

$$Đ_{Oy}(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=-x_M \\ y_{M'}=y_M \end{cases}$$

3. Tính chất: Phép đối xứng trục biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng.
b) Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
c) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
d) Tam giác thành tam giác bằng nó.
e) Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

IV. PHÉP QUAY:

1. Định nghĩa:

$$Q_{(I;\varphi)}(M)=M'\Leftrightarrow \begin{cases} IM=IM' \\ (IM;IM')=\varphi \end{cases}$$

2. Biểu thức tọa độ:

$$Q_{(O;\varphi)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=x_M.\cos\varphi-y_M.\sin\varphi\\ y_{M'}=y_M.\cos\varphi+x_M.\sin\varphi\end{cases}$$

$$Q_{(O,90^\circ)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=-y_M\\ y_{M'}=x_M\end{cases}$$

$$Q_{(O,-90^\circ)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=y_M\\ y_{M'}=-x_M\end{cases}$$

3. *Tính chất:* Phép quay biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng.
b) Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
c) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
d) Tam giác thành tam giác bằng nó.
e) Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

V. PHÉP DỜI HÌNH:

1. *Định nghĩa:*

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kì.

2. *Tính chất:* Phép dời hình biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng.
b) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
c) Tam giác thành tam giác bằng nó.
d) Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

VI. PHÉP VỊ TỰ:

1. *Định nghĩa:*

$$V_{(I,k)}(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM}$$

2. *Biểu thức tọa độ:*

$$V_{(I,k)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}-x_I=k\left(x_M-x_I\right)\\ y_{M'}-y_I=k\left(y_M-y_I\right)\end{cases}$$

$$V_{(O,k)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=k.x_M\\ y_{M'}=k.y_M\end{cases}$$

3. *Tính chất:* Phép vị tự tỉ số k biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
b) Đoạn thẳng có độ dài a thành đoạn thẳng có độ dài $|k|.a$.
c) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
d) Tam giác thành tam giác đồng dạng tỉ số $|k|$.
e) Đường tròn bán kính r thành đường tròn có bán kính $|k|.r$.

VII. PHÉP ĐỒNG DẠNG:

1. *Định nghĩa:*

Phép đồng dạng tỉ số $k>0$ là phép biến hình đoạn thẳng có độ dài a thành đoạn thẳng có độ dài $k.a$.

2. *Tính chất:* Phép đông dạng tỷ số $k>0$ biến:

a) Đường thẳng thành đường thẳng.
b) Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó.
c) Tam giác thành tam giác đồng dạng tỉ số k.
d) Đường tròn bán kính r thành đường tròn có bán kính $k.r$.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

Dạng 1: Dựng ảnh của một hình qua phép biến hình.

Phương pháp:

B1: Tìm ảnh của các yếu tố xác định một hình.
B2: Dựng ảnh của hình theo các yếu tố đã tìm.

Dạng 2: Xác định ảnh, tạo ảnh hay yếu tố của phép biến hình.

Phương pháp:

B1: Lập công thức tọa độ của phép biến hình.

B2: Thay dữ kiện giả thiết đã cho vào công thức tọa độ.

B3: Tìm đại lượng theo yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép biến hình cho trước.

Phương pháp:

Cách 1: Xác đinh yếu tố.

B1: Tìm các yếu tố xác định hình đã cho.

B2: Tìm ảnh của các yếu tố này qua phép biến hình cho trước → Suy ra các yếu tố của ảnh cần tìm.

B3: Từ các yếu tố tìm được ở B2 → Lập phương trình ảnh cần tìm.

Cách 2: Thế biểu thức tọa độ.

B1: Lập biểu thức tọa độ của phép biến hình đã cho → Rút ra biểu thức tọa độ của điểm tạo ảnh.

B2: Thế biểu thức tọa độ vào phương trình của hình (tạo ảnh) đã cho.

B3: Rút gọn → Ta được phương trình ảnh cần tìm.

ĐẶC BIỆT: CÔNG THỨC NHANH

Cho $\Delta: ax+by+c=0;\ \vec{v}=(v_1;v_2)$. Khi đó, ta có:

1) $T_{\vec{v}}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': ax+by+\left[a.(-v_1)+b.(-v_2)+c\right]=0$

2) $Đ_I(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': ax+by+(-2ax_I-2by_I-c)=0$

3) $Đ_O(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': ax+by-c=0$

4) $Đ_{Ox}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': ax-by+c=0$

5) $Đ_{Oy}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': -ax+by+c=0$

6) $Q_{(O;90^\circ)}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': -bx+ay+c=0$

