

Câu 1 (2 điểm)

- a) Cho parabol (P): $y = -x^2 + 4x + 5$ và điểm $I(1;4)$. Tìm trên (P) hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm I.
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình $|x^2 - 2| = m^4 - m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2 (3 điểm)

- a) Giải bất phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12$
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$
- c) Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm.

Câu 3 (3 điểm)

- a) Cho tam giác ABC có trọng tâm là G . Hai điểm D và E được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: D, E, G thẳng hàng
- b) Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$
- c) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, điểm $M(-2;0)$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(1;-1)$ là hình chiếu của B trên AD và điểm $G\left(\frac{7}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác BCD . Đường thẳng HM cắt BC tại E , đường thẳng HG cắt BC tại F . Tìm tọa độ các điểm E, F và B

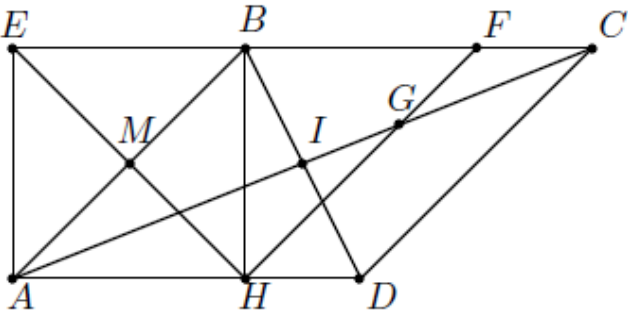
Câu 4 (1 điểm) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{(x-y)^2 - 3y^2}{xy+1}$.

Câu 5 (1 điểm) Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$

.....Hết.....

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Cho parabol (P): $y = -x^2 + 4x + 5$ và điểm $I(1; 4)$. Tìm trên (P) hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm I	1,00
		đường thẳng Δ qua I và có hsg k có phương trình $y = k(x - 1) + 4$ Xét pt $-x^2 + 4x + 5 = k(x - 1) + 4 \Leftrightarrow x^2 + (k - 4)x - k - 1 = 0$ (1)	0,25
		$\Delta = (k - 4)^2 + 4(k + 1) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 20 > 0, \forall k \Rightarrow \Delta$ cắt (P) tại M và N Gọi 2 nghiệm của (1) là $x_1, x_2 \Rightarrow M(x_1; k(x_1 - 1) + 4), N(x_2; k(x_2 - 1) + 4)$	0,25
		M, N đối xứng nhau qua điểm I $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của MN $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ \frac{k(x_1 - 1) + 4 + k(x_2 - 1) + 4}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4 - k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$	0,25
		Khi đó (1) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$. Vậy $M(-1; 0), N(3; 8)$	0,25
1	b	Tìm m để phương trình $ x^2 - 2 = m^4 - m^2$ có 4 nghiệm phân biệt	1,00
		Điều kiện cần $m^4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$ (1)	0,25
		Khi đó $\begin{cases} x^2 - 2 = m^4 - m^2 \\ x^2 - 2 = -(m^4 - m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + m^4 - m^2 \\ x^2 = 2 - (m^4 - m^2) \end{cases}$	0,25
		Điều kiện đủ $2 - (m^4 - m^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < m^2 < 2$	0,25
		Kết hợp với ĐK (1) ta được $1 < m < \sqrt{2}$ hoặc $-\sqrt{2} < m < -1$	0,25
		Cách khác. Pt có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m^4 - m^2$ cắt đths $y = x^2 - 2 $ tại 4 điểm. Từ đồ thị suy ra $0 < m^4 - m^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{2}$	
2	a	Giải bất phương trình: $(x + 1)\sqrt{x + 2} + (x + 6)\sqrt{x + 7} \geq x^2 + 7x + 12$	1,00
		ĐK : $x \geq -2$. BPT $\Leftrightarrow (x + 1)(\sqrt{x + 2} - 2) + (x + 6)(\sqrt{x + 7} - 3) \geq x^2 + 2x - 8$	0,25
		$\Leftrightarrow (x + 1)\frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} + 2} + (x + 6)\frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} + 3} \geq (x - 2)(x + 4)$ $\Leftrightarrow (x - 2)\left(\frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} + 2} + \frac{x + 6}{\sqrt{x + 7} + 3} - (x + 4)\right) \geq 0$	0,25
		Ta có $\frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} + 2} + \frac{x + 6}{\sqrt{x + 7} + 3} - (x + 4) = \frac{x + 2}{\sqrt{x + 2} + 2} - \frac{x + 2}{2} + \frac{x + 6}{\sqrt{x + 7} + 3} - \frac{x + 6}{2} - \frac{1}{\sqrt{x + 2} + 2}$	0,25

