SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIÊN GIANG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2021-2022

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất: 24/ 11 /2021
(*Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài*)

Bài 1. (5,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^4=1 \\ x^3+x^2y^3+y^3=1+x^2-x^5 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 2. (5,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_2=5 \\ n.u_{n+2}-(4n+1)u_{n+1}+3(n+1)u_n=2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tính $\lim \dfrac{u_n}{3^n}$.

b) Chứng minh rằng $2\sum\limits_{1}^{2021} u_n+3\left(1-3^{2021}\right)$ chia hết cho 2021.

Bài 3. (5,0 điểm) Cho 2 đường tròn (O,R) và (O',R') cắt nhau tại A và B. Gọi CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ($C \in (O)$ và $D \in (O')$, đồng thời B, C, D nằm cùng phía có bờ là OO'). Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng BC và AD, F là giao điểm của hai đường thẳng BD và AC, G là giao điểm của hai đường thẳng EF và AB; H là hình chiếu của G lên CD.

a) Chứng minh rằng $EF // CD$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{CAB}=\widehat{DAH}$.

Bài 4. (5,0 điểm) Cho n là số nguyên dương. Nam có n đồng xu (mỗi đồng xu có một mặt Ngửa (N) và một mặt Sấp (S)) để nằm ngẫu nhiên thành một dãy trên mặt bàn. Dãy n đồng xu được gọi là ở "*trạng thái nghỉ*" nếu tất cả các mặt của đồng xu đều là mặt Sấp. Từ một trạng thái ban đầu $T=\underbrace{***\ldots*}_{n}$ của dãy n đồng xu (với * là S hoặc N), Nam lặp đi lặp lại các thao tác sau: nếu có k đồng xu xuất hiện mặt (N) với $k>0$, thì Nam lật ngược đồng xu vị trí thứ k hoặc Nam dừng lại nếu T đạt trạng thái nghỉ. Kí hiệu $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ. (Ví dụ với $n=3$ đồng xu nằm trên mặt bàn có trạng thái ban đầu là $T=SNS$ thì Nam sẽ thực hiện $SNS \to NNS \to NSS \to SSS$, và có $b(T)=3$).

a) Giả sử Nam có ba trạng thái ban đầu của dãy năm đồng xu nằm trên mặt bàn là $T_1=NNSNN$, $T_2=SNSNS$, $T_3=SNSNN$. Em hãy viết các bước mà Nam đưa chúng về trạng thái nghỉ và tính $b(T_1)$, $b(T_2)$, $b(T_3)$.

b) Với dãy n đồng xu nằm trên mặt bàn ta sẽ có 2^n trạng thái ban đầu. Ứng với mỗi trạng thái ban đầu T ta có $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ, biết $b(T)$ là hữu hạn. Tính $E(n)$ là số bước trung bình để đưa dãy n đồng xu về trạng thái nghỉ.

--------------------**HẾT**--------------------

Ghi chú:

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG ------------- **HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2021-2022** ------------------------------ Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi thứ nhất: 24 / 11 /2021 *(Hướng dẫn chấm có 05 trang)*

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp áp mà bài giải vẫn logic, đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng.