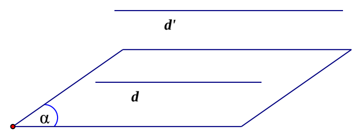
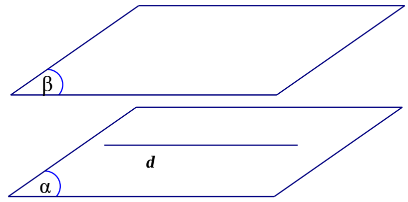
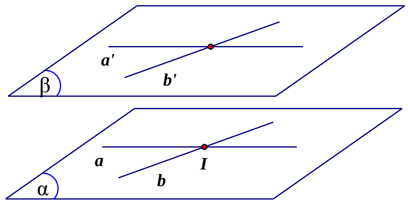
7) $Q_{(O;-90^\circ)}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': bx-ay+c=0$

8) $V_{(O;I)}(\Delta)=\Delta'$ → $\Delta': ax+by+kc=0$

VẤN ĐỀ 7. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (TỔNG HỢP) LỚP 11

I. QUAN HỆ SONG SONG

Dạng 1: Chứng minh quan hệ song song.

1. *Chứng minh 2 ĐT song song:* Sử dụng kết quả hình học phẳng để chứng minh			
2. Chứng minh ĐT song song MP			
Cách 1	$\left.\begin{matrix} d\not\subset(\alpha) \\ d\parallel d' \\ d'\subset(\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\parallel(\alpha)$	→ *Chứng minh: ĐT không chứa trong MP và song song 1 ĐT khác chứa trong MP đó.*	
Cách 2	$\left.\begin{matrix} d\subset(\alpha) \\ (\alpha)\parallel(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\parallel(\beta)$	→ *Chứng minh: ĐT này chứa trong MP song song với MP đó.*	
3. Chứng minh 2 MP song song			
Cách 1	$\left.\begin{matrix} a,b\subset(\alpha) \\ a\cap b=I \\ a\parallel a' \\ b\parallel b' \\ a',b'\subset(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\parallel(\beta)$	→ *Chứng minh: MP này có chứa 2 ĐT cắt nhau lần lwutj song song 2 ĐT chứa trong MP kia.*	

Dạng 2: Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng.

Cách 1: Tìm 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng → Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} A\in(\alpha)\cap(\beta) \\ B\in(\alpha)\cap(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB=(\alpha)\cap(\beta)}$$

Cách 2: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong 2 mặt phẳng lần lượt có chưa 2 đường thẳng song song nhau → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song 2 đường thẳng đó.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} I\in(\alpha)\cap(\beta) \\ a\subset(\alpha),\, b\subset(\beta) \\ a\parallel b\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=Ix\ (Ix\parallel a\parallel b)}$$

Cách 3: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong mặt phẳng này có chưa 1 đường thẳng song song với mặt phẳng kia→ Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song đường thẳng đó.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} I\in(\alpha)\cap(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ a\parallel(\beta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=Ix\ (Ix\parallel a)}$$

Dạng 3: Tìm giao điểm của đương thẳng d và mặt phẳng.

TH1: Nếu trong (α) có sẵn chứa đường thẳng *a* cắt *d* tại *I* thì *I* là giao điểm của *d* và (α).

$$\boxed{\left.\begin{matrix} (\alpha)\supset a \\ a\cap d=I\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\cap(\alpha)=I}$$

TH2: Nếu trong (α) ***không*** có sẵn chứa đường thẳng *a* cắt *d* thì ta thực hiện như sau:

B1: Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa *d* sao cho giao tuyến của (α) và (β) dễ tìm.

B2: Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β).

B3: Trong (β), tìm giao điểm *I* của Δ và *d* → *I* là giao điểm của *d* và (α).

$$\left.\begin{array}{l}(\beta)\supset d\\ (\alpha)\cap(\beta)=\Delta\\ \Delta\cap d=I\end{array}\right\}\Rightarrow d\cap(\alpha)=I$$

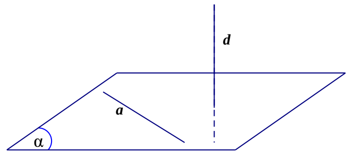
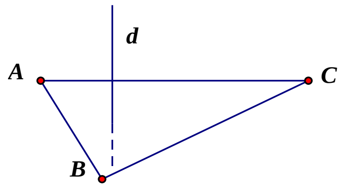
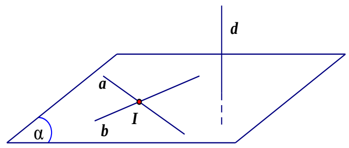
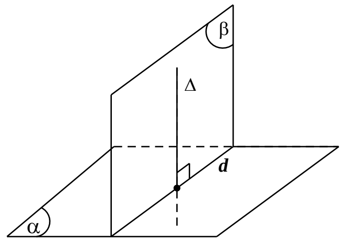
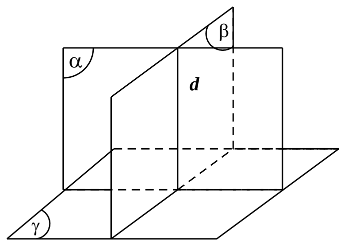
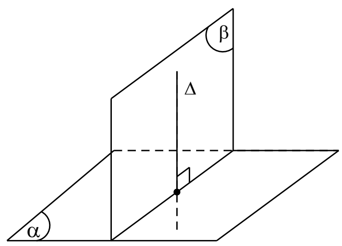
Dạng 4: Tìm thiết diện của hình chóp, lăng trụ được cắt bởi mặt phẳng

