



Chương 01

VECTORS

- ✍. CÁC ĐỊNH NGHĨA.
- ✍. TỔNG HIỆU HAI VÉCTƠ.
- ✍. TÍCH CỦA VÉCTƠ VỚI MỘT SỐ.
- ✍. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.



10

*****MỤC LỤC*****

BÀI 01. CÁC ĐỊNH NGHĨA	4
I. KHÁI NIỆM VECTO.	4
1.1. Định nghĩa:	4
1.2. Kí hiệu:	4
II. VECTO CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG.	4
2.1. Giá của vectơ:	4
2.2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:	4
III. HAI VECTO BẰNG NHAU.	5
3.1. Độ dài vectơ:	5
3.2. Định nghĩa:	5
IV. VECTO KHÔNG.	6
V. CÁC DẠNG TOÁN.	6
Dạng 01. XÁC ĐỊNH MỘT VECTO, SỰ CÙNG PHƯƠNG VÀ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.	6
Dạng 02. CHỨNG MINH HAI VECTO BẰNG NHAU.	9
BÀI 02. TỔNG HIỆU HAI VECTO	16
I. TỔNG CỦA HAI VECTO	16
1.1. Định nghĩa:	16
1.2. Tính chất:	16
1.3. Quy tắc hình bình hành:	16
II. HIỆU CỦA HAI VECTO	18
2.1. Định nghĩa:	18
2.2. Quy tắc về hiệu vectơ:	18
II. CÁC DẠNG TOÁN	20
Dạng 01. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO.	20
Dạng 02. TÌM MÔĐUN (ĐỘ DÀI) VECTO.	38
BÀI 03. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ	46
I. ĐỊNH NGHĨA.	46
II. TÍNH CHẤT.	47
III. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC.	47

IV. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG.	48
V. PHÂN TÍCH MỘT VEC TƠ THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.	48
VI. CÁC DẠNG TOÁN.....	49
↪ Dạng 01. BIỂU DIỄN VECTO	49
↪ Dạng 02. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY	54
↪ Dạng 03. TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTO	63
↪ BÀI 04. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ	70
I. TRỤC TỌA ĐỘ.....	70
1.1. Định nghĩa	70
1.2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục.....	70
1.3. Độ dài đại số của vectơ trên trục:.....	70
II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.....	71
2.1. Định nghĩa	71
2.2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ	71
2.3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác	71
2.4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.....	72
III. TỔNG KẾT.	74
IV. CÁC DẠNG TOÁN.....	75
↪ Dạng 01. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM; VECTO ; ĐỘ DÀI CỦA VECTO VÀ CHỨNG MINH HỆ THỨC	75
↪ Dạng 02. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM; VECTO TRÊN MẶT PHẪNG Oxy	77
↪ Dạng 03. VECTO CÙNG PHƯƠNG & ỨNG DỤNG	96
V. BÀI TẬP NÂNG CAO.....	112
↪ BÀI 05. TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG	123
I. BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	123
II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	162

BÀI 1

CÁC ĐỊNH NGHĨA

I. KHÁI NIỆM VECTƠ.

※ Cho đoạn thẳng AB . Nếu chọn điểm A làm điểm đầu, điểm B làm điểm cuối thì đoạn thẳng AB có hướng từ A đến B . Khi đó ta nói AB là một đoạn thẳng có hướng.

1.1. Định nghĩa:

⊙ Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.



1.2. Kí hiệu:

⊙ Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB ".

⊙ Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC . Hãy kể tên các vectơ có điểm đầu và cuối là các đỉnh A, B, C ?

Lời giải

Các vectơ có điểm đầu và cuối là các đỉnh A, B, C là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$

II. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG.

2.1. Giá của vectơ:

※ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của 1 vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

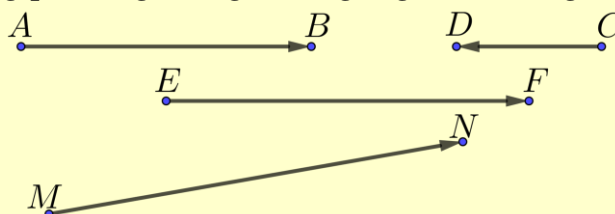
2.2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:

※ Hai vectơ được là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

※ Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 2

Hãy liệt kê các vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng trong hình vẽ sau:



Lời giải

- ♦ Các vectơ cùng phương: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{EF}$
- ♦ Các vectơ ngược hướng: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{EF}$
- ♦ Các vectơ cùng hướng: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$

Nhận xét

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

III. HAI VECTƠ BẰNG NHAU.

3.1. Độ dài vectơ:

※ Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

⊙ Kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

※ Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

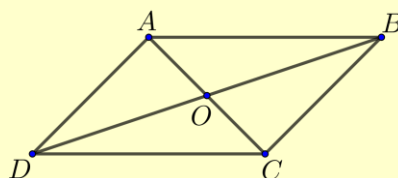
3.2. Định nghĩa:

※ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

⊙ Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hãy liệt kê các vectơ bằng nhau trên hình bình hành đó.



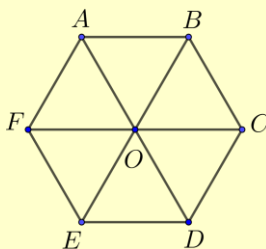
Lời giải

- ♦ Các vectơ bằng nhau trên hình bình hành đó là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}; \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}.$$

Ví dụ 3

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$.



Lời giải

- ♦ Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là: $\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{OF}; \overrightarrow{DE}$.

★ **Chú ý:** Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

IV. VECTƠ KHÔNG.

- ※ Vectơ-không là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.
- ※ Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
- ※ Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

V. CÁC DẠNG TOÁN.

🔗 Dạng 01. XÁC ĐỊNH MỘT VECTƠ, SỰ CÙNG PHƯƠNG VÀ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

Phương pháp giải

- Để xác định vectơ ta cần biết điểm đầu và điểm cuối của vectơ hoặc biết độ dài và hướng của chúng.
 - ◎ Chẳng hạn với hai điểm A, B phân biệt, ta có hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
- Vectơ $\vec{a}$ là vectơ-không khi và chỉ khi $|\vec{a}| = 0$ hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

🔗 Bài 01.

Cho 5 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

Lời giải

- ★ Xét các điểm A, B, C, D, E phân biệt.
- ♦ Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:
 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$.
- ⇒ Vậy có 20 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

🔗 Bài 02.

Hãy tính số các vectơ (khác) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

- ① Hai điểm.
- ② Ba điểm.
- ③ Bốn điểm.

Lời giải

- ① Hai điểm.

♦ Xét hai điểm A, B phân biệt. Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$.

⇒ Vậy có 2 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

② Ba điểm.

♦ Xét các điểm A, B, C phân biệt.

♦ Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}.$$

⇒ Vậy có 6 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

③ Bốn điểm.

♦ Xét các điểm A, B, C, D phân biệt.

♦ Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}.$$

⇒ Vậy có 12 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

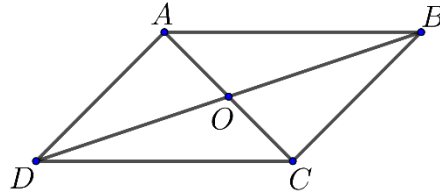
📌 **Bài 03.**

Cho hình bình hành. Hãy chỉ ra các vectơ khác nhau và khác vectơ – không, có điểm đầu và điểm cuối một trong bốn điểm của hình hành. Trong các vectơ trên hãy chỉ ra:

① Các cặp vectơ cùng phương.

② Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.

Lời giải



♦ Giả sử hình bình hành là $ABCD$. Có 12 vectơ khác nhau và khác vectơ – không, có điểm đầu và điểm cuối một trong bốn điểm của hình hành là

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$$

① Các cặp vectơ cùng phương.

♦ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$.

♦ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

♦ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$.

♦ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

② Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.

♦ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{DB}$.

Bài 04.

Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt A, B, C trong các trường hợp sau:

- ① $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$.
- ② $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.
- ③ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

- ① $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$.
 - $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng $\Rightarrow$ điểm A nằm ngoài đoạn BC .
 - Do $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$ nên điểm C là điểm giữa của hai điểm A và B .
- ② $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.
 - $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng nên điểm A là điểm giữa hai điểm B và C .
- ③ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}|$.
 - $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}|$ nên điểm B là điểm giữa của hai điểm A và C .

Bài 05.

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Có hay không có một vectơ cùng phương với hai vectơ đó?

Lời giải

- Có, chọn vectơ đó là vectơ $\vec{0}$, vectơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Bài 06.

Cho ba vectơ cùng phương $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vectơ trong ba vectơ đó cùng hướng.

Lời giải

- Chú ý rằng hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Giả sử $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng hướng.
- Khi đó vì $\vec{w}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{w}$ cùng hướng hoặc ngược hướng với $\vec{u}$.
- ⊙ Nếu $\vec{w}$ cùng hướng với $\vec{u}$ thì bài toán được chứng minh.
- ⊙ Nếu $\vec{w}$ ngược hướng với $\vec{u}$ thì $\vec{v}, \vec{w}$ cùng ngược hướng với $\vec{u}$ nên hai vectơ $\vec{v}, \vec{w}$ cùng hướng nhau.

Bài 07.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- ① Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba thì cùng phương.
- ② Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
- ③ Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba thì cùng hướng.
- ④ Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.
- ⑤ Hai vecto ngược hướng với một vecto khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.
- ⑥ Điều kiện cần và đủ để hai vecto bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Lời giải

- ① Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba thì cùng phương.
 $\Rightarrow$ Khẳng định sai trong trường hợp vecto thứ ba là vecto $\vec{0}$.
- ② Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
 $\Rightarrow$ Khẳng định đúng.
- ③ Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba thì cùng hướng.
 $\Rightarrow$ Khẳng định sai trong trường hợp vecto thứ ba là vecto $\vec{0}$.
- ④ Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.
 $\Rightarrow$ Khẳng định đúng.
- ⑤ Hai vecto ngược hướng với một vecto khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.
 $\Rightarrow$ Khẳng định đúng.
- ⑥ Điều kiện cần và đủ để hai vecto bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.
 $\Rightarrow$ Khẳng định sai. Vì: điều kiện cần và đủ để hai vecto bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau và cùng hướng.

Dạng 02. CHỨNG MINH HAI VECTO BẰNG NHAU.

Phương pháp giải

○ Để chứng minh hai vecto bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

Cách 01 | $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}; \vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

Cách 02 | Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Cách 03 | Nếu $\vec{a} = \vec{b}; \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$.

Bài 01.

Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

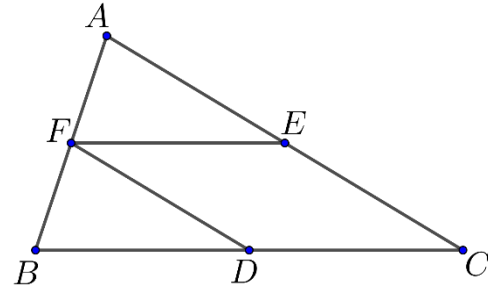
♦ Ta có: D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình $\triangle ABC$ và $EF = \frac{1}{2} BC$ (1).

♦ Lại có D là trung điểm $BC \Rightarrow CD = \frac{1}{2} CB$ (2).

♦ Dễ thấy $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$ (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.



Bài 02.

Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Điểm I là giao điểm của AM và BN , K là giao điểm của DM và CN . Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$

Lời giải

□ Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

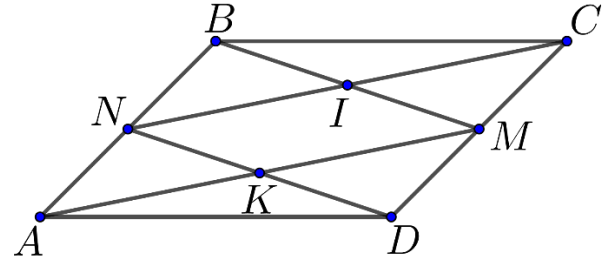
♦ Ta có:

+ M trung điểm $BC \rightarrow MC = \frac{1}{2} BC$.

+ N trung điểm $AD \rightarrow AN = \frac{1}{2} AD$.

♦ Mà $AD = BC \Rightarrow AN = MC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.



□ Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

♦ Ta có: $\begin{cases} AN \parallel MB \\ AN = MB \end{cases} \Rightarrow ABMN$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm $NB \Rightarrow NI = \frac{1}{2} NB$ (1).

♦ Ta có: $\begin{cases} DN \parallel MC \\ DN = MC \end{cases} \Rightarrow CDNM$ là hình bình hành $\Rightarrow K$ là trung điểm $MD \Rightarrow DK = \frac{1}{2} DM$ (2).

♦ Dễ thấy $BNDM$ là hình bình hành do $\begin{cases} BN \parallel MD \\ BN = MD \end{cases}$ nên $ND = BM$ (3).

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

Bài 03.

Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O . Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Lời giải

♦ Ta có B' là điểm đối xứng của B qua O
Nên BB' là một đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

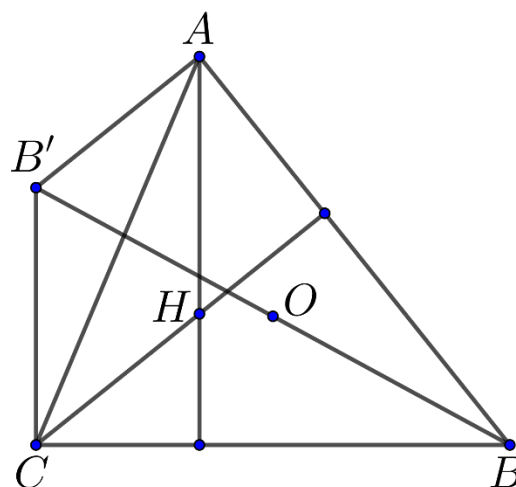
♦ Ta có: $OC = \frac{1}{2}BB'$ nên tam giác CBB' vuông tại C .

♦ Ta có: $\begin{cases} B'C \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow B'C \parallel AH \quad (1).$

♦ Tương tự: $OA = \frac{1}{2}BB'$ nên tam giác ABB' vuông tại A .

♦ Ta có: $\begin{cases} B'A \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow B'A \parallel CH \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (đpcm).

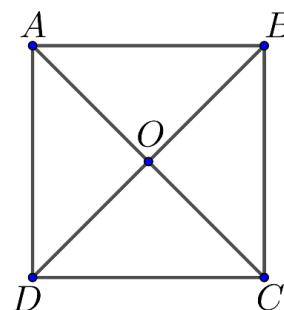


Bài 04.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông là điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải

♦ Ta có các cặp vectơ sau:
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};$
 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC};$
 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}; \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}.$



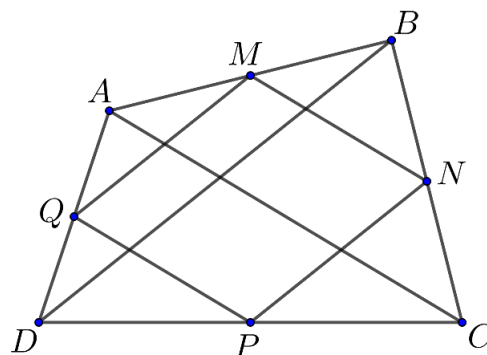
Bài 05.

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}.$

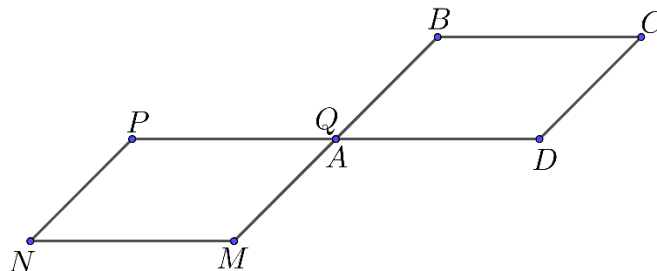
♦ Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}.$



Bài 06.

Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

Lời giải



♦ Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} \end{cases}$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$.
 $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Bài 07.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Tia AO cắt đường tròn tâm O tại D . Chứng minh $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

♦ Vì H là trực tâm của tam giác ABC (giả thiết)

Nên $HB \perp AC$ (1)

♦ Vì tia AO cắt đường tròn tâm O tại D (giả thiết)

Nên AD là đường kính của đường tròn tâm O

$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Leftrightarrow CD \perp AC$ (2)

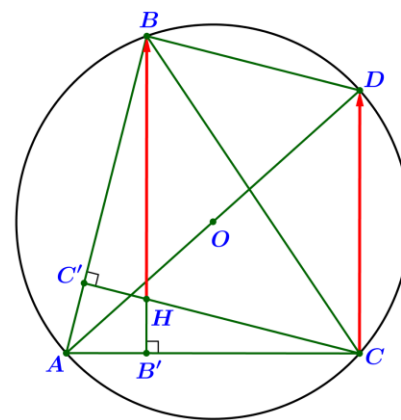
Từ (1) và (2) $\Rightarrow HB \parallel CD$

♦ Chứng minh tương tự $\Rightarrow BD \parallel HC$

♦ Do đó tứ giác $BDCH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

♦ Khi đó ta có: $\overrightarrow{HB}$ cùng chiều với $\overrightarrow{CD}$ và $|\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{CD}|$

Vậy $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CD}$ (theo định nghĩa).

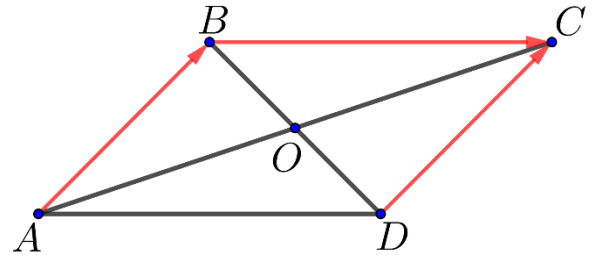


Bài 08.

Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Lời giải

- ♦ Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow AB = DC$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AB \parallel DC \end{cases}$
- ♦ Nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (1)
- ♦ Vì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow AB = BC$ (2)
- ♦ Nên $ABCD$ là hình thoi.



Bài 09.

Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ đối nhau.
- ♦ Do đó, hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, ngược chiều và cùng độ dài.

Bài 10.

Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ khác véc tơ không. Khi nào đẳng thức sau xảy ra?

① $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

② $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

Lời giải

① $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

- ♦ Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b}$.

Và $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- ♦ Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, mà $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.

$\Rightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) = 1 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$.

$\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ cùng chiều.

② $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

- ♦ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |-\vec{b}| = |(\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{b})|$.

hay $|(\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{b})| = |\vec{a} + \vec{b}| + |-\vec{b}|$.

- ♦ Áp dụng phần ① ta suy ra $\vec{a} + \vec{b}$ và $-\vec{b}$ là hai véc tơ cùng chiều.

Hay $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ ngược chiều.

Bài 11.

Cho tam giác ABC . Vẽ D đối xứng với A qua B , E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A . Gọi G là giao điểm của trung tuyến AM của tam giác ABC với trung tuyến DN của tam giác DEF . Gọi I và K lần lượt là trung điểm GA và GD . Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$.

② $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$

Lời giải

① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$.

♦ Ta có A, N lần lượt là trung điểm của FC, FE

$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (Vì C là trung điểm của BE).

♦ Mà $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM}$

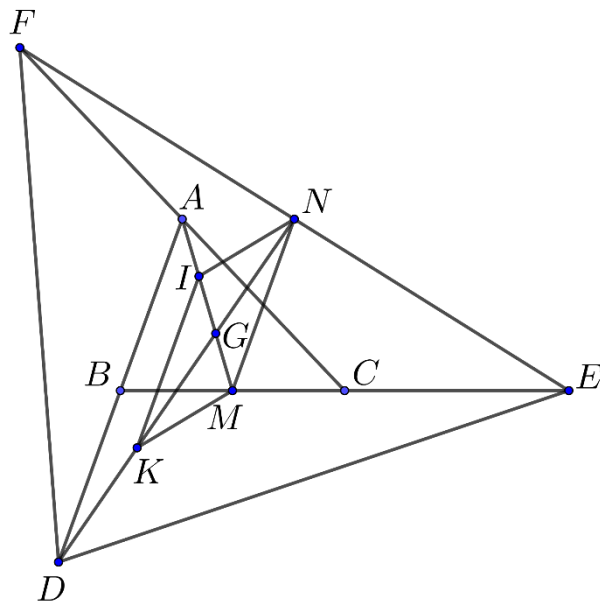
$\Rightarrow$ tứ giác $ANMB$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB}$ (đpcm).

② $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$

♦ Ta có I, K lần lượt là trung điểm của GA và GD

$\Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $INMK$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$ (đpcm).



Bài 12.

Cho tam giác ABC và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vẽ điểm P đối xứng với M qua D , điểm Q đối xứng với P qua E , điểm N đối xứng với Q qua F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$.

Lời giải

♦ Ta có :

⊙ D là trung điểm AB và M đối xứng P qua $D \Rightarrow D$ là trung điểm MP .

Nên $AMBP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BP}$ (1).

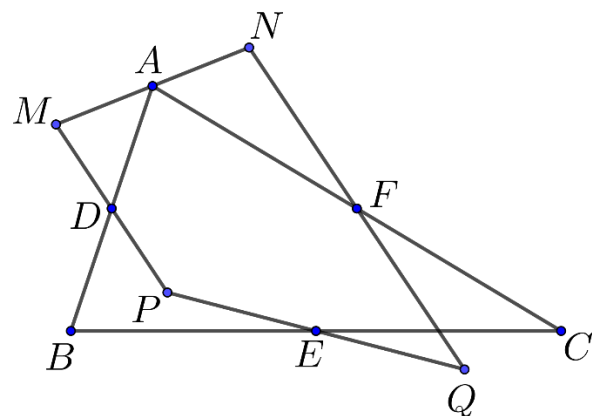
⊙ E là trung điểm BC và P đối xứng Q qua $E \Rightarrow E$ là trung điểm PQ .

Nên $BPCQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QC}$ (2).

⊙ F là trung điểm AC và Q đối xứng N qua $F \Rightarrow F$ là trung điểm NQ .

Nên $QCNA$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AN}$ (3).

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$.



 Bài 13.

Cho tam giác ABC và tam giác AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

Lời giải

♦ Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1).

♦ Và G là trọng tâm $\triangle AEF \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ (2).

♦ Từ (1) và (2):

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BE}$$

-----**HẾT**-----

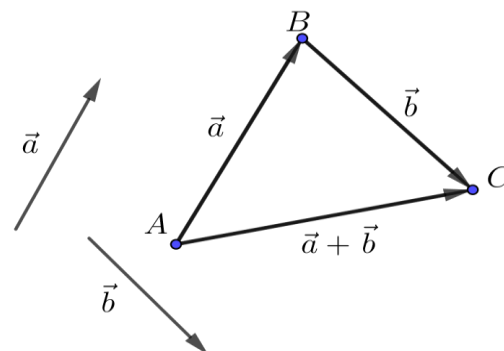
BÀI 2

TỔNG HIỆU HAI VECTO

I. TỔNG CỦA HAI VECTO

1.1. Định nghĩa:

- ✳ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- ⊙ Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
- ⊙ Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a}; \vec{b}$.
- ⊙ Kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.
- ⇒ Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Quy tắc ba điểm

⇒ Với ba điểm A, B, C ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 1

Cho bốn điểm A, B, C, D tính tổng các vectơ sau $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Theo quy tắc 3 điểm ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

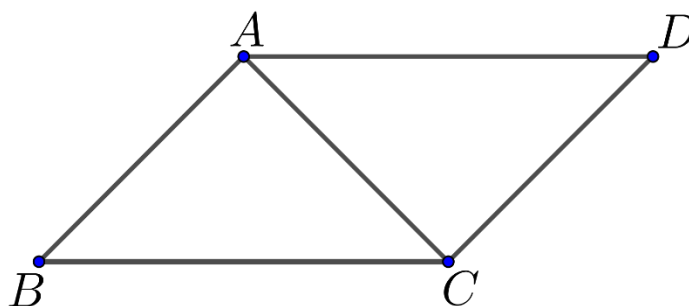
1.2. Tính chất:

✳ Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

- ① Tính chất giao hoán $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ② Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- ③ Tính chất của vectơ không $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

1.3. Quy tắc hình bình hành:

✳ Tứ giác A, B, C, D là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$ với M, N là trung điểm của BC, AD . Tìm tổng của hai vectơ

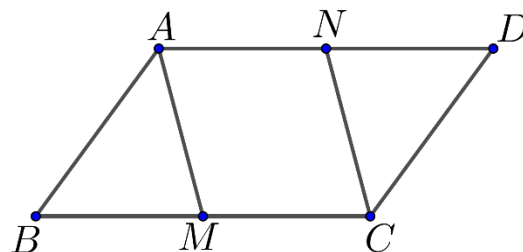
① $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$

② $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$

Lời giải

① $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$

- Ta có $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = -(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CM}) = -\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$
- Do tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}$.



② $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$

- Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ND}$
- Do tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

★ **Chú ý**

① Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

② Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ví dụ 3

Cho tam giác $\triangle ABC$. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

① $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$, với O là điểm bất kì.

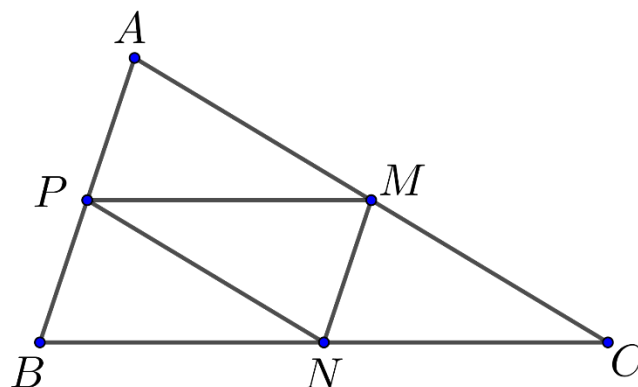
Lời giải

① $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

- Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NM}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$,

- Theo câu ① ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO})$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



II. HIỆU CỦA HAI VECTO.

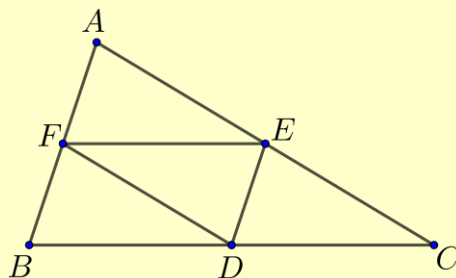
2.1. Định nghĩa:

※ Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

※ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Ví dụ 4

Cho $\triangle ABC$ có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB . Hãy tìm các vectơ đối nhau trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

♦ Các cặp vectơ đối nhau là:

$\vec{AB}$ và $\vec{BA}$; $\vec{AC}$ và $\vec{CA}$; $\vec{BC}$ và $\vec{CB}$; $\vec{AF}$ và $\vec{FA}$; $\vec{BF}$ và $\vec{FB}$; $\vec{CF}$ và $\vec{FC}$; $\vec{DE}$ và $\vec{ED}$; $\vec{AE}$ và $\vec{EA}$; $\vec{BE}$ và $\vec{EB}$; $\vec{AD}$ và $\vec{DA}$; $\vec{BD}$ và $\vec{DB}$; $\vec{CD}$ và $\vec{DC}$; $\vec{DF}$ và $\vec{FD}$;

2.2. Quy tắc về hiệu vectơ:

※ Với 3 điểm O, A, B tùy ý ta luôn có: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Ví dụ 5

Cho $\triangle ABC$. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC

① Tìm các hiệu sau $\vec{AM} - \vec{AN}$; $\vec{MN} - \vec{NC}$ và $\vec{MN} - \vec{PN}$.

② Phân tích vectơ $\vec{AM}$ theo hai vectơ $\vec{MN}$ và $\vec{MP}$.

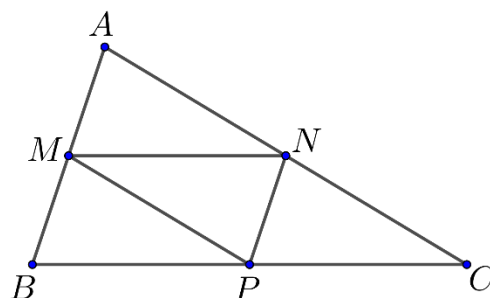
Lời giải

① Tìm $\vec{AM} - \vec{AN}$; $\vec{MN} - \vec{NC}$ và $\vec{MN} - \vec{PN}$.

♦ $\vec{AM} - \vec{AN} = \vec{NM}$;

$\vec{MN} - \vec{NC} = \vec{MN} + \vec{CN} = \vec{MN} + \vec{NA} = \vec{MA}$ (Vì $\vec{CN} = \vec{NA}$).

♦ Ta có: $\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$.



② Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

Ví dụ 6

Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C và D . Hãy chứng minh đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ (Đúng).}$

Ví dụ 6

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a với tâm là O . Tính

① Độ dài vectơ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

② $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$.

Lời giải

① Độ dài vectơ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

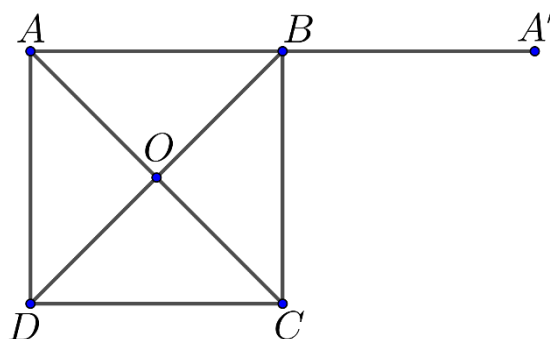
♦ Có $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$

$= |\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BO}| = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

② $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$.

♦ Dựng vectơ $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{DC}$.

♦ Có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}| = |\overrightarrow{AA'}| = 2AB = 2a.$



II. CÁC DẠNG TOÁN

➤ Dạng 01. **CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO.**

Phương pháp giải

○ Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, hệ thức trung điểm, trọng tâm kết hợp với các tính chất phép cộng, phép trừ, phép nhân để biến đổi tương đương cho biểu thức cần chứng minh. Khi đó ta có hướng sau:

Hướng 01

Biến đổi một vế thành một vế còn lại. Khi đó nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức. Còn nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện phép phân tích vectơ.

Hướng 02

Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng (chẳng hạn: hệ thức trung điểm, trọng tâm,...). Hoặc ngược lại, biến đổi một đẳng thức vectơ là luôn đúng thành đẳng thức vectơ cần chứng minh.

➤ Bài 01.

Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng:

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}.$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}.$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{ED}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ (ĐPCM).}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \text{ (ĐPCM).}$$

➤ Bài 02.

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm EF . Chứng minh rằng:

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}.$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}.$$

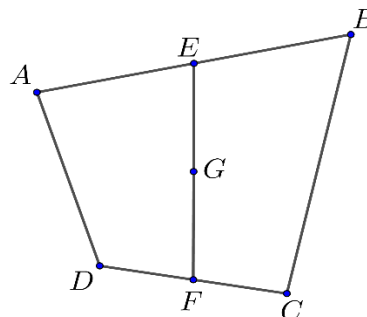
$$\star \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF} \text{ (1).}$$

♦ E là trung điểm $AB \rightarrow 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O tùy ý.

♦ F là trung điểm $CD \rightarrow 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ với O tùy ý.

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF} - 2\overrightarrow{OE}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$



$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD}}_{\vec{0}} \right) - \left(\underbrace{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}}_{\vec{0}} \right) = \vec{0} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

★ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF} \quad (2).$

- ♦ Do E là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.
- ♦ Do F là trung điểm CD nên $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ với O là một điểm tùy ý.
- ♦ $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF} - 2\overrightarrow{OE}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD}}_{\vec{0}} \right) - \left(\underbrace{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}}_{\vec{0}} \right) = \vec{0} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

② $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \quad (3).$

- ♦ Do E là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.
- ♦ Do F là trung điểm CD nên $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ với O là một điểm tùy ý.
- ♦ $(3) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + (2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

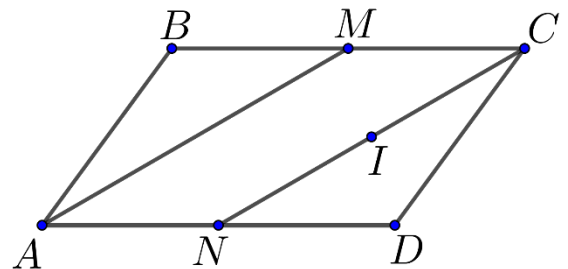
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0} \Leftrightarrow 2 \left(\underbrace{\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}}_{\vec{0}} \right) = \vec{0} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

🔗 Bài 03.

Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm tổng của hai vectơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

Lời giải

- ♦ Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$, nên: $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$.
 - ♦ Vì $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, nên: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ND}$.
 - ♦ Gọi I là trung điểm NC .
 - ♦ Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$,
- Nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.



🔗 Bài 04.

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi hai điểm M và N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AD , BC .

① Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$.

② Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

① Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$.

★ Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

- Vì M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
- Vì N là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$
- Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow (\text{ĐPCM}).$$

★ Chứng minh $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$.

$$\bullet \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \Rightarrow (\text{ĐPCM}).$$

$$\Rightarrow \text{Vậy: } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) \Rightarrow (\text{ĐPCM}).$$

② Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

$$\text{Theo hệ thức trung điểm, ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IN} \end{cases}$$

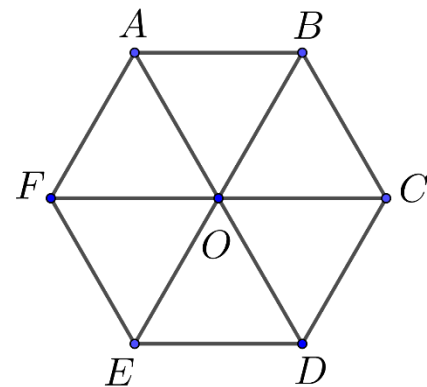
$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = 2\vec{0} = \vec{0} \text{ (Vì } I \text{ là trung điểm } MN).$$

📖 Bài 05.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Lời giải

- Vì O là tâm của hình lục giác đều $ABCDEF$
 - Nên $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OF}$ là các cặp vectơ đối nhau nên ta có:
- $$\bullet \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$$
- $$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$$
- $$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$



Bài 06.

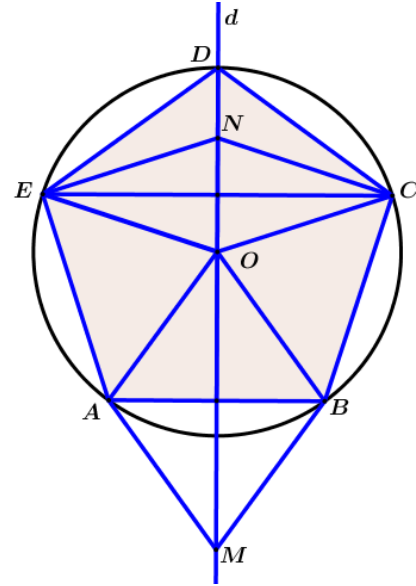
Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O .

- ① Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.
- ② Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.
- ③ Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải

- ① Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

- ♦ Gọi d là đường thẳng chứa OD
- ♦ Thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều.
- ♦ Ta có:
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và $M \in d$.
- ♦ Tương tự $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N là đỉnh của hình thoi $OENC$ và $N \in d$.
- ♦ Do đó hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ đều có giá là đường thẳng d
- ♦ Nên hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ cùng phương với nhau và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OD}$.



- ② Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

- ♦ Ta có: $OAMB$ và $OENC$ là các hình thoi nên ta có: $\begin{cases} EC \perp d \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow AB \parallel EC$.
- ♦ Do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

- ③ Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

- ♦ Theo câu ① ta có:
 $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$
- ♦ Nên $\vec{v}$ có giá là đường thẳng d .
- ♦ Mặt khác: $\vec{v} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$ thì $\vec{v}$ có giá là đường thẳng OE .
- ♦ Vì $\vec{v}$ có 2 giá khác nhau nên $\vec{v} = \vec{0}$.
- ⇒ Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ (đpcm).

Bài 07.

Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm của AM .

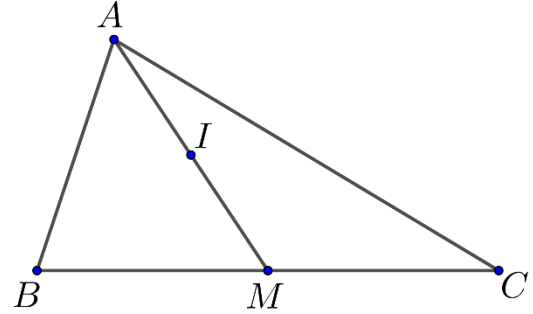
① Chứng minh rằng: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

② Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$.

Lời giải

① Chứng minh rằng: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} & \text{♦ Ta có: } 2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} \\ &= 2\vec{IA} + 2\vec{IM} \quad (\vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{IM} \text{ do } M \text{ là trung điểm } BC) \\ &= 2(\vec{IA} + \vec{IM}) \\ &= \vec{0} \quad (\vec{IA} + \vec{IM} = \vec{0} \text{ do } I \text{ là trung điểm của } AM) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$



② Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$.

$$\begin{aligned} & \text{♦ Ta có: } 2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{IO} + \vec{OB} + \vec{IO} + \vec{OC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 4\vec{IO} + 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = -4\vec{IO} \\ &\Leftrightarrow 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Bài 08.

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

① $\vec{AF} + \vec{BG} + \vec{CH} + \vec{DE} = \vec{0}$.

② $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{ME} + \vec{MF} + \vec{MG} + \vec{MH}$.

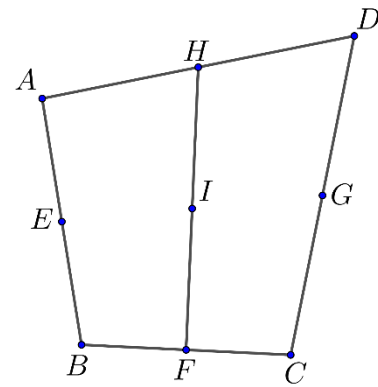
③ $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{AI}$ với I là trung điểm FH .

Lời giải

① $\vec{AF} + \vec{BG} + \vec{CH} + \vec{DE} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} & \text{♦ Ta có: } \vec{AF} + \vec{BG} + \vec{CH} + \vec{DE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BD}) + \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{CA}) + \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{BD} + \vec{CD} + \vec{CA} + \vec{DA} + \vec{DB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CA} + \vec{BD} + \vec{DB}) = \vec{0} \\ &\text{(đpcm).} \end{aligned}$$

② $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{ME} + \vec{MF} + \vec{MG} + \vec{MH}$.



♦ Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$ (đpcm).

③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm FH .

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
 $= 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF}$ do F là trung điểm BC)
 $= 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AH}$ ($\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH}$ do H là trung điểm AD)
 $= 2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}) = 4\overrightarrow{AI}$ ($\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AI}$ do I là trung điểm FH) (đpcm).

Bài 09.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

② $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

③ $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

④ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

① $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

♦ Ta có: O là trung điểm của AC và BD
 ♦ Nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 $\Rightarrow$ Vậy: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

② $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

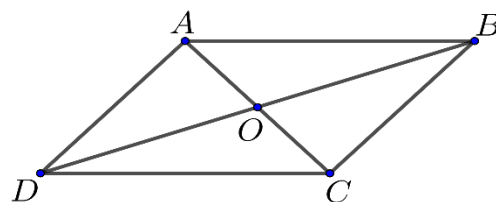
♦ Ta có: $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$ đối nhau)
 $\Rightarrow$ Vậy: $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

③ $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

♦ Ta có: O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.
 ♦ Do đó: $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.
 $\Rightarrow$ Vậy: $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

④ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

♦ Ta có: O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 ♦ Do đó: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases}$
 $\Rightarrow$ Vậy: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.



Bài 10.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và E là trung điểm của AD . Chứng minh rằng:

- ① $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.
- ② $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = 3\vec{AB}$.
- ③ $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = \vec{EC}$.

Lời giải

① $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

♦ Ta có: O là trung điểm của AC và BD

♦ Nên $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ và $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$.

⇒ Vậy: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

② $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = 3\vec{AB}$.

♦ Ta có: $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{EA} + \vec{AB} + 2(\vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC})$

$$= 4\vec{EA} + 2\vec{BC} + 3\vec{AB} = 2\vec{DA} + 2\vec{BC} + 3\vec{AB}$$

$$= 2(\vec{DA} + \vec{BC}) + 3\vec{AB} = 3\vec{AB} \text{ (vì } \vec{DA} \text{ và } \vec{BC} \text{ đối nhau nên } \vec{DA} + \vec{BC} = \vec{0} \text{)}$$

⇒ Vậy: $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = 3\vec{AB}$.