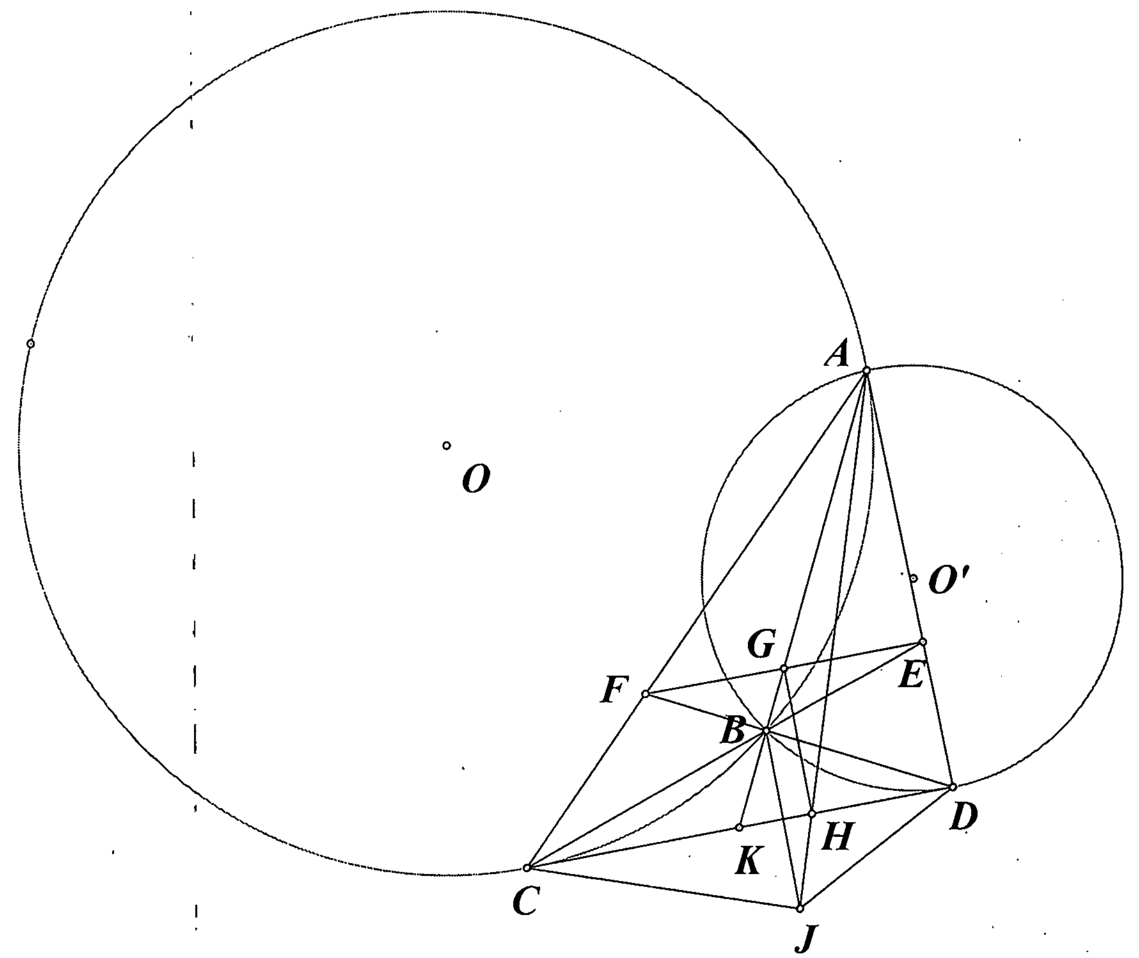
- Nếu học sinh có sử dụng các định lý, các hệ quả, các bổ đề... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.

- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý ***không làm tròn***, giám khảo có thể thống nhất đáp án, chia các ý điểm lớn thành bội của 0,25

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	**Ý**	**Nội dung**	**Biểu điểm**
Bài 1. **(5,0 điểm)**		Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^4=1 & (1) \\ x^3+x^2y^3+y^3=1+x^2-x^5 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.	
		Ta có $(2)\Leftrightarrow (x^3+y^3-1)(x^2+1)=0$	**0,5**
		$\Leftrightarrow x^3+y^3=1$ (3)	**0,5**
		Từ phương trình (1) ta có $\begin{cases} x^4\ge 0 \\ y^4=1-x^4\le 1 \end{cases} \Rightarrow -1\le y\le 1$ (4) Tương tự ta cũng có $-1\le x\le 1$.	**0,5**
		Nếu $-1\le x<0$ thì từ (3) suy ra $\begin{cases} x^3<0 \\ y^3=1-x^3>1 \end{cases} \Rightarrow y>1$. Mâu thuẫn với (4)	**0,5**
		Do đó bắt buộc $0\le x\le 1$.	**0,5**
		Lập luận tương tự ta cũng có $0\le y\le 1$.	**0,5**
		Vì thế $\begin{cases} x^3\ge x^4 \\ y^3\ge y^4 \end{cases} \Rightarrow x^3+y^3\ge x^4+y^4$	**0,5**
		Mà từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases} \Rightarrow x^3+y^3=x^4+y^4$.	**0,5**
		Do đó $\begin{cases} x^3=x^4 \\ y^3=y^4 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$.	**0,5**
		Kết hợp với đề bài từ đó suy ra hệ có 2 nghiệm là $(x,y)\in\{(0;1),(1;0)\}$.	**0,5**
Bài 2. **(5,0 điểm)**		Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_2=5 \\ n.u_{n+2}-(4n+1)u_{n+1}+3(n+1)u_n=2 \end{cases}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.	