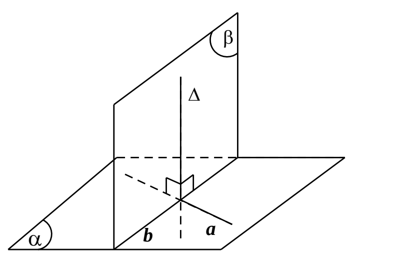
Cách 1: Tìm tất cả các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến đó.

Cách 2: Tìm tất cả các giao điểm của (α) với các cạnh (nếu có) của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các giao điểm đó.

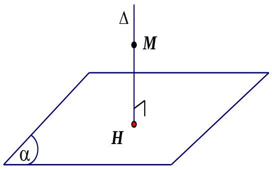
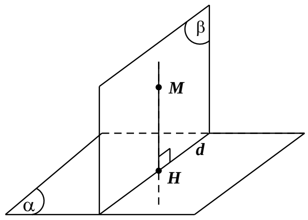
II. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Dạng 1: Chứng minh quan hệ vuông góc.

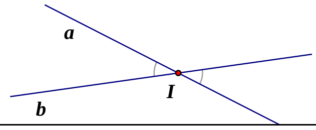
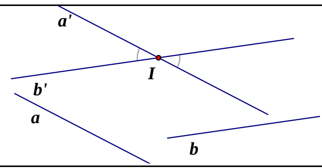
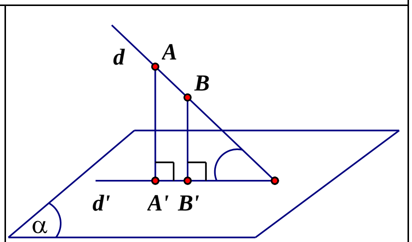
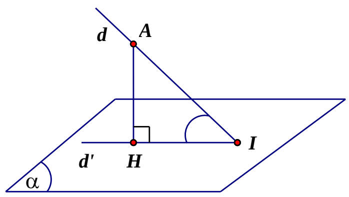
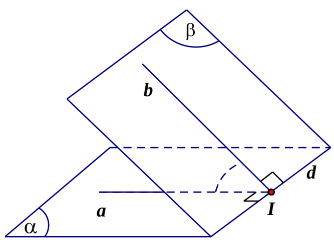
4. Chứng minh 2 ĐT vuông góc:			
Cách 1	$\left.\begin{array}{l}d\perp(\alpha)\\ a\subset(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp a$	→ *Chứng minh: ĐT này vuông góc với MP chứa ĐT kia.*	
Cách 2	$\left.\begin{array}{l}d\perp AB\\ d\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp BC$	→ *Chứng minh: ĐT này vuông góc 2 cạnh tam giác có cạnh còn lại nằm trên ĐT kia.*	
5. Chứng minh ĐT vuông góc MP:			
Cách 1	$\left.\begin{array}{l}d\perp a;d\perp b\\ a\cap b=I\\ a,b\subset(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp(\alpha)$	→ *Chứng minh: ĐT vuông góc với 2 ĐT cắt nhau cùng chứa trong MP.*	
Cách 2	$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\perp(\beta)\\ (\alpha)\cap(\beta)=d\\ \Delta\subset(\beta)\\ \Delta\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta\perp(\alpha)$	→ *Nếu 2 MP vuông góc nhau thì bất kì ĐT nào nằm trong MP này và vuông góc với giao tuyến 2 MP sẽ vuông góc MP kia.*	
Cách 3	$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=d\\ (\alpha)\perp(\gamma)\\ (\beta)\perp(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp(\gamma)$	→ *2 MP phân biệt cùng vuông góc MP thứ 3 thì giao tuyến của 2 MP đó (nếu có) sẽ vuông góc MP thứ 3 đó.*	
6. Chứng minh 2 MP vuông góc:			
Cách 1	$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta\subset(\beta)\\ \Delta\perp(\alpha)\end{array}\right.$	→ *Chứng minh: MP này có chứa 1 ĐT vuông góc MP kia.*	