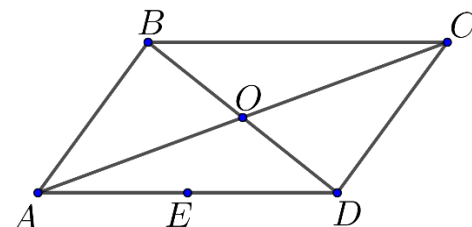
③ $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = \vec{EC}$.

♦ Vì E là trung điểm của AD nên $\vec{EA} + \vec{ED} = \vec{0}$

♦ Ta có: $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = \vec{EC} + \vec{CB} + 2(\vec{EA} + \vec{ED}) + 2\vec{ED}$

$$= \vec{EC} + \vec{CB} + 2\vec{ED} = \vec{EC} + \vec{CB} + \vec{AD} = \vec{EC} \text{ (vì } \vec{CB} \text{ và } \vec{AD} \text{ đối nhau nên } \vec{CB} + \vec{AD} = \vec{0} \text{)}.$$

⇒ Vậy: $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = \vec{EC}$.



Bài 11.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD . Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng:

- ① $3\vec{AB} + 4\vec{CD} = \vec{CM} + \vec{ND} + \vec{MN}$.
- ② $\vec{AC} = 2\vec{AB} + \vec{BD}$.
- ③ $\vec{AN} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BD}$.

Lời giải

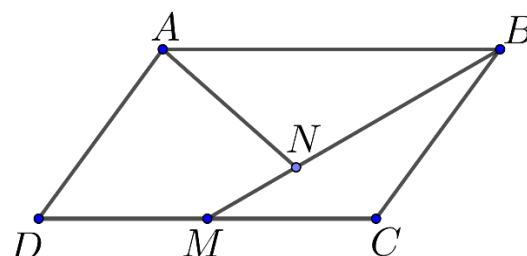
① $3\vec{AB} + 4\vec{CD} = \vec{CM} + \vec{ND} + \vec{MN}$.

$$♦ 3\vec{AB} + 4\vec{CD} = 3\vec{AB} + 3\vec{CD} + \vec{CD}$$

$$= 3(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{CD} = \vec{CD}$$

$$♦ \vec{CM} + \vec{ND} + \vec{MN} = \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{ND} = \vec{CD}.$$

⇒ Vậy $3\vec{AB} + 4\vec{CD} = \vec{CM} + \vec{ND} + \vec{MN}$.



② $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

♦ Ta có $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

③ $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

♦ Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

Bài 12.

Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{MG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

① $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

♦ Ta có

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

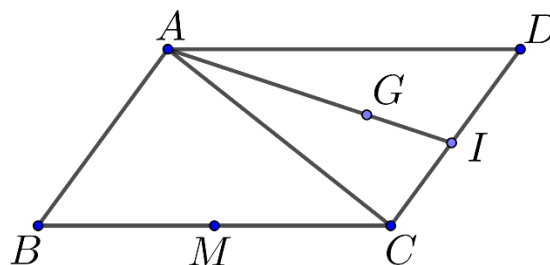
② $\overrightarrow{MG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

♦ Ta có $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}$

$= -\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (với I là trung điểm DC)

$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$

$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.



Bài 13.

Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm của BC và AB , điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

② $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

♦ Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

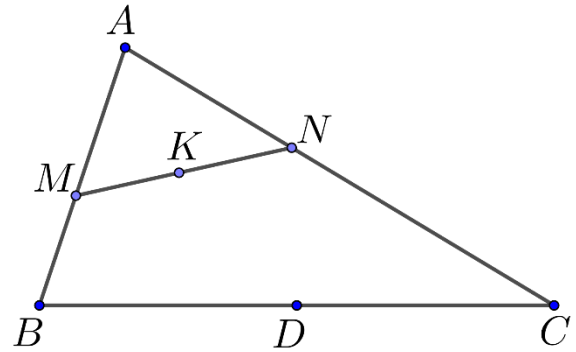
♦ Vì K là trung điểm của MN

Nên $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

$$\textcircled{2} \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

♦ Vì D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).



Bài 14.

Cho tam giác ABC , trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm của DE và I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$$

♦ Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

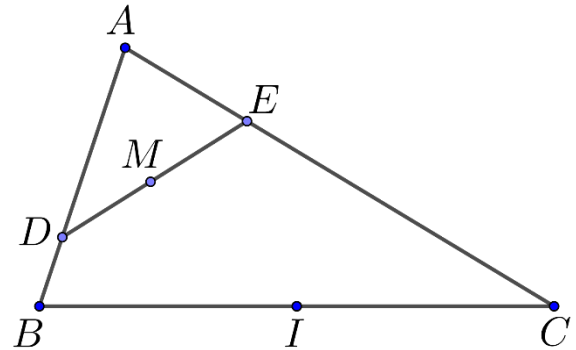
♦ Vì M là trung điểm của DE

♦ Nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

$$\textcircled{2} \overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$$

♦ Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

♦ Ta có: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).



Bài 15.

Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA . Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $DB = \frac{2}{3}BC$ và M là trung điểm của AD .

$$\textcircled{1} \text{ Chứng minh } \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Chứng minh } 6\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}.$$

Lời giải

① Chứng minh $\vec{AK} + \vec{CJ} + \vec{BI} = \vec{0}$.

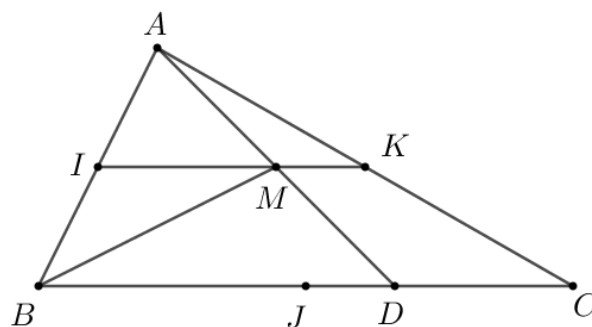
♦ Ta có $VT = \vec{AK} + \vec{CJ} + \vec{BI}$
 $= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA}) = \vec{0} = VP$.

② Chứng minh $6\vec{BM} = 2\vec{AC} - 5\vec{AB}$.

♦ Do M là trung điểm của AD nên ta có

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BD}) = \frac{1}{2}\left(\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB} \longrightarrow 6\vec{BM} = 2\vec{AC} - 5\vec{AB}.$$



Bài 16.

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G . Chứng minh.

① $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$. ② $\vec{HB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$. ③ $\vec{IH} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{5}{6}\vec{AC}$.

Lời giải

① $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$.

♦ Do G là trung điểm của HC nên ta có

$$\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AH} + \vec{AC})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} = 2\vec{AG} - \vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} = 2 \cdot \frac{2}{3}\vec{AI} - \vec{AC}$$

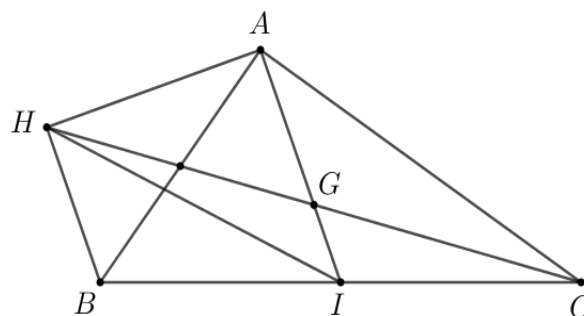
$$\Leftrightarrow \vec{AH} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

② $\vec{HB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

♦ Ta có $VT = \vec{HB} = \vec{AB} - \vec{AH} = \vec{AB} - \left(\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = VP$.

③ $\vec{IH} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{5}{6}\vec{AC}$.

♦ Ta có : $VT = \vec{IH} = \vec{IB} + \vec{BH} = -\frac{1}{2}\vec{BC} - \vec{HB} = -\frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) - \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{5}{6}\vec{AC} = VP$.



Bài 17.

Cho tứ giác $OABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, OC . Chứng minh

① $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{OB} - \vec{OA}$ ② $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{OC} - \vec{OB}$ ③ $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OB}$.

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

♦ Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, mà M là trung điểm của OB

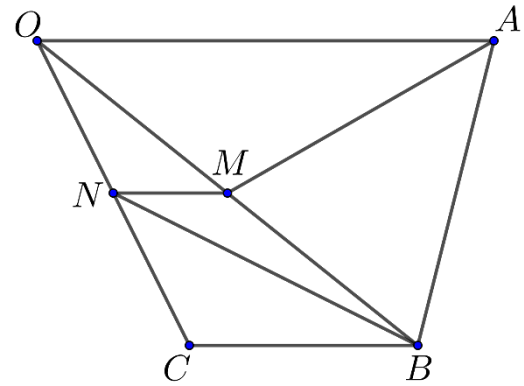
♦ Nên $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$ do đó $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (đpcm).

$$\textcircled{2} \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

♦ Ta có $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ (đpcm).

$$\textcircled{3} \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}.$$

♦ Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$ (đpcm).



🔗 Bài 18.

Cho tam giác ABC , gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của BC . Chứng minh:

$$\textcircled{1} \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}.$$

$$\textcircled{4} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

$$\textcircled{5} \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

$$\textcircled{6} \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$$

♦ Xét tứ giác $BHCD$ có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC)

♦ $CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AB)

♦ Nên $BHCD$ là hình bình hành.

♦ Áp dụng quy tắc hình bình ta có $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (đpcm).

$$\textcircled{2} \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\begin{aligned} \text{♦ Ta có } VT &= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{HA} + (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \end{aligned}$$

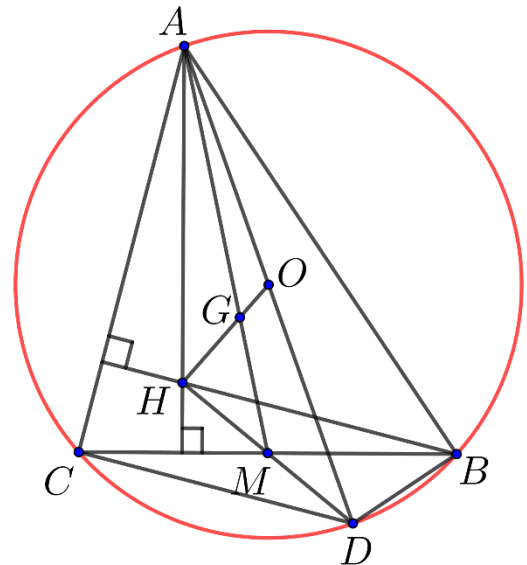
$$= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD}$$

$$= (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OD})$$

$$= 2\overrightarrow{HO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{HO} = VP \text{ (do } O \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}) \text{ (đpcm).}$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}.$$

♦ Ta có $VT = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} - (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{OA} = VP$ (đpcm).



④ $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$

♦ Ta có $VT = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
 $= (\vec{OH} + \vec{HA}) + (\vec{OH} + \vec{HB}) + (\vec{OH} + \vec{HC})$
 $= 3\vec{OH} + (\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC})$
 $= 3\vec{OH} + 2\vec{HO} = \vec{OH} + 2(\vec{OH} + \vec{HO}) = \vec{OH} + \vec{0} = \vec{OH} = VP$ (đpcm).

⑤ $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

- ♦ Theo ④ ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$, mà G là trọng tâm của $\triangle ABC$
 ♦ Nên $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ nên ta suy ra $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (đpcm).

⑥ $\vec{AH} = 2\vec{OM}$.

- ♦ Ta có $BHCD$ là hình bình hành (cmt) và M là trung điểm của BC
 ♦ Nên suy ra M cũng là trung điểm của HD .
 ♦ Xét $\triangle DHA$ có $MD = MH$ và $OM = OA$
 $\Rightarrow OM$ là đường trung bình $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}HA$
 ♦ Hay $HA = 2OM$ và $\vec{HA}, \vec{OM}$ cùng hướng $\Rightarrow \vec{AH} = 2\vec{OM}$ (đpcm).

Bài 19.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

① $\vec{AC} = 2(\vec{AM} + \vec{BN})$. ② $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$. ③ $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{AP} + \vec{BM} = \vec{MC}$.

Lời giải

① $\vec{AC} = 2(\vec{AM} + \vec{BN})$.

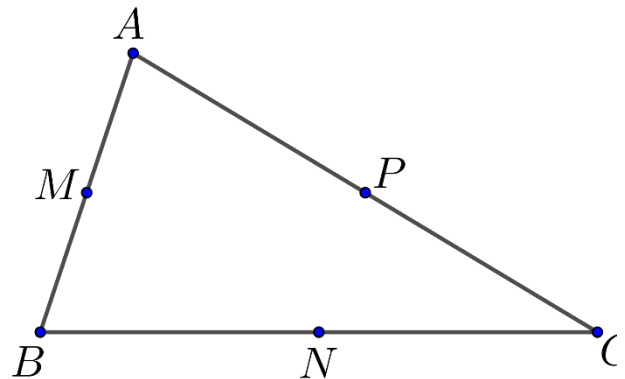
♦ Xét $VP = 2(\vec{AM} + \vec{BN}) = 2(\vec{MB} + \vec{BN}) = 2\vec{MN} = \vec{AC} =$
 VT (đpcm).

② $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$.

♦ Xét $VT \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \frac{\vec{AC}}{2} + \vec{CP}$ (câu ①)
 $= \vec{PC} + \vec{CP} = \vec{0} = VP$ (đpcm).

③ $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{AP} + \vec{BM} = \vec{MC}$.

♦ Xét $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{AP} + \vec{BM} - \vec{MC}$



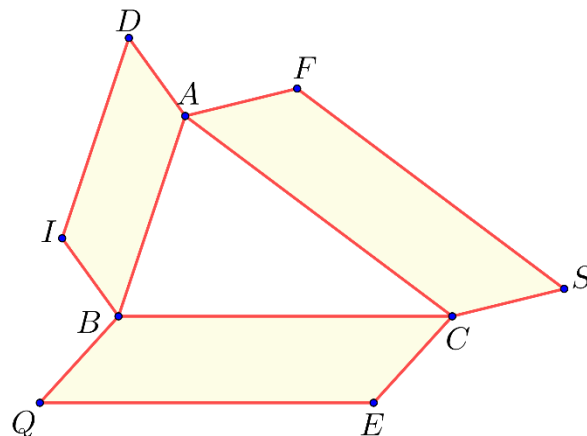
$$\begin{aligned}
 &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} \\
 &= \vec{0} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AP} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}.
 \end{aligned}$$

Bài 20.

Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\diamond \text{ Ta có: } \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AF} \\
 &\diamond \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} \\
 &\diamond \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\
 &\Rightarrow \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\
 &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) \\
 &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} \\
 &= \vec{0} \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$



Bài 21.

Cho tứ giác $ABCD$. Dựng bên ngoài tứ giác các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$. Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

② $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

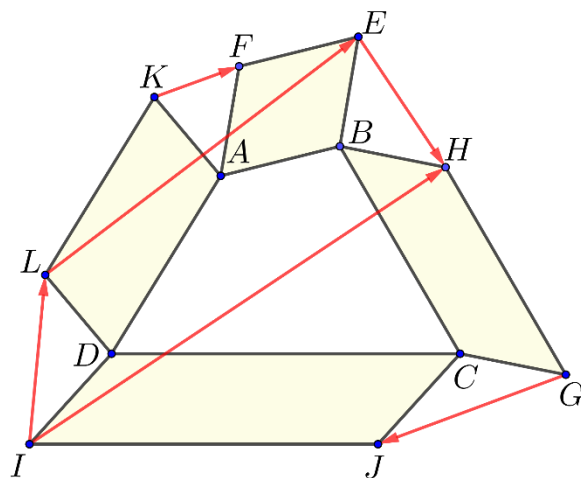
Lời giải

① $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}
 &\diamond \text{ Ta có } \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} \\
 &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL} \\
 &\diamond \text{ Theo tính chất hình bình hành:} \\
 &\overrightarrow{VT} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DL}) + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

② $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

$$\begin{aligned}
 &\diamond \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KL} - (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JI}) \\
 &= \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{JI} \\
 &= \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ} \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$



Bài 22.

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo lấy các điểm G và H sao cho $DG = GH = HB$. Gọi M, N là giao điểm của AH, BC và AG, DC . Chứng minh:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$.

② $2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

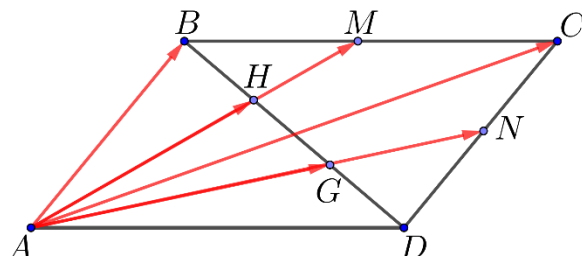
① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$.

♦ Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{GD}$

♦ $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{GD}) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} \text{ (đpcm).}$



② $2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

♦ Do $BM \parallel AD$ nên $\frac{HM}{AH} = \frac{BH}{HD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AH \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.

♦ Chứng minh tương tự ta có $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Từ đó $2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}) = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 3\overrightarrow{AC} \text{ (đpcm).}$

Bài 23.

Chứng minh rằng các tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Lời giải

($\Rightarrow$) Giả sử các tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm G . Ta chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

♦ Thật vậy, ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'}) = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) = \vec{0}$.

(Do G là trọng tâm của hai tam giác $ABC, A'B'C'$).

($\Leftarrow$) Giả sử $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Ta chỉ ra các tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

♦ Thật vậy, gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $ABC, A'B'C'$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G'$.

$\Rightarrow$ Vậy hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 24.

Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B , B' là điểm đối xứng của B qua C , C' là điểm đối xứng của C qua A . Chứng minh rằng hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

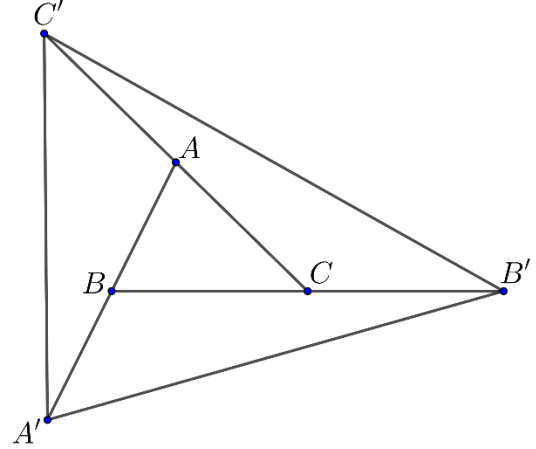
♦ Theo bài 23, để chứng minh hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm ta chỉ ra

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

♦ Thật vậy ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{AA} = 2\vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

⇒ Vậy hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.



Bài 25.

Cho tam giác ABC và I, J, K xác định bởi: $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

Lời giải

♦ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

♦ Theo đề:

$$2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{IG} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

♦ Tương tự:

$$2\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JG} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0} \quad (2)$$

$$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{KG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \rightarrow 5(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}.$$

⇒ Do đó, G cũng là trọng tâm của tam giác IJK . Ta được đpcm.

Bài 26.

Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

♦ Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP , ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GQ} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{QP}) = \vec{0}.$$

- ♦ Ta thấy: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$.
- ♦ Do đó: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$.
- ♦ Nên G cũng là trọng tâm của tam giác CMQ. Ta được đpcm.

Bài 27.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là những điểm được xác định bởi: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}$. Chứng minh rằng:

- ① $2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\forall O$ bất kỳ. ② ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

- ① $2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\forall O$ bất kỳ.

- ♦ Theo giả thiết: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\forall O$ bất kỳ.

- ② ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm.

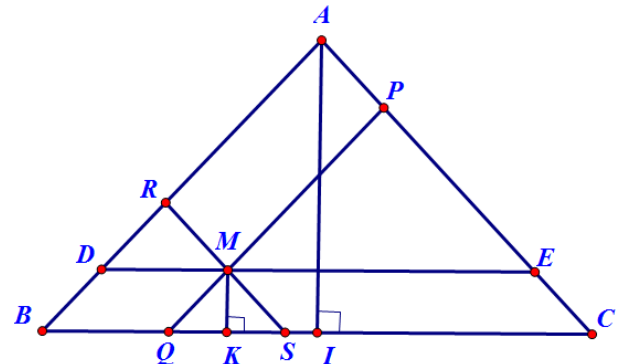
- ♦ Gọi G là trọng tâm ΔABC , khi đó ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, $\forall O$ bất kỳ.
- ♦ Tương tự câu a) ta có: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;
 $\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$;
 $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- ♦ Cộng theo vế ta có: $2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 6\overrightarrow{OG}$, $\forall O$ bất kỳ.
- ♦ Do đó $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}$, $\forall O$ bất kỳ.
- $\Rightarrow$ Vậy tam giác MNP cũng nhận điểm G làm trọng tâm. (đpcm).

Bài 28.

Cho tam giác ABC cân tại A và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E . Dựng MK vuông góc với BC tại K và gọi I là trung điểm BC . Chứng minh $2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

- ♦ Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại D, E ;
- ♦ Kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA, BC lần lượt tại R, S .
- ♦ ΔABC cân tại A nên ΔMQS cân tại M
 $\Rightarrow K$ là trung điểm $QS \Rightarrow \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} = 2\overrightarrow{MK}$ (1)



♦ Theo cách dựng đường thẳng song song thì các tứ giác $MQBD$ và $MSCE$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MC}$ (2)

♦ Từ (1) và (2) ta có $2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ME})$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \quad (\text{ĐPCM})$$

Bài 29.

Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm M bất kì nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, AC, AB . Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

♦ Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lượt tại I, J ;

Kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA, BC lần lượt tại K, L ;

Kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q .

♦ Theo cách dựng, các tứ giác $MPBJ$, $MLCQ$, $MLAK$ là hình bình hành

Nên: $\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA}$.

♦ $\triangle ABC$ đều nên $\triangle MJL$; $\triangle MQI$; $\triangle MKP$ cũng đều.

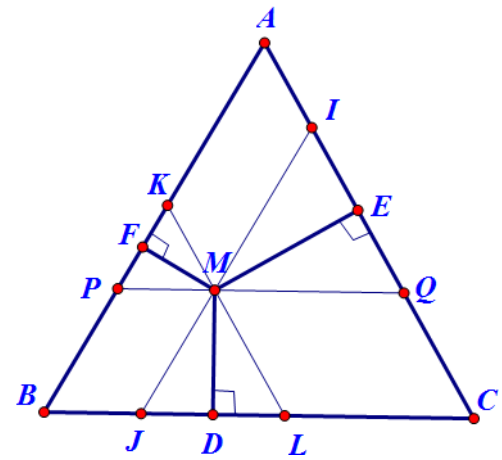
♦ Do đó E, F, D lần lượt là trung điểm của IQ ; PK ; JL .

♦ Ta có: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{ML}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MQ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MP}) + (\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MQ}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP})]$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}] \longrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



Bài 30.

Cho đoạn thẳng AB . Trên đoạn AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ và S là điểm bất kỳ. Chứng minh

$$\text{rằng: } \overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}.$$

Lời giải

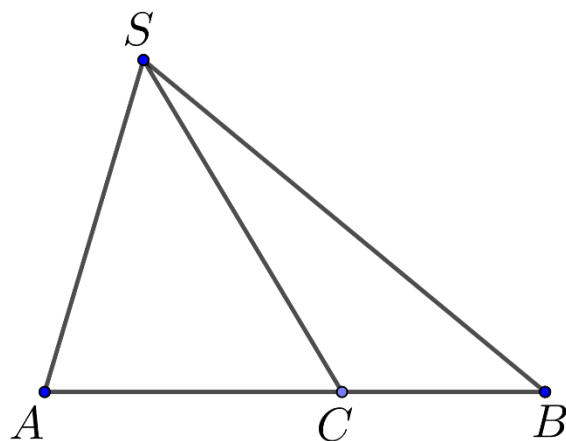
♦ Từ giả thiết: $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{AC}{(AC+CB)} = \frac{m}{m+n}$

$\Leftrightarrow AC = \frac{m}{m+n}(AC+CB)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} (*)$.

♦ Từ (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{SB}$.



Bài 31.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O và S là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$ (1)

$\Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2}_A + \underbrace{(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2}_B = \underbrace{(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB})^2}_B + \underbrace{(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})^2}_A$

♦ Lại có $\begin{cases} A = \overrightarrow{SO}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{SO}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 \\ B = \overrightarrow{SO}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{SO}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 = 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}^2$

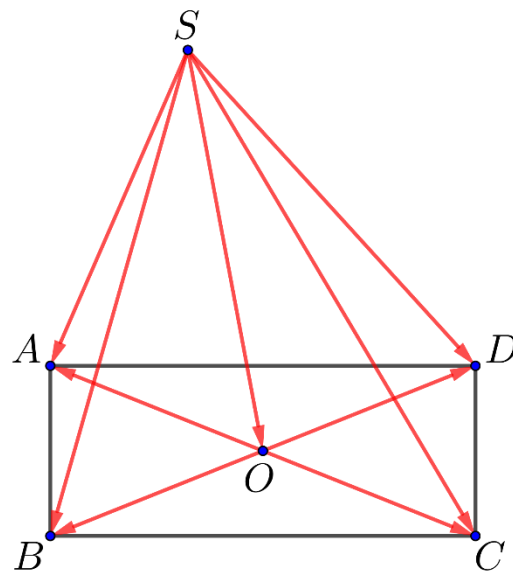
♦ Mặt khác tứ giác $ABCD$ hình chữ nhật tâm O có

$OA = OB = OC = OD \Rightarrow \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OD}^2$.

♦ (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$

♦ Lại có O là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}(\vec{0}) = \overrightarrow{SO}(\vec{0})$ (luôn đúng với điểm S là điểm bất kỳ) (điều phải chứng minh)



🔗 Dạng 02. **TÌM MÔĐUN (ĐỘ DÀI) VECTO.**

Phương pháp giải

Để tính $|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

- **Bước 1:** Biến đổi và rút gọn biểu thức vectơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc Chasles, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm, ... sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.
- **Bước 2:** Tính môđun (độ dài) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

🔗 **Bài 01.**

Chứng minh các khẳng định sau:

- ① Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
- ② Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.
- ③ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Lời giải

Giả sử: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- ① Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

♦ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì 3 điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và B nằm giữa A, C .

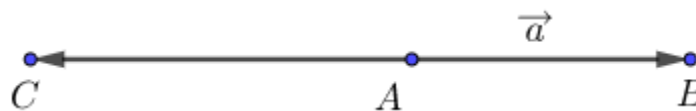


♦ Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

⇒ Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

- ② Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

♦ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng và A nằm giữa B, C .



♦ Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = AC = BC - AB = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|.$$

③ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi nào xảy ra đẳng thức.

Từ chứng minh ở câu ① và ②:

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ hoặc $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\Rightarrow$ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì A, B, C không thẳng hàng.

♦ Xét $\triangle ABC$ có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

♦ Như vậy, trong mọi trường hợp ta có: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Bài 02.

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3(\text{cm})$, $AC = 4(\text{cm})$. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài các vectơ:

① $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

② $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$.

Lời giải

① $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

♦ Gọi K là trung điểm AC khi đó $2\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{BC}$ với B là điểm bất kỳ.

♦ Nên $|\vec{u}| = |\vec{BA} + \vec{BC}| = |2\vec{BK}| = 2|\vec{BK}|$.

♦ Xét $\triangle ABK$ vuông tại A : $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$.

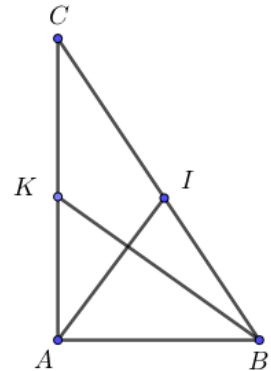
$\Rightarrow$ Vậy $|\vec{u}| = 2|\vec{BK}| = 2\sqrt{13}$.

② $\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA}$.

♦ Theo giả thiết: I là trung điểm BC khi đó $2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$ với A là điểm bất kỳ.

$$\vec{v} = 2\vec{IA} - \vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{CA} = -\vec{AB} - \underbrace{\vec{AC} - \vec{CA}}_{\vec{0}} = -\vec{AB}.$$

♦ Khi đó: $|\vec{v}| = |-\vec{AB}| = |\vec{AB}| = 3$.



Bài 03.

Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác ABC và H là trung điểm của BC . Tính theo a

① $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

② $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

③ $|\vec{GB} + \vec{GC}|$

④ $|\vec{GA} - \vec{GC}|$

⑤ $|\vec{AH} + \vec{BC}|$

Lời giải

① $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

♦ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE$ với $ABEC$ là hình bình hành.

♦ Do $\triangle ABC$ đều nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$AE = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \longrightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}.$$

② $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$

③ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$

♦ Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |-\overrightarrow{GA}| = GA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

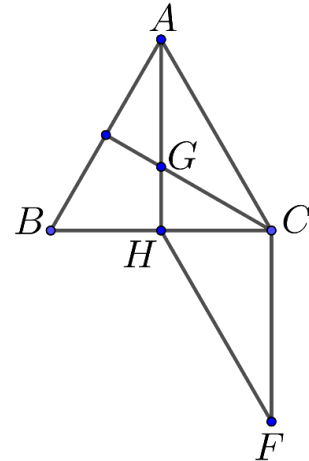
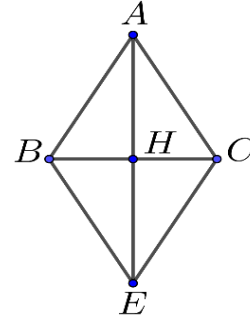
④ $|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}|$

♦ $|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = a$.

⑤ $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}|$

♦ $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{BF}| = BF$ với $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH}$ ($ACFH$ là hình bình hành)

♦ Có $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ (Vì $\triangle BCF$ vuông tại C).



Bài 04.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Tính theo a :

① $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

② $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

③ $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}|$

Lời giải

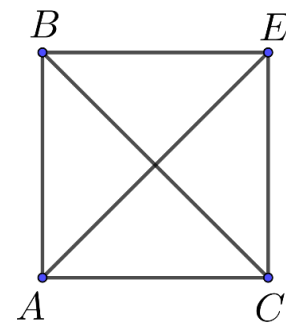
♦ Ta có $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

① $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

♦ $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a\sqrt{2}$.

② $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

♦ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE = BC = a\sqrt{2}$, với $ABEC$ là hình vuông.



③ $|\vec{AB} + 2\vec{AC}|$

• $|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AC}| = |\vec{AE} + \vec{AC}| = |\vec{AF}| = AF,$

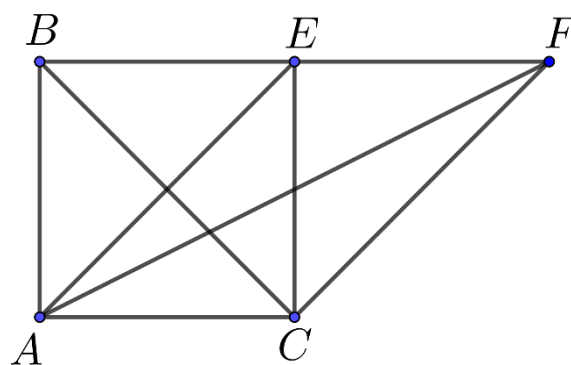
với $AEFC$ là hình bình hành.

• Do $\triangle ABF$ vuông tại B và $BF = BE + EF = BE + AC = 2a$

Nên ta có

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

• Vậy $|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = a\sqrt{5}.$



Bài 05.

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$, $BC = 4$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD .

Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$ và $|\vec{AM} + \vec{AN}|$.

Lời giải

★ Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$

• Ta có: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC}$

$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |\vec{AC} + \vec{AC}| = |\vec{AC}| + |\vec{AC}| = 2AC.$

• Xét $\triangle ABC$ vuông tại A :

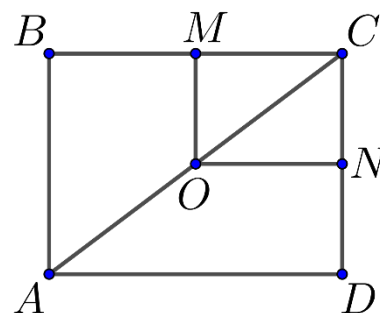
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$\Rightarrow$ Vậy $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2AC = 10$

★ Tính $|\vec{AM} + \vec{AN}|$

• Ta có: $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{AD} + \vec{DN} = (\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{BM} + \vec{DN}) = \vec{AC} + (\vec{ON} + \vec{OM}) = \vec{AC} + \vec{OC}$

$\Rightarrow$ Vậy $|\vec{AM} + \vec{AN}| = |\vec{AC} + \vec{OC}| = AC + \frac{AC}{2} = \frac{15}{2}$ ($\vec{AC}$, $\vec{OC}$ là hai vec tơ cùng hướng)



Bài 06.

Cho hình chữ nhật ABCD tâm O và có $AB = 4$, $AD = 3$. Gọi M là điểm tùy ý. Hãy tính: $|\vec{AC} + \vec{BD}|$ và

$|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}|$.

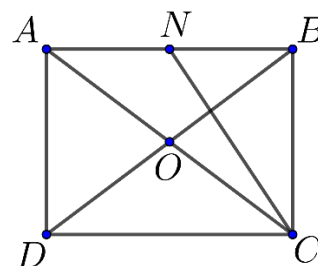
Lời giải

★ Tính $|\vec{AC} + \vec{BD}|$

• Ta có: $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BC} + \vec{BC}$

(Do $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ là hai vec tơ đối)

$\Rightarrow |\vec{AC} + \vec{BD}| = 2BC = 6$



★ Tính $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$

♦ Gọi N là trung điểm của AB , ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

$$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = 2CN = 2\sqrt{CB^2 + BN^2} = 2\sqrt{13}$$

Bài 07.

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O , lấy điểm M tùy ý. Chứng minh rằng các vectơ sau không đổi và tính độ dài của chúng.

① $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

② $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$.

③ $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

④ $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

⑤ $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

⑥ $\vec{w} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

Lời giải

① $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

♦ $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$. (Không đổi do B, O cố định)

♦ $|\vec{u}| = |\overrightarrow{BO}| = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

② $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$.

♦ $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} \longrightarrow |\vec{v}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = a\sqrt{2}$.

③ $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

♦ $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$

$\Leftrightarrow \vec{x} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \vec{x} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \vec{x} = 3\overrightarrow{DA} \longrightarrow |\vec{x}| = |3\overrightarrow{DA}| = 3DA = 3a$

④ $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

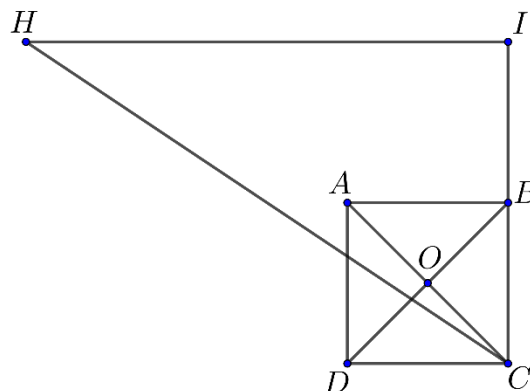
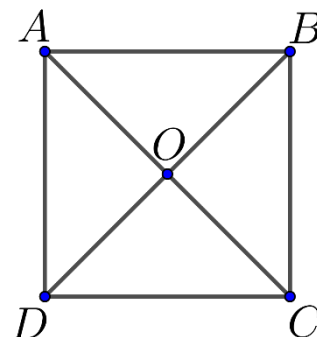
♦ $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \vec{y} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC})$

$\Leftrightarrow \vec{y} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow \vec{y} = \overrightarrow{BA} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$

$\Leftrightarrow \vec{y} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$



♦ Gọi I, H là các điểm sao cho $\vec{CI} = 2\vec{CB}, \vec{IH} = 3\vec{BA}$ từ đó ta có

$$\vec{y} = 3\vec{BA} + 2\vec{CB} = \vec{IH} + \vec{CI} = \vec{CH} \longrightarrow |\vec{y}| = |\vec{CH}| = CH = \sqrt{CI^2 + IH^2} = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13}$$

⑤ $\vec{z} = 3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$.

♦ $\vec{z} = 3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$

$$\Leftrightarrow \vec{z} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MA} - \vec{MC}) + (\vec{MA} - \vec{MD})$$

$$\Leftrightarrow \vec{z} = \vec{BA} + \vec{CA} + \vec{DA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{z} = -(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{CA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{z} = -\vec{AC} + \vec{CA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{z} = 2\vec{CA} \longrightarrow |\vec{z}| = |2\vec{CA}| = 2CA = 2a\sqrt{2}$$

⑥ $\vec{w} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$

♦ $\Leftrightarrow \vec{w} = 3(\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MC} - \vec{MD}) + (\vec{MA} - \vec{MD})$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = 3\vec{BA} + \vec{DC} + \vec{DA}$$

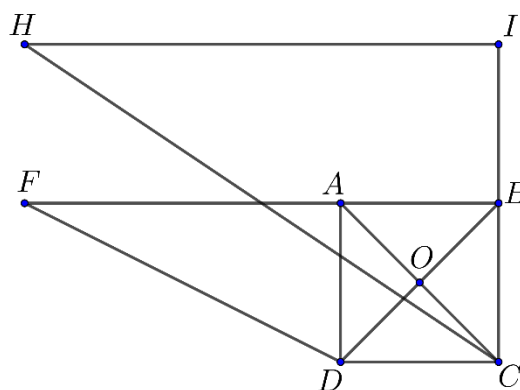
$$\Leftrightarrow \vec{w} = 3\vec{BA} + \vec{DB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = 2\vec{BA} + \vec{DB} + \vec{BA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{w} = 2\vec{BA} + \vec{DA}$$

♦ Gọi F là điểm sao cho $\vec{AF} = 2\vec{BA}$ từ đó ta có;

$$\vec{w} = 2\vec{BA} + \vec{DA} = \vec{AF} + \vec{DA} = \vec{DF} \longrightarrow |\vec{w}| = |\vec{DF}| = DF = \sqrt{DA^2 + AF^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$



Bài 08.

Cho hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 60^\circ$ và cạnh là a . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Tính theo a : $|\vec{AB} + \vec{AD}|$, $|\vec{BA} - \vec{BC}|$, $|\vec{OB} - \vec{DC}|$.

Lời giải

★ Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$:

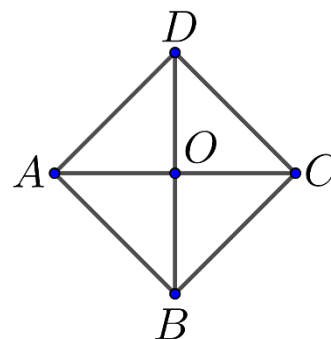
♦ $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC = 2AO$.

♦ Do $\angle BAD = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều $\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AD}| = a\sqrt{3}.$$

★ Tính $|\vec{BA} - \vec{BC}|$:



♦ Ta có $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = a\sqrt{3}$.

★ Tính $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$:

♦ Ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{CO}| = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 09.

Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có điểm đặt O và tạo với nhau một góc 60° . Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều là $100N$.

Lời giải

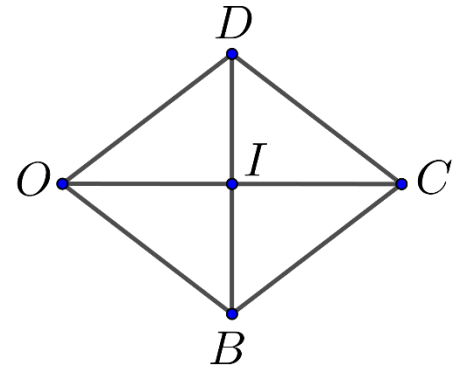
♦ Đặt $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OD}$.

♦ Dựng hình bình hành $OBCD$. Khi đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$.

♦ $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{OC}| = OC = 2OI$.

♦ Do $BOD = 60^\circ$ và $OB = OD$ nên tam giác OBD đều.

$$\Rightarrow OI = \frac{OB\sqrt{3}}{2} = \frac{|\vec{F}_1|\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}N.$$



Bài 10.

Cho tam giác ABC vuông tại A , có góc $ABC = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính độ dài của các vector sau:

① $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

② $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

③ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$

④ $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$

Lời giải

① $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

♦ Ta có $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB$.

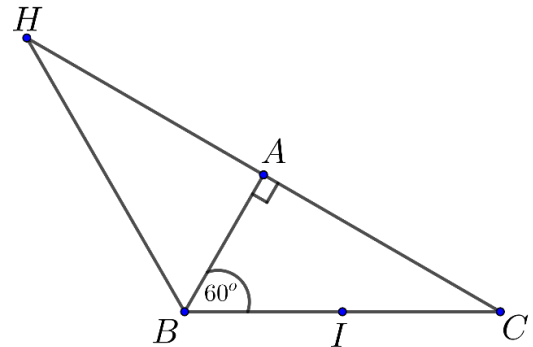
♦ Xét $\triangle ABC$ vuông tại A :

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{\cos ABC} = \frac{a}{\cos 60^\circ} = 2a.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\vec{a}| = 2a.$$

② $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

♦ Trên tia đối của tia AC lấy điểm H sao cho $HA = AC$. Khi đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$.



