MIN-MAX LIÊN QUAN HÀM MŨ, HÀM LÔ-GA-RÍT (NHIỀU BIẾN)

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐÁNH GIÁ, ÁP DỤNG BĐT.

DẠNG 2: ÁP DỤNG PHÁP HÀM SỐ, HÀM ĐẶC TRƯNG.
+ ÁP DỤNG HÀM SỐ
+ ÁP DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

DẠNG 3: ÁP DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH.

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐÁNH GIÁ, ÁP DỤNG BĐT.

Câu 1: Xét các số thức a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$a^x = b^y = \sqrt[3]{ab} \Rightarrow \begin{cases} x = log_a \sqrt[3]{ab} = \dfrac{1}{3}(1 + log_a b) \\ y = log_b \sqrt[3]{ab} = \dfrac{1}{3}(1 + log_b a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = x + 3y = \frac{1}{3}(1 + log_a b) + 1 + log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} log_a b + log_b a \ge \frac{4}{3} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} \in \left(2;\frac{5}{2}\right)$$

Câu 2: Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{log_{ab} a} + \frac{1}{log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \frac{1}{log_{ab} a} + \frac{1}{log_{\sqrt[4]{ab}} b} = log_a(ab) + log_b \sqrt[4]{ab}$

$= 1 + log_a b + \frac{1}{4}(log_b a + 1) = log_a b + \frac{1}{4 \, log_a b} + \frac{5}{4}$.

Đặt $x = log_a b$. Do $a, b > 1$ nên $x > 0$.

Khi đó $S = x + \frac{1}{4x} + \frac{5}{4} \ge 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$ (Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương x và $\frac{1}{4}x$).

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $min\, S = \frac{9}{4}$ tại $log_a b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{a}$.

Câu 3: Với a, b, c là các số thực lớn hơn 1, đặt $x = log_a(bc)$, $y = log_b(ca)$, $z = log_c(ab)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + 4z$.

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x = log_a b + log_a c; y = log_b c + log_b a; z = log_c a + log_c b$. Khi đó

$P = x + y + 4z = log_a b + log_a c + log_b c + log_b a + 4 log_c a + 4 log_c b$.

$P = \left(log_a c + \frac{4}{log_a c}\right) + \left(log_b c + \frac{4}{log_b c}\right) + \left(log_a b + \frac{1}{log_a b}\right)$.

Vì $a, b, c > 1 \Rightarrow log_a b > 0;\ log_b c > 0;\ log_a c > 0$ nên

$P = \left(log_a c + \frac{4}{log_a c}\right) + \left(log_b c + \frac{4}{log_b c}\right) + \left(log_a b + \frac{1}{log_a b}\right) \ge 2.2 + 2.2 + 2.1 = 10$.

Vậy $min\, P = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} log_a c = 2 \\ log_a b = 1 \\ log_b c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a^2 \\ a = b \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \end{cases}$.

Câu 4: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} x = log_a \sqrt{ab} \\ y = log_b \sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + log_a b) \\ y = \frac{1}{2}(1 + log_b a) \end{cases}$.

$P = x + 2y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}log_a b + 1 + log_b a = \frac{1}{log_a b} + \frac{1}{2}log_a b + \frac{3}{2}$.

Đặt $t = log_a b > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{t} + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} (t > 0)$.

$P = \frac{1}{t} + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{t}.\frac{t}{2}} + \frac{3}{2} = \sqrt{2} + \frac{3}{2} \in \left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{t}{2} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.

Vậy $min\, P = \sqrt{2} + \frac{3}{2} \in \frac{5}{2}; 3\Big)$.

Câu 5: Cho x, y là các số thực thỏa $log_{3x+y}(x^2 + y^2) \leq 1$. Khi $3x + y$ đạt giá trị lớn nhất, thì giá trị $k = \frac{x}{y}$ là

A. $k = 1$. **B.** $k = \frac{1}{2}$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét trường hợp $3x + y > 1$.

$\log_{3x+y}\left(x^2+y^2\right) \leq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 3x+y$ (1).

Đặt $P = 3x + y \Rightarrow y = P - 3x$.

(1) $\Leftrightarrow x^2 + (P - 3x)^2 - P \leq 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 6Px + P^2 - P \leq 0$ (2).

$$\Delta = 9P^2 - 10(P^2 - 2) = -P^2 + 10P$$

Nếu $\Delta < 0$ thì (2) vô nghiệm. Do đó $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 10$.