		a) Tính $\lim \frac{u_n}{3^n}$. b) Chứng minh rằng $2\sum_{1}^{2021} u_n + 3\left(1-3^{2021}\right)$ chia hết cho 2021.	
	a)	Ta có: $n.u_{n+2} - (4n+1)u_{n+1} + 3(n+1)u_n = 2$ $\Rightarrow n\left[u_{n+2} - 3u_{n+1} - (n+1) + 2\right] = (n+1)\left(u_{n+1} - 3u_n - n + 2\right)$	0,5
		$\Rightarrow u_{n+2} - 3u_{n+1} - (n+1) + 2 = \frac{n+1}{n}\left(u_{n+1} - 3u_n - n + 2\right)$	0,5
		$= \frac{n+1}{n}.\frac{n}{n-1}\left[u_n - 3u_{n-1} - (n-1) + 2\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots$	0,25
		$= \frac{n+1}{n}.\frac{n}{n-1}\ldots\ldots\frac{2}{1}\left[u_2 - 3u_1 - 1 + 2\right]$	0,25
		$= 3(n+1)$	0,25
		Suy ra $u_{n+2} - 3u_{n+1} = 4n + 2$	0,25
		$\Rightarrow u_{n+2} + 2(n+2) = 3\left[u_{n+1} + 2(n+1)\right] = 3^2\left[u_n + 2n\right] = \ldots.. =$	0,5
		$= 3^n\left(u_2 + 4\right) = 3^{n+2}$	0,5
		Suy ra $u_n = 3^n - 2n$.	0,5
		Khi đó $\lim \frac{u_n}{3^n} = \lim \frac{3^n - 2n}{3^n} = \lim \frac{3^n}{3^n} - \lim \frac{2n}{3^n} = 1 - 2\lim \frac{n}{3^n} = 1$	0,5
	b)	$2\sum_{1}^{2021} u_n + 3\left(1-3^{2021}\right) = 2\sum_{1}^{2021} 3^n - 2\sum_{1}^{2021} 2n + 3\left(1-3^{2021}\right)$	0,25
		$= 2.3\frac{3^{2021}-1}{2} - 4.\frac{2021.2022}{2} + 3\left(1-3^{2021}\right)$	0,25
		$= 3\left(3^{2021}-1\right) - 2.2021.2022 + 3\left(1-3^{2021}\right)$	0,25
		$= -2.2021.2022 \vdots 2021$ (đpcm).	0,25
Bài 3. (5,0 điểm)		Cho 2 đường tròn (O,R) và (O',R') cắt nhau tại A và B. Gọi CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ($C \in (O)$ và $D \in (O')$, đồng thời B,C,D nằm cùng phía có bờ là OO'). Gọi E là giao điểm của BC và AD, F là giao điểm của BD và AC, G là giao điểm của EF và AB, H là hình chiếu của G lên CD. *a*) Chứng minh rằng $EF // CD$. *b*) Chứng minh rằng $\widehat{CAB} = \widehat{DAH}$.	

			
	a	Áp dụng định lý Ceva trong ΔACD: $\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}}.\frac{\overline{KD}}{\overline{KC}}=-1$ (1)	0,25
		Vì CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên $KC^2=KA.KB=KD^2$.	0,25
		Suy ra: $KC=KD$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FC}{FA}=\frac{ED}{EA}$ suy ra $EF//CD$.	0,25
	b	Gọi K là giao điểm của AB và CD. $\frac{KA}{KC}=\frac{KC}{KB}\Rightarrow \Delta KAC\sim\Delta KCB\Rightarrow\frac{AC}{CB}=\frac{KA}{KC}$ (3)	0,25
		$\frac{KA}{KD}=\frac{KD}{KB}\Rightarrow \Delta KAD\sim\Delta KDB\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{KA}{KD}$ (4)	0,25
		Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$ (5)	0,25
		Từ $EF//CD\Rightarrow\Delta BKD\sim\Delta BGF\Rightarrow\frac{BG}{BK}=\frac{GF}{KD}$	0,25
		Mà $\frac{AG}{AK}=\frac{FG}{CK}=\frac{GF}{KD}$	0,25
		Do đó: $\frac{AG}{AK}=\frac{BG}{BK}\Rightarrow\frac{KA}{KB}=\frac{GA}{GB}$ hay $(A,B,G,K)=-1$ (6)	0,25
		Qua B kẻ đường thẳng song song với GH cắt AH tại J (7) Mà $(JA,JB,JG,JK)=-1$ suy ra HK đi qua trung điểm của JB.	0,25
		Mà $GH\perp CD$, $GH//JB$ suy ra $JB\perp CD$ hay $JB\perp HK$ suy ra J và B đối xứng với nhau qua HK hay $BC=JC$; $BD=DJ$ (8)	0,25