♦ Ta có $\left| \vec{b} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA} \right| = \left| \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{HB} \right| = HB.$

♦ Xét tam giác HBC có:

BA là đường cao

BA là đường trung tuyến (do $AH = AC$)

$\Rightarrow \triangle HBC$ cân tại $B \Rightarrow BH = BC = 2a.$

$\Rightarrow$ Vậy $\left| \vec{b} \right| = 2a.$

③ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$

♦ Ta có $\left| \vec{c} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} \right| = \left| \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{IB} \right| = IB.$

♦ Do I là trung điểm của BC nên $IB = \frac{BC}{2} = \frac{2a}{2} = a.$

$\Rightarrow$ Vậy $\left| \vec{c} \right| = a.$

④ $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$

♦ Ta có $\left| \vec{d} \right| = \left| \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{CA} \right| = CA.$

♦ Xét tam giác ABC vuông tại A : $\tan ABC = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB \cdot \tan ABC = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow$ Vậy $\left| \vec{d} \right| = a\sqrt{3}.$

-----HẾT-----

BÀI 3

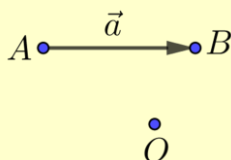
TÍCH CỦA MỘT VÉCTƠ VỚI MỘT SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA.

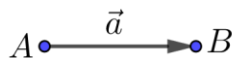
- ※ Cho số $k \neq 0$ và một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc tơ $\vec{a}$ với k là một véc tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- ※ Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; \vec{0} \cdot k = \vec{0}$.

Ví dụ 1

Cho $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và điểm O . Xác định hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}; \overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.



Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}; \overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ nên $\overrightarrow{OM}, \vec{a}$ cùng hướng và $OM = 3AB$; $\overrightarrow{ON}, \vec{a}$ ngược hướng và $ON = 4AB$.

Ví dụ 2

Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau:

① $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

② $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

③ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



① $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

② $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{4}MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

③ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{5}AB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$.

II. TÍNH CHẤT.

※ Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số k, h ta có

① $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

② $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

③ $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

④ $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

Ví dụ 3

① Chứng minh véc tơ đối của $5\vec{a}$ là $(-5)\vec{a}$.

② Tìm véc tơ đối của $2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Lời giải

① Chứng minh véc tơ đối của $5\vec{a}$ là $(-5)\vec{a}$.

Véc tơ đối của $5\vec{a}$ là $(-1).5\vec{a} = (-5)\vec{a}$.

② Tìm véc tơ đối của $2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Véc tơ đối của $2\vec{a} + 3\vec{b}$ là $(-1)(2\vec{a} + 3\vec{b}) = -2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Véc tơ đối của $\vec{a} - 2\vec{b}$ là $(-1)(\vec{a} - 2\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

III. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC.

Nếu	I là trung điểm của AB	thì	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$	và $\forall M$, ta có	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
	G là trọng tâm của $\triangle ABC$		$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$		$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , D là trung điểm của AM . Chứng minh rằng $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

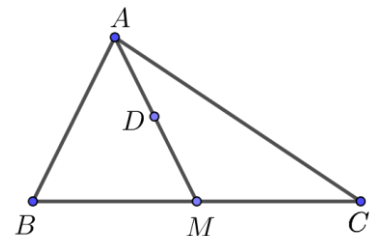
Lời giải

♦ Ta có: M là trung điểm của BC

♦ Nên $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$.

♦ Do đó:

$$2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DM} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}) = 2.\vec{0} = \vec{0}.$$



IV. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG.

※ Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) là có một số thực k để $\boxed{\vec{a} = k\vec{b}}$.

⇒ **Nhận xét:** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có một số thực $k \neq 0$ để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có hai điểm M và N xác định bởi $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$, $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.

Lời giải

♦ Ta có: $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{BC} = \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{AC} - \vec{AB} \quad (1)$$

♦ $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AN} - 3\vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AN} = 3\vec{AC} - \vec{AB} \quad (2)$.

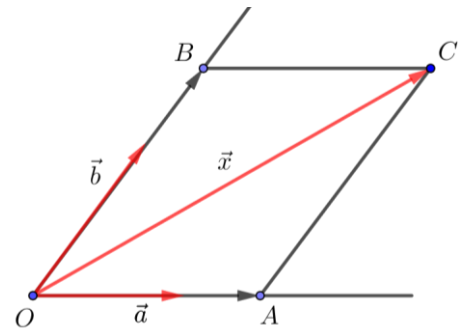
$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \vec{AN} - \vec{AM} = 3\vec{AC} - \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MN} = 2\vec{AC}. \text{ Mà } M, A, C \text{ không thẳng hàng nên } MN \parallel AC.$$

V. PHÂN TÍCH MỘT VEC TƠ THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.

※ Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó mọi véc tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k thực duy nhất sao cho $\boxed{\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}}$.



Ví dụ 6

Cho tam giác ABC có điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích $\vec{AM}$ theo hai véc tơ $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$.

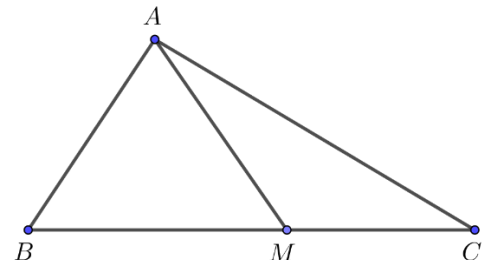
Lời giải

♦ Ta có: $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \longrightarrow \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$



Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K thuộc cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

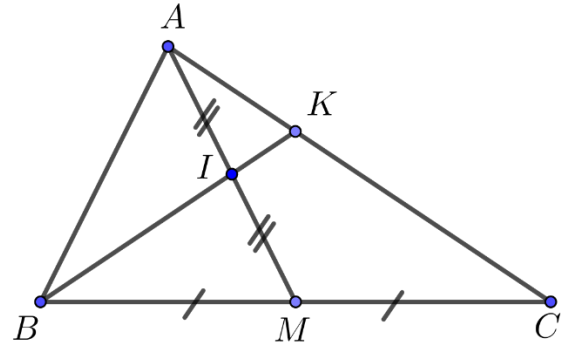
♦ Ta có: $\vec{BI} = \vec{AI} - \vec{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{AM} - \vec{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{BI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{AB} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \quad (1).$

♦ Ta có: $\vec{BK} = \vec{AK} - \vec{AB} = -\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \quad (2).$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \vec{BI} = \frac{3}{4}\vec{BK}$ hay B, I, K thẳng hàng.



VI. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 01. BIỂU DIỄN VÉCTƠ.

Phương pháp giải

Nếu	ba điểm A, B, C thẳng hàng	thì	$\Leftrightarrow \vec{AB} = k\vec{AC}$, với số k xác định.		
	$ABCD$ là hình bình hành		$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.		
	I là trung điểm của AB		$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$	và $\forall M$, ta có	$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
	G là trọng tâm của $\triangle ABC$		$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$		$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

Bài 01.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn vectơ $\vec{AM}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Lời giải

⊙ **Cách 1:** Vì M là trung điểm của BC nên $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

⊙ **Cách 2:** Do M là trung điểm của BC nên $\vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$.

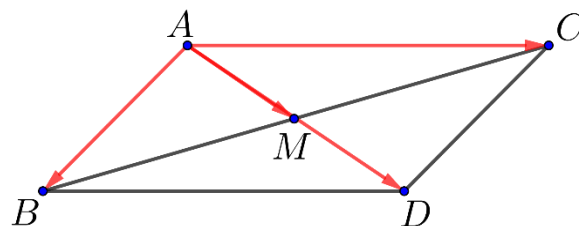
♦ Áp dụng quy tắc 3 điểm, ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (1)

♦ Lại có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ (2)

♦ Cộng vế với vế của (1), (2) ta được:

$$2\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



⊙ **Cách 3:** Xét hình bình hành $ABDC$ có M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của $AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}$ (1)

♦ Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (2)

♦ Từ (1)(2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

📖 Bài 02.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA}; \vec{b} = \overrightarrow{GB}.$

Lời giải

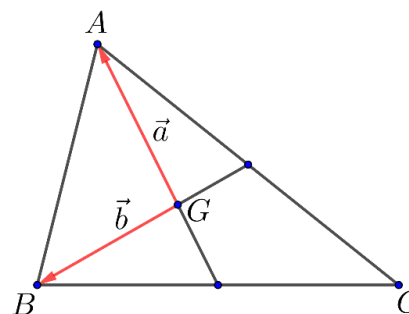
♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}.$

♦ Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

Nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}.$

♦ Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = -\vec{b} + (-\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} - 2\vec{b}.$

♦ Ta có: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$



📖 Bài 03.

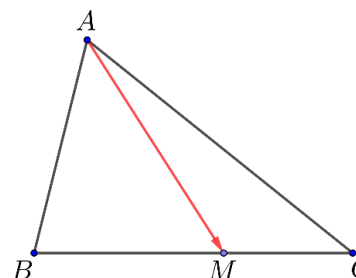
Cho tam giác ABC có M trên cạnh BC thỏa mãn $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$



Bài 04.

Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

Chứng minh rằng với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

Lời giải

♦ Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, với $k \neq 1$

Ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Bài 05.

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Phân tích vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

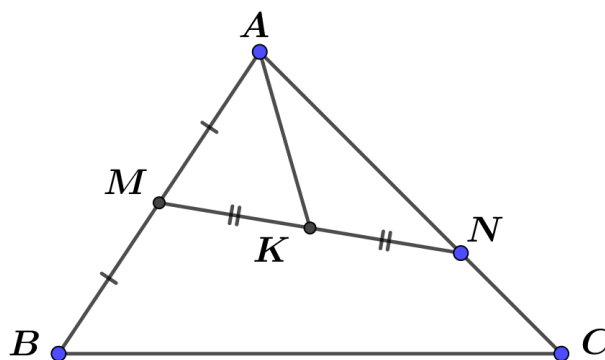
♦ Ta có: M, K lần lượt là trung điểm của AB, MN .

Nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

♦ Mặt khác: $N \in AC$ và $NA = 2NC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$



Bài 06.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Lời giải

♦ Ta có: E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB

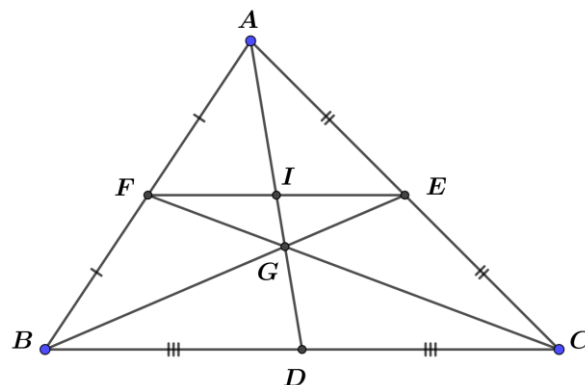
$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow \frac{IE}{CD} = \frac{AI}{AD} = \frac{IF}{BD}$$

$$\Rightarrow IF = IE \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

♦ G là trọng tâm $\triangle ABC$

♦ D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .



$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\diamond DE \text{ là đường trung bình } \triangle ABC \Rightarrow DE = \frac{1}{2} AB = AF \Rightarrow \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AF} = -\vec{v}.$$

$$\diamond EF \text{ là đường trung bình } \triangle ABC \Rightarrow EF = CD \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Bài 07.

Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$.

Dựng và tính độ dài các vectơ $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

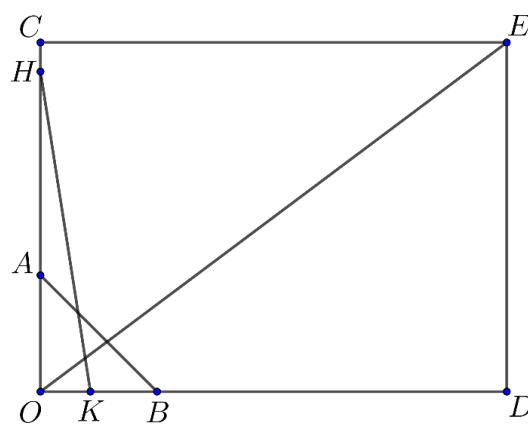
• Vẽ điểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OB}$,

• Vẽ hình bình hành $CODE$ thì :

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow |3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}|$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a.$$

• Vẽ điểm H, K sao cho:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OH} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KH} \Rightarrow \left| \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \right| = |\overrightarrow{KH}| = \sqrt{OH^2 + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{7}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6073}}{28}a$$

Bài 08.

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm.

① Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

② Gọi E, F là hai điểm xác định bởi các điều kiện: $\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EB}, 3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{EF}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

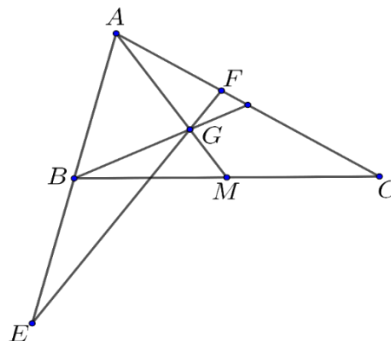
① Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

• $AG \cap BC = M \Rightarrow M$ là trung điểm BC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}.$$

• Mà G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AG}.$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

② Hãy phân tích $\overrightarrow{EF}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$.

♦ Theo gt: $\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AB}$.

♦ Từ $3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}.$

🔗 Bài 09.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O cạnh a :

① Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

② Tính độ dài của vectơ $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ theo a .

Lời giải

① Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

♦ Ta có: O là trung điểm AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

♦ Lại có: $\begin{cases} AB \parallel FO \\ AF \parallel BO \end{cases} \Rightarrow ABOF$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}.$$

② Tính độ dài của vectơ $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ theo a .

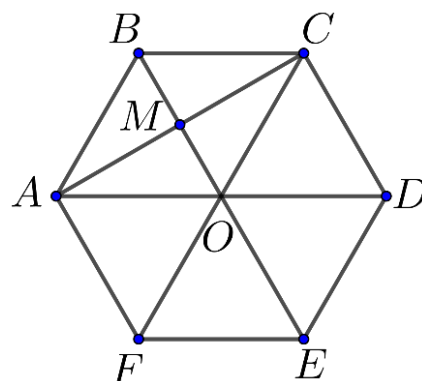
♦ Ta có: $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right| = \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} AC.$

♦ Theo đề bài: $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\triangle ABO, \triangle CBO$ là tam giác đều cạnh a .

♦ Gọi M là trung điểm BO

$\Rightarrow AM, MC$ lần lượt là đường cao $\triangle ABO, \triangle CBO$ và $AC = AM + MC$

$$\Rightarrow AC = AM + MC = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Dạng 02. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

Phương pháp giải

- ① Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.
- ② Để chứng minh hai điểm M, N trùng nhau ta chứng minh chúng thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ với O là một điểm nào đó hoặc $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.
- ③ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB \parallel CD$.

Bài 01.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3} AC$. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM})$ (Do BI là đường trung tuyến $\triangle ABM$)

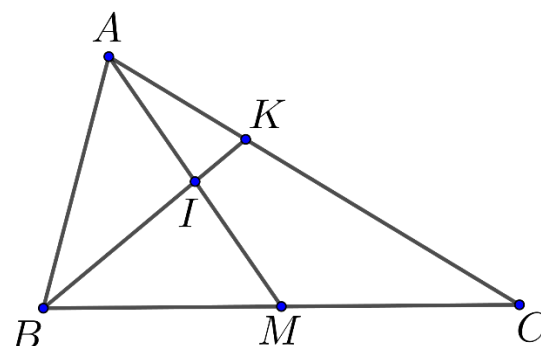
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \text{ (Do } M \text{ là trung điểm của cạnh } BC)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{KC}$$

♦ Mà $AK = \frac{1}{3} AC$ nên $KC = 2KA \Rightarrow \overrightarrow{KC} = -2\overrightarrow{KA} \Leftrightarrow \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{KC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} = \vec{0}$.

♦ Do đó $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK} + \vec{0} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.



Bài 02.

Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{BC}$ nên $MA \parallel BC$.

♦ Do đó $M \notin AC$ (1).

♦ Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AC} \quad (2).$$

♦ Từ (1), (2) ta có $MN \parallel AC$.

Bài 03.

Cho 4 điểm O, A, B, C sao cho $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{Vậy: } A, B, C \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 04.

Cho hình bình hành $ABCD$ trên BC lấy điểm H , trên BD lấy điểm K sao cho

$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh A, K, H thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{♦ Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

$$\text{♦ Mà: } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\right)$$

♦ Khi đó: $\overrightarrow{AK} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AH} \Rightarrow \text{Vậy } A, K, H \text{ thẳng hàng.}$

Bài 05.

Cho $\triangle ABC$ với I, J, K lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$.

① Tính $\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

② Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

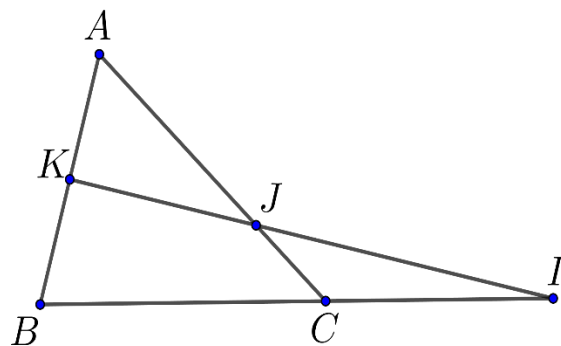
① Tính $\vec{IJ}; \vec{IK}$ theo $\vec{AB}; \vec{AC}$.

♦ Ta có: $\vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CJ}$

$$\Leftrightarrow \vec{IJ} = -\vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{AC} = -(\vec{BA} + \vec{AC}) - \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}.$$

♦ $\vec{IK} = \vec{IB} + \vec{BK}$

$$\Leftrightarrow \vec{IK} = -2\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AB} = -2(\vec{BA} + \vec{AC}) - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{AC}.$$



② Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

♦ Theo câu ①:
$$\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC} \\ \vec{IK} = \frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IJ} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC} \\ \vec{IK} = \frac{3}{2}(\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}) \end{cases} \Rightarrow \vec{IK} = \frac{3}{2}\vec{IJ} \Rightarrow \text{Vậy } I, J, K \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 06.

Cho $\triangle ABC$. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\vec{MB} = 3\vec{MC}; \vec{NA} = 3\vec{CN}; \vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$.

① Tính $\vec{PM}; \vec{PN}$ theo $\vec{AB}; \vec{AC}$.

② Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

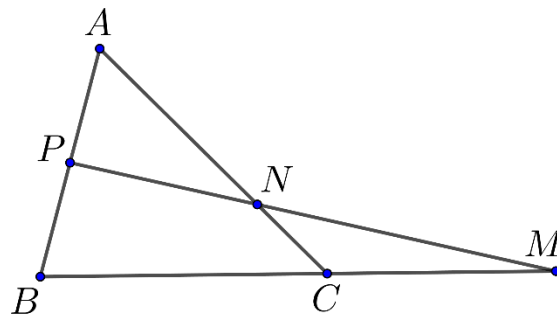
① Tính $\vec{PM}; \vec{PN}$ theo $\vec{AB}; \vec{AC}$.

♦ Ta có: $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0} \rightarrow P$ là trung điểm AB .

♦ $\vec{PM} = \vec{PB} + \vec{BM}$

$$\Leftrightarrow \vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}.$$

$$\bullet \vec{PN} = \vec{PA} + \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}.$$



② Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

♦ Theo câu a:
$$\begin{cases} \vec{PM} = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} \\ \vec{PN} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{PM} = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} \\ \vec{PN} = \frac{1}{2}(-\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}) \end{cases} \Rightarrow \vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{PM}.$$

$\Rightarrow$ Vậy N, M, P thẳng hàng.

Bài 07.

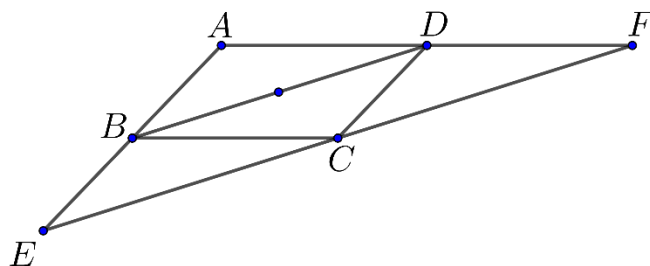
Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các tia AD, AB lần lượt lấy các điểm F, E sao cho $AD = \frac{1}{2} AF$, $AB = \frac{1}{2} AE$. Chứng minh:

- ① Ba điểm F, C, E thẳng hàng.
- ② Các tứ giác $BDCE, BDFC$ là hình bình hành.

Lời giải

① Ba điểm F, C, E thẳng hàng.

- ♦ Ta có D là trung điểm của AF ,
 B là trung điểm của AE .
- ♦ Ta có $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FC}$
- ♦ Nên ba điểm F, C, E thẳng hàng.



② Các tứ giác $BDCE, BDFC$ là hình bình hành.

- ♦ Ta có $\begin{cases} BE \parallel DC \\ BE = DC \end{cases} \Rightarrow BDCE$ là hình bình hành.

$$\begin{cases} DF \parallel BC \\ DF = BC \end{cases} \Rightarrow BDFC \text{ là hình bình hành.}$$

$\Rightarrow$ Vậy các tứ giác $BDCE, BDFC$ là hình bình hành

🔖 Bài 08.

Cho tam giác ABC . Hai điểm I, J được xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{♦ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ 6\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IB} + (\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow 6\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{JI}$$

$\Rightarrow$ Vậy I, J, B thẳng hàng.

🔖 Bài 09.

Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N lần lượt xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm M, N, G thẳng hàng, với G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

♦ Ta có: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3(3\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 9\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 9\overrightarrow{MG} - 3(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 9\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{2}{9}\overrightarrow{MN}$
 $\Rightarrow$ Vậy M, N, G thẳng hàng.

Bài 10.

Cho $\triangle ABC$. Về phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh các tam giác RIP , JQS có cùng trọng tâm.

Lời giải

◎ **Cách 1.** Gọi G , G' lần lượt là trọng tâm $\triangle RIP$, $\triangle JQS$.

♦ Ta có $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{PQ}$
 $= \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'S} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'J} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'Q}$
 $= 3\overrightarrow{GG'}$ (vì $\overrightarrow{RG} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}$, $\overrightarrow{G'S} + \overrightarrow{G'J} + \overrightarrow{G'Q} = \vec{0}$)
 $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{GG'}$ (*)

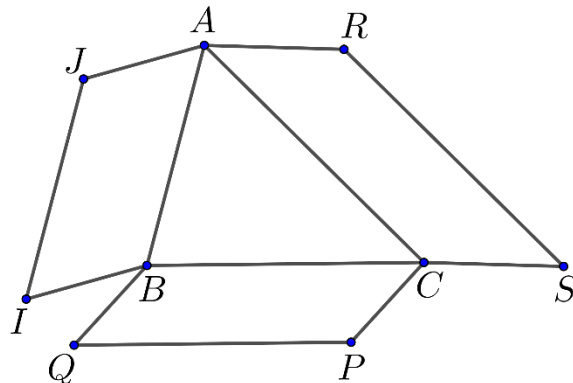
♦ Mà $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CB}$
 (*) $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{GG'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{GG'} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow$ Vậy các tam giác RIP , JQS có cùng trọng tâm.

◎ **Cách 2.** Gọi G , G' lần lượt là trọng tâm $\triangle RIP$, $\triangle JQS$.

♦ Ta có: $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS}$ (vì G' là trọng tâm $\triangle JQS$).
 $= (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IJ}) + (\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RS})$
 $= (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) + (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}) = \vec{0} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \longrightarrow G \equiv G'$

$\Rightarrow$ Vậy các tam giác RIP , JQS có cùng trọng tâm.



Bài 11.

Trên các cạnh AB, BC, CA của $\triangle ABC$ lấy các điểm A', B', C' sao cho $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{AC}$. Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có chung trọng tâm.

Lời giải

♦ Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

♦ Khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ và $\vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'} = \vec{0}$.

♦ Ta đặt: $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{AC} = k > 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{AA'} = k\vec{AB} \\ \vec{BB'} = k\vec{BC} \\ \vec{CC'} = k\vec{CA} \end{cases}$.

♦ Do G là trọng tâm của các ΔABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

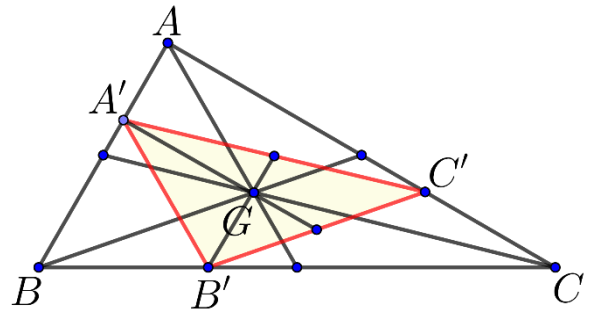
$$\Leftrightarrow (\vec{GG'} + \vec{G'A'} + \vec{A'A}) + (\vec{GG'} + \vec{G'B'} + \vec{B'B}) + (\vec{GG'} + \vec{G'C'} + \vec{C'C}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{GG'} + (\vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'}) - (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{GG'} + \vec{0} - k(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{GG'} - k\vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{GG'} = \vec{0} \longrightarrow G \equiv G'$$

$\Rightarrow$ Vậy các tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có chung trọng tâm.



Bài 12.

Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm K, I, J của các cạnh BC, CA, AB .

① Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm N .

② Chứng minh rằng khi M di động đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC .

Lời giải

① Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại N .

♦ Gọi O, P, Q lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'

♦ Ta có:

$$\vec{MO} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MA'}) = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$$

$$\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MB'}) = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$$

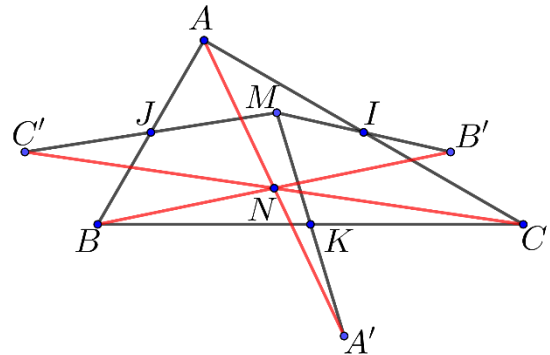
$$\vec{MQ} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MC'}) = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$$

(Do các tứ giác $MBA'C$, $MAB'C$, $MAC'B$ là các hình bình hành).

$$\Rightarrow \vec{MO} = \vec{MP} = \vec{MQ} \Rightarrow O \equiv P \equiv Q.$$

♦ Do đó ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm $N (\equiv O \equiv P \equiv Q)$ của mỗi đường..

② Chứng minh rằng khi M di động đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC .



- Vì G là trọng tâm của ΔABC

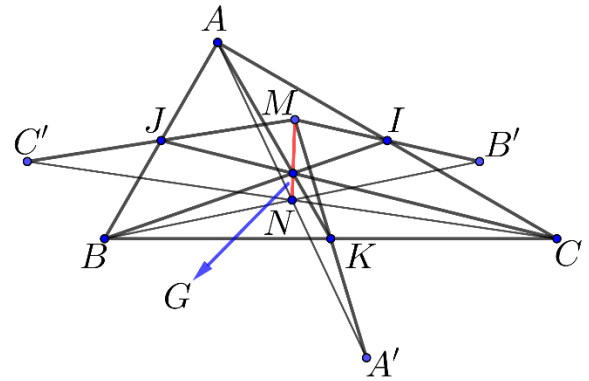
Nên ta có $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

- Mặt khác $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ (cmt).

$$\rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MN}.$$

Do đó 3 điểm M, N, G thẳng hàng.

$\Rightarrow$ Vậy khi M di động đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC .



Bài 13.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Các điểm M, N thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

- Theo giả thiết ta có:

$$3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MG} + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad (1).$$

- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}, \quad (2)$

- Thay (2) vào (1) ta được: $7\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}.$

- Lại có $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN} = 7\overrightarrow{MG}.$

$\Rightarrow$ Vậy ba điểm M, N, G thẳng hàng (đpcm).

Bài 14.

Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$. Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$

② Tính $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Lời giải

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$

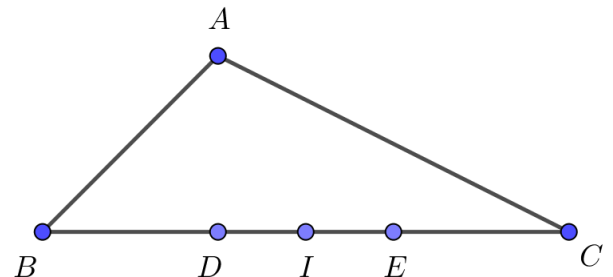
- Theo giả thiết ta có I là trung điểm của BC và

- Hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$

Nên I cũng là trung điểm của DE .

- Do vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$ (đpcm).

② Tính $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.



- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AI}$.
- ♦ Vì $\overrightarrow{AS} = 4\overrightarrow{AI}$ nên ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 15.

Cho tam giác ABC . Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

① Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

② Xác định x để đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC . Tính $\frac{IM}{IN}$.

Lời giải

① Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

♦ Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

♦ Khi đó A, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AC} = 2k\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2k \\ x+1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy $x = -\frac{1}{2}$ thì A, M, N thẳng hàng.

② Xác định x để đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC . Tính $\frac{IM}{IN}$.

♦ Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (x+2)\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

♦ Khi đó đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC thì M, N, I thẳng hàng

$$\Rightarrow \text{tồn tại } l \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \overrightarrow{MN} = l\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow (x+2)\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC} = 2l\overrightarrow{AC} - \frac{5l}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2l = x+2 \\ -\frac{5l}{2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{6}{5} \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy $x = \frac{2}{5}$ thì đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC .

Bài 16.

Cho ba điểm cố định A, B, C và ba số thực a, b, c sao cho $a+b+c \neq 0$.

① Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm điểm G thỏa mãn $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

② Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Lời giải

① Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm điểm G thỏa mãn $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

♦ Ta lấy một điểm O nào đó thì:

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + c(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC})$$

$\Rightarrow$ Vậy G hoàn toàn xác định và duy nhất.

② Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

♦ Với điểm M ta có $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC})$.

♦ Mặt khác $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \longrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}\overrightarrow{MP}$.

$\Rightarrow$ Vậy ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Bài 17.

Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

① Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

② Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

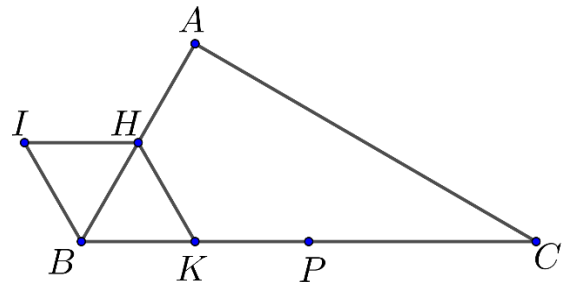
① Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

♦ Ta có $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BK}$$

♦ Với H, P, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, BP .

$\Rightarrow$ Vậy I là đỉnh hình bình hành $BKHI$.



② Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

♦ Ta có $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 4\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{MI}$.

$\Rightarrow$ Vậy MN luôn qua I cố định.

Bài 18.

Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

① Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

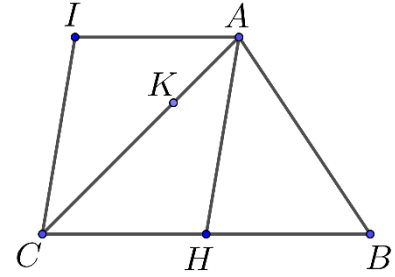
② Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

③ Gọi P là trung điểm của BN . Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

① Tìm I thỏa mãn $2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

- ♦ Ta có $2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} = \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{IA} = \vec{CH}$.
- ♦ Với H là trung điểm của BC .
- $\Rightarrow$ Vậy I là đỉnh hình bình hành $CHAI$.



② Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

- ♦ Ta có $\vec{MN} = 2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$
- $= 2(\vec{MI} + \vec{IA}) - (\vec{MI} + \vec{IB}) + (\vec{MI} + \vec{IC}) = 2\vec{MI} + 2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = 2\vec{MI}$
- $\Rightarrow$ Vậy MN luôn qua I cố định.

③ Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

- ♦ Do P là trung điểm của BN nên $2\vec{MP} = \vec{MB} + \vec{MN} = 2\vec{MA} + \vec{MC} = 3\vec{MK} + 2\vec{KA} + \vec{KC} = 3\vec{MK}$.
- Với K thuộc cạnh AC và $CK = 2KA$.
- $\Rightarrow$ Vậy MP luôn qua K cố định.

Dạng 03. TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTO.

Phương pháp giải

○ Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức vectơ, ta biến đổi đẳng thức vectơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:

- ◎ Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
- ◎ Tập hợp các điểm cách đều một điểm cố định một khoảng không đổi là đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

Bài 01.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

① $\vec{MA} = \vec{MB}$.

② $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

① $\vec{MA} = \vec{MB}$.

- ♦ Ta có $\vec{MA} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{MA} - \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ Vì A và B là hai điểm phân biệt nên không tồn tại điểm M .

② $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

- ♦ Gọi G là điểm thoả mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (hay G là trọng tâm tam giác ABC).
 - ♦ Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MG} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G$.
- $\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là trọng tâm tam giác ABC .

Bài 02.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

- ① $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$.
- ② $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$.
- ③ $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$.

Lời giải

① $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$.

♦ $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{BA}| \Leftrightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = AB \quad (1)$.

♦ Gọi I là trung điểm AB , khi đó $(1) \Leftrightarrow |2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB}| = AB \Leftrightarrow |2\vec{MI}| = AB \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$.

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

② $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}| \quad (*)$.

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, và I là điểm thoả mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$.

♦ Biểu thức $(*) \Leftrightarrow |3\vec{MG}| = |3\vec{MI}| \Leftrightarrow 3MG = 3MI \Leftrightarrow MG = MI$.

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI .

③ $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}| \quad (*)$.

♦ Gọi I và J lần lượt là các điểm thoả mãn: $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$, $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$.

♦ Biểu thức $(*) \Leftrightarrow |3\vec{MI}| = |3\vec{MJ}| \Leftrightarrow 3MI = 3MJ \Leftrightarrow MI = MJ$.

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ .

Bài 03.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho:

① $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = \frac{3}{2}|\vec{MB} + \vec{MC}|$

② $|2\vec{MA} + \vec{MB}| = |4\vec{MB} - \vec{MC}|$

③ $|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$

Lời giải

$$\textcircled{1} \quad |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, I là trung điểm của BC .

♦ Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG}| = \frac{3}{2} |2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow MG = MI$.

$\Rightarrow$ Vậy, tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI .

$$\textcircled{2} \quad |2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

♦ Gọi P, Q là hai điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.

♦ Ta có: $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MP}| = |3\overrightarrow{MQ}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}| \Leftrightarrow MP = MQ$

$\Rightarrow$ Vậy, tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn PQ .

$$\textcircled{3} \quad |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, K là trung điểm của AG .

♦ Ta có: $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

$$\Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG})| = |3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG})| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MK}| = |3\overrightarrow{GA}| \Leftrightarrow MK = \frac{GA}{2}.$$

$\Rightarrow$ Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R = \frac{GA}{2}$

Bài 04.

Cho tam giác ABC .

$\textcircled{1}$ Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$\textcircled{2}$ Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm M, N xác định bởi: $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

$\textcircled{3}$ Tìm tập hợp điểm H sao cho: $|3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}|$.

$\textcircled{4}$ Tìm tập hợp điểm K sao cho: $2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| = 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}|$.

Lời giải

$\textcircled{1}$ Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

♦ Gọi E là trung điểm của AC .

♦ Ta có: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{IE} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ Vậy I là đỉnh của hình bình hành $ABEI$.

② Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm M, N xác định bởi: $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow M, N, I$ thẳng hàng.
- ♦ Do đó đường thẳng nối hai điểm M, N luôn đi qua điểm I cố định.

③ Tìm tập hợp điểm H sao cho: $|\overrightarrow{3HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}|$.

- ♦ Ta có: $|\overrightarrow{3HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{2HI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow HI = \frac{AB}{2}$.

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm H là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

④ Tìm tập hợp điểm K sao cho: $2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| = 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}|$.

- ♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, F là trung điểm của BC .
- ♦ Ta có: $2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| = 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| \Leftrightarrow 6|\overrightarrow{KG}| = 6|\overrightarrow{KF}| \Leftrightarrow KG = KF$.

$\Rightarrow$ Vậy, tập hợp điểm K là đường trung trực của đoạn GF .

📌 Bài 05.

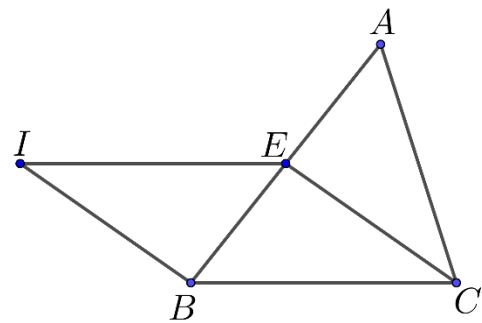
Cho tam giác ABC .

- ① Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- ② Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
- ③ Chứng minh rằng ba điểm A, I, D thẳng hàng.
- ④ Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Lời giải

① Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

- ♦ $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
 - $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE} + 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$, với E là trung điểm của AB .
 - $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BC}$.
- $\Rightarrow$ Vậy điểm I thỏa mãn $IECB$ là hình bình hành.



② Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

- ♦ $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
- $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + 2(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$
- $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BC}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IA}$. Vậy ba điểm A, I, D thẳng hàng.

⇒ Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I (xác định ở phần a), bán kính $R = AJ$, với J là trung điểm của BC .

Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định được điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp điểm M khi m thay đổi.

♦ Từ đó suy ra A, B, M thẳng hàng. Vậy tập hợp điểm M chính là đường thẳng AB .

Trang 67

Cho $\triangle ABC$ và ba vectơ cố định $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$. Với mỗi số thực t , ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'} = t\vec{v}$, $\overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của $\triangle A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, khi đó:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} \\ &= \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \right) + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} = t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

♦ Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ cố định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$.

⊙ **Trường hợp 1:** Nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G .

⊙ **Trường hợp 2:** Nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

Bài 08.

Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải

♦ Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC .

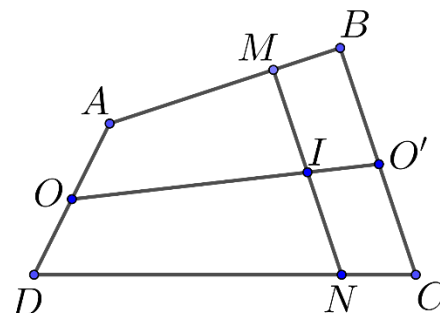
♦ Khi đó:

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

♦ Vì O và I lần lượt là trung điểm AD và MN

$$\text{Nên } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$$

♦ Do đó: khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO' .



Bài 09★.

Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi $\triangle$ là tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng t . Chứng minh rằng với cách chọn $\triangle$ khác nhau, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác $\triangle$ và trung điểm đoạn thẳng t luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

♦ Giả sử năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng là A, B, C, D, E .

♦ Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$. (1) $\Rightarrow G$ là điểm cố định.

♦ Gọi G' là trọng tâm của $\triangle$ qua ba đỉnh $A, B, C \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG'}$. (2)

M là trung điểm của hai đỉnh còn lại $D, E \Rightarrow \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GM}$. (3)

♦ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0} \Rightarrow G, G', M$ thẳng hàng.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10★.

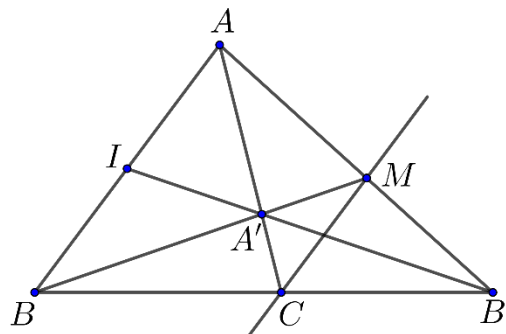
Cho tam giác ABC , I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua I , lần lượt cắt hai đường thẳng CA, CB tại A', B' . Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và $A'B$ nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải

- ♦ Đặt $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$
- ♦ Xét tam giác ABB' với ba đường đồng quy là AC , MB và $B'I$ (đồng quy tại A').
- ♦ Vì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ nên theo định lý Xê-va, ta có $-mn = -1$ hay $mn = 1$.
- ♦ Từ $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$ ta suy ra $m\overrightarrow{MB'} = mn\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}$.