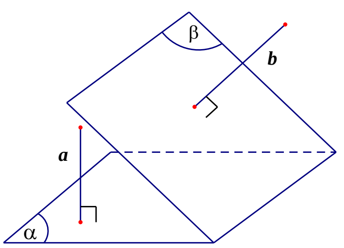
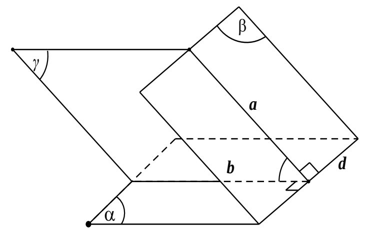
Cách 2	$\left.\begin{array}{l}(\beta)\supset\Delta\\ \Delta\perp a,\ \Delta\perp b\\ a\cap b=I\\ a,b\subset(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$	→ *Chứng minh MP này chứa 1 ĐT vuông góc với 2 ĐT cắt nhau chứa trong MP kia.*	

Dạng 2: Tìm hình chiếu của Điểm lên MP

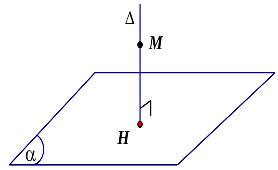
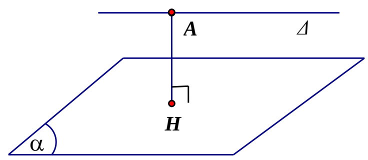
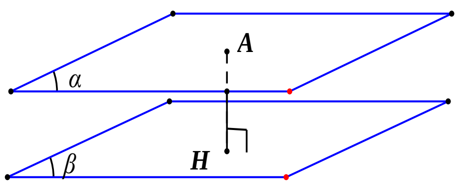
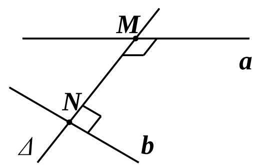
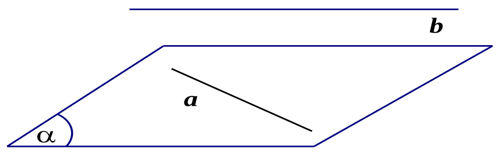
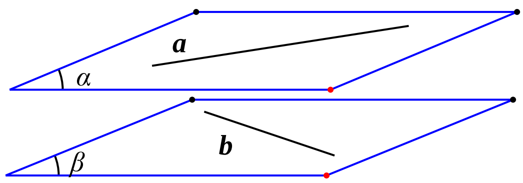
• ***Định nghĩa:*** *H* là hình chiếu của *M* lên $(\alpha)\Leftrightarrow MH\perp(\alpha)$ tại *H*.	
TH1: Có ĐT Δ đi qua điểm *M* và vuông góc mp (α) tại H → *H* là hình chiếu của *M* lên (α) 	***TH2:*** Chưa có sẵn ĐT Δ như TH1. • Tìm mp (β) qua *M* và $(\beta)\perp(\alpha)$ • Tìm $d=(\alpha)\cap(\beta)$ • Vẽ $MH\perp d$ tại H $\Rightarrow MH\perp(\alpha)$ tại *H* $\Rightarrow$ H là hình chiếu của *M* lên (α). 

Dạng 3: Tính góc.

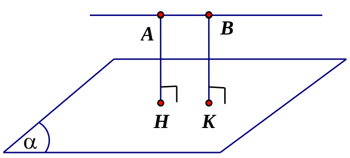
1. Góc giữa 2 ĐT cắt nhau		
ĐN: Là góc có số đo nhỏ nhất (góc nhọn) trong 4 góc tạo thành.		
2. Góc giữa 2 ĐT bất kì		
ĐN: Là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng đó.	$\left.\begin{array}{l}a\parallel a'\\ b\parallel b'\end{array}\right\}\Rightarrow(a;b)=(a';b')$	
3. Góc giữa ĐT và MP		
ĐN: Là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên mặt phẳng. $\boxed{(d,(\alpha))=(d,d')}$ (với *d'* là hình chiếu của *d* lên α))	Lấy $A,\ B\in d$ Tìm $A',\ B'$ lần lượt là hình chiếu của $A,\ B$ lên (α) → *d' (A'B')* là hình chiếu của *d* lên (α) → $(d,(\alpha))=(d,d')$	
	Đặc biệt: Nếu *d* cắt (α) tại *I* thì: $\boxed{\left.\begin{array}{l}AI\cap(\alpha)=I\\ AH\perp(\alpha)\text{ tại }H\end{array}\right\}\Rightarrow(AI,(\alpha))=AIH}$	
4. Góc giữa 2 MP		
ĐN: Là góc giữa 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó. $\boxed{\left.\begin{array}{l}a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow((\alpha),(\beta))=(a,b)}$	***Cách xác định thường dùng:*** Góc giữa hai MP bằng góc giữa 2 ĐT lần lượt chứa trong 2 MP và cùng vuông góc với giao tuyến của 2 MP đó. $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=d\\ a\subset(\alpha);b\subset(\beta)\\ a\perp d;\quad b\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow((\alpha),(\beta))=(a,b)}$	