		Từ (4) và (8) suy ra $\frac{AC}{JC}=\frac{AD}{JD}$ (9).	0,25
		Vì CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên góc $\widehat{BAC}=\widehat{BCD}$; $\widehat{BAD}=\widehat{BDC}$.	0,25
		Lại có: $\widehat{CAD}+\widehat{CJD}=\widehat{CAB}+\widehat{BAD}+\widehat{CBD}=\widehat{BCD}+\widehat{BDC}+\widehat{CBD}=180^\circ$ nên tứ giác $ACJD$ nội tiếp.	0,25
		Theo định lý Ptoleme: $AJ.CD=AC.JD+AD.JC$	0,25
		Theo (9) $AC.JD=AD.JC$ AC.JD=AD.JC.	0,25
		Ta có: $2AC.JD=AC.JD+AD.JC=AJ.CD=2AJ.CK$	0,25
		Do đó: $\frac{AC}{CK}=\frac{AJ}{JD}$ mà $\widehat{ACK}=\widehat{AJD}$ nên $\Delta ACK \sim \Delta AJD$	0,25
		Vậy $\widehat{KAC}=\widehat{DAJ}$ hay $\widehat{CAB}=\widehat{DAH}$.	0,25
Bài 4. **(5,0 điểm)**		Cho n là số nguyên dương. Nam có n đồng xu (mỗi đồng xu có một mặt Ngửa (N) và một mặt Sấp (S)) để nằm ngẫu nhiên thành một dãy trên mặt bàn. Dãy n đồng xu được gọi là ở "*trạng thái nghỉ*" nếu tất cả các mặt của đồng xu đều là mặt Sấp. Từ một trạng thái ban đầu $T=\underbrace{**...*}_{n}$ của dãy n đồng xu (với * là S hoặc N), Nam lặp đi lặp lại các thao tác sau: nếu có k đồng xu xuất hiện mặt (N) với $k>0$, thì Nam lật ngược đồng xu vị trí thứ k hoặc Nam dừng lại nếu T đạt trạng thái nghỉ. Kí hiệu $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ. (Ví dụ với $n=3$ đồng xu nằm trên mặt bàn có trạng thái ban đầu là $T=SNS$ thì Nam sẽ thực hiện $SNS\to NNS\to NSS\to SSS$, và có $b(T)=3$). a) Giả sử Nam có ba trạng thái ban đầu của dãy năm đồng xu nằm trên mặt bàn là $T_1=NNSNN$, $T_2=SNSNS$, $T_3=SNSNN$. Em hãy viết các bước mà Nam đưa chúng về trạng thái nghỉ và tính $b(T_1)$, $b(T_2)$, $b(T_3)$. b) Với dãy n đồng xu nằm trên mặt bàn ta sẽ có 2^n trạng thái ban đầu. Ứng với mỗi trạng thái ban đầu T ta có $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ, biết $b(T)$ là hữu hạn. Tính $E(n)$ là số bước trung bình để đưa dãy n đồng xu về trạng thái nghỉ.	
	a	Nam sẽ thực hiện các bước như sau: $T_1=NNSNN\to NNSSN\to NNNSN\to NNNNN\to NNNNS\to NNNSS$ $\to NNSSS\to NSSSS\to SSSSS$ $\Rightarrow b(T_1)=8$	0,25 0,25
		$T_2=SNSNS\to SSSNS\to NSSNS\to NNSNS\to NNNNS\to NNNSS$ $\to NNSSS\to NSSSS\to SSSSS$ $\Rightarrow b(T_2)=8$	0,25 0,25
		$T_3=SNSNN\to SNNNN\to SNNSN\to SNSSN\to SSSSN\to NSSSN\to NNSSN$ $\to NNNSN\to NNNNN\to NNNNS\to NNNSS\to NNSSS\to NSSSS\to SSSSS$ $\Rightarrow b(T_3)=13$	0,25 0,25
	b	Xét trạng thái của đồng xu thứ 1 và thứ n và ta kí hiệu $N*=N\underbrace{*...*}_{n-1}$; $*S=\underbrace{*...*}_{n-1}S$; $S*N=S\underbrace{*...*}_{n-2}N$; $N*S=N\underbrace{*...*}_{n-2}S$ • Nếu $T=N*$ khi đó Nam sẽ thực hiện các bước cho đến khi tất cả $n-1$ vị trí của * biến thành S thì đồng xu đầu tiên bị lật.	0,5