$\Rightarrow$ Vậy ta có $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$ và $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB'}$, điều này chứng tỏ rằng $CM \parallel AB$.

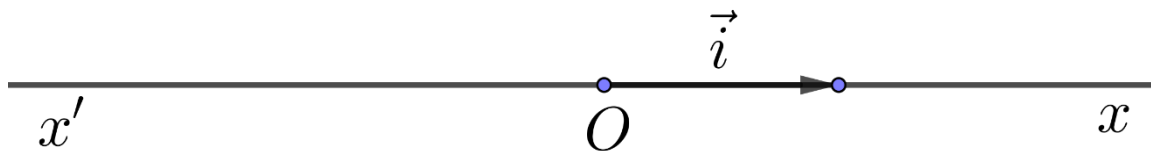
$\Rightarrow$ Vậy điểm M luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua C và song song với AB .



HẾT

BÀI 4**HỆ TRỤC TỌA ĐỘ****I. TRỤC TỌA ĐỘ.****1.1. Định nghĩa**

※ Trục tọa độ (Trục hay trục số) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vector đơn vị $\vec{i}$ (tức là $|\vec{i}| = 1$).



※ Điểm O được gọi là gốc tọa độ, vector $\vec{i}$ được gọi là vector đơn vị của trục tọa độ.

※ Kí hiệu $(O; \vec{i})$ hoặc đơn giản là Ox .

1.2. Tọa độ của vector và của điểm trên trục

※ Cho vector $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số a được gọi là tọa độ của vector $\vec{u}$ trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\vec{u} = a \cdot \vec{i}$

※ Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$ khi đó số m được gọi là tọa độ của điểm M trên trục $(O; \vec{i})$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = m \vec{i}$.

Như vậy tọa điểm M là tọa độ vector $\overrightarrow{OM}$.

1.3. Độ dài đại số của vector trên trục:

※ Cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là độ dài đại số của vector $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox .

⇒ Vậy: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.

※ Tính chất:

① $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

② $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

③ $\forall A, B, C \in (O; \vec{i}): \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 1

Trên trục $(O; \vec{i})$ cho các điểm A, B, C lần lượt có tọa độ $1; -2; 3$. Tính độ dài đại số của các vector $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}$ suy ra hai vector $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}$ ngược hướng.

Lời giải

Lời giải

$$\overline{AB} = -3; \overline{BC} = 5.$$

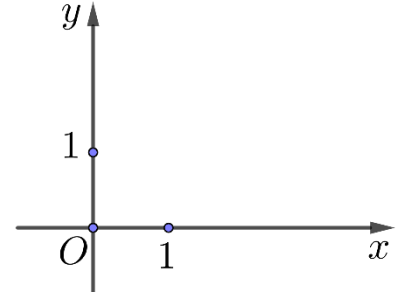
$$\overline{AB} = -\frac{3}{5}\overline{BC} \text{ suy ra hai vectơ } \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC} \text{ ngược hướng.}$$

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.

2.1. Định nghĩa

※ Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}; \vec{j}$. Điểm O là gốc tọa độ, Ox gọi là trục hoành và Oy gọi là trục tung.

★ Kí hiệu: Oxy hay $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



2.2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ

※ Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cặp số $(x; y)$ gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u} = (x; y)$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}.$$

★ Kí hiệu: $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

※ Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M .

★ Kí hiệu: $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$.

2.3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác

$$\text{※ } M \text{ là trung điểm của đoạn } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

$$\text{※ } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$.

- ① Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .
- ② Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

① I là trung điểm của đoạn thẳng $AC \Leftrightarrow I\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1+2}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

② G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{2-1-3}{3}; \frac{1-2+2}{3}\right) \Leftrightarrow G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2.4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ.

① $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

② $\vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$.

③ $k\vec{u} = (kx; ky)$.

④ Vectơ $\vec{u}'$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

⑤ Cho hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

① Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

② Phân tích vectơ $\vec{c}$ theo hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

① Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2; 0), \vec{b} = (0; -3), \vec{c} = (3; -4).$$

$$\begin{cases} 3\vec{a} = (6; 0) \\ -2\vec{b} = (0; 6) \end{cases} \longrightarrow \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (6; 6)$$

② Phân tích vectơ $\vec{c}$ theo hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$.

Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

$$m\vec{a} = (2m; 0)$$

$$n\vec{b} = (0; -3n)$$

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ -3n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}.$$

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1;-2), B(3;2), C(4;-1)$.

- ① Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành tam giác.
- ② Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

- ① Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành tam giác.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4), \overrightarrow{AC} = (5; 1)$.

$\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay ba điểm A, B, C tạo thành 1 tam giác.

- ② Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

$ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 4 - 3 \\ y_D + 2 = -1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -5 \end{cases}$
 $\Rightarrow D(0; -5)$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC , có hai điểm $A(2;-2), B(10;-6)$, điểm C ở trên trục Oy và trọng tâm G trên trục Ox . Tìm tọa độ C và G .

Lời giải

Đặt $C(0; y), G(x; 0)$.

Ta có: $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 0 = \frac{-8 + y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0), G(0; 8)$.

Ví dụ 6

Tìm tọa độ điểm D của hình thang $ABCD$, có 2 đáy là BC, AD và $BC = 2AD$ với $A(-1; 2), B(3; -4), C(5; 0)$.

Lời giải

Đặt $D(x; y)$, khi đó: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow (2; 4) = 2(x+1; y-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow D(0; 8)$.

III. TỔNG KẾT.

TRỤC TỌA ĐỘ

- ⊙ Là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.
Kí hiệu $(O; \vec{i})$.
- ⊙ Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục $(O; \vec{i})$ là $a \Leftrightarrow \vec{u} = a.\vec{i}$.
- ⊙ Tọa độ của điểm trên trục: Số k gọi là tọa độ của điểm M đối với trục $(O; \vec{i})$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\vec{i}$.
- ⊙ Độ dài đại số của vectơ trên trục: $\overline{AB} = a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a.\vec{i}$.
- **Chú ý**
- ① Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = AB$.
- ② Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- ③ Nếu hai điểm A, B trên trục $(O; \vec{i})$ có tọa độ lần lượt là a, b thì $\overline{AB} = b - a$.
- ④ Hệ thức Charles: Với A, B, C tùy ý trên trục, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- ⑤ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$.

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

- ⊙ Hệ gồm hai trục tọa độ $(O; \vec{i}), (O; \vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm O là gốc tọa độ.
- ⊙ Trục $(O; \vec{i})$ gọi là trục hoành, kí hiệu Ox .
- ⊙ Trục $(O; \vec{j})$ gọi là trục tung, kí hiệu Oy .
- ⊙ Hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy .
- ⊙ Mặt phẳng tọa độ Oxy gọi tắt là mặt phẳng Oxy .
- ⊙ Tọa độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ: $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
- ⊙ Tọa độ của điểm đối với hệ trục tọa độ: $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$. (x : hoành độ, y : tung độ).
- **Tính chất:** Cho $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y'), k \in \mathbb{R}, A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.
- ① $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
- ② $\vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y')$.
- ③ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.
- ④ M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.
- ⑤ Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$.

IV. CÁC DẠNG TOÁN

🔗 **Dạng 01. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM; VECTƠ ; ĐỘ DÀI CỦA VECTƠ VÀ CHỨNG MINH HỆ THỨC.**

Phương pháp giải

○ Sử dụng các kiến thức cơ bản sau :

- ⊙ Điểm M có tọa độ là $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i}$
- ⊙ Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{i}$
- ⊙ Nếu a, b lần lượt là tọa độ của A, B thì $\overline{AB} = b - a$

※ Tính chất:

- ① $\overline{AB} = -\overline{BA}$.
- ② $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$
- ③ $\forall A, B, C \in (O; \vec{i}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

🔗 Bài 01.

Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $-2; 1; 4$.

- ① Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}$
- ② Chứng minh B là trung điểm của AC .

Lời giải

① Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}$

- ♦ Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overline{AB} = 1 - (-2) = 3$
- ♦ Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $\overline{BC} = 4 - 1 = 3$
- ♦ Tọa độ vectơ $\overrightarrow{CA}$ là $\overline{CA} = -2 - 4 = -6$

② Chứng minh B là trung điểm của AC .

- ♦ Ta có $\overline{AB} = \overline{BC} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
- $\Rightarrow$ 3 điểm A, B, C thẳng hàng và $AB = BC \Rightarrow B$ là trung điểm của AC .

🔗 Bài 02.

Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Lời giải

- ♦ Gọi tọa độ của A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d .
- ♦ Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} = b - a; \overrightarrow{AC} = c - a; \overrightarrow{AD} = d - a$$

$$\overrightarrow{CD} = d - c; \overrightarrow{DB} = b - d; \overrightarrow{BC} = c - b.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (b-a)(d-c) + (c-a)(b-d) + (d-a)(c-b) \\ &= bd - bc - ad + ac + cb - cd - ab + ad + dc - db - ac + ab \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bài 03.

Trên trục tọa độ $(0; i)$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là a, b .

① Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ($k \neq 1$).

② Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

③ Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -5\overrightarrow{NB}$.

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ($k \neq 1$).

♦ Gọi tọa độ điểm M là x .

♦ Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = a - x \\ \overrightarrow{MB} = b - x \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow a - x = k(b - x) \Leftrightarrow x = \frac{a - kb}{1 - k}, (k \neq 1).$

$\Rightarrow$ Vậy tọa độ điểm M là $\frac{a - kb}{1 - k}, (k \neq 1).$

② Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

♦ Gọi tọa độ điểm I là y . I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

♦ Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = a - y \\ \overrightarrow{IB} = b - y \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a - y = -(b - y) \Leftrightarrow y = \frac{a + b}{2}$

$\Rightarrow$ Vậy tọa độ điểm I là $\frac{a + b}{2}.$

③ Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -5\overrightarrow{NB}$.

♦ Gọi tọa độ điểm N là x .

♦ Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{NA} = a - x \\ \overrightarrow{NB} = b - x \end{cases} \longrightarrow 2\overrightarrow{NA} = -5\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow 2(a - x) = -5(b - x) \Leftrightarrow x = \frac{2a + 5b}{7}.$

$\Rightarrow$ Vậy tọa độ điểm N là $\frac{2a + 5b}{7}.$

Bài 04.

Trên trục $(O; \vec{i})$, cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c . Tìm điểm I sao cho $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$

Lời giải

♦ Gọi điểm I có tọa độ là x .

♦ Ta có:
$$\begin{cases} \vec{IA} = a - x \\ \vec{IB} = b - x \\ \vec{IC} = c - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{IA} = (a - x)\vec{i} \\ \vec{IB} = (b - x)\vec{i} \\ \vec{IC} = (c - x)\vec{i} \end{cases}$$

♦ Khi đó: $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a + b + c - 3x)\vec{i} = \vec{0} \longrightarrow a + b + c - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a + b + c}{3}$.

Bài 05.

Trên trục $(O; \vec{i})$, cho 4 điểm A, B, C, D có tọa độ lần lượt là a, b, c, d và thỏa mãn hệ thức

$2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$. Chứng minh rằng: $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\overline{DA} = a - d$; $\overline{DB} = b - d$; $\overline{CA} = a - c$; $\overline{CB} = b - c$.

♦ Theo đề bài: $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

$\Leftrightarrow 2ab + 2cd = ac + ad + bc + bd$

$\Leftrightarrow ab - ac + cd - bd = bc - cd + ad - ab$

$\Leftrightarrow a(b - c) + d(c - b) = c(b - d) + a(d - b) \Leftrightarrow (b - c)(a - d) = -(b - d)(a - c) \Leftrightarrow \frac{a - d}{b - d} = -\frac{a - c}{b - c}$

$\Rightarrow$ Vậy $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Dạng 02. TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM; VECTƠ TRÊN MẶT PHẪNG Oxy.

Phương pháp giải

○ Ta cần nhớ các kết quả sau:

○ Với hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, ta có:
$$\begin{cases} \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \\ AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{cases}$$

○ Với hai vectơ $\begin{cases} \vec{a} = (x_1; y_1) \\ \vec{b} = (x_2; y_2) \end{cases}$, ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} \\ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} = (mx_1 + nx_2; my_1 + ny_2) \end{cases}$$

Bài 06.

Viết tọa độ của các vectơ sau:

① $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i}, \vec{d} = -2\vec{j}$

② $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}, \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}, \vec{d} = -4\vec{j}, \vec{e} = 3\vec{i}$

Lời giải

① $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i}, \vec{d} = -2\vec{j}$

• $\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right), \vec{c} = (3; 0), \vec{d} = (0; -2).$

② $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}, \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}, \vec{d} = -4\vec{j}, \vec{e} = 3\vec{i}$

• $\vec{a} = (1; -3), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right), \vec{c} = \left(-1; \frac{3}{2}\right), \vec{d} = (0; -4), \vec{e} = (3; 0)$

Bài 07.

Cho $\vec{a} = (2; 0), \vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right), \vec{c} = (4; -6)$

① Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

② Tìm hai số m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.

Lời giải

① Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

• Gọi $\vec{d} = (x; y)$, ta có:
$$\begin{cases} x = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \\ y = 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = -\frac{63}{2} \end{cases} \rightarrow \vec{d} = \left(27; -\frac{63}{2}\right).$$

② Tìm hai số m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.

• Ta có: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 - 4n = 0 \\ \frac{1}{2} + 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -\frac{1}{12} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy $m = \frac{1}{3}; n = -\frac{1}{12}$.

Bài 08.

Cho $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (-1; 4), \vec{c} = (0; 4)$. Tìm tọa độ và độ dài của các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ biết:

① $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} + 5\vec{j}$.

② $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} + 2\vec{i}$.

Lời giải

① $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} + 5\vec{j}$.

♦ Ta có $\vec{j} = (0; 1)$.

♦ Gọi $\vec{u} = (x; y)$, ta có: $\begin{cases} x = 2.1 - 4.(-1) + 0 + 5.0 \\ y = 2.2 - 4.4 + 4 + 5.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 13 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (6; 13)$

♦ Độ dài của vectơ $\vec{u}$ là: $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205}$.

② $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} + 2\vec{i}$.

♦ Ta có $\vec{i} = (1; 0)$.

♦ Gọi $\vec{v} = (x; y)$, ta có: $\begin{cases} x = 1 - 1 - 3.0 + 2.1 \\ y = 2 + 4 - 3.4 + 2.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (2; -6)$

♦ Độ dài của vectơ $\vec{v}$ là: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$.

Bài 09.

Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ biết

① $\vec{a} = (2; -1), \vec{b} = (-3; 4)$ và $\vec{c} = (-4; 7)$.

② $\vec{a} = (1; 1), \vec{b} = (2; -3)$ và $\vec{c} = (-1; 3)$.

③ $\vec{a} = (-4; 3), \vec{b} = (-2; -1)$ và $\vec{c} = (0; 5)$.

④ $\vec{a} = (4; 2), \vec{b} = (5; 3)$ và $\vec{c} = (2; 0)$.

⑤ $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (1; 4)$ và $\vec{c} = (5; 0)$.

⑥ $\vec{a} = (1; 3), \vec{b} = (1; 1)$ và $\vec{c} = (4; 3)$.

Lời giải

① $\vec{a} = (2; -1), \vec{b} = (-3; 4)$ và $\vec{c} = (-4; 7)$.

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} -4 = x.2 + y.(-3) \\ 7 = x.(-1) + y.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

② $\vec{a} = (1; 1), \vec{b} = (2; -3)$ và $\vec{c} = (-1; 3)$.

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} -1 = x.1 + y.2 \\ 3 = x.1 + y.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$.

③ $\vec{a} = (-4; 3), \vec{b} = (-2; -1)$ và $\vec{c} = (0; 5)$.

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x.(-4) + y.(-2) \\ 5 = x.3 + y.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

④ $\vec{a} = (4; 2), \vec{b} = (5; 3)$ và $\vec{c} = (2; 0)$.

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 2 = x.4 + y.5 \\ 0 = x.2 + y.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$

⑤ $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (1; 4)$ và $\vec{c} = (5; 0).$

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 5 = x.2 + y.1 \\ 0 = x.(-2) + y.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}.$

⑥ $\vec{a} = (1; 3), \vec{b} = (1; 1)$ và $\vec{c} = (4; 3).$

♦ Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 4 = x.1 + y.1 \\ 3 = x.3 + y.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{9}{2}\vec{b}.$

🔗 Bài 10.

Cho $\vec{u} = (2; -5), \vec{v} = (3; 4), \vec{w} = (-5; 7).$

- ① Tìm tọa độ của véctơ $\vec{a} = \vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}.$
- ② Tìm tọa độ của véctơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} + \vec{x} = \vec{0}.$
- ③ Tìm m biết rằng $\vec{c} = (6; m)$ cùng phương với $\vec{w}.$

Lời giải

- ① Tìm tọa độ của véctơ $\vec{a} = \vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}.$

♦ Giả sử $\vec{a} = (x; y) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3.3 - 5.(-5) = 36 \\ y = -5 + 3.4 - 5.7 = -28 \end{cases} \longrightarrow \vec{a} = (36; -28).$

- ② Tìm tọa độ của véctơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} + \vec{x} = \vec{0}.$

♦ Giả sử $\vec{a} = (x; y) \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2.3 - 3.(-5) + x = 0 \\ -5 + 2.4 - 3.7 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = 18 \end{cases} \longrightarrow \vec{a} = (-23; 18).$

- ③ Tìm m biết rằng $\vec{c} = (6; m)$ cùng phương với $\vec{w}.$

♦ $\vec{c} = (6; m)$ cùng phương với $\vec{w} \Leftrightarrow \frac{6}{-5} = \frac{m}{7} \Rightarrow m = -\frac{42}{5}.$

🔗 Bài 11.

Cho $\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (3; 4), \vec{c} = (-7; 2).$

- ① Tìm tọa độ của véctơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}.$
- ② Tìm tọa độ của véctơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}.$
- ③ Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}.$

Lời giải

- ① Tìm tọa độ của véctơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}.$

♦ Giả sử $\vec{u} = (x; y) \Rightarrow \begin{cases} x = 3.2 + 2.3 - 4.(-7) = 40 \\ y = 3.1 + 2.4 - 4.2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{u} = (40; 3).$

② Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}.$

♦ Giả sử $\vec{x} = (x; y) \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 - (-7) \\ y + 1 = 4 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow \vec{x} = (8; 1).$

③ Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}.$

♦ Ta có $\begin{cases} -7 = k.2 + l.3 \\ 2 = k.1 + l.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 3l = -7 \\ k + 4l = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{34}{5} \\ l = \frac{11}{5} \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = -\frac{34}{5}\vec{a} + \frac{11}{5}\vec{b}.$

🔖 Bài 12.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(x; y)$. Tìm tọa độ của các điểm

- ① M_1 đối xứng với M qua trục hoành.
- ② M_2 đối xứng với M qua trục tung.
- ③ M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ.

Lời giải

- ① M_1 đối xứng với M qua trục hoành $\longrightarrow M_1(x; -y).$
- ② M_2 đối xứng với M qua trục tung $\longrightarrow M_2(-x; y).$
- ③ M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ $\longrightarrow M_3(-x; -y).$

🔖 Bài 13.

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục $(O; \vec{i})$ và $\vec{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}.$

Lời giải

- ♦ $\vec{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ mà $AB \perp BC \Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên trục $(O; \vec{i}) \Rightarrow B(1; 0).$
 - ♦ $\vec{BC}$ cùng hướng với $\vec{i} \Rightarrow C$ thuộc trục $(O; \vec{i})$. Gọi $C(c; 0); c > 0.$
 - ♦ Ta có $\vec{BC} = (c - 1; 0), \vec{AB} = (0; -3)$
- $$BC = AB \Rightarrow \sqrt{(c-1)^2 + 0^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} \Rightarrow |c-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} c = 4(tm) \\ c = -2(l) \end{cases}$$
- $\Rightarrow$ Vậy $\vec{AB} = (0; -3), \vec{BC} = (3; 0), \vec{AC} = (3; -3).$

Bài 14.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và góc BAD bằng 60° . Biết A trùng với gốc tọa độ O , C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$.

Lời giải

- ♦ Ta có A trùng với gốc tọa độ $O \Rightarrow A(0;0)$.
- ♦ Gọi $B(x, y)$ ($x, y \geq 0$) $\Rightarrow D(x, -y)$ (vì B và D đối xứng với nhau qua AC hay qua trục hoành).
- ♦ Vì C thuộc trục Ox nên gọi $C(z, 0)$ ($z > 0$).
- ♦ Hình thoi $ABCD$ có góc BAD bằng $60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\Rightarrow AB = BD = a \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} AB = a \\ BD = a \\ AC = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = a \\ \sqrt{0^2 + (-2y)^2} = a \\ \sqrt{z^2 + 0^2} = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2y = a \\ z = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = a\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{vì } x, y \geq 0, z > 0)$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } A(0;0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right), C(a\sqrt{3}, 0), D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$

Bài 15.

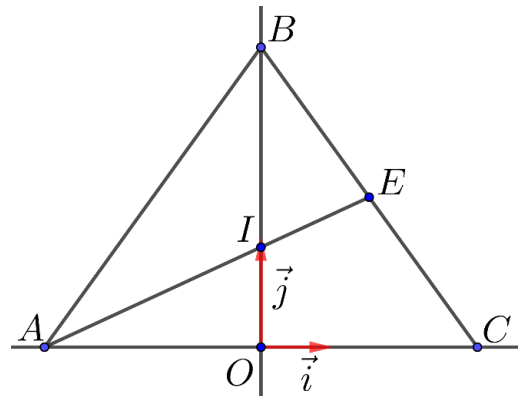
Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, cho tam giác ABC đều cạnh a , biết O là trung điểm BC , $\vec{OC}$ cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{OA}$ cùng hướng với $\vec{j}$.

- ① Tính tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .
- ② Tìm tọa độ trung điểm E của AC .
- ③ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

- ① Tính tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

- ♦ Ta có O là trung điểm BC nên $OB = OC = \frac{a}{2}$.
- ♦ Mà $\vec{OC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$.
- ♦ Tam giác đều ABC cạnh a , O là trung điểm BC
- ♦ Nên $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Mà $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{j}$ nên $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

② Tìm tọa độ trung điểm E của AC .

♦ E là trung điểm của AC nên tọa độ của điểm $E\left(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

③ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

♦ Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

♦ Do tam giác ABC đều nên I chính là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{3} \cdot 0 \\ y_I = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

Bài 16.

Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Biết $\overrightarrow{OC}$ và $\vec{i}$ cùng hướng, $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{j}$ cùng hướng.

① Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.

② Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

① Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.

♦ Hình thoi $ABCD$ tâm O , $AC = 8$, $BD = 6$

$$\Rightarrow OA = OC = 4, OB = OD = 3.$$

♦ $\overrightarrow{OC}$ và $\vec{i}$ cùng hướng $\Rightarrow C(4; 0), A(-4; 0)$.

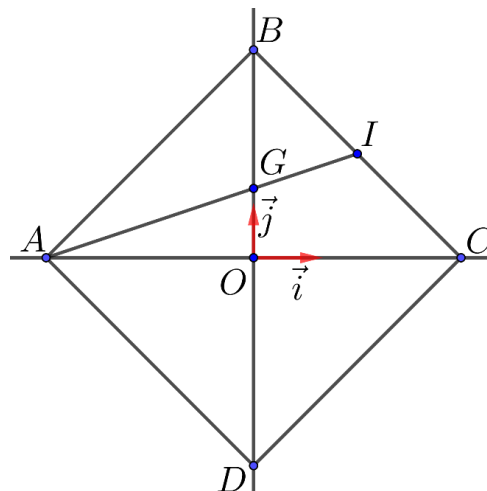
♦ $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{j}$ cùng hướng $\Rightarrow B(0; 3), D(0; -3)$.

② Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm $\triangle ABC$

♦ I là trung điểm của $BC \Rightarrow$ tọa độ $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

♦ Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Vậy trọng tâm tam giác } ABC \text{ là } G(0; 1).$$

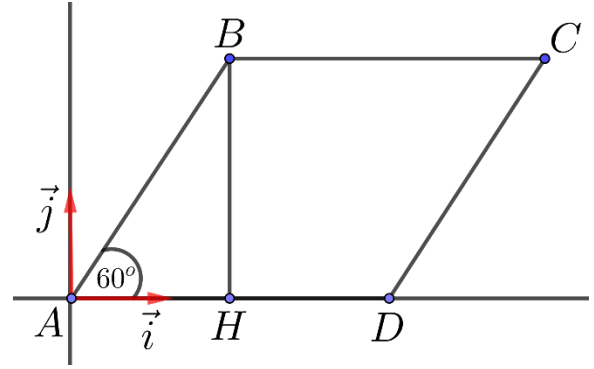


Bài 17.

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 4$ và chiều cao tương ứng với cạnh AD bằng 3, $BAD = 60^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A, \vec{i}, \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $y_B > 0$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

- A là gốc tọa độ nên $A(0;0)$.
- $AD = 4$, $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng nên $D(4;0)$
- Gọi BH là đường cao tương ứng với cạnh $AD, H \in AD$
 $\Rightarrow \triangle ABH$ vuông tại H và có $BAH = 60^\circ$, $BH = 3$
 $\Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin BAH} = \frac{3}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$,
 $AH = \frac{BH}{\tan BAH} = \frac{3}{\tan 60^\circ} = \sqrt{3}$.
- Do $y_B > 0$ nên $B(\sqrt{3};3)$.
- $ABCD$ hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - \sqrt{3} = 4 \\ y_C - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 + \sqrt{3} \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4 + \sqrt{3};3)$
 $\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3};3)$, $\overrightarrow{BC} = (4;0)$, $\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3};-3)$, $\overrightarrow{AC} = (4 + \sqrt{3};3)$.

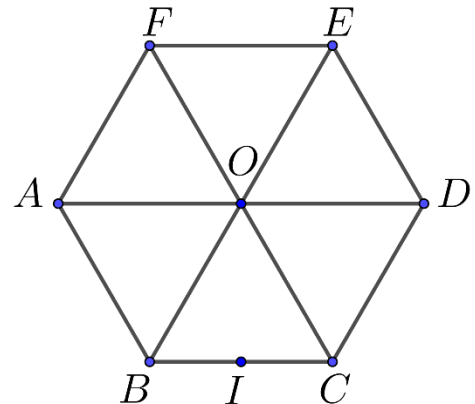


Bài 18.

Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chọn hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ trong đó O là tâm lục giác đều, $\vec{i}$ cùng hướng $\overrightarrow{OD}$, $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{EC}$. Tìm tọa độ các đỉnh lục giác đều biết cạnh của lục giác là 6

Lời giải

- Ta có $O(0;0;0)$.
- $\vec{i}$ cùng hướng $\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = 6\vec{i} \Rightarrow D(6;0)$.
 $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD} = -6\vec{i} \Rightarrow A(-6;0)$
- $\triangle EOC : EC^2 = OE^2 + OC^2 - 2OE \cdot OC \cdot \cos EOC$
 $= 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 108 \Rightarrow EC = 6\sqrt{3}$
- Gọi I là trung điểm của BC
 $\Rightarrow OI = \frac{1}{2}EC = 3\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = 3\sqrt{3}\vec{j} \Rightarrow I(0;3\sqrt{3})$



$$\bullet \text{ Gọi } C(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} \Rightarrow \begin{cases} x-0 = \frac{1}{2} \cdot 6 \\ y-3\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C(3; 3\sqrt{3})$$

$$\bullet \text{ Do } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow B(-3; 3\sqrt{3})$$

$$\bullet \text{ Do } O \text{ là trung điểm của } BE \Rightarrow E(3; -3\sqrt{3})$$

$$\bullet \text{ Do } O \text{ là trung điểm của } CF \Rightarrow F(-3; -3\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } A(-6; 0), B(-3; 3\sqrt{3}), C(3; 3\sqrt{3}), D(6; 0), E(3; -3\sqrt{3}), F(-3; -3\sqrt{3})$$

Bài 19.

Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-1; 1), B(1; 3)$.

① Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = (3; 0)$

② Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = (1; 1)$

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = (3; 0)$

• Gọi $M(x; y)$.

$$\bullet \overrightarrow{BM} = (x-1; y-3) = (3; 0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \longrightarrow M(4; 3).$$

② Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = (1; 1)$

• Gọi $N(x'; y')$.

$$\bullet \overrightarrow{NA} = (-1-x'; 1-y') = (1; 1) \Rightarrow \begin{cases} -1-x'=1 \\ 1-y'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=0 \end{cases} \longrightarrow N(-2; 0).$$

Bài 20.

Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-4; 0), B(0; 3), C(2; 1)$.

① Tìm tọa độ điểm $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

② Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; 3) \\ \overrightarrow{AC} = (6; 1) \end{cases} \longrightarrow \vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (2; 5) \Rightarrow \vec{u} = (2; 5).$$

② Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$$\bullet \text{ Gọi } M(x; y) \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (4-x; -y) \\ \overrightarrow{MB} = (-x; 3-y) \\ \overrightarrow{MC} = (2-x; 1-y) \end{cases}.$$

$$\bullet \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (4-x-2x+6-3x; -y+6-2y+3-3y) = (-6x+10; -6y+9)$$

$$\bullet \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6x+10=0 \\ -6y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right)$$

✎ Bài 24.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$.

① Tìm tọa độ trung điểm của cạnh BC và tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$.

② Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

① Tìm tọa độ trung điểm của cạnh BC và tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$.

✎ Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

$$\bullet \text{ Tọa độ điểm } M: \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2-1}{2} \\ y_M = \frac{1-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{-1}{2} \end{cases} \longrightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right).$$

✎ Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$$\bullet \text{ Tọa độ điểm } G: \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{3+2-1}{3} \\ y_G = \frac{4+1-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = 1 \end{cases} \longrightarrow G\left(\frac{4}{3}; 1\right).$$

② Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

✎ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x_D = -1 \\ -2-y_D = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \end{cases} \longrightarrow D(0;1).$$

Bài 25.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3;-5)$, $B(1;0)$.

- ① Tìm tọa độ trung điểm của cạnh BC và tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$.
- ② Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

- ① Tìm tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;5)$.
- ♦ Vì $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$ và tọa độ $\overrightarrow{OC}$ cũng là tọa độ điểm C nên

$$\begin{cases} x_C = -3 \cdot (-2) \\ y_C = -3 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 6 \\ y_C = -15 \end{cases} \longrightarrow C(6;-15).$$

- ② Tìm tọa độ điểm D đối xứng A qua C .

- ♦ D đối xứng A qua $C \Leftrightarrow C$ là trung điểm AD .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_C = x_A + x_D \\ 2y_C = y_A + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A \\ y_D = 2y_C - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \cdot 6 - 3 \\ y_D = 2 \cdot (-15) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -25 \end{cases} \longrightarrow D(9;-25).$$

Bài 26.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;-2)$, $B(3;2)$, $C(-4;1)$. Tìm tọa độ đỉnh D .

Lời giải

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB}(4;4)$.
- ♦ $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x_D = 4 \\ 1 - y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -8 \\ y_D = -3 \end{cases} \longrightarrow D(-8;-3).$

Bài 27.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(4;3)$.

- ① Tìm tọa độ trung điểm của AB .
- ② Tìm điểm M chia đoạn thẳng theo tỉ số $k=2$.
- ③ Tìm điểm C sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

- ① Tìm tọa độ trung điểm của AB .

- ♦ I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; 1\right).$

② Tìm điểm M chia đoạn thẳng theo tỉ số $k=2$.

♦ Gọi $M(x; y)$. $\overrightarrow{MA} = (1-x; -1-y)$, $\overrightarrow{MB} = (4-x; 3-y)$.

♦ M chia đoạn thẳng theo tỉ số $k=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=2(4-x) \\ -1-y=2(3-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow M(7;7).$

③ Tìm điểm C sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.

♦ Gọi $C(x_c; y_c)$. $\overrightarrow{AB} = (3;4)$, $\overrightarrow{OC} = (x_c; y_c)$

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=x_c \\ 4=y_c \end{cases} \Rightarrow C(3;4).$

🔖 Bài 28.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$

① Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

② Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

③ Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Lời giải

① Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1;6)$. $\overrightarrow{AC} = (2;4)$. $\overrightarrow{BC} = (3;-2)$.

② Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Gọi $M(a;b)$. $\overrightarrow{CM} = (a-3; b-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=2(-1)-3.2 \\ b-2=2.6-3.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow M(-5;2).$

③ Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Gọi $N(x;y)$. $\overrightarrow{AN} = (x-1; y+2)$. $\overrightarrow{BN} = (x; y-4)$. $\overrightarrow{CN} = (x-3; y-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+2.x-4.(x-3)=0 \\ y+2+2.(y-4)-4.(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow N(11;2)$

🔖 Bài 29.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$.

① Tìm tọa độ điểm D đối xứng của A qua C .

② Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C .

③ Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm D đối xứng của A qua C .

D đối xứng của A qua C

$$\Leftrightarrow C \text{ là trung điểm của } AD \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = -3 \\ y_D = 2y_C - y_A = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-3; -2).$$

② Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C .

♦ Gọi $E(x; y)$.

E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C .

⊙ **Trường hợp 1:** $ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1-2 \\ y+2=-2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow E(-2; -7).$

⊙ **Trường hợp 2:** $ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2-1 \\ y+2=3+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow E(0; 3).$

⊙ **Trường hợp 3:** $ACBE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2+1 \\ y+2=3+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow E(4; 3).$

$\Rightarrow$ Vậy $E_1(-2; -7), E_2(0; 3)$ hoặc $E_3(4; 3)$.

③ Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

♦ Trọng tâm G của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3} \\ y_G = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$

📌 Bài 30.

Cho mặt phẳng $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 1); B(3; -2); C(0; 3)$.

① Tìm tọa độ của $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}$.

② Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác, tìm trọng tâm G của $\triangle ABC$.

③ Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

④ Tìm điểm E sao cho tứ giác $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tâm của hình bình hành đó.

Lời giải

① Tìm tọa độ của $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (5; -3); \overrightarrow{BC} = (-3; 5); \overrightarrow{CA} = (-2; -2),$

♦ Khi đó: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} = (0; 16).$

② Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác, tìm trọng tâm G của $\triangle ABC$.

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (5; -3); \overrightarrow{AC} = (2; 2),$
- ♦ Mà: $\frac{5}{2} \neq \frac{-3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC},$
- ♦ Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác
- ♦ Trọng tâm G của $\triangle ABC$ là: $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$

③ Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}.$

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x_D - x_C = 2(x_B - x_A) + 3(x_C - x_B) \\ y_D - y_C = 2(y_B - y_A) + 3(y_C - y_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 0 = 2(3 + 2) + 3(0 - 3) \\ y_D - 3 = 2(-2 - 1) + 3(3 + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 12 \end{cases} \Rightarrow D(1; 12).$
- ♦ Gọi I là tâm của hình bình hành khi đó I là trung điểm của $AC \Rightarrow I(-1; 2).$

④ Tìm điểm E sao cho tứ giác $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tâm của hình bình hành đó.

- ♦ Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành
 $\Rightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_C - x_E = x_B - x_A \\ y_C - y_E = y_B - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - x_E = 3 + 2 \\ 3 - y_E = -2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = -5 \\ y_E = 6 \end{cases} \Rightarrow E(-5; 6).$

🔖 Bài 31.

Cho mặt phẳng $Oxyz$, cho điểm $A(3; 0); B(-3; 0)$. Xác định tọa độ điểm C, D sao cho.

① $\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}.$

② $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}.$

Lời giải

① $\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}.$

♦ $\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_A - x_C + 3(x_B - x_C) = 0 \\ y_A - y_C + 3(y_B - y_C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - x_C + 3(-3 - x_C) = 0 \\ 0 - y_C + 3(0 - y_C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -\frac{3}{2} \\ y_C = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(-\frac{3}{2}; 0\right).$

② $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}.$

♦ $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_A - x_D - 3(x_B - x_D) = 0 \\ y_A - y_D - 3(y_B - y_D) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - x_D - 3(-3 - x_D) = 0 \\ 0 - y_D - 3(0 - y_D) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -6 \\ y_D = 0 \end{cases} \rightarrow D(-6; 0).$

🔖 Bài 32.

Cho mặt phẳng $Oxyz$, cho điểm $A(3; 4); B(-1; 2); I(4; 1)$. Xác định tọa độ điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm của CD . Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

- ♦ Gọi tọa độ hai điểm $C(a; b), D(c; d).$

- ♦ Tứ giác $ABCD$ và I là trung điểm của CD

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-3=a-c \\ 2-4=b-d \\ c-4+a-4=0 \\ d-1+b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=-4 \\ b-d=-2 \\ c+a=8 \\ d+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=6 \\ d=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy $C(2;0), D(6;2)$.

✎ Bài 33.

Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3;1); B(1;-3)$. Đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải

- ♦ $C \in Oy \Rightarrow C(0;c); G \in Ox \Rightarrow G(g;0)$
- ♦ Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ x_C = 3x_G - x_A - x_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \cdot 0 - 1 - (-3) = 2 \\ x_C = 3 \cdot 0 - 3 - 1 = -4 \end{cases} \rightarrow C(0;2)$$

✎ Bài 34.

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M;N;P$ lần lượt là trung điểm của $BC; AC; AB$. Biết $M(1;1); N(-2;-3); P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải

- ♦ Gọi $B(a;b)$
- ♦ $M(1;1)$ là trung điểm của BC nên ta có $\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = 2-a \\ y_C = 2y_M - y_B = 2-b \end{cases}$
- ♦ $\overrightarrow{NP} = (4;2); \overrightarrow{CB} = (2a-2; 2b-2)$
- ♦ $N;P$ là trung điểm của $AC; AB$ nên NP là đường trung bình của tam giác ABC
- ♦ Do vậy $2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (8;4) = (2a-2; 2b-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2=8 \\ 2b-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow B(5;3); C(-3-1)$
- ♦ $N(-2;-3)$ là trung điểm của AC nên $\begin{cases} x_A = 2x_N - x_C = -1 \\ y_A = 2y_N - y_C = -5 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-5)$

✎ Bài 35.

Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;4); B(-1;2); C(4;1)$. A' là điểm đối xứng của A qua B . B' là điểm đối xứng của B qua C . C' là điểm đối xứng của C qua A .

- ① Tìm tọa độ các điểm $A'; B'; C'$.
- ② Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

① Tìm tọa độ các điểm $A'; B'; C'$.

- $A(3;4); B(-1;2); C(4;1) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(2; \frac{7}{3}\right)$
- Ta có $B(-1;2)$ là trung điểm của AA' với $A(3;4)$ nên $A'(-5;0)$
 $C(4;1)$ là trung điểm của BB' với $B(-1;2)$ nên $B'(9;0)$
 $A(3;4)$ là trung điểm của CC' với $C(4;1)$ nên $C'(2;7)$

② Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

- Trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ là $G'\left(2; \frac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Do vậy Trọng tâm hai tam giác $A'B'C'$ và tam giác ABC trùng nhau.

Bài 36.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-3;6)$, $B(1;-2)$, $C(6;3)$.

- ① Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành và tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$
- ② Tìm tọa độ điểm E thỏa biểu thức véc tơ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- ③ Tìm tọa độ điểm F thỏa biểu thức véc tơ $\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} - 4\overrightarrow{CF} = \vec{0}$.
- ④ Tìm điểm K thỏa biểu thức véc tơ $4\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.
- ⑤ Tìm tâm I và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- ⑥ Tìm các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $\triangle ABC$ nhận các điểm đó làm trung điểm các cạnh
- ⑦ Tìm các điểm M, N, P sao cho $\triangle MNP$ nhận các điểm A, B, C làm trung điểm các cạnh.
- ⑧ Tìm hai điểm chia đoạn AC làm ba phần bằng nhau.
- ⑨ Tìm diện tích $\triangle ABC$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành và tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$

$$\overrightarrow{AB} = (4; -8), \overrightarrow{DC} = (6 - x_D; 3 - y_D)$$

$$\bullet ABCD \text{ là hình bình hành } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_D = 4 \\ 3 - y_D = -8 \end{cases} \Rightarrow D(2; 11)$$

$$\bullet \text{ Gọi } G(x_G; y_G)$$

$$\bullet G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-3+1+6}{3} \\ y_G = \frac{6-2+3}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

② Tìm tọa độ điểm E thỏa biểu thức véc tơ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

♦ Gọi $E(x_E; y_E)$

$$\overrightarrow{AB} = (4; -8), \overrightarrow{AC} = (9; -3), \overrightarrow{CE} = (x_E - 6; y_E - 3)$$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 6 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 9 \\ y_E - 3 = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow E(-13; -4)$$

③ Tìm tọa độ điểm F thỏa biểu thức véc tơ $\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} - 4\overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

$$\text{♦ Gọi } F(x_F; y_F) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = (x_F + 3; y_F - 6), \overrightarrow{BF} = (x_F - 1; y_F + 2), \overrightarrow{CF} = (x_F - 6; y_F - 3)$$

$$\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} - 4\overrightarrow{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F + 3 + 2(x_F - 1) - 4(x_F - 6) = 0 \\ y_F - 6 + 2(y_F + 2) - 4(y_F - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow F(25; 6)$$

④ Tìm điểm K thỏa biểu thức véc tơ $4\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

$$\text{♦ Gọi } K(x_K; y_K) \Rightarrow \overrightarrow{KA} = (-3 - x_K; 6 - y_K), \overrightarrow{BK} = (x_K - 1; y_K + 2), \overrightarrow{CK} = (x_K - 6; y_K - 3)$$

$$4\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(-3 - x_K) - 3(x_K - 1) + (x_K - 6) = 0 \\ 4(6 - y_K) - 3(y_K + 2) + (y_K - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

⑤ Tìm tâm I và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\text{♦ Gọi } I(x_I; y_I) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-3 - x_I; 6 - y_I), \overrightarrow{IB} = (1 - x_I; -2 - y_I), \overrightarrow{IC} = (6 - x_I; 3 - y_I)$$

$$\text{♦ Để } I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3 - x_I)^2 + (6 - y_I)^2 = (1 - x_I)^2 + (-2 - y_I)^2 \\ (-3 - x_I)^2 + (6 - y_I)^2 = (6 - x_I)^2 + (3 - y_I)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x_I - 16y_I = -40 \\ 18x_I - 6y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 3)$$

$$\Rightarrow R = IA = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = 5$$

⑥ Tìm các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $\triangle ABC$ nhận các điểm đó làm trung điểm các cạnh

$$\text{♦ Gọi } A_1(x_{A_1}; y_{A_1}) \text{ là trung điểm cạnh } AB \Rightarrow \begin{cases} x_{A_1} = \frac{-3 + 1}{2} \\ y_{A_1} = \frac{6 - 2}{2} \end{cases} \Rightarrow A_1(-1; 2)$$

$$\text{♦ Tương tự } A_2, A_3 \text{ lần lượt là trung điểm } BC, AC \Rightarrow A_2\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right), A_3\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

⑦ Tìm các điểm M, N, P sao cho $\triangle MNP$ nhận các điểm A, B, C làm trung điểm các cạnh.

- ♦ Gọi $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$, $P(x_P; y_P)$
- ♦ Giả sử A , B , C lần lượt là trung điểm MN , NP , PM
- ♦ Khi đó:
$$\begin{cases} x_M + x_N = 2 \cdot (-3) \\ x_N + x_P = 2 \cdot 1 \\ x_P + x_M = 2 \cdot 6 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_M + y_N = 2 \cdot (6) \\ y_N + y_P = 2 \cdot (-2) \\ y_P + y_M = 2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow M(2; 11), N(-8; 1), P(10; -5)$$

⑧ Tìm hai điểm chia đoạn AC làm ba phần bằng nhau.

- ♦ Gọi $Q(x_Q; y_Q)$, $R(x_R; y_R)$ thuộc đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$
- ♦ Có $\overrightarrow{AQ} = (x_Q + 3; y_Q - 6)$; $\overrightarrow{RC} = (6 - x_R; 3 - y_R)$; $\overrightarrow{AC} = (9; -3)$
- ♦ Vì $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{RC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$

$$\text{Nên} \begin{cases} x_Q + 3 = \frac{1}{3} \cdot 9 \\ y_Q - 6 = \frac{1}{3} \cdot (-3) \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 6 - x_R = \frac{1}{3} \cdot 9 \\ 3 - y_R = \frac{1}{3} \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow Q(0; 5) \text{ và } R(3; 4)$$

⑨ Tìm diện tích $\triangle ABC$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

- ♦ Gọi $T(-3; -2)$, $U(6; -2)$, $V(6; 6)$
- $\Rightarrow TU = AV = 9$, $AT = VU = 8$, $VC = 3$, $CU = 5$, $BU = 5$, $TB = 4$
- ♦ $S_{ATUV} = 9 \cdot 8 = 72$, $S_{AVC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = \frac{27}{2}$, $S_{BCU} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$, $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$
- $\Rightarrow S_{ABC} = 72 - \frac{27}{2} - \frac{25}{2} - 16 = 30$ (đvdt)
- $\Rightarrow$ Diện tích hình tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

🔖 Bài 37.

Trong mặt phẳng Oxy , tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất khi biết tọa độ có dạng

① $M(1+2t; 1+3t)$

② $M(1-2t; 1+t)$

Lời giải

① $M(1+2t; 1+3t)$

- ♦ Ta có $x_M^2 + y_M^2$
- $$= (1+2t)^2 + (1+3t)^2 = 13t^2 + 10t + 2 = 13 \left(t^2 + 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot t + \frac{25}{169} \right) + \frac{1}{13} = 13 \left(t + \frac{5}{13} \right)^2 + \frac{1}{13} \geq \frac{1}{13}$$
- $\Rightarrow$ Vậy $x_M^2 + y_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{13}$

② $M(1-2t; 1+t)$

♦ Ta có $x_M^2 + y_M^2 = (1-2t)^2 + (1+t)^2 = 5t^2 - 2t + 2 = 5\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$

$\Rightarrow$ Vậy $x_M^2 + y_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{9}{5}$.

Bài 38.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(4;4)$, $B(0;1)$. Tìm điểm C trên Oy sao cho trung trực của đoạn AC đi qua B

Lời giải

♦ Gọi $C(0;c)$

♦ Có $\overrightarrow{AB} = (-4; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; c-1)$

♦ Để trung trực của đoạn AC đi qua $B \Leftrightarrow AB = BC$

$\Leftrightarrow (-4)^2 + (-3)^2 = 0^2 + (c-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c=6 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow$ Vậy $C(0;6)$ hoặc $C(0;-4)$ thì thỏa ycbt.

♦ Với $\begin{cases} y_M = 6 \\ y_N = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(36;6) \\ N(9;3) \end{cases}$
 $\begin{cases} y_M = -2 \\ y_N = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4;-2) \\ N(1;1) \end{cases}$

Bài 39.

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-1;1)$, $B(5;3)$, đỉnh C nằm trên trục tung Oy và trọng tâm G của tam giác thuộc trục hoành Ox . Tìm tọa độ điểm C và tính diện tích $\triangle ABC$.

Lời giải

♦ Ta có: $\begin{cases} C \in Oy \rightarrow C(0; y_C) \\ G \in Ox \rightarrow G(x_G; 0) \end{cases}$

♦ Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M(2;2) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = (2; 2-y_C)$, $\overrightarrow{CG} = (x_G-2; -2)$

♦ Với G là trọng tâm $\triangle ABC$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CG} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{3}{2}(x_G-2) \\ 2-y_C = \frac{3}{2}(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_C = 5 \\ x_G = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow C(0;5) \text{ và } G\left(\frac{10}{3}; 0\right).$

♦ Từ đó ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6;2) \\ \overrightarrow{AC} = (1;4) \end{cases} \longrightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |6 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = 11.$

Bài 40.

Trong mặt phẳng Oxy , tìm hai điểm $M, N \in (P): y^2 = x$. Biết rằng $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$ và $I(0; 2)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có } M, N \in (P): y^2 = x &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} = (x_M; y_M - 2) \\ \overrightarrow{IN} = (x_N; y_N - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} = (y_M^2; y_M - 2) \\ \overrightarrow{IN} = (y_N^2; y_N - 2) \end{cases} \\ \bullet \text{ Lại có: } \overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_M^2 = 4y_N^2 \\ y_M - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M^2 = 4y_N^2 \\ y_M - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2y_N \\ y_M - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2y_N \\ 2y_N - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2y_N \\ 2y_N = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 6 \\ y_N = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2y_N \\ y_M - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2y_N \\ -2y_N - 2 = 4y_N - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2y_N \\ -6y_N = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2 \\ y_N = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 03. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG & ỨNG DỤNG.

Phương pháp giải

- Ta cần nhớ các kết quả sau: cho $\vec{u} = (x; y); \vec{v} = (x'; y')$.
 - ① Vectơ $\vec{v}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.
 - ② Nếu $xy \neq 0$ ta có $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$.
 - ③ Để phân tích $\vec{c} = (c_1; c_2)$ qua hai vectơ $\vec{u} = (x; y); \vec{v} = (x'; y')$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c} = m\vec{u} + n\vec{v}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} mx + nx' = c_1 \\ my + ny' = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \\ n \end{cases}$.
 - ④ Với 3 điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B); C(x_C; y_C)$.
Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB} \nearrow \nearrow \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$.
 - ⑤ Với $\triangle ABC$ bất kì thì $CA + CB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng.
 - ⑥ Bất đẳng thức vectơ
 $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và hướng.
 $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng phương và hướng.

Lưu ý: $\vec{a} = (x; y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- Nhớ vững công thức tính diện tích Δ , các bất đẳng thức cơ bản (cauchy, B.C.S).
- Để chứng minh ba điểm là ba đỉnh Δ , ta chứng minh ba điểm đó không thẳng hàng.

Bài 41.

Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0)$, $\vec{c} = (-1; 3)$

- ① Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương.
- ② Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Lời giải

- ① Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương.

♦ Giả sử $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 1 = k \cdot (-3) \\ 2 = k \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \text{ (Vô lý)} \\ 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \neq k\vec{b}. \text{ Suy ra } \vec{a}; \vec{b} \text{ không cùng phương.}$

- ② Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$.

♦ Giả sử ta có: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ khi đó ta có $\begin{cases} m - 3n = -1 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{6} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$

Bài 42.

Cho $\vec{u} = (m^2 + m - 2; 4)$ và $\vec{v} = (m; 2)$. Tìm m để hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} m^2 + m - 2 = km \\ 4 = k \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \\ k = 2 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Vậy $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 43.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6; 3)$, $B(-3; 6)$, $C(1; -2)$.

- ① Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.
- ② Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.
- ③ Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.
- ④ Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC .

Lời giải

- ① Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-9; 3)$; $\overrightarrow{AC} = (-5; -5)$.

♦ Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

$\Leftrightarrow A, B, C$ không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

② Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.

♦ Gọi $D(x; 0)$ trên trục hoành, $\overrightarrow{AD} = (x - 6, -3)$.

♦ Khi đó A, B, D thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = k(x - 6) \\ 3 = k(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = -1(x - 6) \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ k = -1 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $D(15; 0)$ thỏa mãn YCBT.

③ Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.

♦ Gọi $E(x; y)$ trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{BE} = (x + 3; y - 6)$; $\overrightarrow{EC} = (1 - x; -2 - y)$

♦ Mà $BE = 2EC$ nên $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 2(1 - x) \\ y - 6 = 2(-2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $E = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn YCBT.

④ Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC .

♦ Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của DE và AC ,

♦ Ta có $\overrightarrow{MD} = (15 - x; -y)$; $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{46}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

♦ Mà D, M, E thẳng hàng nên: $\frac{x - 15}{-\frac{46}{3}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x + 23y = 15$.

♦ $\overrightarrow{MA} = (6 - x; 3 - y)$; $\overrightarrow{AC} = (-5; -5)$, mà A, M, C thẳng hàng: $\frac{6 - x}{-5} = \frac{3 - y}{-5} \Leftrightarrow x - y = 3$.

♦ Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 23y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $M\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của DE và AC .

Bài 44.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A(1;1), B(2;-1), C(4;3), D(16;3)$. Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2-1; -1-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

$\overrightarrow{AC} = (4-1; 3-1) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (3; 2)$.

$\overrightarrow{AD} = (16-1; 3-1) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (15; 2)$.

♦ Giả sử $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot 1 + n \cdot 3 = 15 \\ m \cdot (-2) + n \cdot 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

Bài 45.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A(0;1), B(2;0), C(-1;2), D(6;-4)$. Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2-0; 0-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; -1)$.

$\overrightarrow{AC} = (-1-0; 2-1) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1; 1)$.

$\overrightarrow{AD} = (6-0; -4-1) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (6; -5)$.

♦ Giả sử $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot 2 + n \cdot (-1) = 6 \\ m \cdot (-1) + n \cdot 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -4 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$.

Bài 46.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A(1;-2), B(0;3), C(-3;4), D(-1;8)$.

① Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

② Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{CD}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

① Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0-1; 3-(-2)) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; 5)$.

$\overrightarrow{AC} = (-3-1; 4-(-2)) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-4; 6)$.

- ♦ Suy ra $\frac{-1}{-4} \neq \frac{5}{6}$. Vậy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

② Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{CD}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- ♦ $\overrightarrow{CD} = (-1+3; 8-4) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (2; 4)$.

- ♦ Giả sử $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot (-1) + n \cdot (-4) = 2 \\ m \cdot 5 + n \cdot 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Bài 47.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(0;1), B(1;3), C(2;7)$ và $D(0;3)$. Tìm giao điểm của hai đường thẳng AC và BD .

Lời giải

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AC} = (2;6), \overrightarrow{BD} = (-1;0)$.

- ♦ Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của AC và BD .

- ♦ Khi đó: A, M, C thẳng hàng và B, M, D thẳng hàng.

- ♦ Vì A, M, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Rightarrow \exists k \neq 0: \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 + 6k \end{cases} \quad (1)$

- ♦ Vì B, M, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}$ cùng phương $\Rightarrow \exists n \neq 0: \overrightarrow{BM} = n\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - n \\ y = 3 \end{cases} \quad (2)$

- ♦ Từ (1)(2) suy ra: $\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

Bài 48.

Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

Lời giải

- ♦ Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Khi đó: $\overrightarrow{BC} = (-3;-3), \overrightarrow{BM} = (x-2; y-1)$.

- ♦ Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC, S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BM$.

- ♦ Theo bài ra ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}} = 3 \Rightarrow \frac{BC}{BM} = 3 \Rightarrow BC = 3BM$.

⊙ **Trường hợp 1:** Nếu M nằm trong đoạn BC thì $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M(1;0).$

⊙ **Trường hợp 2:** Nếu M nằm ngoài đoạn BC thì $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -3(x-2) \\ -3 = -3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(3;2).$

$\Rightarrow$ Vậy có hai điểm $M(1;0), M(3;2)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

🔗 Bài 49.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$.

- ① Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- ② Xác định tọa độ điểm D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.
- ③ Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

① Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;2), \overrightarrow{AC} = (4;1)$.
- ♦ Giả sử A, B, C thẳng hàng. Khi đó $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4k \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ k = 2 \end{cases}$ (vô lí)
- ♦ Suy ra A, B, C không thẳng hàng nên A, B, C tạo thành một tam giác.

② Xác định tọa độ điểm D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{BC} = (3;-1)$.
- ♦ Gọi $D(x;y)$ là điểm thuộc đoạn thẳng BC thỏa mãn $2BD = 5DC$.
- ♦ Ta có: $2BD = 5DC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BD+CD} = \frac{5}{5+2} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{5}{7}$.
- ♦ Mà D thuộc đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{15}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

③ Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC .

- ♦ Có G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.
- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{22}{7}; \frac{9}{7}\right), \overrightarrow{BG} = \left(\frac{2}{3}; -1\right)$.
- ♦ Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của AD, BG .
- ♦ Khi đó: ba điểm A, M, D thẳng hàng và ba điểm B, M, G thẳng hàng.

- ♦ Vì A, M, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{22}{7}k \\ y = -1 + \frac{9}{7}k \end{cases} \quad (1).$
 - ♦ Vì B, M, G thẳng hàng nên $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BG}$ cùng phương $\Rightarrow \exists n \neq 0: \overrightarrow{BM} = n\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}n \\ y = 1 - n \end{cases} \quad (2)$
 - ♦ Từ (1)(2) suy ra: $\begin{cases} k = \frac{7}{12} \\ n = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{4}\right).$
- $\Rightarrow$ Vậy $M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{4}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 50.

Trong mặt phẳng Oxy , tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai điểm A và B nhỏ nhất

① $A(1;1)$ và $B(2;-4).$

② $A(1;2)$ và $B(3;4).$

Lời giải

Theo giả thiết $P \in Ox \Rightarrow P(x_p; 0)$

① $A(1;1)$ và $B(2;-4).$

- ♦ Ta có: $A(1;1)$ và $B(2;-4)$ khác phía với trục hoành.
- ♦ Gọi $P_0 = AB \cap Ox$, khi đó $A; B; P_0$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AP_0}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{-5}{-1} \Leftrightarrow x_0 = \frac{6}{5} \Rightarrow P_0\left(\frac{6}{5}; 0\right).$
- ♦ Ta có $PA + PB \geq AB$, vậy $PA + PB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A; B; P$ thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

② $A(1;2)$ và $B(3;4).$

- ♦ Ta có: $A(1;2)$ và $B(3;4)$ cùng phía với trục hoành.
- ♦ Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trục hoành
 $\Rightarrow A'(1;-2)$ và $PA = PA'.$
- ♦ Ta có $PA + PB = PA' + PB \geq A'B.$
- ♦ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'P}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \frac{x_p - 1}{3 - 1} = \frac{0 + 2}{4 + 2} \Leftrightarrow x_p = \frac{5}{3}.$

Bài 51.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$ và tâm $I(1;1)$. Biết điểm $K(-1;2)$ nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải

- Ta có $I(1;1)$ là tâm hình bình hành nên $I(1;1)$ là trung điểm $AC \Rightarrow C(4;-1)$.
 - Gọi $D(x;y)$, theo giả thiết điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ $\Rightarrow D(2y;y)$.
 - Lại có $I(1;1)$ là trung điểm $BD \Rightarrow B(2-2y;2-y)$.
- $$\overrightarrow{AK} = (1;-1) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (4-2y;-1-y).$$
- Vì $K \in AB$ nên $\overrightarrow{AK}$ cùng phương $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{4-2y}{1} = \frac{-1-y}{-1} \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow \begin{cases} B(0;1) \\ D(2;1) \end{cases}$.

Bài 52.

Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{b} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm giá trị của k để hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

- Theo giả thiết $\begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{b} = k\vec{i} - 4\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; -5\right) \\ \vec{b} = (k; -4) \end{cases}$.
- Để hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{k} = \frac{-5}{-4} \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Bài 53.

Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (x^2 + 1; 3x - 2)$, $\vec{b} = (2; 1)$ và điểm $A(0; 1)$.

- ① Tìm x để véc tơ $\vec{a}$ cùng phương với véc tơ $\vec{b}$.
- ② Tìm tọa độ điểm M để véc tơ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với véc tơ $\vec{b}$ và có độ dài bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

- ① Tìm x để véc tơ $\vec{a}$ cùng phương với véc tơ $\vec{b}$.
 - Ta có $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2} = \frac{3x-2}{1} \Leftrightarrow x^2+1 = 2(3x-2) \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$
 - $\Rightarrow$ Với $x=1$; $x=5$ thì véc tơ $\vec{a}$ cùng phương với véc tơ $\vec{b}$.
- ② Tìm tọa độ điểm M để véc tơ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với véc tơ $\vec{b}$ và có độ dài bằng $\sqrt{5}$.

- ♦ Gọi $M(m;n)$, ta có $\overrightarrow{AM} = (m;n-1)$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{n-1}{1} \Leftrightarrow m = 2(n-1)$ (1).
- ♦ $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{m^2 + (n-1)^2} = \sqrt{5}$ (2)
- ♦ Thay (1) vào (2) ta có $\sqrt{4(n-1)^2 + (n-1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (n-1)^2 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow M(-2;0) \\ n=2 \Rightarrow m=2 \Rightarrow M(2;2) \end{cases}$.
- $\Rightarrow$ Vậy $M(-2;0)$ hoặc $M(2;2)$ thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{b}$ và có độ dài bằng $\sqrt{5}$.

Bài 54.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(x;3), B(-4;2), C(3;5)$. Tìm x để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

- ♦ Ta có $\overrightarrow{BA} = (x+4;1), \overrightarrow{BC} = (7;3)$.
- ♦ A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x+4}{7} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x+4 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{3}$.
- $\Rightarrow$ Vậy với $x = \frac{-5}{3}$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 55.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(1;1), B(-2;1), C(m+1;2m+3)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;0), \overrightarrow{AC} = (m;2m+2)$.
- ♦ Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \cdot (-3) \\ 2m+2 = k \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$.
- $\Rightarrow$ Vậy với $m = -1$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 56.

Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(-1;5), B(2;\frac{1}{2}), C(3;-1), D(\frac{1}{3};3)$. Chứng minh rằng:

- ① D nằm trên đường thẳng AB . ② B thuộc đoạn AC .

Lời giải

- ① D nằm trên đường thẳng AB .

♦ Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3}; -2\right), \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right)$

♦ Thấy $\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} \rightarrow \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}$ cùng phương

$\rightarrow D, A, B$ thẳng hàng hay D nằm trên đường thẳng AB .

② B thuộc đoạn AC .

♦ Ta có $\overrightarrow{BA} = \left(-3; \frac{9}{2}\right), \overrightarrow{BC} = \left(1; -\frac{3}{2}\right)$

♦ Ta có $\overrightarrow{BA} = \left(-3; \frac{9}{2}\right) = -3\left(1; -\frac{3}{2}\right) = -3\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ ngược hướng hay B thuộc đoạn AC .

Bài 57.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-3; 4), B(1; 1), C(9; -5)$. Chứng minh rằng:

- ① Chứng minh A, B, C thẳng hàng.
- ② Tìm tọa độ D sao cho A là trung điểm BD .
- ③ Tìm tọa độ E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

① Chứng minh A, B, C thẳng hàng.

♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3), \overrightarrow{AC} = (12; -9)$

♦ Vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có $\frac{4}{12} = \frac{-3}{-9}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

② Tìm tọa độ D sao cho A là trung điểm BD .

♦ Gọi $D(x; y)$

♦ A là trung điểm $BD \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = \frac{1+x}{2} \\ 4 = \frac{1+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$. Vậy $D(-7; 7)$.

③ Tìm tọa độ E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

♦ Gọi $E(x; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3), \overrightarrow{AE} = (x+3; -4)$

♦ A, B, E thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{-4}{-3} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$. Vậy $E\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

Bài 58.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1;4), B(-3;-2), C(-4;-2)$. Chứng minh rằng:

- ① Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.
- ② Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- ③ Tìm tọa độ $E(x;6)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

- ① Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -6), \overrightarrow{AC} = (-3; -6)$
- ♦ Vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có $\frac{-2}{-3} \neq \frac{-6}{-6}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng suy ra A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

- ② Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- ♦ Gọi $D(x; y)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -6), \overrightarrow{DC} = (-4 - x; -2 - y)$
- ♦ $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -4 - x \\ -6 = -2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy $D(-2; 4)$.

- ③ Tìm tọa độ $E(x; 6)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -6), \overrightarrow{AE} = (x + 1; 2)$
- ♦ A, B, E thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{2}{-6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Bài 59.

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(0;4), B(3;2), D(3;0)$.

- ① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6-3t; 8+2t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- ② Chứng minh rằng ba điểm A, B, D không thẳng hàng. Từ đó tính chu vi của $\triangle ABC$.

Lời giải

- ① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6-3t; 8+2t), \forall t \in \mathbb{R}$.

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-6-3t; 4+2t)$.
- ♦ Do đó $\overrightarrow{AC} = -(2+t)\overrightarrow{AB}$ nên ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- ② Chứng minh rằng ba điểm A, B, D không thẳng hàng. Từ đó tính chu vi của $\triangle ABC$.

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; -4)$ nên A, B, D không thẳng hàng.
- ♦ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}$

$$\diamond AD = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = 5$$

$$\diamond BD = \sqrt{(3-3)^2 + (0-2)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Vây chu vi của tam giác } ABC: C_{\Delta ABC} = 7 + \sqrt{13}.$$

Bài 60.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(2;1); B(6;-1)$. Tìm điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\diamond \text{Giả sử } P(x;y), \text{ ta có } \overrightarrow{AP} = (x-2; y-1) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (4;-2)$$

$$\diamond \text{Để } A, B, P \text{ thẳng hàng thì } \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} \Leftrightarrow x-2 = -2y+2 \Leftrightarrow x = -2y+4 \quad (1)$$

$$\diamond \text{Vì } PA = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \quad (2)$$

$\diamond$ Giải hệ tạo bởi hai phương trình (1) và (2)

$$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ (-2y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ 5y^2 - 10y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ y = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$\diamond$ Vì P khác B nên điểm phải tìm là $P(-2;3)$.

Bài 61.

Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1;-4); B(3;4)$. Tìm điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 3\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\diamond \text{Giả sử } P(x;y), \text{ ta có } \overrightarrow{AP} = (x+1; y+4) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (4;8)$$

$$\diamond \text{Để } A, B, P \text{ thẳng hàng thì } \frac{x+1}{4} = \frac{y+4}{8} \Leftrightarrow y = 2x - 2 \quad (1)$$

$$\diamond \text{Vì } PA = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+4)^2 = 45 \quad (2)$$

$\diamond$ Giải hệ tạo bởi hai phương trình (1) và (2)

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ (x+1)^2 + (2x+2)^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x^2 + 10x - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = -4 \\ y = -10 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vây có hai điểm thỏa mãn đầu bài $P_1(2;2); P_2(-4;-10)$.

Bài 62.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(2;0)$. Tính diện tích tam giác ABC .
Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{AB}(2;2)$, $\overrightarrow{AC}(1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$

Vậy tam giác ABC vuông tại A

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \text{ (đvdt)}.$$

♦ Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$. Góc AMB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \angle AMB = 0^\circ \Leftrightarrow A, M, B$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_M - 1}{3 - 1} = \frac{-1}{3 - 1} \Leftrightarrow x_M = 0 \Rightarrow M \equiv O.$$

Bài 63.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$.

① Tính diện tích tam giác ABC .

② Tìm tất cả các điểm $M \in Ox$ sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Lời giải

① Tính diện tích tam giác ABC .

♦ Ta có $\overrightarrow{AB}(2;-2)$, $\overrightarrow{AC}(1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$

Vậy tam giác ABC vuông tại A

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 2 \text{ (đvdt)}.$$

② Tìm tất cả các điểm $M \in Ox$ sao cho góc AMB nhỏ nhất.

♦ Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$. Góc AMB nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \angle AMB = 0^\circ \Leftrightarrow A, M, B \text{ thẳng hàng}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_M - 1}{3 - 1} = \frac{-3}{1 - 3} \Leftrightarrow x_M = 4 \Rightarrow M(4; 0).$$

Bài 64.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm trên trục hoành Ox một điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ điểm P đến các điểm A và B là nhỏ nhất (hay $(PA + PB)_{\min}$). Biết rằng:

① $A(1;1)$, $B(2;-4)$.

② $A(1;2)$, $B(3;4)$.

Lời giải

① $A(1;1)$, $B(2;-4)$.

- Dễ thấy A, B nằm hai phía đối với trục hoành. Gọi $P \in Ox \Rightarrow P(x_p; 0)$
- Ta có $PA + PB \geq AB$. Dấu " $=$ " xảy ra khi A, P, B thẳng hàng và $\overrightarrow{PA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{x_p - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_p - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_p - 1}{2 - 1} = \frac{-1}{-4 - 1} \Leftrightarrow x_p = \frac{6}{5} \Rightarrow P\left(\frac{6}{5}; 0\right)$.

② $A(1; 2), B(3; 4)$.

- Dễ thấy A, B nằm cùng một phía đối với trục hoành. Gọi $P \in Ox \Rightarrow P(x_p; 0)$
- Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $Ox \Rightarrow A'(1; -2) \Rightarrow A'B = 2\sqrt{10}$
- Khi đó $PA = PA' ; \forall P \in Ox$
 $\Rightarrow PA + PB = PA' + PB \geq A'B \Rightarrow PA + PB \geq 2\sqrt{10} \quad (1)$.

(1) xảy ra dấu " $=$ " khi P, A', B thẳng hàng $\Leftrightarrow P = A'B \cap Ox \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'P}$ cùng phương. Mà

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B} = (2; 6) \\ \overrightarrow{A'P} = (x_p - 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_p - 1}{2} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow x_p = \frac{5}{3} \Rightarrow P\left(\frac{5}{3}; 0\right).$$

Bài 65.

Trong mặt phẳng Oxy , tìm trên đường thẳng $d: x + y = 0$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau

① $A(1; 1), B(-2; -4)$.

② $A(1; 1), B(3; -2)$.

Lời giải

① $A(1; 1), B(-2; -4)$.

- Ta có $P(A, d) \cdot P(B, d) = (x_A + y_A)(x_B + y_B) = 2 \cdot (-6) < 0$.
 Suy ra hai điểm A và B nằm khác phía so với đường thẳng d .
 - Ta có $MA + MB \geq AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{34}$ (Bất đẳng thức tam giác).
 - Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow A, B, M$ thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng AB .
 - Đường thẳng AB đi qua $A(1; 1)$ và $B(-2; -4)$ nên có phương trình $AB: 5x - 3y - 2 = 0$.
 - Mặt khác, vì M thuộc đường thẳng d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ
- $$\begin{cases} 5x - 3y - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right).$$

② $A(1; 1), B(3; -2)$.

- Ta có $P(A, d) \cdot P(B, d) = (x_A + y_A)(x_B + y_B) = 2 \cdot 1 > 0$.
 Suy ra hai điểm A và B nằm cùng phía so với đường thẳng d .
- Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d .

- ♦ Khi đó tọa độ điểm $A'(x; y)$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) = 0 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; -1).$$
- ♦ Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{(3+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{17}$ (Bất đẳng thức tam giác).
- ♦ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng $A'B$.
- ♦ Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1; -1)$ và $B(3; -2)$ nên có phương trình $A'B: x + 4y + 5 = 0$.
- ♦ Mặt khác, vì M thuộc đường thẳng d nên M thỏa
$$\begin{cases} x + 4y + 5 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Bài 66.

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(4; 1)$ và hai điểm $A(a; 0), B(0; b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định tọa độ điểm A, B sao cho

- ① Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB}$ min).
- ② $OA + OB$ nhỏ nhất.
- ③ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

- ♦ Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có dạng $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- ♦ Vì A, B, M thẳng hàng nên $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (*).

- ① Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB}$ min).

- ♦ Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} ab$.
- ♦ Theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương, ta có (*) $\Leftrightarrow 1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16$.

Suy ra $S_{\Delta OAB} \geq \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

- ♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{4}{a} = \frac{1}{b} \\ \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } A(8; 0), B(0; 2).$$

- ② $OA + OB$ nhỏ nhất.

(*) $\Leftrightarrow a = \frac{4b}{b-1} \Rightarrow OA + OB = a + b = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 9$ (BĐT Cauchy).

♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \frac{4b}{b-1} \\ \frac{4}{b-1} = b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $A(6;0), B(0;3)$.

③ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

♦ Ta có $(4^2 + 1^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}$ hay $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \geq \frac{1}{17}$.

♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4}{b} = \frac{1}{a} \\ \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 17 \end{cases}$. Vậy $A\left(\frac{17}{4}; 0\right), B(0;17)$.

Bài 67.

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(2;1)$ và hai điểm $A(a;0), B(0;b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định tọa độ điểm A, B sao cho

① Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB}$ min).

② $OA + OB$ nhỏ nhất.

③ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

♦ Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có dạng $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

♦ Vì A, B, M thẳng hàng nên $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (*).

① Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB}$ min).

♦ Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}ab$.

♦ Theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương, ta có (*) $\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 8$.

Suy ra $S_{\Delta OAB} \geq \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy $A(4;0), B(0;2)$.

② $OA + OB$ nhỏ nhất.

$$(*) \Leftrightarrow a = \frac{2b}{b-1} \Rightarrow OA + OB = a + b = \frac{2b}{b-1} + b = \frac{2}{b-1} + b - 1 + 3 \geq 2\sqrt{2} + 3 \text{ (BĐT Cauchy)}.$$

♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \frac{2b}{b-1} \\ \frac{2}{b-1} = b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \\ b = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $A(2 + \sqrt{2}; 0), B(0; 1 + \sqrt{2})$.

③ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

♦ Ta có $(2^2 + 1^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{5}$ hay $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \geq \frac{1}{5}$.

♦ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{2}{b} = \frac{1}{a} \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 5 \end{cases}$. Vậy $A\left(\frac{5}{2}; 0\right), B(0; 5)$.

V. BÀI TẬP NÂNG CAO

📖 Bài 68.

Với a, b là các hằng số thỏa mãn điều kiện $a < 0, b > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$$

Lời giải

♦ Gọi A, B là hai điểm có tọa độ: $A(x-a, a); B(x-b, b)$

♦ Do đó: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x-a, a) \Rightarrow OA = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} \\ \overrightarrow{OB} = (x-b, b) \Rightarrow OB = \sqrt{(x-b)^2 + b^2} = \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow OA + OB = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} \text{ nhỏ nhất khi } O, A, B \text{ thẳng hàng tức:}$$

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(x-a) = a(x-b) \Leftrightarrow bx - ab = ax - ab \Leftrightarrow bx = ax \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Khi đó } y = \sqrt{2a^2} + \sqrt{2b^2} = \sqrt{2}|a| + \sqrt{2}|b| = \sqrt{2}(b-a).$$

📖 Bài 69.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Lời giải

♦ Ta có: $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

♦ Gọi A, B là hai điểm có tọa độ: $A\left(x + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

♦ Do đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \left(x + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow OA = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ \overrightarrow{OB} = \left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow OB = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA + OB = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ nhỏ nhất khi O, A, B thẳng hàng tức:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = -1 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ Khi đó $y = 2$.

Bài 70.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

Lời giải

♦ Ta có: $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow y = \sqrt{(x+2)^2 + 4} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$.

♦ Gọi $A(x+2; 2); B(x-1; 1)$.

♦ Do đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x+2; 2) \Rightarrow OA = \sqrt{(x+2)^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 8} \\ \overrightarrow{OB} = (x-1; 1) \Rightarrow OB = \sqrt{(x-1)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{cases}$$

♦ $OA + OB = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ nhỏ nhất khi O, A, B

thẳng hàng tức là $\frac{x+2}{x-1} = \frac{2}{1} \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} x = 4$.

$\Rightarrow$ Khi đó: $y = 3\sqrt{10}$.

Bài 71.

với $a, b \in \mathbb{R}$ tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$$

Lời giải

♦ Ta có: $y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + b^2}$.

♦ Gọi $A(x-a, a); B(x-b, b)$

♦ Do đó: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x-a, a) \Rightarrow OA = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} \\ \overrightarrow{OB} = (x-b, b) \Rightarrow OB = \sqrt{(x-b)^2 + b^2} = \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow OA + OB = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$ nhỏ nhất khi O, A, B thẳng hàng tức:

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(x-a) = a(x-b) \Leftrightarrow bx - ab = ax - ab \Leftrightarrow bx = ax \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Khi đó } y = \sqrt{2a^2} + \sqrt{2b^2} = \sqrt{2}|a| + \sqrt{2}|b| = \sqrt{2}(|a| + |b|).$$

🔖 Bài 72.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$$

Lời giải

♦ Ta có: $P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

♦ Ta chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \geq (ac + bd)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

♦ Từ đó ta có: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+1+(3-x))^2 + (y-2+(2-y))^2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow P_{\min} = 4,$$

♦ Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow (x+1)(2-y) = (y-2)(3-x) \Leftrightarrow (y-2)(3-x+x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 2; -1 \leq x \leq 3.$$

Bài 73.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 2} + \sqrt{\cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha + 13}$$

Lời giải

- ♦ Ta có $y = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + 1} + \sqrt{(3 + \cos \alpha)^2 + 4}$.
- ♦ Xét 2 véctơ: $\begin{cases} \vec{u} = (1 - \cos \alpha; 1) \\ \vec{v} = (3 + \cos \alpha; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + 1} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3 + \cos \alpha)^2 + 4} \end{cases}$.
- ♦ $\vec{u} + \vec{v} = (4; 3) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
- ♦ Lại có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + 1} + \sqrt{(3 + \cos \alpha)^2 + 4} \geq 5 \Rightarrow y_{\min} = 5$,
- ♦ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}$ cùng phương $\vec{v} \Leftrightarrow \exists k > 0: \vec{u} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos \alpha = k(3 + \cos \alpha) \\ 1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{3} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 74.

Trong mặt phẳng, cho Oxy ba điểm $A(0; 6), B(2; 5), M(2t - 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho:

① $(MA + MB)_{\min}$

② $|MA - MB|_{\max}$

Lời giải

① $(MA + MB)_{\min}$

- ♦ Theo bất đẳng thức Min - kow - ski:

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(2t - 2)^2 + (t - 6)^2} + \sqrt{(2t - 4)^2 + (t - 5)^2} = \sqrt{(2t - 2)^2 + (t - 6)^2} + \sqrt{(4 - 2t)^2 + (5 - t)^2} \\ &\geq \sqrt{(2t - 2 + 4 - 2t)^2 + (t - 6 + 5 - t)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow (MA + MB)_{\min} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2t - 2}{4 - 2t} = \frac{t - 6}{5 - t} \Leftrightarrow 12t^2 - 14t + 24 = 0$$

- ♦ Phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ không tồn tại t , hay không tồn tại M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② $|MA - MB|_{\max}$

- ♦ Ta thấy $M \in d: x - 2y + 2 = 0$
- ♦ Ta có: $(0 - 2 \cdot 6 + 2)(2 - 2 \cdot 5 + 2) = 60 > 0$. Suy ra A, B cùng phía so với d .
- ♦ Phương trình đường thẳng $AB: x + 2y - 12 = 0$

- ♦ Ta có: $|MA - MB| \leq AB$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M(12;0)$
- $\Rightarrow$ Vậy điểm $M(12;0)$

Bài 75.

Trong mặt phẳng Oxy, $A(1;2), B(2;5), M(2t+2;t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho :

① $(MA + MB)_{\min}$

② $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max}$

③ $|MA - MB|_{\max}$

④ $|MA - MB|_{\min}$

Lời giải

① $(MA + MB)_{\min}$

- ♦ Ta có: $M \in d, d: x - 2y - 2 = 0$. Nhận thấy A, B cùng phía so với d .
 - ♦ Lấy A' đối xứng với A qua $d \Rightarrow AA' \perp d \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_{AA'} = (2;1) \Rightarrow AA': 2x + y - 4 = 0$.
 - ♦ Gọi I là trung điểm $AA' \Rightarrow I = AA' \cap d \Rightarrow I(2;0) \Rightarrow A'(3;-2)$.
- $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

$(MA + MB)_{\min}$ khi M, A', B thẳng hàng. Suy ra $M\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

② $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max}$

- ♦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, I$ là trung điểm của AB .
- ♦ Do đó: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max} \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}|_{\max}$,

Không tồn tại điểm M như thế

③ $|MA - MB|_{\max}$

$$\begin{aligned} \bullet |MA - MB| &= \left| \sqrt{(2t+1)^2 + (t-2)^2} - \sqrt{4t^2 + (t-5)^2} \right| = \left| \sqrt{5t^2 + 5} - \sqrt{5t^2 - 10t + 25} \right| \\ &= \left| \sqrt{5(t^2 + 1)} - \sqrt{5[(t-1)^2 + 4]} \right| = \sqrt{5} \left| \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{(t-1)^2 + 4} \right|. \end{aligned}$$

- ♦ Xét các điểm $A_1(0;1), B_1(1;2), M_1(t;0)$.
 - ♦ Khi đó: $|MA - MB| = \sqrt{5} |M_1A_1 - M_1B_1|$. Do đó $|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow |M_1A_1 - M_1B_1|_{\max}$.
 - ♦ Vì M_1 chạy trên trục hoành và A_1, B_1 nằm về một phía của Ox
- Nên $|M_1A_1 - M_1B_1|_{\max} \Leftrightarrow M_1 = A_1B_1 \cap Ox$.
- ♦ $\vec{u}_{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = (1;1) \Rightarrow \vec{n}_{A_1B_1} = (1;-1) \Rightarrow A_1B_1: x - y + 1 = 0$
 - ♦ $M_1 = A_1B_1 \cap Ox \Rightarrow M_1(-1;0) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(0;-1)$.

④ $|MA - MB|_{\min}$

- ♦ Ta có $|MA - MB| \geq 0$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$
 $\Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB .

Bài 76.

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\sqrt{(a+c)^2 + (b)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b)^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Lời giải

- ♦ Gọi $\vec{u} = (a+c; b), \vec{v} = (a-c; b)$.
- ♦ Theo bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$
 Suy ra $\sqrt{(a+c)^2 + (b)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b)^2} \geq \sqrt{(a+c+a-c)^2 + (b+b)^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$ (đpcm).

Bài 77.

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$.

Lời giải

- ♦ Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \sqrt{(a+3)^2 + (2b)^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (3-2b)^2} \geq 5$
- ♦ Gọi $\vec{u} = (a+3; 2b), \vec{v} = (1-a; 3-2b)$.
- ♦ Theo bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(a+3)^2 + (2b)^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (3-2b)^2} \geq \sqrt{(a+3+1-a)^2 + (2b+3-2b)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 (điều phải chứng minh).