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Cách xác định khác:
$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=d;(\gamma)\perp d\\(\gamma)\cap(\alpha)=a\\(\gamma)\cap(\beta)=b\end{array}\right\}\Rightarrow\left((\alpha),(\beta)\right)=(a,b)$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

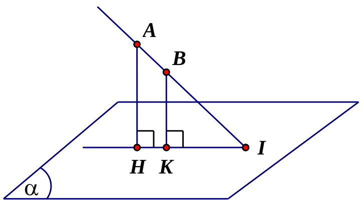
Dạng 4: Tính khoảng cách.

<table>
<tr><td colspan="3">1. Khoảng cách từ 1 Điểm đến MP</td></tr>
<tr>
<td>ĐN: Là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.</td>
<td>Tìm H là hình chiếu của A lên (α).
Khi đó:
$\boxed{d(A,(\alpha))=AH}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">2. Khoảng cách giữa ĐT và MP song song</td></tr>
<tr>
<td>ĐN: Là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.</td>
<td>Lấy $A\in\Delta$.
Khi đó:
$\boxed{d(\Delta,(\alpha))=d(A,(\alpha))}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">3. Khoảng cách giữa 2 MP song song</td></tr>
<tr>
<td>ĐN: là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.</td>
<td>Lấy $A\in(\alpha)$.
Khi đó:
$\boxed{d((\alpha),(\beta))=d(A,(\beta))}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">4. Khoảng cách giữa 2 ĐT chéo nhau</td></tr>
<tr>
<td>ĐN: Là độ dài đoạn vuông góc chung của 2 ĐT đó.</td>
<td>Tìm ĐT Δ cùng vuông góc a tại M và vuông góc với b tại N. Khi đó:
$$\left.\begin{array}{l}\Delta\perp a \text{ tại } M\\\Delta\perp b \text{ tại } N\end{array}\right\}\Rightarrow d(a,b)=MN$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Cách khác:
$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\supset a\\(\alpha)//b\end{array}\right\}\Rightarrow d(a,b)=d\left(b,(\alpha)\right)$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\supset a,(\beta)\supset b\\(\alpha)//(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow d(a,b)=d\left((\alpha),(\beta)\right)$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

•ĐẶC BIỆT: Quy tắc dời điểm khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:



$$\boxed{AB\parallel(\alpha)\Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(\alpha)\right)=\mathrm{d}\left(B,(\alpha)\right)}$$



$$\boxed{AB\cap(\alpha)=I\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\left(A,(\alpha)\right)}{\mathrm{d}\left(B,(\alpha)\right)}=\frac{AI}{BI}}$$

CÁC DẠNG HÌNH CHÓP

1. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc đáy:

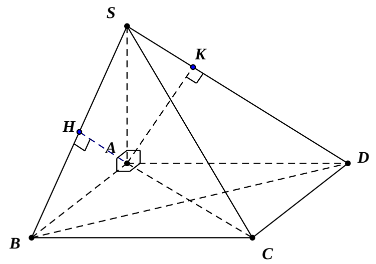
→ Đường cao là cạnh bên vương góc đáy.

Ví dụ 1: Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật và cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy. H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD

→ Đường cao là SA; $BC, AD \perp (SAB)$; $AB, DC \perp (SAD)$;

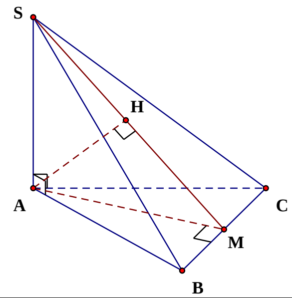
$AH \perp (SBC)$; $AK \perp (SCD)$

* Nếu đáy là hình vuông thì $BD \perp (SAC)$



Ví dụ 2: Hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác đều và cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy. M là trung điểm BC; H lần lượt là hình chiếu của A lên SM

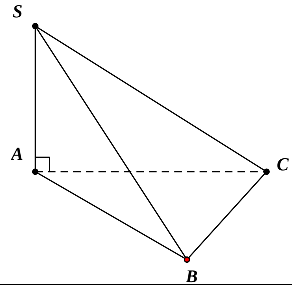
→ Đường cao là SA; $BC \perp (SAM)$; $AH \perp (SBC)$;



2. Hình chóp có 2 mặt qua đỉnh và cùng vuông góc mặt đáy:

→ Đường cao hình chóp là đoạn giao tuyến của 2 mặt đó

Ví dụ: Hình chóp *S.ABC* có 2 mặt (*SAB*), (*SAC*) cùng vuông góc mặt đáy (*ABC*) → Đường cao hình chóp là đoạn giao tuyến *SA* của 2 mặt (*SAB*), (*SAC*).