Vậy P_{max}. Khi đó (2) $\Leftrightarrow x = \frac{6P}{20} = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow k = \frac{x}{y} = 3$.

Câu 6: Cho các số thực $x; y$ thỏa mãn $x^2 + 4xy + 12y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = log_2(x - 2y)^2$ là

A. $max\, P = 3\,log_2 2$. **B.** $max\, P = log_2 12$.
C. $max\, P = 12$. **D.** $max\, P = 16$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 2y$. Từ $x^2 + 4xy + 12y^2 = 4$suy ra:

Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 4 \Rightarrow P = 2$

Nếu $y \neq 0$ta có:$P = log_2(x - 2y)^2 \Leftrightarrow 4(x - 2y)^2 = 4.2^P$

$$\Rightarrow \frac{4.2^P}{4} = \frac{4.(x - 2y)^2}{x^2 + 4xy + 12y^2} = \frac{4\left(\frac{x}{2y} - 1\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 2\frac{x}{2y} + 3}$$

Đặt $t = \frac{x}{2y}, t \in \mathbb{R}, 2^P = \frac{4t^2-8t+4}{t^2+2t+3} \Leftrightarrow 2^P(t^2 + 2t + 3) = 4t^2 - 8t + 4$

$\Leftrightarrow (2^P - 4)t^2 + 2(2^P + 4)t + 3.2^P - 4 = 0$Xét với $(P \neq 2)$

Để phương trình có nghiệm: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (2^P + 4)^2 - (2^P - 4)(3.2^P - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2(2^P)^2 + 24.2^P \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2^P \leq 12 \Rightarrow P \leq log_2 12$$

Vậy $max\, P = log_2 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{x}{2y} \\ x^2 + 4xy + 12y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 7: Cho x,y là các số thực dương, thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4x+y$.

A. $P\sqrt{5}_{min}$ **B.** $P\sqrt{5}_{min}$ **C.** $P\sqrt{5}_{min}$ **D.** $P\sqrt{5}_{min}$.

Lời giải:

Chọn A

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge 3x+y^2\Leftrightarrow x(y-3)\ge y^2$.Từ đây, x,y là các số thực dương nên ta suy ra $y>3$ và $x\ge\frac{y^2}{y-3}=y+3+\frac{9}{y-3}$

Do đó, $P\ge 4\left(y+3+\frac{9}{y-3}\right)+y=5(y-3)+\frac{36}{y-3}+27\ge 12\sqrt{5}+27$.

Dấu bằng xảy ra khi$y=3+\frac{6\sqrt{5}}{5}, x=6+\frac{27\sqrt{5}}{10}$.

Câu 8: Cho $m=log_a(\sqrt[3]{ab})$ với $a>1$, $b>1$ và $P=log_a^2 b+16\,log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $m=\frac{1}{3}log_a(ab)=\frac{1}{3}(1+log_a b)\Rightarrow log_a b=3m-1$.

Suy ra $P=log_a^2 b+\frac{16}{log_a b}\Leftrightarrow P=(3m-1)^2+\frac{16}{3m-1}\Leftrightarrow P=(3m-1)^2+\frac{8}{3m-1}+\frac{8}{3m-1}$.

Vì $a>1$, $b>1$ nên $log_a b=3m-1>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho ba số dương ta có:

$\Leftrightarrow P=(3m-1)^2+\frac{8}{3m-1}+\frac{8}{3m-1}\ge 3.\sqrt[3]{(3m-1)^2.\frac{64}{(3m-1)^2}}\Leftrightarrow P\ge 12$.

Dấu bằng xảy ra khi $(3m-1)^2=\frac{8}{3m-1}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 9: Xét các số thực dương a, b, x,y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^{2x}=b^y=a^4b^4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+3x+2y$ có dạng $m+n\sqrt{14}$ (với m,nlà các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

A. 48 **B.** 34 **C.** 30. **D.** 38.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có: $a^{2x}=b^y=a^4b^4\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2x}=a^4b^4\\b^y=a^4b^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=log_a(a^4b^4)\\y=log_b(a^4b^4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4+4\,log_a b\\y=4+4\,log_b a\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(1+log_a b)\\y=4(1+log_b a)\end{cases}$

Do đó: $P=xy+3x+2y=8(1+log_a b)(1+log_b a)+6(1+log_a b)+8(1+log_b a)$

$=16+8\,log_b a+8\,log_a b+6+6\,log_a b+8+8\,log_b a$

$=30+14\,log_a b+16\,log_b a$

Đặt $t=log_a b$. Vì $a,b>1$ nên $log_a b>log_a 1=0$.