Bài 78.

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}$

Lời giải

- ♦ Xét $\begin{cases} \vec{u} = \left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2} \\ \vec{v} = \left(-\left(a + \frac{c}{2}\right); \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left(-\left(a + \frac{c}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2} = \sqrt{a^2 + ac + c^2} \end{cases}$
- ♦ Và $\vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{b-c}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)\right)$

$$\Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4} + \frac{3}{4}(b^2 + 2bc + c^2)} = \sqrt{b^2 + bc + c^2}.$$

♦ Lại có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2} \rightarrow \text{ĐPCM.}$

Bài 79.

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{4\cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4\sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2$

Lời giải

♦ Xét $\begin{cases} \vec{u} = (2\cos a \cdot \cos b; \sin(a-b)) \\ \vec{v} = (2\sin a \cdot \sin b; \sin(a-b)) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(2\cos a \cdot \cos b)^2 + (\sin(a-b))^2} = \sqrt{4\cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2(a-b)} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(2\sin a \cdot \sin b)^2 + (\sin(a-b))^2} = \sqrt{4\sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \end{cases}.$$

♦ Và $\vec{u} + \vec{v} = (2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b); 2\sin(a-b)) = (2\cos(a-b); 2\sin(a-b))$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| &= \sqrt{(2\cos(a-b))^2 + (2\sin(a-b))^2} \\ &= \sqrt{4\cos^2(a-b) + 4\sin^2(a-b)} = \sqrt{4 \underbrace{(\cos^2(a-b) + \sin^2(a-b))}_{=1}} = 2. \end{aligned}$$

♦ Lại có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{4\cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4\sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2$
 $\rightarrow \text{ĐPCM.}$

Bài 80.

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$. Chứng minh: $xy + yz + zx \leq 8$.

Lời giải

♦ Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng.

♦ Xét $\vec{u} = \left(y + \frac{x}{2}; \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}; y + \frac{z}{2}\right)$.

♦ Suy ra:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{z\sqrt{3}}{2} \left(y + \frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{3}}{2} \left(y + \frac{z}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(zy + \frac{zx}{2} + xy + \frac{xz}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (zy + xy + zx) \quad (2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{3} \quad (3)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{z^2 + zy + y^2} = 4 \quad (4)$$

♦ Thế (2), (3), (4) vào (1) ta được: $\frac{\sqrt{3}}{2}(zy + xy + zx) \leq 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (zy + xy + zx) \leq 8$ (ĐPCM).

🔖 Bài 81.

Tìm GTNN của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

♦ Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ và $(\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2$.

Nên $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2$

$$\Leftrightarrow |\vec{u} + \vec{v}|^2 \leq (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad (1).$$

♦ Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng.

♦ Xét $\vec{u} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2} - x; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

♦ Ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (1; \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2 \quad (2).$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad (3) \text{ và } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad (4)$$

♦ Thế (2), (3), (4) vào (1) ta được $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 2$ hay $P \geq 2$.

$\Rightarrow$ Vậy GTNN của P bằng 2 khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = 0$.

🔖 Bài 82.

Cho x, y, z là các số dương và $x + 3y + 5z \leq 3$. Chứng minh:

$$3xy\sqrt{625z^4 + 4} + 15yz\sqrt{x^4 + 4} + 5zx\sqrt{81y^2 + 4} \geq 45\sqrt{5}xyz.$$

Lời giải

♦ Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3xy\sqrt{625z^4 + 4} + 15yz\sqrt{x^4 + 4} + 5zx\sqrt{81y^2 + 4} \geq 45\sqrt{5}xyz$$

$$\Leftrightarrow 3xy \cdot 5z \sqrt{(5z)^2 + \left(\frac{2}{5z}\right)^2} + 15yzx \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} + 5zx3y \sqrt{(3y)^2 + \left(\frac{2}{3y}\right)^2} \geq 45xyz\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(5z)^2 + \left(\frac{2}{5z}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} + \sqrt{(3y)^2 + \left(\frac{2}{3y}\right)^2} \geq 3\sqrt{5}$$

• Xét các vectơ $\vec{u} = \left(5z; \frac{2}{5z}\right), \vec{v} = \left(x; \frac{2}{x}\right), \vec{w} = \left(3y; \frac{2}{3y}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(x + 3y + 5z; \frac{2}{x} + \frac{2}{3y} + \frac{2}{5z}\right)$.

• Ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(5z)^2 + \left(\frac{2}{5z}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} + \sqrt{(3y)^2 + \left(\frac{2}{3y}\right)^2} \geq \sqrt{(x + 3y + 5z)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{5z}\right)^2} \quad (*)$$

• Ta có $(x + 3y + 5z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{5z}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{5z} \geq \frac{9}{x + 3y + 5z}$.

• Khi đó $\sqrt{(x + 3y + 5z)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{5z}\right)^2} \geq \sqrt{(x + 3y + 5z)^2 + 4 \cdot \left(\frac{9}{x + 3y + 5z}\right)^2} \quad (**)$

• Mà $(x + 3y + 5z)^2 + \left(\frac{9}{x + 3y + 5z}\right)^2 \geq 2 \cdot 9 = 18 \quad (1);$

$$3 \cdot \left(\frac{9}{x + 3y + 5z}\right)^2 = \frac{243}{(x + 3y + 5z)^2} \geq \frac{243}{3^2} = 27 \quad (2) \quad (\text{vì } x + 3y + 5z \leq 3).$$

• Cộng theo vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$(x + 3y + 5z)^2 + 4 \cdot \left(\frac{9}{x + 3y + 5z}\right)^2 \geq 18 + 27 = 45 \quad (***)$$

• Từ (*), (**), (***) ta suy ra $\sqrt{(5z)^2 + \left(\frac{2}{5z}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} + \sqrt{(3y)^2 + \left(\frac{2}{3y}\right)^2} \geq 3\sqrt{5}$ (đúng)

$\Rightarrow$ Vậy có điều phải chứng minh.

🔗 Bài 83.

Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} \geq 5$.

Lời giải

• Xét các vectơ $\vec{u} = (x; 2); \vec{v} = (1 - x; y); \vec{w} = (-1; 3 - y) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (0; 5)$.

• Khi đó ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} + \sqrt{(3 - y)^2 + (-1)^2} \geq \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-2x+y^2+1} + \sqrt{y^2-6y+10} \geq 5$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 84.

Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

♦ Đặt $\vec{u} = (2x; 1-x^2); \vec{v} = (1-y^2; 2y)$.

♦ Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(2x)^2 + (1-x^2)^2} = 1+x^2$.

♦ Tương tự $|\vec{v}| = 1+y^2$.

Và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2x - 2xy^2 + 2y - 2x^2y = 2(x+y)(1-xy)$.

♦ Ta lại có $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Leftrightarrow |2(x+y)(1-xy)| \leq (1+x^2)(1+y^2) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$$

Ta có đpcm.

♦ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương.

Bài 85.

Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$.

Lời giải

♦ Đặt $\vec{u} = \left(\frac{1}{x} - x; \sqrt{2}\right); \vec{v} = \left(\frac{1}{y} - y; \sqrt{2}\right); \vec{z} = \left(\frac{1}{z} - z; \sqrt{2}\right)$.

♦ Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + x^2}$.

♦ Tương tự $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{y^2} + y^2}; |\vec{z}| = \sqrt{\frac{1}{z^2} + z^2}$.

Và $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{z}| = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x+y+z); 3\sqrt{2}\right)$

♦ Do $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

♦ Mà $x+y+z \leq 1$ nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$.

♦ Ta lại có $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{z}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{z}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(9-1)^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{82}.$$

Ta có đpcm.

♦ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ cùng hướng hay $x = y = z = \frac{1}{3}$.

-----HẾT-----

BÀI 5

TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 01.

Cho 4 điểm A, B, C, D . Rút gọn các tổng sau: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

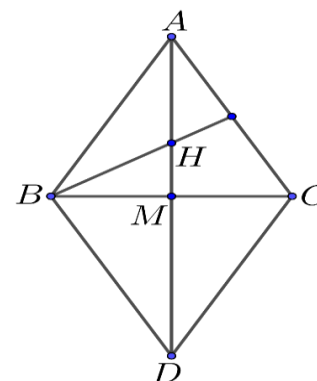
- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.
- ♦ Ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

Bài 02.

Cho ΔABC đều cạnh a trực tâm H . Tính độ dài các vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$.
- ♦ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a$.
- ♦ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AA}| = \vec{0} = 0$.
- ♦ $|\overrightarrow{HA}| = AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- ♦ Dựng hình bình hành $ABDC$, khi đó theo quy tắc hình bình hành thì



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Bài 03.

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính độ dài các vec tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

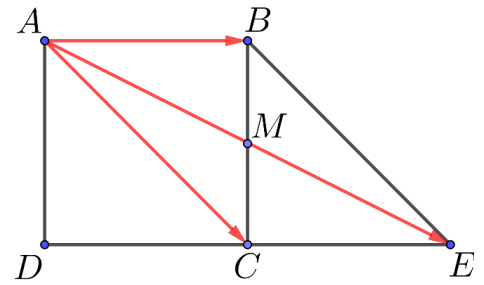
♦ Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = a\sqrt{2}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}.$$

♦ Dựng hình bình hành $ABEC$, khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{AB^2 + MB^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{5}$$

♦ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2.AC = 2a\sqrt{2}$.



Bài 04.

Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

① $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$.

② Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải

① $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Do đó: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

♦ Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Vậy suy ra điều phải chứng minh.

♦ Theo quy tắc hình bình hành:

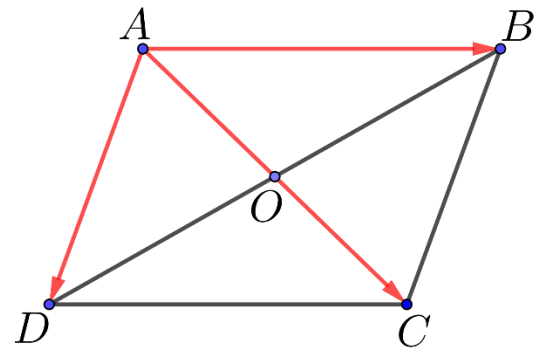
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC \text{ (đpcm)}.$$

② Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

♦ Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì $ABCD$ là hình chữ nhật.

♦ Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}| \Leftrightarrow AC = BD$.

♦ Do đó $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên $ABCD$ là hình chữ nhật.



Bài 05.

Cho hai véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$. Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đây là đúng $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Lời giải

♦ Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = \left(|\vec{a} - \vec{b}| \right)^2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

⇒ Vậy đẳng thức $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ đúng khi $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Bài 06.

Cho hình bình hành $ABCD$ gọi $E; F; M$ và N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB; BC; CD$ và DA .

① Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương và $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$

② Từ đó suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành?

Lời giải

① Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương và $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$

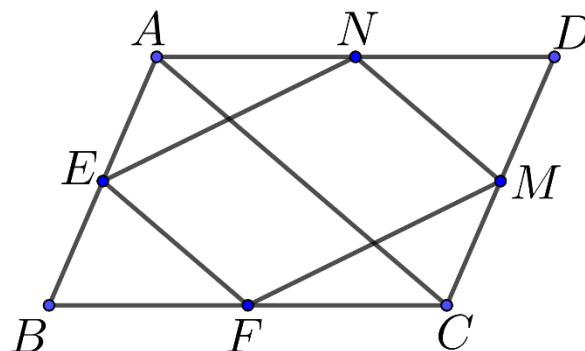
♦ Ta suy ra được $FE \parallel AC \parallel MN$ nên $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương

$$\rightarrow EF = MN = \frac{1}{2} AC$$

② Từ đó suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành?

♦ Kết hợp với câu ① suy ra $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$.

$\rightarrow EFMN$ là hình bình hành.



Bài 07.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Đặt $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành

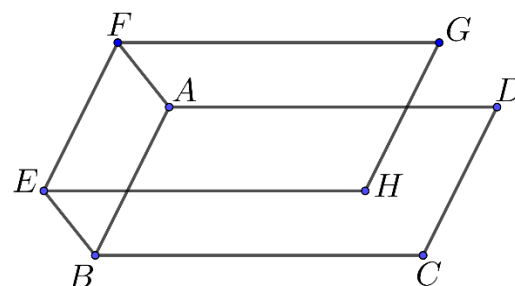
Lời giải

♦ Ta có : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$

Nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} GH \parallel FE \parallel AB \parallel DC \\ GH = FE = AB = DC \end{cases}$$

Hay tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.



Bài 08.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

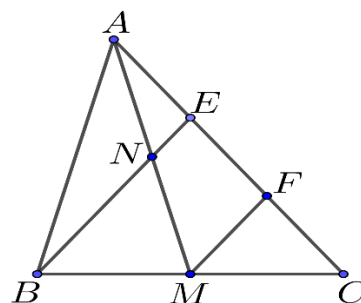
♦ $FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB .

♦ Ta có $EA = EF$.

$\Rightarrow$ Vậy EN là đường trung bình của tam giác AFM .

♦ Suy ra N là trung điểm của AM .

$\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.



Bài 09.

Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Điểm I là giao điểm của AM và BN , K là giao điểm của DM và CN . Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải

♦ Theo giả thiết M và N là trung điểm BC và AD

Nên $AN = \frac{1}{2}AD, BM = \frac{1}{2}BC$.

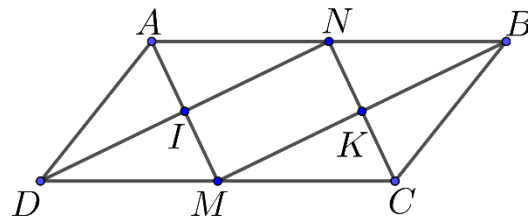
♦ Mà $AD = BC$ do $ABCD$ là hình bình hành.

♦ Suy ra $ANMB$ là hình bình hành.

♦ Ta có I là giao điểm của hai đường chéo AM và BN của hình bình hành $ANMB$ Nên I là trung điểm của BN .

♦ Tương tự, ta cũng chứng minh được K là trung điểm của DM .

Từ đó dễ dàng chứng minh được $DKIB$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.



Bài 10.

Cho tam giác ABC .

① Xác định véc-tơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

② Xác định véc-tơ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

③ Xác định véc-tơ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

♦ Ta có:

① Xác định véc-tơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

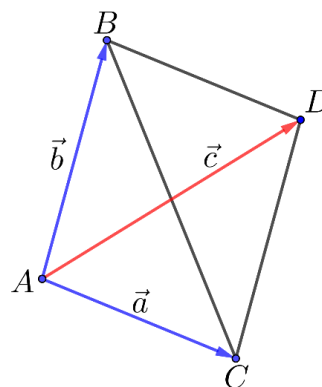
♦ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

② Xác định véc-tơ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

♦ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

③ Xác định véc-tơ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

♦ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ($ABDC$ là hình bình hành).



Bài 11.

Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Hãy xác định các véc-tơ sau đây.

① $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

② $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$.

③ $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$.

④ $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

♦ Ta có:

① $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

♦ $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

② $\vec{y} = \vec{AO} + \vec{CD}$.

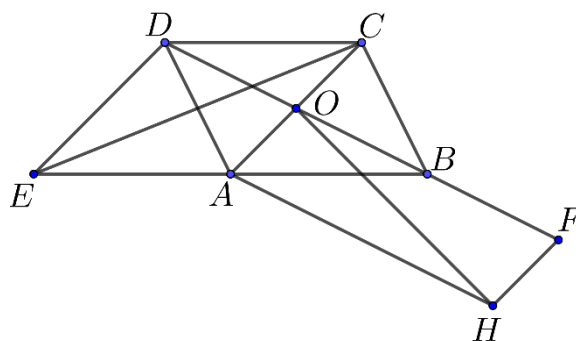
♦ $\vec{y} = \vec{AO} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD}$.

③ $\vec{z} = \vec{CD} - \vec{AC}$.

♦ $\vec{z} = \vec{CD} - \vec{AC} = \vec{CD} + \vec{CA} = \vec{CE}$ (dựng hình bình hành $CDEA$).

④ $\vec{t} = \vec{OA} - \vec{BD}$.

♦ $\vec{t} = \vec{OA} - \vec{BD} = \vec{OA} + \vec{DB} = \vec{OA} + \vec{OF} = \vec{OH}$ (trong đó dựng $\vec{OF} = \vec{DB}$ và hình bình hành $OFHA$).



Bài 12.

Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC . Hãy xác định các vec-tơ sau đây:

① $\vec{GB} + \vec{GC}$.

② $\vec{AG} + \vec{CB}$.

③ $\vec{AB} + \vec{MC}$.

④ $\vec{AB} + \vec{GB} + \vec{GC}$.

Lời giải

① $\vec{GB} + \vec{GC}$.

♦ $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GK}$ (dựng hình bình hành $GBKC$).

② $\vec{AG} + \vec{CB}$.

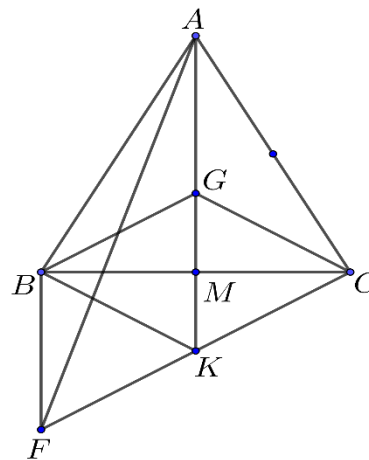
♦ $\vec{AG} + \vec{CB} = \vec{BF} + \vec{CB} = \vec{CF}$ (dựng $\vec{BF} = \vec{AG}$).

③ $\vec{AB} + \vec{MC}$.

♦ $\vec{AB} + \vec{MC} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM}$.

④ $\vec{AB} + \vec{GB} + \vec{GC}$.

♦ $\vec{AB} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AB} + \vec{GK} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF}$.



Bài 12.

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I . Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB . Lấy trên tia MI một điểm N sao cho $IN = MI$. Hãy xác định các vec-tơ

① $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MI}$.

② $\vec{AM} + \vec{NI}$.

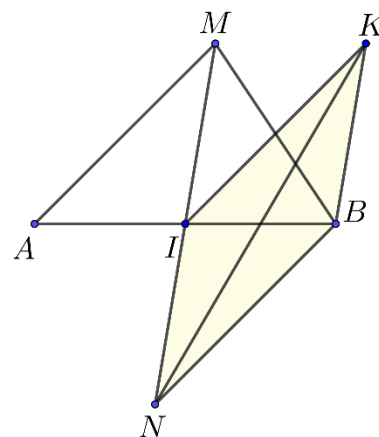
Lời giải

① $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}$.

♦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN}$.

② $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI}$.

♦ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NK}$ ($INBK$ là hình bình hành).



Bài 13.

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Xác định các véc-tơ đối của véc-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}$.

② $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

① $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}$

$-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, -\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$

② $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$.

$-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Bài 14.

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

③ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$

④ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}$

Lời giải

① $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

Do hình bình hành $ABCD$ có tâm $O \rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CA}$

③ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$

④ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Bài 15.

Cho tam giác ABC . Tìm véc-tơ $\vec{x}$ trong trường hợp:

① $\vec{x} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BA}$.

② $\vec{AC} - \vec{x} - \vec{CB} = \vec{AB}$.

Lời giải

① $\vec{x} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BA} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$

② $\vec{AC} - \vec{x} - \vec{CB} = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{CA} - \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{BA} = \vec{BE}$, với $\vec{AE} = \vec{BA}$.

Bài 16.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB . Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\vec{PB} + \vec{MC} + \vec{NA}$.

② $\vec{BA} + \vec{PA} + \vec{CM}$.

Lời giải

① $\vec{PB} + \vec{MC} + \vec{NA} = \vec{AP} + \vec{PN} + \vec{NA} = \vec{0}$

② $\vec{BA} + \vec{PA} + \vec{CM} = \vec{BA} + \vec{NP} + \vec{PA} = \vec{BA} + \vec{NA} = \vec{ND}$ (dựng thêm điểm D sao cho $\vec{AD} = \vec{BA}$).

Bài 17.

Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M . Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\vec{AB} + \vec{AN}$.

② $\vec{BA} + \vec{CN}$.

③ $\vec{AB} + \vec{MC} + \vec{MN}$.

④ $\vec{BA} + \vec{BC} - \vec{MN}$.

Lời giải

Ta có, tứ giác $BANC$ là hình bình hành.

① $\vec{AB} + \vec{AN} = \vec{AC}$ (tính chất hình bình hành $BANC$)

② $\vec{BA} + \vec{CN} = \vec{BE}$ (dựng $\vec{AE} = \vec{CN}$)

③ $\vec{AB} + \vec{MC} + \vec{MN} = \vec{AB} + \vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AB} + \vec{AN} = \vec{AC}$

④ $\vec{BA} + \vec{BC} - \vec{MN} = \vec{BN} + \vec{NM} = \vec{BM}$.

Bài 18.

Cho hình lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA . Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} - \vec{AE} - \vec{BF} - \vec{CD}$.

② $\vec{MQ} + \vec{RN} + \vec{PS}$.

Lời giải

① $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} - \vec{AE} - \vec{BF} - \vec{CD} = \vec{ED} + \vec{FE} + \vec{DF} = \vec{0}$.

② $\vec{MQ} + \vec{RN} + \vec{PS} = \vec{BD} + \vec{FB} + \vec{DF} = \vec{0}$.

Bài 19.

Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt nằm trên cạnh $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA, AF = \frac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

② $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

Lời giải

① $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

- Lấy thêm các điểm P, Q về phía ngoài cạnh AB, AC sao cho $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{AF}$.
- Theo đó, tam giác APQ đồng dạng tam giác ACB
- Nên ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

② $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

• $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}) - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

Bài 20.

Cho tam giác ABC , trên cạnh ABC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

① Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$

② Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải

① Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$

• Theo giả thiết $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

Suy ra:

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

• $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$.

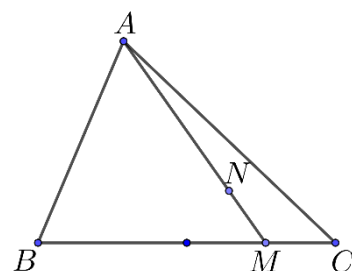
② Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

• Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

• Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}) = -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$.



Bài 21.

Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

① Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

② Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Lời giải

① Dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

• Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$.

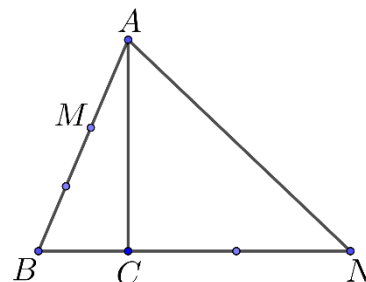
• Vì $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ nên N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

② Phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

• Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

• Và $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

• Tương tự $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$.



Bài 22.

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

• M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Bài 23.

Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm của CD . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

• Do hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

• Do E là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$.

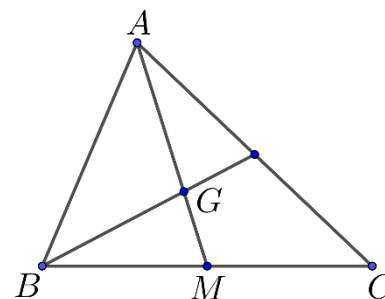
• Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Bài 24.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$.

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}$.
 - Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$.
 - Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.
- Và $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$.



Bài 25.

Cho $\triangle ABC$. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 26.

Cho $\triangle ABC$. Điểm M trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 27.

Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh OA, OB . Tìm các số m, n của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

- Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0\overrightarrow{OB}$, nên $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$.
- Và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.
- Ta có $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$.

Bài 28.

Một đường thẳng cắt cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

Lời giải

- Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM}$ thì $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.
- Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x - m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.

- ♦ Và $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x-n)\overrightarrow{DC}$.
- ♦ Ta có $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}$.
- ♦ Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên
$$\begin{cases} x-m = xy \\ x = y(x-n) = xy - yn \end{cases}$$
- ♦ Giải hệ trên ta được $y = -\frac{m}{n}$ và $x = \frac{mn}{m+n} \longrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{mn}{m+n} \overrightarrow{DB}$.

🔖 Bài 29.

Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$.
- ♦ Vì $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

🔖 Bài 30.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Lời giải

- ♦ Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \longrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

🔖 Bài 31.

Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- ① Tìm số k mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.
- ② Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

- ① Tìm số k mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.
 - ♦ $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \longrightarrow k = \frac{3}{5}$.
- ② Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.
 - ♦ $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) + 3(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MI} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Bài 32.

Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

① $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

② $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .

Lời giải

① $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

♦ Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

② $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .

♦ Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 33.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh

① Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

② Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .

Lời giải

① Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

♦ Ta có
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}$$

② Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .

♦ Áp dụng câu ① ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G$

Bài 34.

Cho tam giác ABC có ba trung tuyến $AM; BN; CP$. Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải

Cách 1

♦ Vì M, N, P là trung điểm 3 cạnh nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$$

Cách 2

♦ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

Bài 35.

Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng

- ① $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
- ② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- ③ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

Lời giải

① $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

- ♦ Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$
 - ♦ Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$
 - ♦ Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.
- ⇒ Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ (đpcm).

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

- ♦ Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.
 - ♦ Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.
- Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$ (đpcm).

③ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

- ♦ Theo câu ② ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
 - ♦ Do đó với mọi điểm M thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- ⇔ $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$
- ⇔ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ (đpcm).

Bài 36.

Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

- ① Với điểm M bất kỳ ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$
- ② Chứng minh $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Lời giải

① Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

♦ Vì O là trung điểm của AC; BD nên
$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases}$$

⇒ Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

② Chứng minh $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

♦ Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

♦ Do đó $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$

Bài 37.

Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D' có cùng tâm thì

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$$

Lời giải

♦ Gọi O là tâm của hình bình hành.

♦ Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} &= (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}) \\ &= -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Bài 38.

Cho hình bình hành ABCD và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$$

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$. Mà tứ giác ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

♦ Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 39.

Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}.$

(Luôn đúng do tứ giác ABCD là hình bình hành)

♦ Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 40.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$$

Lời giải

♦ Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$
 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$

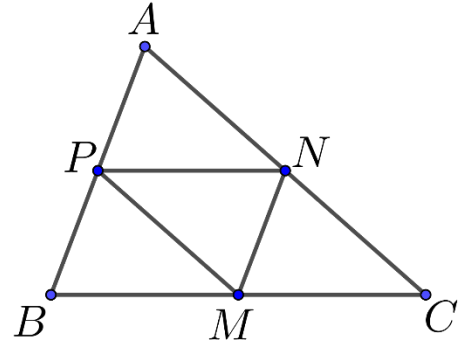
♦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

♦ Mặt khác $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}$

♦ Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

♦ Do đó ta có điều phải chứng minh.



► Bài 41.

Cho hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$$

Lời giải

♦ Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC'}) = \vec{0}$

► Bài 42.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường thẳng này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải

- ♦ Gọi I là giao điểm của AC và BD
- ♦ Dễ thấy I là trung điểm của MN
- ♦ Dễ thấy M là trọng tâm của $\triangle ADC \Rightarrow DM = 2MI$

N là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow BN = 2NI \Rightarrow DM = MN = NB \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

► Bài 43.

Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải

- Các điểm B, E đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA .
- Các điểm D, C đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ có giá là đường thẳng OA .
- $\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA
- Tương tự các vector $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}), (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$ có giá là đường thẳng OB .
- $\Rightarrow$ Vector $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OB .
- Do $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ có giá không trùng nhau $\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Bài 44.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , $AB = 2a$, $AD = a$, M là trung điểm CD .

- ① Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$. ② Tính $|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}|$.

Lời giải

① Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

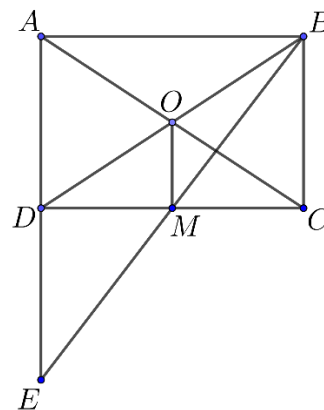
- Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

② Tính $|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}|$.

- Dựng điểm E sao cho $OEMD$ là hình bình hành.
- Khi đó

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE}.$$

- Ta có $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{BE}| = BE = \frac{5a}{2}$



Bài 45.

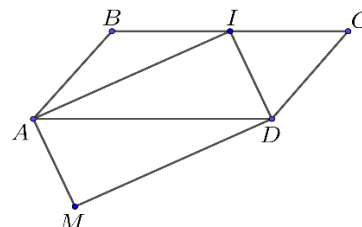
Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC . Tìm điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA}$

Lời giải

- Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DM}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vậy M là điểm sao cho $MDIA$ là hình bình hành.



Bài 46.

Cho tam giác ABC . Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABCD$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng

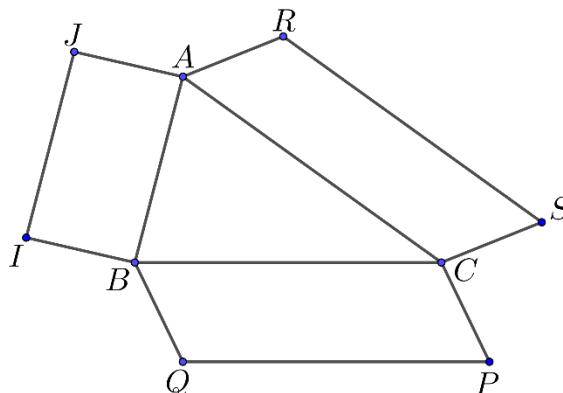
$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}.$$

Lời giải

♦ Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

⇒ Vậy ta có điều phải chứng minh.



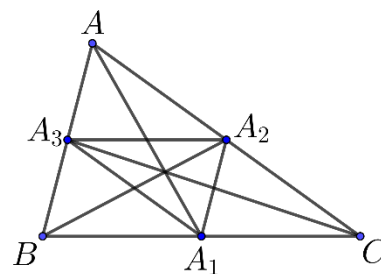
Bài 47.

Cho tam giác ABC . Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Lời giải

♦ Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) \\ &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$



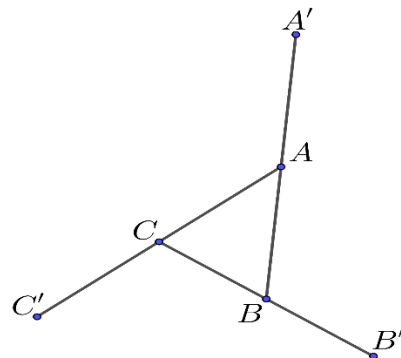
Bài 48.

Cho $\triangle ABC$. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A , gọi B' là điểm đối xứng với C qua B , gọi C' là điểm đối xứng với A qua C . Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{♦ Ta có: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \\ &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \vec{0} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \end{aligned}$$



Bài 49.

Cho bảy điểm A, B, C, D, E, F, H . Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}$$

Lời giải

♦ Ta có:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}) \\ &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HF}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}. \end{aligned}$$

Bài 50.

Cho tam giác ABC . Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

① Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

② Chứng minh B, I, J thẳng hàng

Lời giải

① Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\bullet \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

② Chứng minh B, I, J thẳng hàng

$$\bullet \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}. \text{ Suy ra ba điểm } B, I, J \text{ thẳng hàng}$$

Bài 52.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

♦ Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, ta có:

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\bullet \text{ Và } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$$

- Do đó $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$ nên $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow$ Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 54.

Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

- Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
hay $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$
- Do đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
- Mà M không thuộc đường thẳng AC nên $MN \parallel AC$.

Bài 55.

Cho tam giác ABC .

- Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thoả $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- Tìm quỹ tích điểm thoả mãn $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

- Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thoả $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

- Ta có $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$

Suy ra I tồn tại và duy nhất.

- Tìm quỹ tích điểm thoả mãn $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

- Với I là điểm được xác định ở câu ①, ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI}$$

- Và $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$.

$\Rightarrow$ Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Bài 56.

Cho $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

- $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$.

$$\textcircled{2} \quad |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \quad |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|.$$

♦ Gọi K là điểm thoả $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$, L là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

♦ Ta có: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{ML}|$.

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL .

$$\textcircled{2} \quad |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

♦ Với I là trung điểm BC .

♦ Gọi J là điểm thoả $4\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

♦ Ta có:

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA.$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R = \frac{1}{3}IA$.

Bài 57.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$\textcircled{3} \quad |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$$

♦ Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A$ trái với giả thiết.

$\Rightarrow$ Vậy không có điểm M thoả mãn.

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

♦ Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .

$$\textcircled{3} \quad |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|.$$

♦ Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC ta được: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$

♦ Nên $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$

♦ Như vậy M cách đều 2 điểm cố định I, J

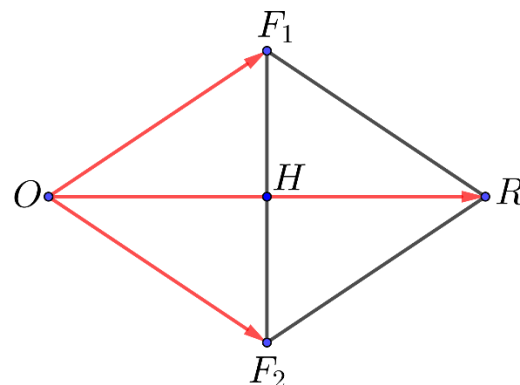
- ♦ Nên tập hợp các điểm M thoả điều kiện bài toán là đường trung trực của IJ .

Bài 58.

Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 40N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60° . Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

Lời giải

- ♦ Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OR}$.
- ♦ Mà $OF_1 = OF_2 = 40(\text{N})$
- ♦ Nên OF_1F_2 là hình thoi có góc $F_1OF_2 = 60^\circ$ và hai đường chéo RO, F_1F_2 vuông góc với nhau tại trung điểm H .
- ♦ Ta có $OH = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ (OH là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 40)



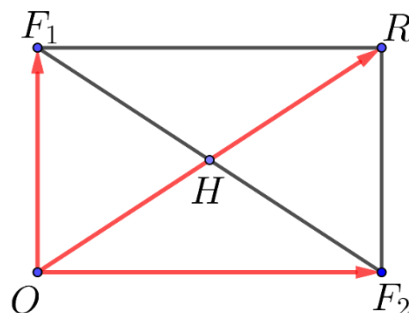
Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho là $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OR}| = 40\sqrt{3}(\text{N})$.

Bài 59.

Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là lượt có cường độ là 30N và 40N, có điểm đặt tại O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

Lời giải

- ♦ Do hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có cùng điểm đặt O
- Nên tổng hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ là đường chéo OR của hình bình hành OF_1F_2 .
- ♦ Do hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ vuông góc với nhau
- Nên hình bình hành OF_1F_2 trở thành hình chữ nhật.
- $\Rightarrow$ Vậy $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OR}$.
- ♦ Ta có $OF_1 = 30, OF_2 = 40$.
- ♦ Như vậy $OR = F_1F_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$.
- ♦ Do đó cường độ lực tổng hợp $\vec{OR}$ là $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50(\text{N})$.



Bài 60.

Viết tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i}; \vec{d} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}; \vec{e} = -4\vec{j}$

Lời giải

- ♦ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2; 3)$.

$$\diamond \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right).$$

$$\diamond \vec{c} = 3\vec{i} \Rightarrow \vec{c} = (3; 0).$$

$$\diamond \vec{d} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{d} = \left(-1; \frac{3}{2}\right).$$

$$\diamond \vec{e} = -4\vec{j} \Rightarrow \vec{e} = (0; -4).$$

Bài 61.

Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u} = (2; -3); \vec{u} = (-1; 4); \vec{u} = (2; 0); \vec{u} = (0; -1)$

Lời giải

$$\diamond \vec{u} = (2; -3) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\diamond \vec{u} = (-1; 4) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\diamond \vec{u} = (2; 0) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i}$$

$$\diamond \vec{u} = (0; -1) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{j}$$

Bài 62.

Cho $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\textcircled{1} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\textcircled{2} \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\diamond \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = (1+0; -2+3) = (1; 1)$$

$$\diamond \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} = (1-0; -2-3) = (1; -5)$$

$$\textcircled{2} \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\diamond \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (3.1 - 2.0; 3.(-2) - 2.3) = (3; -12).$$

$$\diamond \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} = (2.1 + 0; 2.(-2) + 3) = (2; -1).$$

$$\diamond \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \left(4.1 - \frac{1}{2}.0; 4.(-2) - \frac{1}{2}.3\right) = \left(4; -\frac{19}{2}\right).$$

Bài 63.

Cho $\vec{a} = (2; 0), \vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right), \vec{c} = (4; -6)$.

- ① Tìm tọa độ của $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.
- ② Tìm m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$
- ③ Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

- ① Tìm tọa độ của $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

$$\vec{d} = \left(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4; 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (-6) \right) = \left(20; -\frac{63}{2} \right).$$

- ② Tìm m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$

$$m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 2 + (-1) - n \cdot 4 = 0 \\ m \cdot 0 + \frac{1}{2} - n \cdot (-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -\frac{1}{12} \end{cases}.$$

- ③ Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a}; \vec{b}$.

$$\text{Giả sử } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot 2 + n \cdot (-1) = 4 \\ m \cdot 0 + n \cdot \frac{1}{2} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -12 \end{cases} \rightarrow \vec{c} = -4\vec{a} - 12\vec{b}$$

Bài 64.

Cho 4 điểm $A(1; 1), B(2; -1), C(4; 3), D(16; 3)$. Hãy biểu diễn $\vec{AD}$ theo các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (1; -2), \vec{AC} = (3; 2), \vec{AD} = (15; 2).$$

$$\text{Giả sử } \vec{AD} = m\vec{AB} + n\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 1 + n \cdot 3 = 15 \\ m \cdot (-2) + n \cdot 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } \vec{AD} = 3\vec{AB} + 4\vec{AC}.$$

Bài 65.

Chứng minh ba điểm $A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0)$ thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (2; 2), \vec{AC} = (-1; -1) \Rightarrow \vec{AB} = -2\vec{AC}.$$

$\Rightarrow \vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng phương hay ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 66.

Tìm m để 2 vector $\vec{a} = (2m; 3m+1)$ và $\vec{b} = (-4; -8)$ cùng phương.

Lời giải

- ♦ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\frac{2m}{-4} = \frac{3m+1}{-8} \Leftrightarrow 4m = 3m+1 \Leftrightarrow m=1$.

Bài 67.

Tìm m để 3 điểm $A(1;1), B(3;2), C(m+4; 2m+1)$ thẳng hàng.

Lời giải

- ♦ $\overrightarrow{AB} = (2;1), \overrightarrow{AC} = (m+3; 2m)$.
 - ♦ Yêu cầu bài toán tương đương $\exists k : \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} (k \neq 0)$.
- $$\Leftrightarrow (m+3; 2m) = k(2;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 = 2k \\ 2m = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3}{5} \\ k = \frac{6}{5} \end{cases}$$
- $\Rightarrow$ Vậy $m = -\frac{3}{5}$ thì $\overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ hay 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 68.

Cho hai điểm $A(3; -5), B(1; 0)$.

- ① Tìm toạ độ điểm C thoả mãn $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.
- ② Tìm điểm D đối xứng với A qua C .
- ③ Tìm điểm M trên trục Ox , sao cho A, B, M thẳng hàng.
- ④ Tìm điểm N trên Oy sao cho $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO

Lời giải

- ① Tìm toạ độ điểm C thoả mãn $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.
 - ♦ Gọi $C(x; y)$
 - ♦ Ta có: $\overrightarrow{OC} = (x; y), \overrightarrow{AB} = (-2; 5)$
 - ♦ Khi đó: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x; y) = -3(-2; 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow C(6; -15)$.
- ② Tìm điểm D đối xứng với A qua C .
 - ♦ Gọi $D(x; y)$

♦ Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x-3; y+5)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -10)$

♦ Khi đó: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (x-3; y+5) = 2(3; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=6 \\ y+5=-20 \end{cases} \Rightarrow D(9; -25)$

③ Tìm điểm M trên trục Ox , sao cho A, B, M thẳng hàng.

♦ Vì $M \in Ox$ nên $M(x; 0)$

♦ Để A, B, M thẳng hàng thì $\exists k (k \neq 0): \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=k \cdot (-2) \\ 5=k \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 0)$

④ Tìm điểm N trên Oy sao cho $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO

♦ Vì $N \in Oy$ nên $N(0; y)$,

♦ Để $ABNO$ là hình thang có cạnh đáy AO

Thì $\exists k (k > 0): \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=k \cdot (-3) \\ y=k \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \text{ (tm)} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(0; \frac{5}{3}\right)$.

Bài 69.

Cho ba điểm $A(1; -2), B(0; 4), C(3; 2)$.

① Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

② Tìm toạ độ điểm N thoả mãn $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Lời giải

① Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

♦ Đặt $M(x; y)$

♦ Ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow (x-3; y-2) = 2(-1; 6) - 3(2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-5 \\ y-2=2 \end{cases} \Rightarrow M(-5; 2)$

② Tìm toạ độ điểm N thoả mãn $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

♦ Đặt $N(x; y)$, từ $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

♦ Suy ra: $(x-1; y+2) + 2(x; y-4) - 4(x-3; y-2) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow N(-1; -2)$

Bài 70.

Cho ba điểm $A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -2)$.

① Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

- ② Tìm toạ độ điểm E , sao cho $ABEC$ là hình bình hành.
- ③ Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

- ① Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

♦ $\overrightarrow{AB} = (1; 5), \overrightarrow{AC} = (-2; 0)$.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng.

- ② Tìm toạ độ điểm E , sao cho $ABEC$ là hình bình hành.

♦ Đặt $E(x; y)$.

♦ Do A, B, C không thẳng hàng

♦ Nên $ABEC$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

$$\Leftrightarrow (1; 5) = (-1 - x; -2 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow E(-2; -7)$$

- ③ Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

♦ Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(\frac{1+2-1}{3}; \frac{-2+3-2}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

Bài 71.

Cho $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$.

- ① Tìm điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD .
- ② Tìm điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành.

Lời giải

- ① Tìm điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD .

♦ Giả sử $D(x; y)$. Điểm C là trọng tâm tam giác $ABD \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-4+2+x}{3} \\ -2 = \frac{1+4+y}{3} \end{cases}$.

♦ Suy ra $x=8, y=-11$ nên $D(8; -11)$.

- ② Tìm điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành.

♦ Gọi $E(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{EC} = (2-x; -2-y)$.

♦ Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=6 \\ -2-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy $E(-4; -5)$

Bài 72.

Cho tam giác ABC . Các điểm $M(1;1), N(2;3), P(0;-4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Tính tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải

♦ Ta có: $PANM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{NM}$

♦ Suy ra $\begin{cases} x_A = 1 \\ y_A + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = -2 \end{cases}$

♦ Tương tự ta tính được: $\begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = -6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác là: $A(1;-2), B(-1;-6), C(3;8)$

Bài 73.

Cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$.

① Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

② Tìm tọa độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành ấy.

Lời giải

① Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

♦ Gọi $D(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-1;-4), \overrightarrow{AC} = (1;-2)$;

♦ $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3(-1) - 2 \cdot 1 \\ y - 5 = 3(-4) - 2 \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy $D(-3;-3)$.

② Tìm tọa độ điểm E sao cho $ABCE$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành ấy.

♦ Gọi $E(x;y)$.

♦ Từ $ABCE$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$. Vậy $E(4;7)$.

♦ Tâm I của hình bình hành cũng là trung điểm của AC nên $I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Bài 74.

Cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k nếu

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} (k \neq 1). \text{ Chứng minh rằng } \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}.$$

Lời giải

$$\bullet \text{ Ta có } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases} (k \neq 1).$$

$$\bullet \text{ Khi } k = -1 \text{ thì } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}. M \text{ là trung điểm của } AB.$$

Bài 75.

Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

- ① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- ② Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn thẳng BC , điểm B chia đoạn thẳng AC , điểm C chia đoạn thẳng AB .

Lời giải

- ① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

$$\bullet \text{ Gọi } \overrightarrow{AB} = (2;2), \overrightarrow{AC} = (-1;-1)$$

$$\bullet \text{ Nên } \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}.$$

$\Rightarrow$ Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương, do đó A, B, C thẳng hàng.

- ② Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn thẳng BC , điểm B chia đoạn thẳng AC , điểm C chia đoạn thẳng AB

$$\bullet \text{ Vì } \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} \text{ nên } A \text{ chia đoạn thẳng } BC \text{ theo tỉ số } -2.$$

$$\bullet \text{ Vì } \overrightarrow{BA} = (-2;2), \overrightarrow{BC} = (-3;-3) \text{ nên } \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\bullet \text{ Vậy } B \text{ chia đoạn thẳng } AC \text{ theo tỉ số } \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \text{ Vì } \overrightarrow{CA} = (1;1), \overrightarrow{CB} = (3;3) \text{ nên } \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

$$\Rightarrow \text{ Vậy } C \text{ chia đoạn thẳng } AB \text{ theo tỉ số } \frac{1}{3}.$$

Bài 76.

Trên mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết $A(0;2), B(1;1), C(-1;-2)$. Các điểm C', A', B' lần lượt chia đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỉ số $-1, \frac{1}{2}, -2$.

- ① Tìm tọa độ của A', B', C' .
- ② Chứng minh rằng ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải

- ① Tìm tọa độ của A', B', C' .

• Tọa độ của C' : $x_{C'} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}; y_{C'} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$.

• Tọa độ của A' : $x_{A'} = \frac{1-\frac{1}{2}(-1)}{1-\frac{1}{2}} = 3; y_{A'} = \frac{1-\frac{1}{2}(-2)}{1-\frac{1}{2}} = 4$.

• Tọa độ của B' : $x_{B'} = \frac{-1+2 \cdot 0}{1+2} = -\frac{1}{3}; y_{B'} = \frac{-2+2 \cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3}$.

- ② Chứng minh rằng ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

• Ta có: $\overrightarrow{C'B'} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}; \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{6}; -\frac{5}{6}\right)$

• Và $\overrightarrow{C'A'} = \left(3 - \frac{1}{2}; 4 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Vậy $\overrightarrow{C'A'} = -3\overrightarrow{C'B'}$ nên $A'; B'; C'$ thẳng hàng.

Bài 77.

- ① Cho $A(1;1), B(3;2)$ và $C(m+4; 2m+1)$. Tìm m để ba điểm $A; B; C$ thẳng hàng.
- ② Cho $A(3;4), B(2;5)$. Tìm x để điểm $C(-7;x)$ thuộc đường thẳng AB .

Lời giải

- ① Cho $A(1;1), B(3;2)$ và $C(m+4; 2m+1)$. Tìm m để ba điểm $A; B; C$ thẳng hàng.

• $\overrightarrow{AB} = (2;1), \overrightarrow{AC} = (m+3; 2m)$

• $A; B; C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{m+3}{2} = \frac{2m}{1} \Leftrightarrow m=1$

- ② Cho $A(3;4), B(2;5)$. Tìm x để điểm $C(-7;x)$ thuộc đường thẳng AB .

• C thuộc đường thẳng AB khi: ba điểm $A; B; C$ thẳng hàng.

♦ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1), \overrightarrow{AC} = (-10; x - 4) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x - 4 = 10 \Leftrightarrow x = 14$

Bài 78.

Cho ba điểm $A(-3; 4), B(1; 1), C(5; 5)$.

- ① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- ② Tìm D sao cho A là trung điểm của BD .

Lời giải

① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

♦ $\overrightarrow{AB} = (4; -3), \overrightarrow{AC} = (4; 4)$

♦ Suy ra $\overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC}$. Vậy ba điểm $A; B; C$ không thẳng hàng.

② Tìm D sao cho A là trung điểm của BD .

♦ Gọi $D(x; y)$. Điểm A là trung điểm của BD khi và chỉ khi $-3 = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x = -7$

$\Rightarrow$ Vậy $D\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

Bài 79.

Cho tam giác ABC có $A(-1; -1), B(5; -3)$, đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox .
Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải

♦ Ta có: $G(g; 0) \in Ox; C(0; c) \in Oy \Rightarrow \begin{cases} g = \frac{-1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{1-3+c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = \frac{4}{3} \\ c = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy $G\left(\frac{4}{3}; 0\right), C(0; 2)$

Bài 80.

Cho bốn điểm $A(-2; -3), B(3; 7), C(0; 3), D(-4; -5)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải

♦ Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 10); \overrightarrow{CD} = (-4; -8)$.

♦ Lại có $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$ nên hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

♦ Ta có $\overrightarrow{AC} = (2; 6)$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương vì $\frac{5}{2} \neq \frac{10}{6}$

⇒ Vậy AB và CD song song.

Bài 81.

Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Chọn hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

- ① Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.
- ② Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm G của tam giác ABC .
- ③ Tìm tọa độ điểm đối xứng I' của I qua tâm O . Chứng minh $A; I'; D$ thẳng hàng.
- ④ Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

- ① Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.

♦ Ta có $OA = OC = 4$, $OB = OD = 3$ nên $A(-4; 0)$, $C(4; 0)$, $B(0; 3)$, $D(0; -3)$.

- ② Tìm tọa độ trung điểm I của BC và trọng tâm G của tam giác ABC .

♦ $I\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ và $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ nên $I(2; 3)$, $G(0; 1)$.

- ③ Tìm tọa độ điểm đối xứng I' của I qua tâm O . Chứng minh $A; I'; D$ thẳng hàng.

♦ $I'\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$; $\overrightarrow{AI'} = \left(2; -\frac{2}{3}\right)$; $\overrightarrow{AD} = (-4; -3)$.

⇒ Vậy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI'}$. Suy ra ba điểm A, I', D thẳng hàng.

- ④ Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC}$

♦ $\overrightarrow{AC} = (8; 0)$; $\overrightarrow{BD} = (0; -6)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -3)$.

Bài 82.

Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chọn hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ trong đó O là tâm của lục giác đều, hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{EC}$. Tính tọa độ các đỉnh của lục giác biết độ dài cạnh lục giác bằng 6.

Lời giải

♦ Tam giác OCD đều cạnh bên là 6 nên $OH = 3$ và $CH = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

♦ Dựa vào tính chất đối xứng thì có 6 đỉnh

$A(-6; 0)$; $D(6; 0)$; $B(-3; 3\sqrt{3})$; $C(3; 3\sqrt{3})$; $F(-3; -3\sqrt{3})$; $E(3; -3\sqrt{3})$.

Bài 83.

Cho bốn điểm $A; B; C; D$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- ① Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (c_1 - a_1 + d_1 - b_1; c_2 - a_2 + d_2 - b_2)$
- ② Gọi G là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- ③ Gọi $P; Q$ là trung điểm các đoạn thẳng AC và BD , M và N là trung điểm các đoạn thẳng AD và BC . Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ , MN , PQ có chung trung điểm.

Lời giải

♦ Ta dùng phương pháp tọa độ: đặt tọa độ của $A; B; C; D$ lần lượt là: $(a_1; a_2), (b_1; b_2), (c_1; c_2), (d_1; d_2)$ thì:

$$I\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right), J\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right)$$

- ① Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (c_1 - a_1 + d_1 - b_1; c_2 - a_2 + d_2 - b_2)$
 - ♦ Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = c_1 - a_1 + d_1 - b_1; c_2 - a_2 + d_2 - b_2$;
 - ♦ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = d_1 - a_1 + c_1 - b_1; d_2 - a_2 + c_2 - b_2$;
 - ♦ $2\overrightarrow{IJ} = 2\left(\frac{c_1 + d_1}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2} - \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = (c_1 + d_1 - a_1 - b_1; c_2 + d_2 - a_2 - b_2)$.
 - ♦ So sánh các tọa độ bằng nhau thì có đpcm.
- ② Gọi G là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 - ♦ Chứng minh tương tự thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- ③ Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ , MN , PQ có chung trung điểm.
 - ♦ Ba trung điểm của cả ba đoạn thẳng IJ , MN , PQ đều có tọa độ $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$ nên chúng có cùng trung điểm.

Bài 84.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6, 3), B(-3, 6), C(1, -2)$.

- ① Chứng minh $A; B; C$ là ba đỉnh một tam giác;
- ② Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm $A; B; D$ thẳng hàng;
- ③ Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.
- ④ Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC .

Lời giải

- ① Chứng minh $A; B; C$ là ba đỉnh một tam giác;

- ♦ Ta có $\overrightarrow{AB}(-9;3), \overrightarrow{AC}(-5;5)$.
- ♦ Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
- ♦ Hay $A;B;C$ là ba đỉnh một tam giác.

② Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm $A;B;D$ thẳng hàng;

- ♦ D trên trục hoành $\Rightarrow D(x;0)$
- ♦ Ba điểm $A;B;D$ thẳng hàng suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.
- ♦ Mặt khác $\overrightarrow{AD}(x-6;-3)$
- ♦ Do đó $\frac{x-6}{-9} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x=15$
- $\Rightarrow$ Vậy $D(15;0)$.

③ Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE=2EC$.

- ♦ Vì E thuộc đoạn BC và $BE=2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$
- ♦ Gọi $E(x;y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}=(x+3;y-6), \overrightarrow{EC}(1-x;-2-y)$.
- ♦ Do đó $\begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow E\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

④ Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC .

- ♦ Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của DE và AC
- ♦ Do đó $\overrightarrow{DI}(x-15;y), \overrightarrow{DE}\left(-\frac{46}{3};\frac{2}{3}\right)$ cùng phương
- ♦ Suy ra $\frac{3(x-15)}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0. \quad (1)$
- ♦ $\overrightarrow{AI}=(x-6;y-3), \overrightarrow{AC}(-5;-5)$ cùng phương suy ra $\frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0 \quad (2)$
- ♦ Từ (1) và (2) suy ra $x=\frac{7}{2}$ và $y=\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow$ Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 85.

Cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$ Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $S_{ABC} = 3S_{ABM} \Leftrightarrow BC = 3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm 3\overrightarrow{MB}$
 - ♦ Gọi $M(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (x-2; y-1); \overrightarrow{BC} = (-3; -3)$
 - ♦ Suy ra $\begin{cases} -3 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -3 = -3(x-2) \\ -3 = -3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
- $\Rightarrow$ Vậy có hai điểm thỏa mãn $M_1(1; 0), M_2(3; 2)$.

Bài 86.

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 4), B(1; 0), C(-2; 8)$. Biết điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó ta có giá trị của $5x^3 + y^2$ là ?

Lời giải

- ♦ Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (2-x; 4-y) \\ \overrightarrow{MB} = (1-x; -y) \\ \overrightarrow{MC} = (-2-x; 8-y) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MC} = (-4-2x; 16-2y)$
- $\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (4-4x; 20-4y)$
- ♦ Từ: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 4-4x = 0 \\ 20-4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$. Vậy $5x^3 + y^2 = 30$.

Bài 87.

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 0), B(1; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho biểu thức $P = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

- ♦ Gọi $I(x; y)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- ♦ Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (2-x; -y) \\ \overrightarrow{IB} = (1-x; 3-y) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (2-2x; 6-2y) \Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (4-3x; 6-3y)$
- ♦ Từ: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 4-3x = 0 \\ 6-3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $M\left(\frac{4}{3}; 2\right)$.
- ♦ Khi đó $P = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB}| = 3|\overrightarrow{MI}| = 3MI$.
- ♦ Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục tung nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục tung $\Rightarrow M(0; 2)$.

Bài 88.

Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-5)$. Tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

Lời giải

- ♦ Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$

$$= \overrightarrow{MI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC})$$
- ♦ Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (*)
- ♦ Gọi $I(x; y)$, từ (*) ta có $\begin{cases} 2(1-x) - 3(0-x) + 2(-3-x) = 0 \\ 2(0-y) - 3(2-y) + 2(-5-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -16 \end{cases} \Rightarrow I(-4; -16)$.
- ♦ Khi đó $P = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI}| = MI$.
- ♦ Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Rightarrow M(-4; 0)$.

Bài 89.

Cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;-5)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox mà $T = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ bé nhất.

Lời giải

- ♦ Gọi $I(x, y)$ là điểm thỏa mãn:
- $$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) - 3(-x) + 2(-3-x) = 0 \\ 2(-y) - 3(3-y) + 2(-5-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{19}{3} \end{cases}$$
- ♦ Ta có: $T = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$

$$= |2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = |\overrightarrow{MI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC})| = |\overrightarrow{MI}| = MI$$
 - ♦ Vì I cố định và M thuộc Ox nên T bé nhất khi M là hình chiếu I lên Ox . Vậy $M(4; 0)$.

Bài 90.

Cho tam giác ABC cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Chứng minh M là trung điểm IC với I là trung điểm AB .

Lời giải

- ♦ Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (gọi I là trung điểm AB)
 $\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \text{ (gọi } J \text{ là trung điểm } IC).$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv J.$$

$\Rightarrow$ Vậy M là trung điểm IC với I là trung điểm AB .

Bài 91.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$?

Lời giải

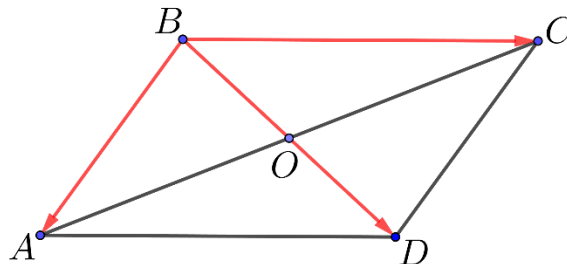
♦ Dựng điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

♦ Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BD}| = 2BO$ (O là giao điểm của AC và BD).

♦ Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = AC = a$.

$$\text{♦ Do đó } BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}| = 2BO = a\sqrt{5}.$$



Bài 92.

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 2a$ và $BAC = 120^\circ$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$?

Lời giải

♦ Dựng điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

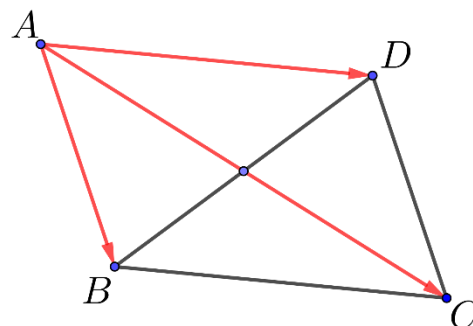
♦ Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD$.

♦ Hình bình hành $ABDC$ có $AB = AC$ và $BAC = 120^\circ$

Nên $ABDC$ là hình thoi và $DAC = 60^\circ$.

Suy ra tam giác ADC là tam giác đều. Do đó $AD = AC = 2a$.

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a.$$

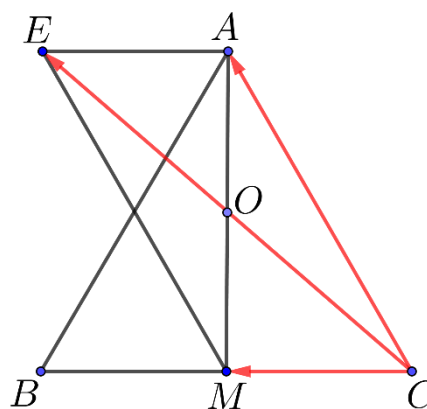


Bài 93.

Cho tam giác ABC đều cạnh a , M là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC}|$?

Lời giải

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$.
- ♦ Dựng điểm E sao cho tứ giác $CAEM$ là hình bình hành.
- ♦ Khi đó $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CE}$.
- ♦ Từ đó ta có $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC}| = CE = 2CO$ (O là giao điểm của AM và CE).
- ♦ Do tam giác ABC đều cạnh a , M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



$$\text{Suy ra } CO = \sqrt{OM^2 + CM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \text{Vậy } |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Bài 94.

Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại C .

Lời giải

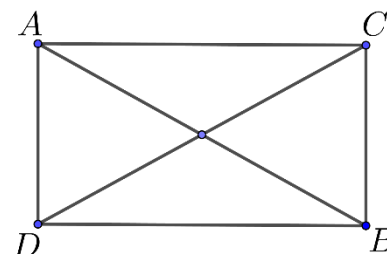
- ♦ Dựng hình bình hành $ACBD$.

Ta có:

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}| = CD; \quad |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = AB.$$

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| \Rightarrow CD = AB.$$

$\Rightarrow$ Vậy tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật, tức là tam giác ABC vuông tại C .



Bài 95.

Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ (Với I là trung điểm của AB)

$\Rightarrow$ Vậy vectơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

- ♦ Khi đó: $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CI} \Rightarrow I$ là trung điểm của CD

$\Rightarrow$ Vậy D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Bài 96.

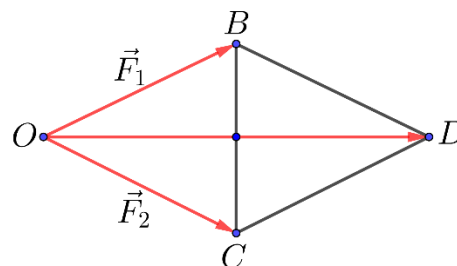
Cho hai lực F_1 và F_2 có điểm đặt O và tạo với nhau góc 60° . Tìm cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực F_1 và F_2 đều là 100 N ?

Lời giải

♦ Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} = \vec{OD}$.

$$\Rightarrow |\vec{F}| = OD = 100\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow$ Vậy cường độ lực tổng hợp là $100\sqrt{3}\text{ N}$.



Bài 97.

Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$ có tâm O . Chứng minh rằng $\vec{u} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$

Lời giải

♦ Ta xét hai trường hợp

⊙ **Trường hợp 1:** n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

♦ Khi đó các cặp điểm A_i và A_{k+i} với $i = \overline{1, k}$ đối xứng với nhau qua O

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{OA_1} + \vec{OA_{k+1}} = \vec{0} \\ \vec{OA_2} + \vec{OA_{k+2}} = \vec{0} \\ \dots \\ \vec{OA_k} + \vec{OA_{2k}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

⊙ **Trường hợp 2:** n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

♦ Khi đó các cặp điểm A_i và A_{2k+3-i} với $i = \overline{2, k+1}$ đối xứng với nhau qua OA_1

$\Rightarrow$ Giá của vectơ $(\vec{OA_i} + \vec{OA_{2k+3-i}})$ là đường thẳng OA_1 .

$\Rightarrow$ Giá của vectơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_1 .

♦ Tương tự, giá của các vectơ $(\vec{OA_1} + \vec{OA_3}), (\vec{OA_2} + \vec{OA_4}), \dots$ là đường thẳng OA_2 .

$\Rightarrow$ Giá của vectơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_2 .

$\Rightarrow \vec{u}$ có giá là đường thẳng OA_1 và đường thẳng $OA_2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Bài 98.

Cho n vectơ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$. Dựng $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín là $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$.

Lời giải

- ♦ Dựng $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a}_n$. Khi đó $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \overrightarrow{OA_n}$.
- ♦ Như vậy đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín khi và chỉ khi O trùng với A_n .

Bài 99.

Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$. Bạn Vân kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}$$

Lời giải

- ♦ Lấy một điểm O nào đó.
- ♦ Ta có $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}}$
 $= \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}} - \overrightarrow{OA_{2018}}$
 $= (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2018}}).$
- ♦ Vì 2018 điểm $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$ cũng là 2018 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ nhưng được kí hiệu một cách khác, do đó

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2018}}$$

- ♦ Suy ra $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}$

Bài 100.

Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_n$ (n lẻ, $n > 2$) nội tiếp đường tròn tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

Lời giải

- ♦ Gọi d_1 là đường thẳng đi qua O và điểm A_1 .
- ♦ Xét các đỉnh của đa giác đã cho mà không nằm trên d_1 .
- ♦ Chúng có thể phân tích thành những cặp đỉnh A_i, A_j đối xứng nhau qua đường thẳng d_1 (chẳng hạn cặp A_2, A_{n-1} , cặp $A_3, A_{n-2}, \dots$).
- ♦ Khi đó tổng $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$ là một vectơ nằm trên đường thẳng d_1 .
- ♦ Từ đó suy ra $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ cũng là một vectơ có giá nằm trên đường thẳng d_1 .
- ♦ Vì hai đường thẳng d_1, d_2 không trùng nhau nên $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ có hai phương khác nhau, hay $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Véc tơ có điểm đầu là D và điểm cuối là E được ký hiệu là:

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2. Cho tam giác ABC có bao nhiêu véc tơ khác véc tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc tơ khác véc tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các véc tơ có điểm A là điểm đầu thì có các véc tơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Vậy có ba véc tơ thỏa mãn. Tương tự các điểm còn lại $B; C; D$.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. Có duy nhất một véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.
 B. Có ít nhất hai véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.
 C. Có vô số véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.
 D. Không có véc tơ nào cùng phương với mọi véc tơ.

Lời giải

Chọn A

Véc tơ không cùng phương với mọi véc tơ.

Câu 5. Cho ba điểm $A; B; C$ phân biệt. Khi đó

- A. Điều kiện cần và đủ để $A; B; C$ thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
 B. Điều kiện đủ để $A; B; C$ thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
 C. Điều kiện cần để $A; B; C$ thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
 D. Điều kiện cần để $A; B; C$ thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 6.** Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB; AC$ của tam giác đều ABC . Hỏi cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng
- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 7.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc tơ khác véc tơ không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:
- A. 4. B. 6. C. 7. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Các véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.

- Câu 8.** Với $\overrightarrow{DE}$ (khác véc tơ không) thì độ dài đoạn ED được gọi là
- A. Phương của $\overrightarrow{ED}$. B. Hướng của $\overrightarrow{ED}$. C. Giá của $\overrightarrow{ED}$. D. Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 9.** Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc-tơ.
- C. $|\overrightarrow{AB}| > 0$. D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể xảy ra trường hợp $|\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$.

- Câu 10.** Hai véc tơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi
- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
- B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
- C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
- D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

Chọn D

- Câu 11.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Điều kiện nào trong các đáp án sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- A. $ABCD$ là hình bình hành. B. $ABDC$ là hình bình hành.
- C. $AC = BD$. D. $AB = CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{ABDC}$ là hình bình hành.

Mặt khác $\overrightarrow{ABDC}$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Ta có bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ suy ra $ABCD$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 13. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng nên chúng không bằng nhau.

Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ B. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{QP}|$. C. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} MN // PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2} AC$). Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Vì $AB = BC$ nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 16. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

B. $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng.

D. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải

Chọn D

Vì $AC = BD$ nên $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Câu 17. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.

D. $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC . Do đó $BC = 2MN$ suy ra $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Câu 18. Cho giác đều ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} = a$.

D. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có AM là đường trung tuyến của tam giác đều cạnh a suy ra $|\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BAD = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

B. $|\overrightarrow{BD}| = a$.

C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a$ suy ra $|\overrightarrow{BD}| = a$.

Câu 20. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O .

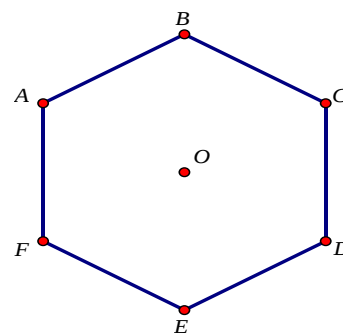
Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$.

C. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.



Lời giải

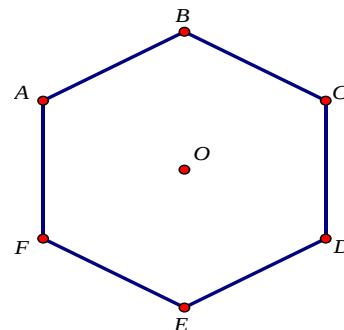
Chọn D

Ta có $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ ngược hướng nên chúng không bằng nhau.

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O .

Số các véc tơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 6.



Lời giải

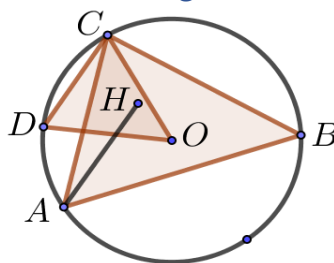
Chọn A

Các véc tơ bằng $\overrightarrow{OC}$ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$.
B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$.
D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Lời giải



Chọn B

Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc DCB chắn nửa đường tròn)

Suy ra $AH \parallel DC$, Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 23. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số

Lời giải

Chọn D

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C bán kính AB .

Câu 24. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số

Lời giải

Chọn A.

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$**

Lời giải

Chọn D

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Câu 26. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc – tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác

- A. 8. B. 12. C. 6. **D. 4**

Lời giải

Chọn B

Do tứ giác $ABCD$ có tất cả 4 cạnh (AB, BC, CD, AD) và hai đường chéo (AC, BD) nên số véc – tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

Câu 27. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài véc – tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$** . D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

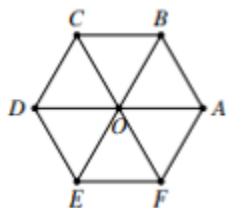
Chọn C

Tam giác ABC đều có cạnh bằng 1 nên độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A là

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } AG = \frac{2}{3} m_a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 28. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?



- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. **D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$** .

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} \text{ đúng.}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

Câu 29. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

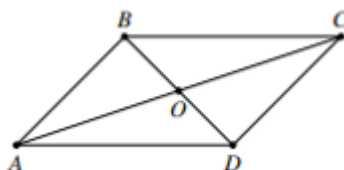
B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

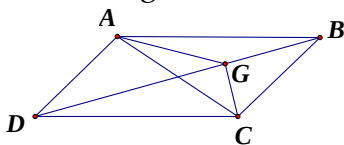
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ (quy tắc hình bình hành)}$$

$$\left| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \right| = \left| \overrightarrow{BD} \right| = BD$$

$$\left| \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \right| = \left| \overrightarrow{DB} \right| = BD$$

Do $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$ sai.

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn A

Vì G là trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}$.

Do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BD}$

Câu 31. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

B. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

C. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC}$.

D. $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$

Lời giải

Chọn D

Với mọi điểm M ta luôn có: $\overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

Câu 32. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tìm mệnh đề đúng.

A. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = a$.

B. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = 2a$

Lời giải

Chọn D

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = AB + AC = 2a.$$

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Độ dài của véc-tơ $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$ là bao nhiêu?

A. $5a$.

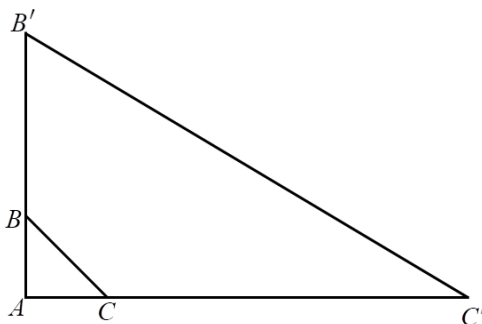
B. $7a$.

C. a .

D. $12a$.

Lời giải

Chọn A



Ta gọi $\overrightarrow{AB'} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AC}$.

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow |3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{C'B'}| = \sqrt{(AB')^2 + (AC')^2} = 5a.$$

Câu 34. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Véc-tơ $\overrightarrow{PM}$ **không cùng hướng** với các véc-tơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{CN}$.

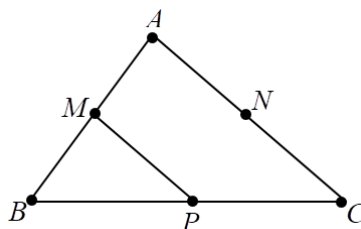
B. $\overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{NA}$.

Lời giải

Chọn C



Véc-tơ $\overrightarrow{PM}$ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{CA}$, do đó nó ngược hướng với $\overrightarrow{AC}$.

Câu 35. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì chúng cùng phương.
- B. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) có giá song song thì chúng cùng phương.
- C. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng phương thì chúng cùng hướng.
- D. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) ngược hướng thì cùng phương.

Lời giải

Chọn C

Các khẳng định A, B, D đúng. Khẳng định C sai vì :Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng phương thì chưa chắc cùng hướng, chúng có thể ngược hướng.

Câu 36. Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là :

- A. Hai véc-tơ cùng hướng .
- B. Hai véc-tơ cùng phương.
- C. Hai véc-tơ đối nhau .
- D. Hai véc-tơ bằng nhau

Lời giải

Chọn C

Hai véc-tơ đối nhau là hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó chọn đáp án C.

Câu 37. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng trong đó điểm N nằm giữa M và P . Khi đó các cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng

- A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
- B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
- C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
- D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D



Nhìn vào hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.

Câu 38. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

- A. Véc-tơ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc-tơ.
- B. Véc-tơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
- C. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề $|\overrightarrow{AB}| > 0$ là mệnh đề sai, vì khi $A \equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}| = 0$.

Câu 39. Cho tam giác ABC . Số các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ nhận các đỉnh của tam giác làm điểm đầu và điểm cuối là

- A. 5 .
- B. 6 .
- C. 3 .
- D. 4 .

Lời giải

Chọn B

Ứng với đỉnh A ta có 2 vec-tơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B, C . Vậy tam giác có 3 đỉnh nên có 6 vec-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tam giác.

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau hãy tìm khẳng định **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. B. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$. C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Lời giải

Chọn C

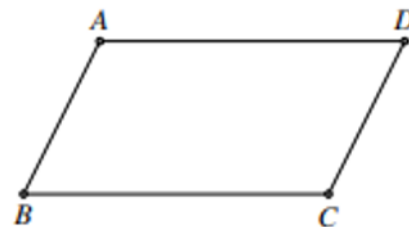
Từ hình vẽ, ta thấy vì $ABCD$ là hình bình hành nên

⊙ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

⊙ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

⊙ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

⊙ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



Câu 41. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, N nằm giữa M và P . Khi đó cặp vec-tơ nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. C. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. D. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.

Lời giải

Chọn B



Từ hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.

Câu 42. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $2a$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} = 2a$. C. $|\overrightarrow{AB}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{AB}| = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C

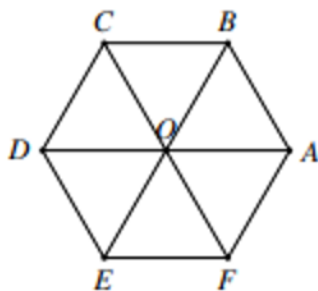
Do tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2a$

Câu 43. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vec-tơ khác $\vec{0}$ cùng phương Với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- A. 6. B. 4. C. 8. D. 7.

Lời giải

Chọn A



Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}$.

Câu 44. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.** Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương với một véc-tơ thứ 3 khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
- B.** Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ 3 khác $\vec{0}$ thì ngược hướng.
- C.** Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ 3 khác $\vec{0}$ thì không cùng phương.
- D.** Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì cùng hướng.

Lời giải

Chọn A

+Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ 3 khác $\vec{0}$ thì ngược hướng nhau. **Sai**, phải cùng hướng nhau mới đúng.

+Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ 3 khác $\vec{0}$ thì không cùng phương. **Sai**, hai véc-tơ cùng phương nhau.

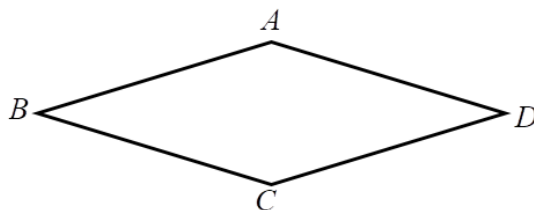
+Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì cùng hướng. **Sai**, cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Câu 45. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- A.** Hình thoi.
- B.** Hình chữ nhật.
- C.** Hình bình hành.
- D.** Hình vuông.

Lời giải

Chọn A



Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành. Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ nên $ABCD$ là hình thoi.

Câu 46. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$. Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $k = \frac{2}{5}$.

B. $k = -\frac{3}{5}$.

C. $k = \frac{3}{5}$.

D. $k = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC} = (1-k)\overrightarrow{AC}$.

Do đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AC} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì $\frac{k + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{k-1}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2k+1 = -3k+3 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án A

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB , P là điểm trên cạnh AD thỏa mãn $PD = 3PA$. Điểm N trên cạnh AC thỏa mãn tỉ lệ nào sau đây để ba điểm M, N, P thẳng hàng?

A. $4NC = 3AC$.

B. $NC = 4AN$.

C. $AN = \frac{1}{4}AC$.

D. $AC = \frac{5}{3}NC$.

Lời giải

Chọn B

M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM} + (1-k)\overrightarrow{AP}$ với $k > 0$.

Ta lại có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AN}\overrightarrow{AN} = \frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AD}{AP}\overrightarrow{AP}$

Từ đó ta có: $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 5$.

Vậy $NC = 4AN$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi M là điểm thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tập hợp tất cả điểm M là

A. Đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

B. Đường trung trực của EF .

C. Đường EF .

D. Đường trung trực của AC .

Lời giải

Chọn B

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC , ta có

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2ME = 2MF$.

Tập hợp điểm M là đường trung trực của EF .

Chọn đáp án B.

Câu 49. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp tất cả điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- B. Đường tròn đường kính AB
- C. Trung điểm của đoạn thẳng AB .
- D. Là điểm M thỏa mãn tam giác MAB là tam giác đều.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI = BA$

$\Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$. Vậy quỹ tích M là đường tròn đường kính AB .

Chọn đáp án B.

Câu 50. Cho hình vuông $ABCD$ cố định và I là giao điểm hai đường chéo của nó. Gọi điểm M là điểm thay đổi thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$. Tập hợp tất cả điểm M là

- A. Một đường thẳng qua A .
- B. Một đường thẳng qua I .
- C. Đường tròn tâm A .
- D. Đường tròn tâm I .

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} & |(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \\ \Leftrightarrow & |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AD}| \\ \Leftrightarrow & |4\overrightarrow{MI}| = |-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}| \\ \Leftrightarrow & |4\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow MI = \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp tất cả điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AC}{2}$.

Chọn đáp án D.

Câu 51. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Tập hợp điểm M là

- A. một đoạn thẳng.
- B. một đường tròn.
- C. nửa đường tròn.
- D. một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

Vì $3 + (-2) + 1 \neq 0 \Rightarrow \exists I$ sao cho $3\vec{IA} - 2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$. Khi đó ta có:

$$3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 3(\vec{MI} + \vec{IA}) - 2(\vec{MI} + \vec{IB}) + \vec{MI} + \vec{IC} = 2\vec{MI}.$$

Vậy $|\vec{3MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 2|\vec{MI}| = |\vec{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$. Do đó quỹ tích điểm M là đường tròn.

Câu 52. Cho tam giác ABC tìm tập hợp điểm M sao cho $|\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$.

- A.** Tập hợp các điểm M là một đường tròn.
- B.** Tập hợp các điểm M là một đường thẳng.
- C.** Tập hợp các điểm M là một tập rỗng.
- D.** Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A .

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 3\vec{IB} - 2\vec{IC} = \vec{0}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} |\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC}| &= |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}| \\ \Leftrightarrow |\vec{MI} + \vec{IA} + 3(\vec{MI} + \vec{IB}) - 2(\vec{MI} + \vec{IC})| &= |\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MA} - \vec{MC}| \\ \Leftrightarrow |2\vec{MI} + \vec{IA} + 3\vec{IB} - 2\vec{IC}| &= |\vec{BA} + \vec{CA}| \\ \Leftrightarrow 2MI &= 2JA \text{ (với } J \text{ là trung điểm } BC \text{)} \\ \Leftrightarrow MI &= JA \text{ (hằng số)} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính JA .

Câu 53. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I và đường thẳng d cố định. Gọi M là một điểm thay đổi trên d . Khi $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}$ có độ dài nhỏ nhất thì:

- A.** M là hình chiếu vuông góc của I lên d .
- B.** M là hình chiếu vuông góc của trung điểm đoạn IB lên d .
- C.** M là hình chiếu vuông góc của trung điểm đoạn ID lên d .
- D.** M trùng với I .

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GA} + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + \vec{MG} + \vec{GC} = 4\vec{MG} + \vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC}.$$

Chọn điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ta được $|\vec{u}| = 4MG$.

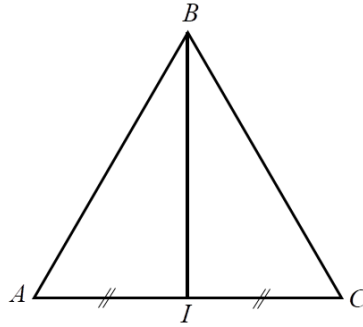
Để độ dài MG nhỏ nhất thì M trùng với hình chiếu vuông góc của G trên d . Ta sẽ xác định vị trí của G .

Ta có : $\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{GI} + 2\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trung điểm IB .

- Câu 54.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Độ dài véc-tơ $\vec{AB} + \vec{BC}$ và $\vec{AB} - \vec{BC}$ lần lượt là
A. a và $a\sqrt{3}$. **B.** đều bằng a . **C.** a và $2a$. **D.** a và $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AC .

Ta có $|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = a$ và $|\vec{AB} - \vec{BC}| = |\vec{AB} + \vec{CB}| = |2\vec{IB}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

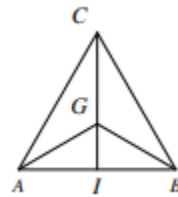
Suy ra $\vec{MC}$, $\vec{MI}$ ngược hướng nhau, đồng nhau $MC = 2MI \Leftrightarrow MC = 100\sqrt{3}$.

- Câu 55.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a , trọng tâm G . Tính theo a độ dài véc-tơ
 $\vec{v} = \vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC}$

- A.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên $\vec{v} = \vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = -2\vec{GC}$

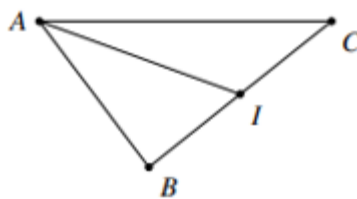
$\Rightarrow |\vec{v}| = 2GC = 2 \cdot \frac{2}{3}CI = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, với I là trung điểm AB .