		$\Rightarrow E_{N*}(n)=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum b\left(T_{\underbrace{*\ldots *}_{n-1}}\right)+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2^{n-1}}\right]=E(n-1)+1$	
		• Nếu $T=*S$ thì đồng xu cuối không bao giờ bị lật và $n-1$ vị trí đầu được thay đổi đến khi tất cả chúng đều là S. $\Rightarrow E_{*S}(n)=E(n-1)$. Từ 2 ý trên suy ra $\Rightarrow E_{N*S}(n)=E(n-2)+1$	0,25 0,25
		• Nếu $T=S*N$ thì $n-2$ đồng xu ở giữa sẽ bị lật đến khi tất cả chúng đều là S. Sau đó các đồng xu ở vị trí $1,\ 2,\ ....,\ n-1$ sẽ được lật và tiếp tục đồng xu ở vị trí $n,\ n-1,\ ....,1$ sẽ được lật. $\Rightarrow E_{S*N}(n)=E(n-2)+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-1}+\underbrace{1+\ldots+1}_{n}=E(n-2)+2n-1$	0,5
		Ta lại có $E_{N*}(n)=\frac{1}{2}\left[E_{N*N}(n)+E_{N*S}(n)\right] \Leftrightarrow E(n-1)+1=\frac{1}{2}\left[E_{N*N}(n)+E(n-2)+1\right]$ $\Leftrightarrow E_{N*N}(n)=2E(n-1)-E(n-2)+1$	0,5
		Ta lại có $E_{*S}(n)=\frac{1}{2}\left[E_{S*S}(n)+E_{N*S}(n)\right] \Leftrightarrow E(n-1)=\frac{1}{2}\left[E_{S*S}(n)+E(n-2)+1\right]$ $\Leftrightarrow E_{S*S}(n)=2E(n-1)-E(n-2)-1$	0,5
		Từ đó ta có $E(n)=\frac{1}{4}\left[E_{N*S}(n)+E_{N*N}(n)+E_{S*N}(n)+E_{S*S}(n)\right]$ $\Leftrightarrow E(n)=\frac{1}{4}\left\{\left[E(n-2)+1\right]+\left[2E(n-1)-E(n-2)+1\right]+\left[E(n-2)+2n-1\right]+\left[2E(n-1)-E(n-2)-1\right]\right\}$ $\Leftrightarrow E(n)=E(n-1)+\frac{n}{2}$	0,5
		Kết hợp với $E(1)=\frac{1}{2}$ từ đó ta tìm được $E(n)=\frac{n(n+1)}{4}$.	0,5

--------------------**HẾT**--------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KIÊN GIANG**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2021-2022**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi thứ hai: 25/11/2021 *(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)*

Bài 5. (6,0 điểm)

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c)\geq 0.$$

Bài 6. (7,0 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n lớn hơn hoặc bằng 2, ta viết $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ là tất cả các ước của n theo thứ tự tăng dần. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho 2022 là ước của n và $n=d_{21}.d_{22}$.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BN, CM cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Đường thẳng qua A song song với SH cắt CM, BN lần lượt tại P,Q.

a) Gọi I là trung điểm BC và G là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN và đường tròn (O). Chứng minh rằng tam giác IPQ cân.

b) Gọi K là trung điểm MN. Hai đường thẳng HI và MN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng hai đường tròn (HMN) và (HTK) tiếp xúc với nhau.