Khi đó $P=30+14t+\frac{16}{t}\ge 30+2\sqrt{14t.\frac{16}{t}}=30+8\sqrt{14}$.

Vậy Pđạt giá trị nhỏ nhất là $30+8\sqrt{14}$ khi $14t=\frac{16}{t}\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ hay $b=a^{\frac{2\sqrt{14}}{7}}$.

Ta có: $\begin{cases} m = 30 \\ n = 8 \end{cases} \Rightarrow S = m + n = 38$.

Câu 10: Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $log_{3x^2+2y^2}(x + 2y) \geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + 2y$.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Nếu $0 < 3x^2 + 2y^2 < 1$ thì từ giả thiết $log_{3x^2+2y^2}(x + 2y) \geq 1$ ta suy ra $x + 2y \leq 1$.

Nếu $3x^2 + 2y^2 > 1$ thì khi đó ta có:

$log_{3x^2+2y^2}(x + 2y) \geq 1 \Leftrightarrow x + 2y \geq 3x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2y^2 - 2y \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{7}{12}$.

Ta viết lại $T = x + 2y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \sqrt{2}\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{7}{6}$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwartz thì

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \sqrt{2}\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2}.\sqrt{\left(x\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$\leq \sqrt{\frac{7}{3}}.\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{7}{6}$.

Do đó $T \leq \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Vậy $T\frac{7}{3}_{max}$ đạt được khi $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 11: Xét các số thực x, y thỏa mãn $log_2(x - 1) + log_2(y - 1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$.

A. $T = 9$. **B.** $T = \frac{7}{3}$. **C.** $T = \frac{5}{3}$. **D.** $T = 7$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$.

Khi đó: $log_2(x - 1) + log_2(y - 1) = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 2 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 1$.

Suy ra: $P = 2x + 3y = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 = 2(x - 1) + \frac{6}{x-1} + 5$.

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x - 1) + \frac{6}{x-1} \geq 2\sqrt{2(x - 1).\frac{6}{x-1}}$

$\Rightarrow 2(x - 1) + \frac{6}{x-1} \geq 4\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 4\sqrt{3} + 5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x - 1) = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}(N) \\ x = 1 - \sqrt{3}(L) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x - 2y = 3(1 + \sqrt{3}) - 2\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = 1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow T = ab = \frac{5}{3}$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P = 2x + \frac{6}{x-1} + 3 \Rightarrow P' = 2 - \frac{6}{(x-1)^2}$

$$P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}(N) \\ x = 1 - \sqrt{3}(L) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{3}+5$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P\sqrt{3}\sqrt{3}\frac{2\sqrt{3}+3}{3}_{min}$.

Do đó: $3x-2y=3(1+\sqrt{3})-2\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\frac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;b=\frac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\frac{5}{3}$.

Câu 12: Xét các số thực x,ythỏa mãn $log_2(x-1)+log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$?

A. $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}$

Khi đó: $log_2(x-1)+log_2(y-1)=1\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=2\Leftrightarrow y-1=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow y=\frac{2}{x-1}+1$

Suy ra: $P=2x+3y=2x+\frac{6}{x-1}+3=2(x-1)+\frac{6}{x-1}+5$

Cách 1: Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1)+\frac{6}{x-1}\geq 2\sqrt{2(x-1).\frac{6}{x-1}}$

$$\Rightarrow 2(x-1)+\frac{6}{x-1}\geq 4\sqrt{3}\Rightarrow P\geq 4\sqrt{3}+5$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1)=\frac{6}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)^2=3\Leftrightarrow|x-1|=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}(N)\\x=1-\sqrt{3}(L)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt{3}}+1=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3(1+\sqrt{3})-2\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\frac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;b=\frac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\frac{5}{3}$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P=2x+\frac{6}{x-1}+3\Rightarrow P'=2-\frac{6}{(x-1)^2}$

$$P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}(N)\\x=1-\sqrt{3}(L)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{3}+5$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P\sqrt{3}\sqrt{3}\frac{2\sqrt{3}+3}{3}{}_{min}$.

Do đó: $3x-2y=3(1+\sqrt{3})-2\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\frac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;b=\frac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\frac{5}{3}$.