		$-\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{(x+6)(\sqrt{x+7}+1)}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0, \forall x \geq -2$	
		BPT $\Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ Vậy tập nghiệm của BPT là $S = [-2; 2]$	0,25
2	b	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$	1,00
		Trừ vế ta được $(x-y)(x+y-2xy+7) = 0$	0,25
		TH 1. $x = y$. Thế vào pt thứ nhất ta được $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
		TH 2. $x + y - 2xy + 7 = 0 \Leftrightarrow 2xy = x + y + 7$ Cộng hai pt theo vế ta được $5(x+y) - (x^2 + y^2) - 12 = 0 \Leftrightarrow 5(x+y) - (x+y)^2 + 2xy - 12 = 0$ $\Leftrightarrow -(x+y)^2 + 6(x+y) - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$	0,25
		$x+y=1 \Rightarrow xy=4$ (Loại) $x+y=5 \Rightarrow xy=6 \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=3 \\ x=3, y=2 \end{cases}$ Vậy hệ có 4 nghiệm là $(2;2), (3;3), (2;3), (3;2)$	0,25
2	c	Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm	1,00
		ĐK: $x \geq 1$. Chia hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta được $3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$	0,25
		Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, 0 \leq t < 1$ ta được $3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow -3t^2 + 2t = m$ (2)	0,25
		Pt (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow$ pt (2) có nghiệm $t \in [0;1)$ Lập bảng biến thiên của $f(t) = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$	0,25
		Từ BBT suy ra pt (2) có nghiệm $t \in [0;1) \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}$	0,25
3	a	Cho tam giác ABC có trọng tâm là G . Hai điểm D và E được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: D, E, G thẳng hàng	1,00
		Gọi M là trung điểm của BC ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	0,25

		$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(-5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (1)$	0,25
		$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(-5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE} = \frac{6}{5}\overrightarrow{DG} \Rightarrow D, E, G$ thẳng hàng	0,25
3	b	Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC. Chứng minh $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$	1,00
		Ta có $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{MH}$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MH})$ $= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH})]$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH})$	0,25
		Vì $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$; $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB}$	0,25
		Mặt khác ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$ Nên $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{MC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{CA'})$	0,25
		$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}BC^2 \text{ (đpcm)}$	0,25
3	c	Tìm tọa độ các điểm E, F và B	1,00
		 Chứng minh được $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{ME}$ từ đó suy ra $E(-5;1)$ Chứng minh được $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GF}$ từ đó suy ra $F(3;5)$ Giả sử $B(x;y)$. Từ giả thiết suy ra B, E, F thẳng hàng và $BE \perp BH$ Tìm được tọa độ $B(-1;3)$	0,25
4		Tìm max và min của biểu thức $S = \frac{(x-y)^2 - 3y^2}{xy+1}$.	1,00

	Thế $x^2 + y^2 = 1$ vào S ta được $S = \frac{x^2 - 2xy - 2y^2}{xy + x^2 + y^2}$	0,25
	TH 1. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow S = 1$ TH2. $y \neq 0 \Rightarrow S = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 2}{\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$. Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow S = \frac{t^2 - 2t - 2}{t^2 + t + 1}$	0,25
	$\Leftrightarrow S(t^2 + t + 1) = t^2 - 2t - 2 \Leftrightarrow (S - 1)t^2 + (S + 2)t + S + 2 = 0$ Với $S \neq 1$, tồn tại $t \Leftrightarrow \Delta = (S + 2)^2 - 4(S - 1)(S + 2) \geq 0$	0,25
	Biến đổi ta được $(S + 2)(-3S + 6) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq S \leq 2$ Do $S = 1 \in [-2; 2]$ nên $\max S = 2, \min S = -2$	0,25
5	Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + y - 2 $	1,00
	$A = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + y - 2 \geq \sqrt{(1 - x + x + 1)^2 + (y + y)^2} + y - 2 $ Vậy $A \geq \sqrt{4 + 4y^2} + y - 2 $.	0,25
	TH 1. $y \geq 2 \Rightarrow A \geq 2\sqrt{1 + y^2} \geq 2\sqrt{5}$	0,25
	TH 2. $y < 2 \Rightarrow A \geq 2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y$ $= \sqrt{\left((\sqrt{3})^2 + 1^2\right)(1^2 + y^2)} + 2 - y \geq \sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot y + 2 - y = \sqrt{3} + 2$	0,25
	$A = 2 + \sqrt{3}$ khi và chỉ khi $x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ta có $2 + \sqrt{3} < 2\sqrt{5} \Rightarrow \min A = 2 + \sqrt{3}$	0,25