--------------------**HẾT**--------------------

Ghi chú:

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG ------------- **HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2021-2022** --------------------------- Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi thứ hai: 25/11/2021 *(Hướng dẫn chấm có 05 trang)*

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp áp mà bài giải vẫn logic, đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng.

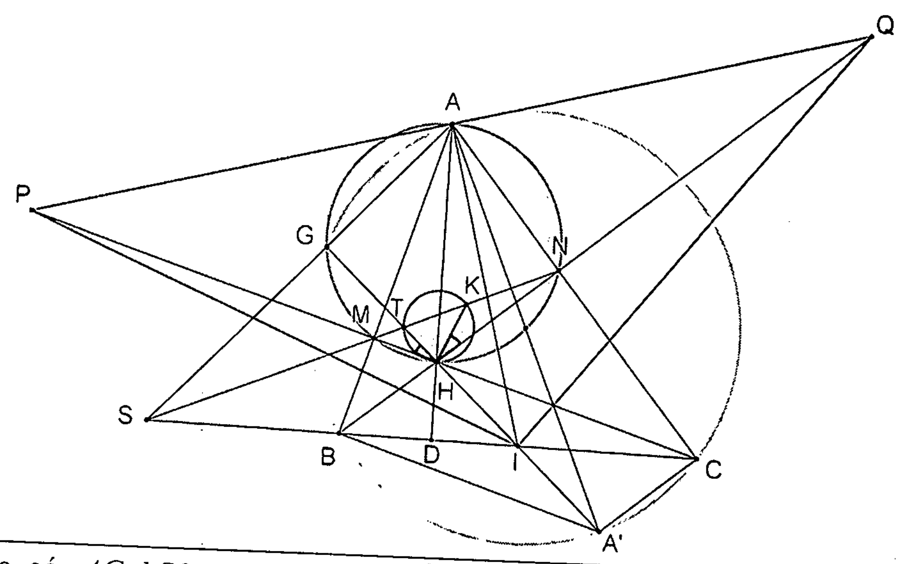
- Nếu học sinh có sử dụng các định lý, các hệ quả, các bổ đề... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.

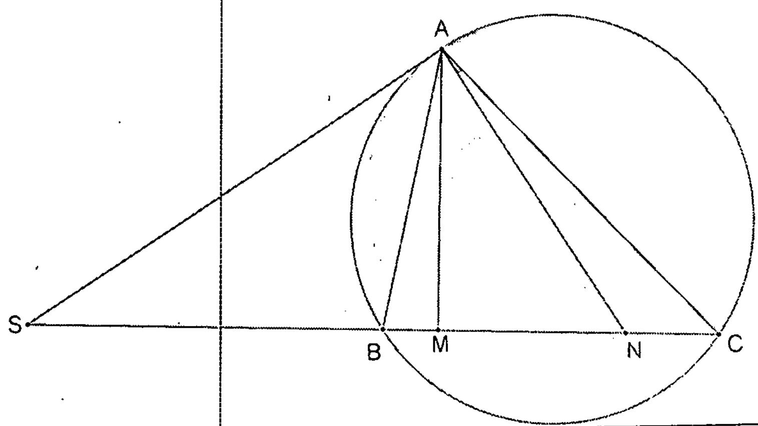
- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý ***không làm tròn***, giám khảo có thể thống nhất đáp án, chia các ý điểm lớn thành bội của 0,25

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	**Ý**	**Nội dung**	**Biểu điểm**
Bài 5. **(6,0 điểm)**		Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c)\ge 0.$$	
		Vì $a^2+b^2+c^2=1$ nên ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh về dạng đồng bậc $$3(a^2+b^2+c^2)^2-5(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)+6abc(a+b+c)\ge 0.$$	**1,0**
		Biến đổi và thu gọn, ta có bất đẳng thức tương đương $$3\sum a^4+6\sum a^2b^2+abc\sum a\ge 5\sum ab(a^2+b^2).$$	**1,0**