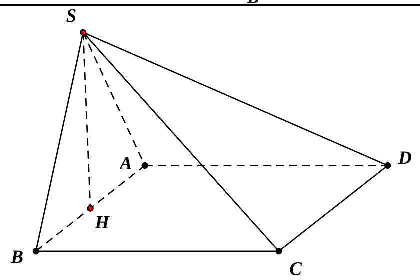


3. Hình chóp có một mặt bên vuông góc đáy:

→ Đường cao hình chóp là đường cao của mặt bên đó (hạ từ đỉnh hình chóp).

Ví dụ: Hình chóp *S.ABCD* có (*SAB*) vuông góc mặt đáy (*ABCD*)

→ Đường cao *SH* của tam giác *SAB* là đường cao hình chóp *S.ABCD*



4. Hình chóp đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng tâm đáy

Tính chất (chung):

- Các cạnh bên bằng nhau, cạnh đáy bằng nhau
- Các mặt bên là những tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau
- Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là tâm đáy)
- Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau,
- Góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.

1) Hình chóp tam giác đều:

a) Tính chất (riêng):

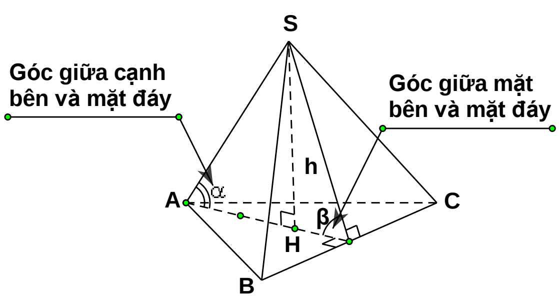
Mặt đáy là tam giác đều

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường trung tuyến của tam giác đáy)

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = SBH = SCH = \alpha$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với *I* là trung điểm cạnh đáy)

b) Công thức liên hệ: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy *a*, cạnh bên *b*, chiều cao *h*, góc giữa cạnh bên và mặt đáy α, góc giữa mặt bên và mặt đáy β. Khi đó:



Cách vẽ hình chóp tam giác đều S.ABC (hoặc tứ diện đều):

Vẽ đáy ABC → Dựng trọng tâm H (Là giao điểm 2 đường trung tuyến) → Vẽ SH vuông góc (ABC) → Vẽ các cạnh bên

$$a = b.\sqrt{3}.\cos\alpha$$
$$h = b.\sin\alpha$$
$$h = \frac{a}{\sqrt{3}}.\tan\alpha$$

$$h = \frac{a}{2\sqrt{3}}.\tan\beta$$
$$b^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right).h$$

1) ***Hình tứ diện đều*** là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy (hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau.

Cho khối tứ diện đều cạnh *a*, chiều cao *h*, khoảng cách giữa 2 cạnh đối diện *d*. Ta có:

$$h = a\frac{\sqrt{6}}{3} \qquad d = a\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

3). Hình chóp tứ giác đều

a) Tính chất (riêng):

Mặt đáy là hình vuông

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường chéo của đáy hình vuông)

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = SBH = SCH = SDH = \alpha$.

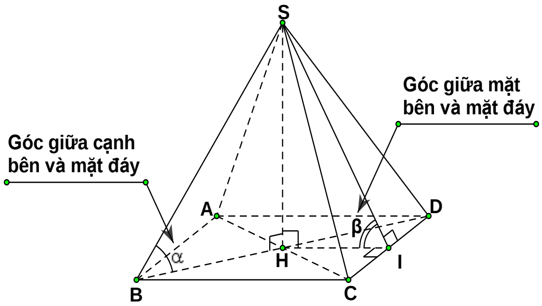
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với *I* là trung điểm cạnh đáy)

b) Công thức liên hệ:

$$a = b.\sqrt{2}.\cos\alpha$$
$$h = b.\sin\alpha$$
$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}.\tan\alpha$$

$$b^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$$
$$h = \frac{a}{2}.\tan\beta$$

$$V = \frac{1}{3}a^2.h$$

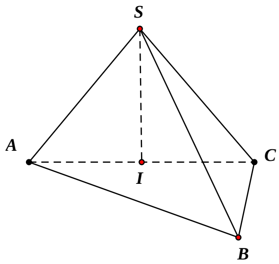


Cách vẽ hình chóp tứ giác đều S.ABCD: Vẽ đáy hình bình hành ABCD → Vẽ H là giao điểm của hai đường chéo AC & BD → Vẽ SH vuông góc (ABCD) → Vẽ các cạnh bên