- Câu 56.** Cho tam giác đều ABC cạnh a . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** $|\vec{AB} - \vec{CA}| = a\sqrt{3}$. **B.** $|\vec{AB} - \vec{CA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|\vec{AB} - \vec{CA}| = a$. **D.** $|\vec{AB} - \vec{CA}| = 0$.

Lời giải

Chọn A



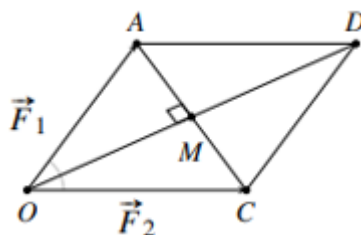
Gọi I là trung điểm BC . Ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AI}| = 2AI = a\sqrt{3}$.

Câu 57. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100 \text{ N}$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 120° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

- A.** 100 N. **B.** $100\sqrt{5} \text{ N}$. **C.** 200 N. **D.** $50\sqrt{3} \text{ N}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\angle AOM = 60^\circ$ nên $OM = OA \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$.

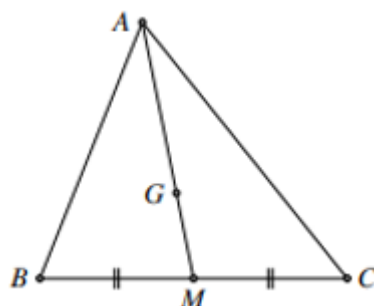
Ta có: $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OD}| = OD = 2OM = 100 \text{ N}$.

Câu 58. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.
C. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Lời giải

Chọn B



Vì M là trung điểm của BC nên ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA}$.

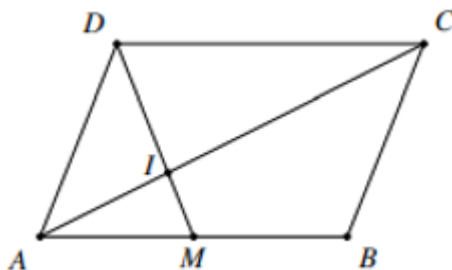
Từ đó, ta suy ra $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

Câu 59. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm AB , DM cắt AC tại I . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng $AB \parallel CD$ cắt hai cạnh CI, DI của tam giác CDI lần lượt tại A, M . Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{AM}{CD} = \frac{AI}{IC} = \frac{MI}{ID} = \frac{1}{2}$.

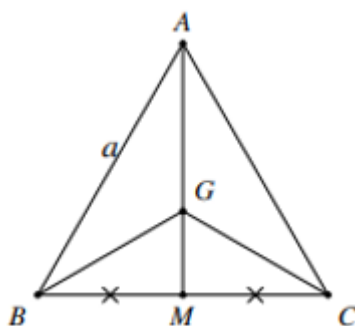
Từ đó ta có: $\frac{AI}{AI + IC} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$. Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

Câu 60. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
C. $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$. D. $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$$+) |\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a.$$

$$+) |\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AM}| = 2AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$+) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}| = 0.$$

$$+) |\vec{GB} + \vec{GC}| = |2\vec{GM}| = 2GM = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 61. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Biết $\vec{MN} = a\vec{AB} + b\vec{AD}$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 1$.

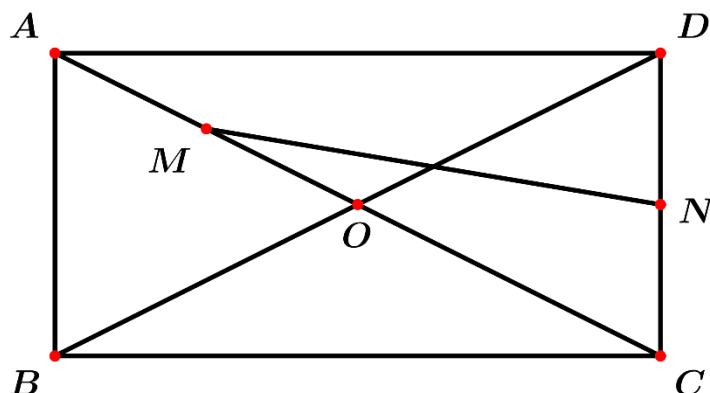
B. $a + b = \frac{1}{2}$.

C. $a + b = \frac{3}{4}$.

D. $a + b = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

Suy ra: $\vec{MN} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$.

Khi đó: $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{4}$. Vậy $a + b = 1$.

Câu 62. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Hỏi vectơ $\vec{MN}$ bằng vectơ nào dưới đây?

A. $\vec{AM} + \vec{AN}$.

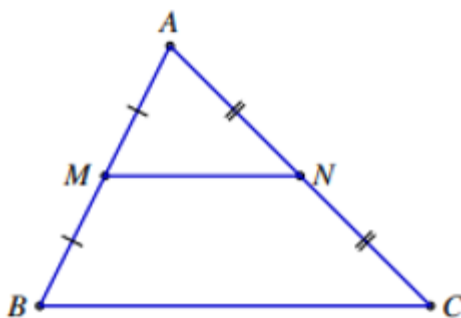
B. $\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

C. $\frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$.

D. $\frac{1}{2}\vec{CB}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 63. Cho ΔABC có trung tuyến AM . Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{-2}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do AM là đường trung tuyến, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

Câu 64. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

- A.** M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
B. M là trọng tâm tam giác ABC .
C. M là trung điểm của AB .
D. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CAMB$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$.

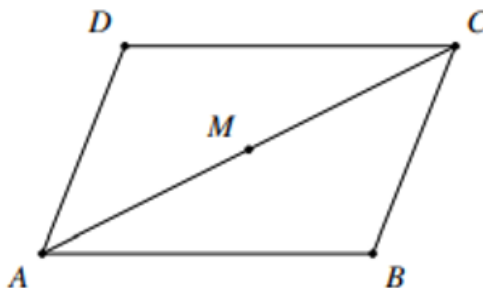
Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 65. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

- A.** Trung điểm AC . **B.** Điểm C . **C.** Trung điểm AB **D.** Trung điểm AD

Lời giải

Chọn A



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

Vậy M là trung điểm AC .

Câu 66. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}, \overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- A.** $m=1, n=2$. **B.** $m=-1, n=-2$. **C.** $m=-2, n=-1$. **D.** $m=2, n=1$.

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = -\vec{a} - \vec{b}$.

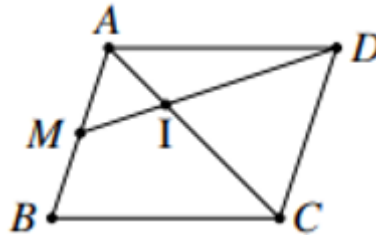
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}.$$

Câu 67. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm AB , DM cắt AC tại I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B



Theo Ta-lét ta có $\frac{IA}{IC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AI = \frac{1}{3}AC$.

$\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Hãy tìm m, n sao cho

$$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}?$$

- A.** $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. **C.** $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}).$$

Do M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Câu 69. Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Biết

$$\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} (m, n \in \mathbb{R}). \text{ Tính tổng } T = m + n$$

A. $T = -3$.

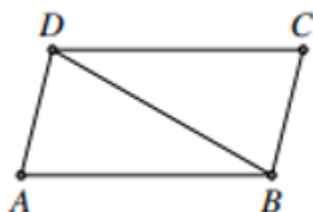
B. $T = -1$.

C. $T = 3$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Suy ra $m = -2, n = 1 \Rightarrow T = -2 + 1 = -1$.

Câu 70. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

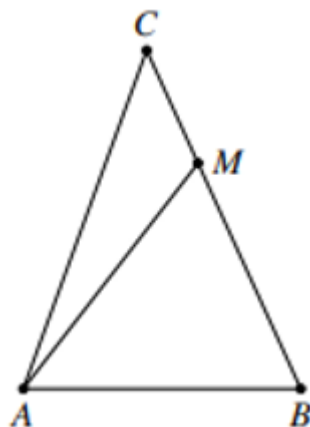
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 71. Cho hình bình hành $ABCD$ trên cạnh AB, CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $3AM = AB, 2NC = CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN . Đặt $\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$. Hãy tính $T = m + n$?

A. $T = \frac{5}{6}$.

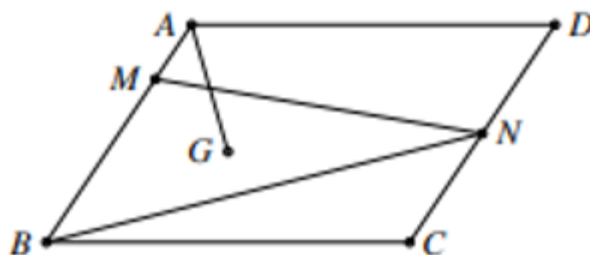
B. $T = \frac{2}{3}$.

C. $T = \frac{7}{8}$.

D. $T = \frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{7}{12}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow T = \frac{7}{12} + \frac{1}{3} = \frac{11}{12}.$$

Câu 72. Cho tam giác ABC và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$?

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$.

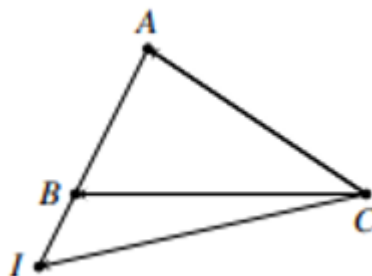
B. $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$.

D. $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CA} - 3(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CI} - 3\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}).$$

Câu 73. Cho tứ giác $ABCD$ trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

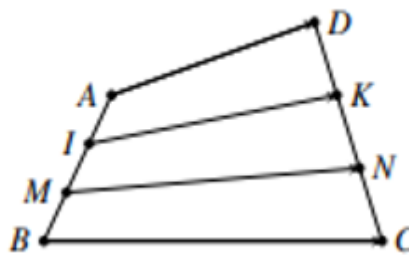
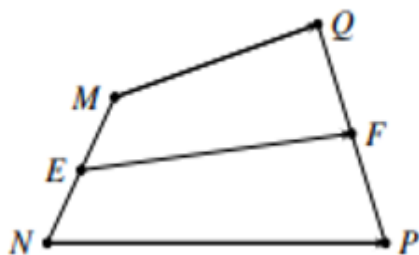
B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C



Ta chứng minh bài toán sau:

Nếu E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ thì $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP})$.

Thật vậy, ta có $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP})$.

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AM, DN .

Khi đó, áp dụng kết quả bài toán trên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IK}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MN})\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 74. Cho tam giác ABC có AK, BM là hai đường trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu thị $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$. (1)

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Câu 75. Cho tam giác ABC và điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Điều kiện cần và đủ để điểm D thuộc đường thẳng BC là

A. $mn = 1$.

B. $m = n = \frac{1}{2}$.

C. $m + n = 1$.

D. $m - n = 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = -m\overrightarrow{BA} + n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = (1-m-n)\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC}.$$

Điểm D thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$.

Thay vào đẳng thức ở trên ta được: $k\overrightarrow{BC} = (1-m-n)\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (k-n)\overrightarrow{BC} = (1-m-n)\overrightarrow{BA}$.

Từ đó suy ra $k-n=1-m-n=0$. Vậy $m+n=1$.

Câu 76. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$, K là trung điểm của MN. Khi đó

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 77. Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm của tam giác ABC.

Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
 $= -\frac{1}{2}(3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AC}$.

Do đó: $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Câu 78. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP} = 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$.

$$3\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}.$$

Câu 79. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

Câu 80. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm BC . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MH}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

B. $\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 81. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

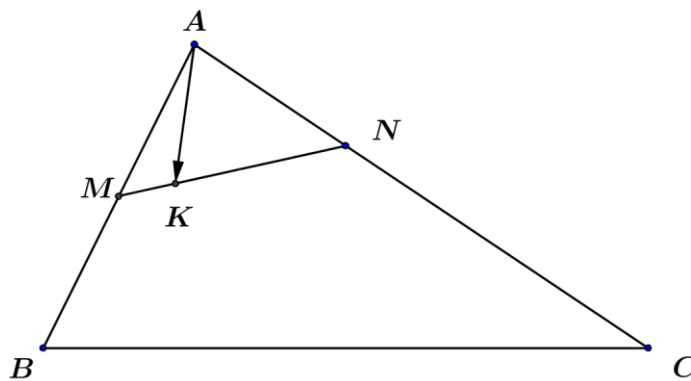
B. $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn C



$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Câu 82. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ (với $k \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = (k-1)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI} = (k+1)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = (k+1)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Câu 83. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

B. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

C. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$

Câu 84. Cho $\triangle ABC$, gọi D là trung điểm cạnh AC , K là trọng tâm $\triangle BCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$

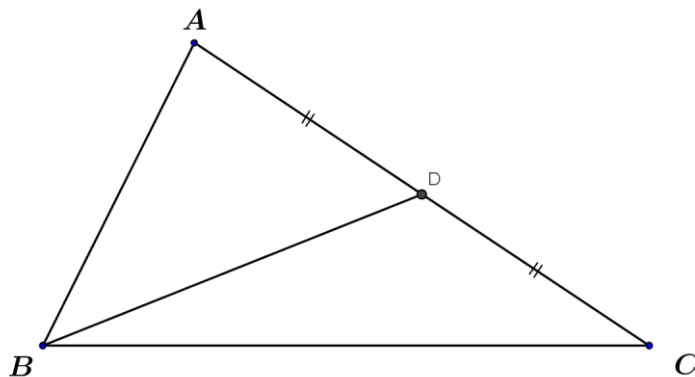
B. $2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{KB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$

Lời giải

Chọn B



Vì K là trọng tâm $\triangle BCD$ nên ta có $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}.$$

Câu 85. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$. Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $k = \frac{2}{5}$.

B. $k = -\frac{3}{5}$.

C. $k = \frac{3}{5}$.

D. $k = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{NB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC} = (1-k)\overrightarrow{AC}$

Do đó
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AC} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì $\frac{k + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{k-1}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2k+1 = -3k+3 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Câu 86. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$ và $\vec{v} = (-1; 2)$ đối nhau.

B. Hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$ và $\vec{v} = (-2; -1)$ đối nhau.

C. Hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$ và $\vec{v} = (2; 1)$ đối nhau.

D. Hai vector $\vec{u} = (2; -1)$ và $\vec{v} = (-2; 1)$ đối nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{u} = (2; -1) = -(-2; 1) = -\vec{v} \Rightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ đối nhau.

Câu 87. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$. Độ dài của vector $\overrightarrow{AC}$ là:

A. 9.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 88. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

D. $(1; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Trung điểm của đoạn thẳng AB là: $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 89. Cho các vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$. Điều kiện để vector $\vec{u} = \vec{v}$ là

A. $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = -v_1 \\ u_2 = -v_2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = v_2 \\ u_2 = v_1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$.

Câu 90. Vector $\vec{a} = (-4; 0)$ được phân tích theo hai vector đơn vị như thế nào?

A. $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j}$.

B. $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j}$.

C. $\vec{a} = -4\vec{j}$.

D. $\vec{a} = -4\vec{i}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a} = (-4; 0) \Rightarrow \vec{a} = -4\vec{i} + 0\vec{j} = -4\vec{i}$.

Câu 91. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Vector đối của vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là:

A. $(-1; 2)$.

B. $(-1; -2)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(1; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có vector đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA} = (1-0; 0+2) = (1; 2)$.

Câu 92. Tam giác ABC có $C(-2; -4)$, trọng tâm $G(0; 4)$, trung điểm cạnh BC là $M(2; 0)$. Tọa độ A và B là:

A. $A(4; 12), B(6; 4)$.

B. $A(-4; -12), B(6; 4)$.

C. $A(-4; 12), B(6; 4)$.

D. $A(4; -12), B(-6; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } M(2; 0) \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } \begin{cases} 2 = \frac{x_B + (-2)}{2} \\ 0 = \frac{y_B + (-4)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 6 \\ y_B = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6; 4)$$

$$G(0; 4) \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} 0 = \frac{x_A + 6 + (-2)}{3} \\ 4 = \frac{y_A + 4 + (-4)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -4 \\ y_A = 12 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 12).$$

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3; -2), B(7; 1), C(0; 1), D(-8; -5)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ đối nhau.

B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương cùng hướng.

D. A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (4; 3), \overrightarrow{CD} = (-8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}.$$

Câu 94. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-2; 0), B(5; -4), C(-5; 1)$. Tọa độ điểm D để tứ giác $BCAD$ là hình bình hành là:

A. $D(-8; -5)$.

B. $D(8; 5)$.

C. $D(-8; 5)$.

D. $D(8; -5)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: tứ giác } BCAD \text{ là hình bình hành khi } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-5 = -2-x_D \\ 1+4 = 0-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -5 \end{cases}$$

Câu 95. Cho 4 điểm $A(1; -2), B(0; 3), C(-3; 4), D(-1; 8)$. Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho là thẳng hàng?

A. A, B, C .

B. B, C, D .

C. A, B, D .

D. A, C, D .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AD}(-2;10), \overrightarrow{AB}(-1;5) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow 3$ điểm A, B, D thẳng hàng.

Câu 96. Cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O , hai đỉnh A và B có tọa độ là $A(-2;2); B(3;5)$. Tọa độ của đỉnh C là:

- A. $(1;7)$. B. $(-1;-7)$. C. $(-3;-5)$. D. $(2;-2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-2+3+x_C}{3} \\ 0 = \frac{2+5+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7 \end{cases}.$$

Câu 97. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;-2), B(-1;3)$. Biết điểm $I(a;b)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó ta có giá trị của tổng $a+b$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{3}{2}$. D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Do } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2}.$$

Câu 98. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;-2), B(-1;5), C(4;-3)$. Biết điểm $H(a;b)$ là điểm thỏa

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$. Khi đó ta có giá trị của tích ab là

- A. $\frac{4}{3}$. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;7), \overrightarrow{AC} = (3;-1)$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Rightarrow \triangle ABC$ được thành lập.

$$\text{Do } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0} \Rightarrow H \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; 0\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0.$$

Câu 99. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2), B(-2;3)$. Tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ là

- A. $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. B. $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$. C. $I(1;2)$. D. $I(2;-2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y) \\ \overrightarrow{IB} = (-2-x; 3-y) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (-4-2x; 6-2y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (-3-3x; 8-3y).$$

$$\text{Từ: } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -3-3x=0 \\ 8-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(-1; \frac{8}{3}\right).$$

Câu 100. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;2)$, $B(4;3)$. Biết điểm $I(a;b)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Khi đó ta có giá trị của $a^2 + b^2$ là:

A. 4.

B. 9.

C. 25.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (2-a; 2-b) \\ \overrightarrow{IB} = (4-a; 3-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\overrightarrow{IA} = (6-3a; 6-3b) \\ 2\overrightarrow{IB} = (8-2a; 6-2b) \end{cases}$$

$$\text{Từ: } 3\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow \begin{cases} 6-3a=8-2a \\ 6-3b=6-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}. \text{ Vậy } a^2 + b^2 = 4.$$

Câu 101. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;1)$, $B(-3;7)$, $C(2;5)$. Biết điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$. Khi đó ta có tọa độ của $\vec{u} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$ là:

A. $(6;-3)$.

B. $(-6;3)$.

C. $(3;-6)$.

D. $(-3;6)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (3-x; 1-y) \\ \overrightarrow{MB} = (-3-x; 7-y) \end{cases} \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (6+2x; -14+2y)$$

$$\text{Từ: } \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} 3-x=6+2x \\ 1-y=-14+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}. \text{ Vậy } M(-1;5).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MC} = (3;0) \\ \overrightarrow{AB} = (-6;6) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = (-3;6).$$

Câu 102. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(-3;7)$. Biết điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khẳng định **đúng** là:

A. $x < 0$.

B. $y > 0$.

C. $x+y > 0$.

D. $x+y < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-x; 2-y) \\ \overrightarrow{MB} = (1-x; 1-y) \\ \overrightarrow{MC} = (-3-x; 7-y) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB} = (2-2x; 2-2y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (5-2x; -3-2y)$$

$$\text{Từ: } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 5-2x=0 \\ -2-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } x+y=1.$$

Câu 103. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$, biết rằng điểm M thuộc trục hoành và biểu thức $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó ta có khẳng định **đúng** là:

- A. $x_M > 3$. B. $0 < x_M < 1$. C. $x_M < 0$. D. $1 < x_M < 2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AB ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ và $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2MI$.

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 104. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(4;3)$, Tọa điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A. $M(2;0)$. B. $M(-5;0)$. C. $M(-7;0)$. D. $M(-3;0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 1-y) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} = (3-3x; 3-3y) \\ \overrightarrow{IB} = (4-x; 3-y) \Rightarrow -2\overrightarrow{IB} = (-8+2x; -6+2y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = (-5-x; -3-y).$$

$$\text{Từ: } 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -5-x=0 \\ -3-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}. \text{ Vậy } M(-5;-3).$$

$$\text{Khi đó } P = \left| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right| = \left| 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IB} \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI.$$

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Rightarrow M(-5;0)$.

Câu 105. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0)$, $B(3;1)$ và $C(-7;5)$. Tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A. $M\left(\frac{5}{3};0\right)$. B. $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$. C. $M\left(-\frac{2}{3};0\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $G\left(-\frac{2}{3};2\right)$

$$\text{Khi đó } P = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \right| = 3\left| \overrightarrow{MI} \right| = 3MI.$$

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Rightarrow M\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

Câu 106. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1;0)$, $B(2;3)$ và $C(-5;4)$. Tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = \left| 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A. $M(-5;0)$. B. $M(8;0)$. C. $M(7;0)$. D. $M(-6;0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= 3\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (*)

$$\text{Gọi } I(x;y), \text{ từ (*) ta có: } \begin{cases} 2(-1-x) + 4(2-x) - 3(-5-x) = 0 \\ 2(0-y) + 4(3-y) - 3(4-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(7;0).$$

$$\text{Khi đó } P = \left| 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \right| = 3\left| \overrightarrow{MI} \right| = 3MI.$$

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Rightarrow M(7;0)$.

Câu 107. Cho tam giác ABC với $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$ và điểm $C(4;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

A. $D(3;10)$

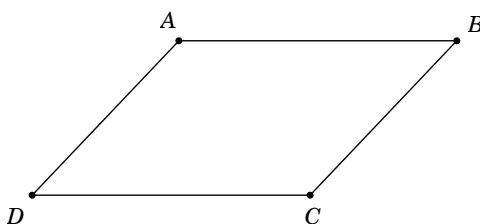
B. $D(3;-10)$.

C. $D(-3;10)$.

D. $D(-3;-10)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $D(x,y)$ là điểm cần tìm

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (1;-7)$, $\overrightarrow{DC} = (4-x;3-y)$

Để $ABCD$ là hình bình hành $B(2;0)$ $A(-1;3)$ hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ 3-y=-7 \end{cases} \Rightarrow D(3;10)$.

Câu 108. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm , và điểm $C(6;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

A. $(9;-1)$

B. $(3;5)$.

C. $(5;3)$.

D. $(-1;9)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-3)$, $\overrightarrow{DC} = (6-x;2-y)$, $D(x,y)$.

$ABCD$ là hình bình hành M, N, P ABC khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=3 \\ 2-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow D(3;5)$.

Câu 109. Cho tam giác . Gọi lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Biết $A(1;3)$, $B(-3;3)$, $C(8;0)$.

Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

A. 2

B. 3.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có : M là trung điểm $BC \Rightarrow x_M = \frac{5}{2}$

N là trung điểm $AC \Rightarrow x_N = \frac{9}{2}$

P là trung điểm $AB \Rightarrow x_P = -1$

$\Rightarrow x_M + x_N + x_P = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 1 = 6$

Câu 110. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $B(9; 7)$, $C(11; -1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{MN}$

A. $(2; -8)$

B. $(1; -4)$.

C. $(10; 6)$.

D. $(5; 3)$.

Lời giải

Chọn B

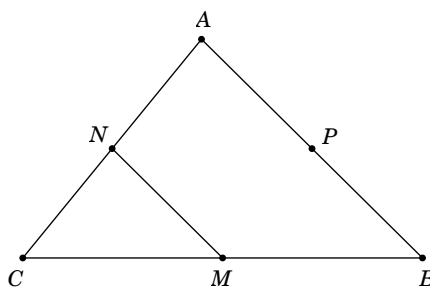
$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (2; -8) = (1; -4).$$

Câu 111. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 3)$, $N(0; -4)$, $P(-1; 6)$ lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tìm tọa độ đỉnh A

- A. $(1; 5)$ B. $(-3; -1)$. C. $(-2; -7)$. D. $(1; -10)$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Gọi } A(x; y). \text{ Ta có } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow (x+1; y-6) = (-2; -7).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2 \\ y-6=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}. \text{ Vậy } A(-3; -1).$$

Câu 112. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 1)$, $B(-3; 5)$ và trọng tâm $G(-1; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C

- A. $(6; -3)$ B. $(-6; 3)$. C. $(-6; -3)$. D. $(-3; 6)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } C(x; y). \text{ Ta có } G \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6+(-3)+x}{3} = -1 \\ \frac{1+5+y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow C(-6; -3) \text{ là trọng tâm.}$$

Câu 113. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2)$, $B(3; 5)$ và trọng tâm là gốc O . Tìm tọa độ đỉnh C

- A. $(-1; -7)$ B. $(2; -2)$. C. $(-3; -5)$. D. $(1; 7)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } C(x; y). \text{ Ta có } O \text{ là trọng tâm} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \frac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases} \text{ Vậy } C(-1; -7)$$

Câu 114. Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$ và $D(3; 5)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

B. $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác BCD .

C. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

D. $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overline{AB} = (1; -2)$, $\overline{DC} = (1; -2) \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 115. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0}$.

A. $(1; 2)$

B. $\left(1; \frac{2}{5}\right)$.

C. $\left(-1; \frac{8}{3}\right)$.

D. $(2; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x; y)$. Ta có $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow (1-x; 2-y) + 2(-2-x; 3-y) = (0; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-4-2x=0 \\ 2-y+6-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{8}{3} \end{cases} \text{ Vậy } I\left(-1; \frac{8}{3}\right).$$

Câu 116. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

A. $M(1; 0)$

B. $M(4; 0)$.

C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0)$. Ta có $\overline{AB} = (1; 7)$ và $\overline{AM} = (m-2; 3)$.

$$\text{Để } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{m-2}{1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow m = \frac{17}{7}. \text{ Vậy } M\left(\frac{17}{7}; 0\right).$$

Câu 117. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

A. $(-3; 4)$

B. $(4; 0)$.

C. $(\sqrt{2}; 3)$.

D. $(3; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có tọa độ } G = \left(\frac{3+1+5}{3}; \frac{5+2+2}{3}\right) = (3; 3).$$

Câu 118. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(4;2), B(-2;1), C(0;3), M(-3;7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $x + y$ bằng

A. $\frac{12}{5}$.

B. 5.

C. $-\frac{12}{5}$.

D. -5.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AM}(-7;5), \overrightarrow{AB}(-6;-1), \overrightarrow{AC}(-4;1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{10} \\ y = \frac{37}{10} \end{cases}$.

Câu 119. Trong mặt phẳng Oxy ; cho các véc tơ $\vec{a} = (2; -1); \vec{b} = (0; 4)$ và $\vec{c} = (3; 3)$. Gọi m và n là hai số thực sao cho $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $P = m^2 + n^2$.

A. $P = \frac{225}{64}$.

B. $P = \frac{100}{81}$.

C. $P = \frac{97}{64}$.

D. $P = \frac{193}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m\vec{a} - n\vec{b} = (2m; -m - 4n)$.

Khi đó $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ -m - 4n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = -\frac{9}{8} \end{cases}$.

Vậy $P = m^2 + n^2 = \frac{225}{64}$.

Câu 120. Cho $\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (-3; 4), \vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$.

Câu 121. Với hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Xét hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x-1)\vec{b}$. Tìm x để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x = \frac{3}{2}$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = -\frac{1}{2}$.

D. $x = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Do hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên điều kiện để hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và

$$\vec{v} = \vec{a} + (x-1)\vec{b} \text{ cùng phương là: } \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k.1 \\ -3 = k.(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 122. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;1), B(-1;2), C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ E là cặp số nào sau đây?

A. $(6;-1)$

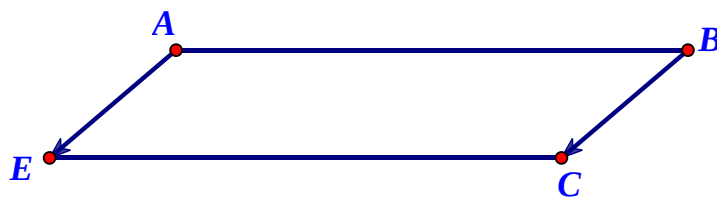
B. $(0;1)$

C. $(1;6)$

D. $(6;1)$

Lời giải

Chọn A



Gọi $E(x;y)$.

$$\text{Tứ giác } ABCE \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy $E(6;-1)$.

Câu 123. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho véc tơ $\vec{a} = (-3;2)$, $\vec{b} = (1;4)$. Tọa độ của véc tơ $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$?

A. $\vec{v} = (-2;-6)$.

B. $\vec{v} = (-4;-2)$.

C. $\vec{v} = (-2;6)$.

D. $\vec{u} = (4;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (-3+1; 2+4) = (-2;6)$.

Câu 124. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho véc tơ $\vec{a} = (2;-4)$, $\vec{b} = (-5;3)$. Tọa độ của véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$

A. $\vec{u} = (7;-7)$.

B. $\vec{u} = (9;-11)$.

C. $\vec{u} = (9;5)$.

D. $\vec{u} = (-1;5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = (2.2+5; 2.(-4)-3) = (9;-11)$.

Câu 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các véc tơ $\vec{a} = (m;3)$, $\vec{b} = (-2;n)$, $\vec{u} = (4;-3)$, $(m,n \in \mathbb{R})$.

Tính giá trị của $S = 2m + n$, biết rằng véc tơ $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

A. 18.

B. 10.

C. 8.

D. 22.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow (4; -3) = (m-6; 3+3n) \Rightarrow \begin{cases} m-6=4 \\ 3+3n=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=-2 \end{cases}$$

Câu 126. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1;2), B(-3;5), C(0;4), D(-3;-5)$. Giả sử $\vec{AD} = m.\vec{AB} + n.\vec{AC} (m, n \in \mathbb{R})$. Tính giá trị của $S = m.n$?

A. 24.

B. -5.

C. 11.

D. -24.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{AD}(-4; -7), \vec{AB}(-4; 3), \vec{AC}(-1; 2).$$

$$\text{Giả sử } \vec{AD} = m.\vec{AB} + n.\vec{AC} (m, n \in \mathbb{R}) (*)$$

$$\text{Thay tọa độ vào (*) ta có hệ phương trình } \begin{cases} -4m - n = -4 \\ 3m + 2n = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -8 \end{cases}$$

Câu 127. Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc tơ $\vec{a} = (-4; 13); \vec{b} = (0; 1)$ và $\vec{c} = (-2; 5)$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

B. $\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

C. $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

D. $\vec{a} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giả sử có cặp số thực } (m, n) \text{ thỏa mãn } \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}. \text{ Thay tọa độ ta có } \begin{cases} 0m - 2n = -4 \\ m + 5n = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}.$$

Câu 128. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

A. $\vec{AP} = \vec{AM} - \vec{AN}$.

B. $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

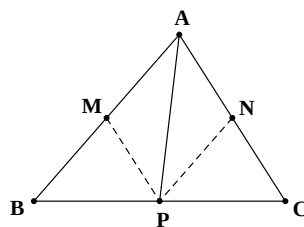
C. $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{AN}$.

D. $\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AN}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có tứ giác AMPN là hình bình hành nên $\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AN}$.



Câu 129. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của các cạnh BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

B. $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

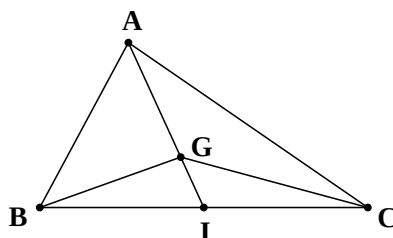
C. $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

D. $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có $2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.



Câu 130. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(-3;1)$, $B(2;-2)$, $C(0;4)$. Gọi M là điểm thỏa mãn hệ thức

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Tọa độ của điểm M là?

A. $(5;1)$.

B. $(5;-1)$.

C. $(-5;1)$.

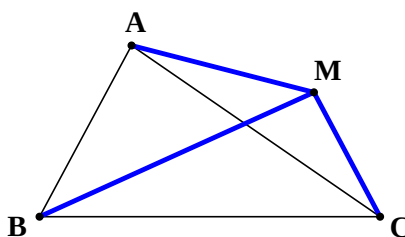
D. $(-5;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi tọa độ điểm $M(x;y)$. Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-3-x; 1-y) \\ \overrightarrow{MB} = (2-x; -2-y) \\ \overrightarrow{MC} = (-x; 4-y) \end{cases}$$

Theo giả thiết $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ suy ra
$$\begin{cases} 2-2x = -3-x \\ 2-2y = 1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

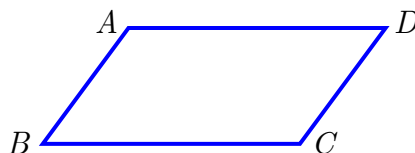


Câu 131. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

- A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. B. $\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$. D. $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 132. Cho tam giác ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mệnh đề nào là **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO}$.

Lời giải

Chọn D

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác ABC . Do vậy, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO}$.

Câu 133. Cho tứ giác $ABCD$. Xét các khẳng định sau

- (I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$. (II) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.
(III) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$. (IV) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

Số khẳng định **đúng** là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Khẳng định (I) đúng.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra (II) sai.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$. Suy ra (III) đúng.

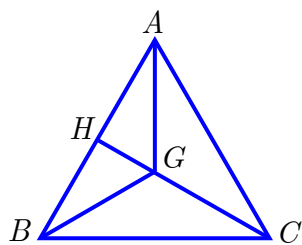
$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra (IV) sai.

Câu 134. Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tính theo a độ dài của $\vec{v} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$.

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

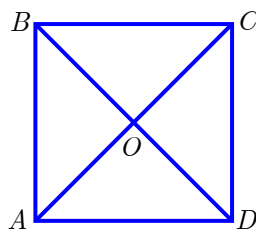
Chọn A



Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$.

Suy ra $\vec{v} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC}$. Vậy $|\vec{v}| = 2|\overrightarrow{GC}| = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 135. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. a .

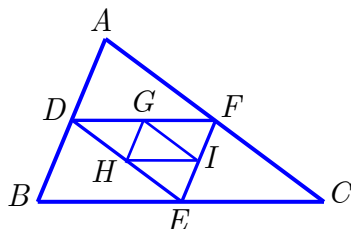
Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DO}$.

Suy ra $|\vec{u}| = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 136. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF . Véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$ bằng véc-tơ nào sau đây?



A. $\overrightarrow{DA}$.

B. $\overrightarrow{FC}$.

C. $\overrightarrow{CE}$.

D. $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 137. Cho $ABCD$ là hình bình hành. O là giao điểm hai đường chéo. Xét các khẳng định sau đây

I. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

II. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

III. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

IV. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Các khẳng định **đúng** là

A. Chỉ (I).

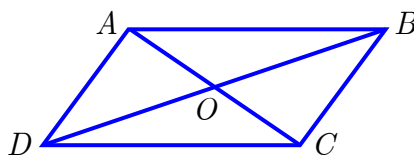
B. (I) và (III).

C. (II) và (III).

D. (I), (III) và (IV).

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$. Suy ra (I) đúng.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra (II) sai.

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Suy ra (III) đúng.

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Suy ra (IV) đúng.

Câu 138. Cho tam giác ABC . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây

I. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

II. $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AI}$.

III. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.

A. Chỉ (I).

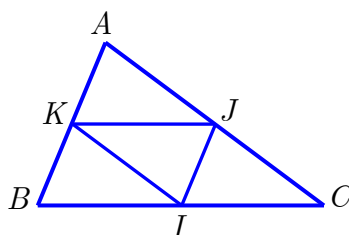
B. (II) và (III).

C. Chỉ (II).

D. (I) và (III).

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$. Suy ra (I) sai.

$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI}$ (quy tắc hình bình hành). Suy ra (II) đúng.

$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$. Suy ra (III) đúng.

Câu 139. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt, đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$. Khi đó $\vec{u}$ bằng véctơ nào sau đây?

A. $\vec{u} = \vec{0}$.

B. $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\vec{u} = 2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Câu 140. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng véctơ nào?

A. $\overrightarrow{AM}$

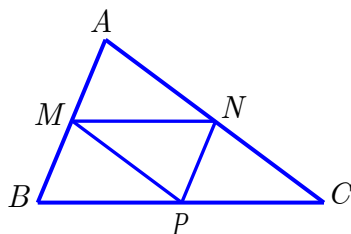
B. $\overrightarrow{PB}$

C. $\overrightarrow{AP}$

D. $\overrightarrow{MN}$

Lời giải

Chọn C



Theo đề bài M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC nên $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AN}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP}$.

Câu 141. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

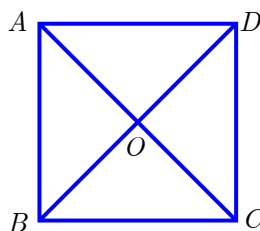
Ta có: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Câu 142. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vector nào trong các vector dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C



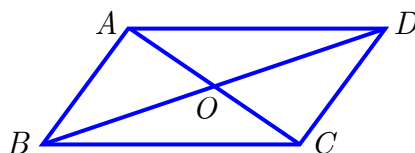
Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

Câu 143. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Khi đó $\vec{u}$ bằng

A. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$.

Khi đó $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD} - (-\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Câu 144. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.

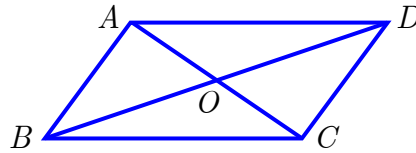
B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Xét đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.

Xét đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Vậy B sai.

Xét đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.

Xét đáp án D. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 145. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng:

A. $a\sqrt{2}$.

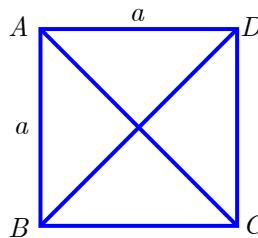
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $2a$.

D. a .

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ và $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}$.

Câu 146. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$?

A. $2a\sqrt{2}$.

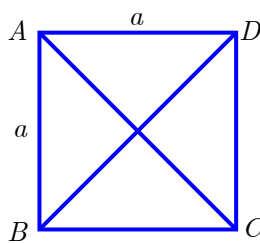
B. $3a$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a\sqrt{2}.$$

Câu 147. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

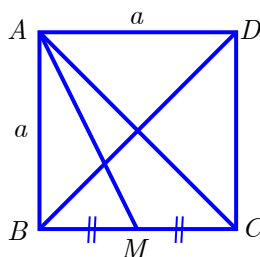
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC .

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{5}.$$

Câu 148. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $AB=3$, $AC=4$. Vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

A. $\sqrt{13}$.

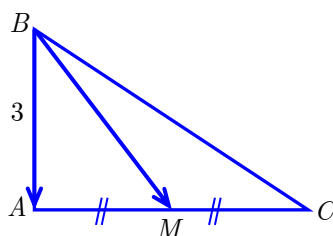
B. $2\sqrt{13}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AC .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = -2\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MB}.$$

$$\text{Suy ra: } |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}| = |2\overrightarrow{MB}| = 2BM = 2\sqrt{AB^2 + AM^2} = 2\sqrt{3^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}.$$

Câu 149. Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB=4a$ và $AD=3a$ thì độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $7a$.

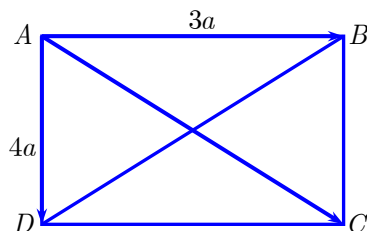
B. $6a$.

C. $2a\sqrt{3}$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$.

Câu 150. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

A. $a\sqrt{3}$.

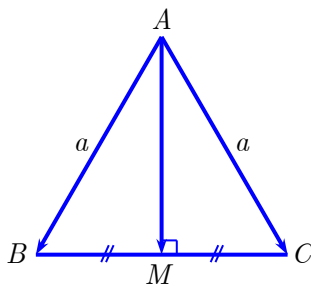
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $a\sqrt{6}$.

D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC , ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ và $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = a\sqrt{3}$.

-----HẾT-----