		Sử dụng bất đẳng thức Schur $$\sum a^r(a-b)(a-c)\ge 0.$$ Với $r=2$, ta có đánh giá $$\sum a^4+abc\sum a\ge \sum ab\left(a^2+b^2\right).$$	1,0
		Do đó, để hoàn tất lời giải, ta chỉ cần chứng minh $$2\sum a^4+6\sum a^2b^2\ge 4\sum ab\left(a^2+b^2\right).$$ Nhưng bất đẳng thức trên luôn đúng, vì nó tương đương $$\sum (a-b)^4\ge 0.$$ Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.	1,0 1,0
		Bổ đề. (Bất đẳng thức Schur) Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng: $$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\ge 0.$$ **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $(a-b)\left[a^2(a-c)-b^2(b-c)\right]+c^2(c-a)(c-b)\ge 0$ (luôn đúng).	1,0
Bài 6. **(7,0 điểm)**		Với mỗi số nguyên dương *n*, viết $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ là tất cả các ước của *n* theo thứ tự tăng dần. Tìm tất cả các giá trị của *n* sao cho 2022 là ước của *n* và $n=d_{21}.d_{22}$.	
		Ta có $n=d_1d_k=d_2d_{k-1}=...=d_pd_{k-(p-1)}$.	1,0
		Giả thiết $n=d_{21}.d_{22}$ suy ra $1+k=43\Leftrightarrow k=42$. Vậy *n* có 42 ước.	1,0
		Mặt khác, $2022=2.3.337$ nên *n* có dạng $n=2^{\alpha}.3^{\beta}.337^{\gamma}.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ với $\alpha,\beta,\gamma\ge 1$. Suy ra $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\mid 42$	1,0 1,0

		$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\alpha_1+1)...(\alpha_n+1)=42$ Mà $42=2.3.7$, dó đó $\alpha_i=0\left(i=\overline{1..n}\right)$ và $(\alpha;\beta;\gamma)$ là các hoán vị của $(1;2;6)$.	1,0 1,0
		Vậy có 6 giá trị n cần tìm là $n=2^{\alpha}.3^{\beta}.337^{\gamma}$ với $(\alpha;\beta;\gamma)$ là các hoán vị của $(1;2;6)$.	1,0
Bài 7. **(7,0 điểm)**		Cho tam giác nhọn $ABC\ (AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao $AD,\ BN,\ CM$ cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Đường thẳng qua A song song với SH cắt CM,BN lần lượt tại P,Q. a) Gọi I là trung điểm BC và G là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN và đường tròn (O). Chứng minh rằng tam giác IPQ cân. b) Gọi K là trung điểm MN. Hai đường thẳng HI và MN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng hai đường tròn (HMN) và (HTK) tiếp xúc nhau.	
	a		
		Ta có AG,MN,BC là 3 trục đẳng phương của 3 đường tròn $(O),(HMN)$ và đường tròn đường kính BC nên chúng đồng quy tại S.	0,5
		Dễ thấy I,H,G thẳng hàng nên H là trực tâm ΔSAI.	0,5
		hay $SH\perp AI$. Từ đó $QP\perp AI$ (1)	0,5
		Mặt khác, $(SD,BC)=-1$ nên $H(SD,BC)=-1$ và $HD\cap PQ=A, HB\cap PQ=Q, HC\cap PQ=P$.	0,5

		Suy ra A là trung điểm $PQ(2)$.	0,5
		Từ (1) và (2) suy ra tam giác IPQ cân	0,5
	b	**Bổ đề:** *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi M, N là hai điểm bất kì nằm trên đường thẳng BC. Khi đó AM, AN là hai đường đẳng giác nếu và chỉ nếu (O) tiếp xúc (AMN) tại A.*	
			
		Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại S. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{NAC} + \widehat{ACB} = \widehat{MAB} + \widehat{BAS} = \widehat{SAM}$. Suy ra AS cũng là tiếp tuyến của (AMN), hay (O) *tiếp xúc* (AMN) *tại* A.	1,5
		Trở lại bài toán, do $\Delta HCB \sim \Delta HNM$ nên $\frac{CB}{CH} = \frac{NM}{NH} \Leftrightarrow \frac{2CI}{CH} = \frac{2NK}{NH} \Leftrightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{NK}{NH}$	1,0
		hay $\Delta CIH \sim \Delta NKH$	0,5
		dẫn đến $\widehat{IHC} = \widehat{KHN}$ hay KH, TH là hai đường đẳng giác.	0,5
		Áp dụng bổ đề trên ta có điều phải chứng minh.	0,5

--------------------**HẾT**--------------------