5. Hình chóp có tất cả cạnh bên bằng nhau:

→ Đường cao hình chóp là đoạn thẳng hạ từ đỉnh hình chóp đến tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

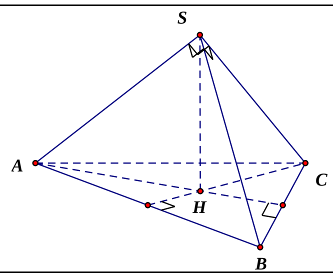
Ví dụ: Hình chóp *S.ABC* các cạnh bên *SA*, *SB*, *SC* bằng nhau và đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B* →Đường cao hình chóp là *SI*, với *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* (*I* là trung điểm *AC*)



6. Tứ diện vuông: (Tứ diện có 3 mặt là 3 tam giác vuông tại cùng một đỉnh hay có 3 cạnh đôi một vuông góc)

→ Chân đường cao ứng với đỉnh vuông là trực tâm mặt đối diện với đỉnh vuông.

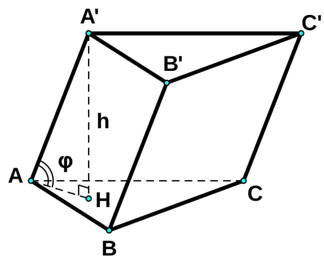
Ví dụ: Hình chóp *S.ABC* có mặt bên *SAB*, *SBC*, *SCA* là tam giác vuông tại *S* →Đường cao *SH*, (với *H* là trực tâm tam giác *ABC*)

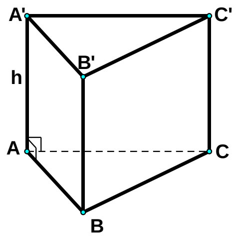


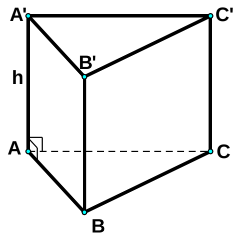
CÁC DẠNG HÌNH LĂNG TRỤ

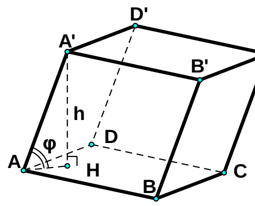
Tính chất: ***Hình Lăng trụ có:***

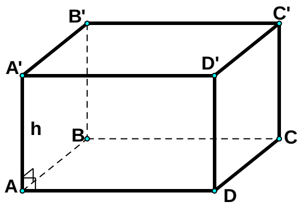
+ Các cạnh bên song song và bằng nhau;
+ Các mặt bên là hình bình hành;
+ Hai mặt đáy song song và bằng nhau;
+ Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;
+ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau;
+ Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau;

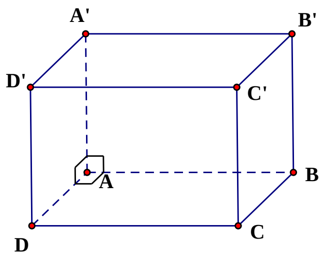


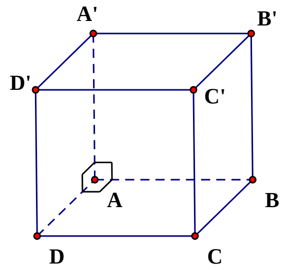
<table>
<tr>
<td>Lăng trụ đứng: là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy


Đường cao là các cạnh bên $A'A$, $B'B$, $C'C$</td>
<td>Lăng trụ đều: là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều


Đường cao là các cạnh bên $A'A$, $B'B$, $C'C$</td>
<td>Hình hộp: là lăng trụ có đáy là hình bình hành


Đường cao: $A'H$ (với H là hình chiếu của A' lên (ABC))</td>
</tr>
<tr>
<td>Hình hộp đứng: là hình hộp có các cạnh bên vuông góc đáy (đáy là hình bình hành)


Đường cao: $A'A, B'B, C'C, D'D$</td>
<td>Hình hộp chữ nhật: là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (có 6 mặt đều là hình chữ nhật)


Đường chéo:
$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$</td>
<td>Hình lập phương: là hình hộp có 6 mặt đều là hình vuông


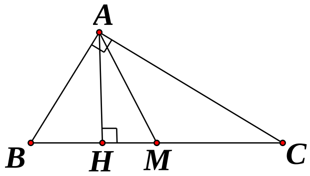
Đường chéo: $AC' = AB.\sqrt{3}$</td>
</tr>
</table>

PHỤ LỤC

HÌNH HỌC PHẲNG (TỔNG HỢP)

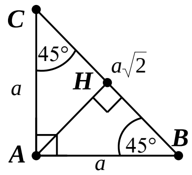
I. *HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC:*

1) Tam giác vuông: Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH và trung tuyến AM. Ta có:



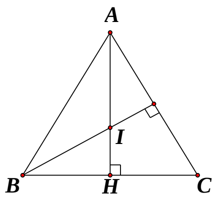
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pi-ta-go)
- $AH.BC = AB.AC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AB^2 = BH.BC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AH^2 = \dfrac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $AM = \dfrac{BC}{2}$
- Diện tích: $S = \dfrac{1}{2}.AB.AC$ (bằng nửa tích độ dài 2 cạnh góc vuông)

2) Tam giác vuông cân: Cho ΔABC vuông cân tại A có đường cao AH. Ta có:



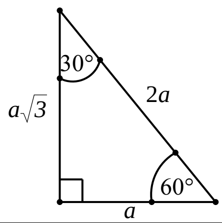
- $AB = AC = a$
- $BC = a\sqrt{2}$
- $AH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{BC^2}{4}$

3) Tam giác đều: Cho ΔABC đều cạnh *a*, có tâm I và đường cao AH. Ta có:

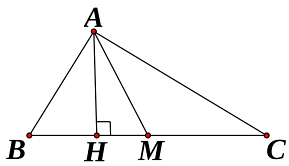


- $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
- $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
- $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
- Diện tích: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

4) Nửa tam giác đều:



5) Tam giác thường: Cho ΔABC độ dài cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$, đường cao $AH = h_a$, trung tuyến $AM = m_a$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là *R*, bán kính đường tròn nội tiếp là *r*. Ta có:



- Định lí côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
- Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- $m_a{}^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$
- Diện tích:

$S = \dfrac{1}{2}.a.h_a$ $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$ $S = \dfrac{abc}{4R}$ $S = p.r$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

II. *HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC:*

1) Hình thang: Diện tích hình thang ABCD có đáy AB, CD: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).h$ (với *h* là chiều cao và *h* bằng khoảng cách giữa *AB* và *CD*)

2) Hình thang vuông: Diện tích hình thang ABCD vuông tại A, D: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).AD$

3) Hình bình hành: Diện tích hình bình hành ABCD: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).h$ (với *h* là chiều cao và *h* bằng khoảng cách giữa AB và CD)

4) Hình thoi: Diện tích hình thoi ABCD: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$ (bằng nửa tích độ dài 2 đường chéo)

5) Hình chữ nhật: Diện tích hình chữ nhật *ABCD*: $S = AB.BC$ (bằng tích chiều dài và chiều rộng)

6) Hình vuông: Cho hình vuông ABCD cạnh *a*, tâm O

- $AC = BD = a\sqrt{2}$
- $OA = OB = OC = OD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $\boxed{S = a^2}$

III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN:

• Diện tích hình tròn bán kính R: $S=\pi.R^2$	• Chu vi đường tròn bán kính R: $C=2\pi.R$

IV. TÂM CỦA TAM GIÁC

- Trọng tâm tam giác là giao điểm 3 đường trung tuyến
- Trực tâm tam giác là giao điểm 3 đường cao
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điiểm 3 đường phân giác

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

I. TỌA ĐỘ

Cho $\vec{u}=(x;y),\vec{v}=(x';y')$

$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$	$\vec{u}\pm\vec{v}=\left(x\pm x';y\pm y'\right)$	$k\vec{u}=(kx;ky)$	$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$
$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$	$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}$	

Cho $A\left(x_A;y_A\right),\ B\left(x_B;y_B\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$	$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
M là trung điểm của AB: $\boxed{x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}.}$	G là trọng tâm tam giác ABC: $\boxed{x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}}$
G là trọng tâm tứ giác $ABCD$: $\boxed{G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right)}$	M chia AB theo tỉ số k: $\boxed{x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k}}$

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. **Phương trình:** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và có 1 VTPT $\vec{n}=\left(A;B\right)$ hay có 1 VTCP $\vec{a}=\left(a;b\right)$,có:

Phương trình tổng quát: $\boxed{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0\Leftrightarrow Ax+By+C=0}$(với $C=-Ax_0-By_0$)

Phương trình tham số: $\boxed{\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}}$, $\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Phương trình chính tắc: $\boxed{\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}}$,$\left(a.b\neq0\right)$

Chú ý: Phương trình đường thẳng qua $M\left(x_0;y_0\right)$ có hệ số góc k: $\boxed{y-y_0=k\left(x-x_0\right)}$.

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A, B: $\boxed{\dfrac{x-x_B}{x_A-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_A-y_B}}$

2. **Khoảng cách** từ một điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ đến một đường thẳng Δ: $Ax+By+C=0$ là:

$$\boxed{d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|Ax_M+By_M+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. **Phương trình:** Đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính R, có phương trình:

Dạng 1: $\boxed{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2}$.

Dạng 2: $\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$, với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ và $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.