Câu 13: Cho x,y,zlà các số thực dương thỏa mãn $64^{\frac{1}{x}}+64^{\frac{1}{2y}}+64^{\frac{1}{3z}}=3.4^{2020}$. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $P=\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{2x+2y+3z}+\frac{1}{x+2y+6z}+1515$

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức côsi cho 4 số dương ta có:

$$(x+2y+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)\ge 16\Leftrightarrow\frac{1}{x+2y+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$

$$(x+x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)\ge 16\Leftrightarrow\frac{1}{x+x+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$

$$(x+2y+3z+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}\right)\ge 16\Leftrightarrow\frac{1}{x+2y+3z+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{3z}\right)$$

Từ đó suy ra $P=\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{2x+2y+3z}+\frac{1}{x+2y+6z}+1515\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)+1515$

Từ giả thiết ta lại có $3.4^{2020}=64^{\frac{1}{x}}+64^{\frac{1}{2y}}+64^{\frac{1}{3z}}\ge 3\sqrt[3]{64^{\frac{1}{x}}.64^{\frac{1}{2y}}.64^{\frac{1}{3z}}}=3.4^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}$

Suy ra $4^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}\le 4^{2020}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\le 2020$

Vậy $P\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)+1515\le\frac{2020}{4}+1515=2020$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{3z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=2020\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2020};y=\frac{3}{4040};z=\frac{1}{2020}$.

Câu 14: Xét các số thực dương a, b, c, x,y, z thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $10;13)$. **B.** $7;10)$. **C.** $3;5)$. **D**. $5;7)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có

$x=\frac{1}{2}\left(1+\log_a b+\log_a c\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(1+\log_b a+\log_b c\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(1+\log_c b+\log_c a\right)$. Khi đó ta có

$2P = 4 + \log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b$.

Vì $a > 1, b > 1, c > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b c > 0$, $\log_c a > 0$, $\log_b a > 0$, $\log_c b > 0$, $\log_a c > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta được

$\log_a b + \log_b a \geq 2\sqrt{\log_a b.\log_b a}$ hay $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Tương tự $\log_a c + \log_c a \geq 2$ và $\log_b c + \log_c b \geq 2$.

Do đó $2P \geq 10$ hay $P \geq 5$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{min} = 5$.

Câu 15: Cho hai số thực dương x, ythỏa mãn $log_3(x + y + 2) = 1 + log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{a}{b}$với $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$. Hỏi $a + b$bằng bao nhiêu.

A. 2. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 13

Lời giải

Chọn D

Ta có $log_3(x + y + 2) = 1 + log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right) \Leftrightarrow log_3\frac{x+y+2}{3} = log_3\left(\frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+2}{3} = \frac{x^2+y^2-(x+y)}{xy}$. Gọi $m > 0$là giá trị nhỏ nhất của $\frac{x^2+y^2}{xy}$khi đó $m$là số dương nhỏ nhất để hệ

$\begin{cases} \frac{x+y+2}{3} + \frac{x+y}{xy} = m \\ \frac{x^2+y^2}{xy} = m \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} \frac{x+y+2}{3} + \frac{x+y}{xy} = m \\ \frac{x^2+y^2}{xy} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 = m \\ \frac{x+y+2}{3} + \frac{x+y}{xy} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = (m+2)xy \\ \frac{x+y+2}{3} + \frac{m+2}{x+y} = m \end{cases}$

Từ $(x + y)^2 = (m + 2)xy \Rightarrow (m + 2)xy \geq 4xy \Rightarrow m \geq 2$.

Đặt $t = x + y > 0 \Rightarrow \frac{x+y+2}{3} + \frac{m+2}{x+y} = m \Leftrightarrow t^2 + (2 - 3m)t + 6 + 3m = 0$ (*). Ta đi tìm $m \geq 2$để (*) có nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta = 9m^2 - 24m - 20 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{10}{3}$. Do đó $\frac{x^2+y^2}{xy} \geq \frac{10}{3}$, dấu "=" xảy ra khi

$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (1; 3)$. Vậy $a + b = 13$.

Câu 16: Cho các số thực dương $x$và $y$thỏa mãn $4 + 9.3^{x^2-2y} = \left(4 + 9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+18}{x}$.

A. $P = 9$. **B.** $P = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P = 1 + 9\sqrt{2}$. **D.** $P = \frac{9+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta đặt $t = x^2 - 2y, t \in \mathbb{R}$.

Phương trình $4 + 9.3^{x^2-2y} = \left(4 + 9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$trở thành

$4 + 9.3^t = (4 + 9^t).\frac{49}{7^t} \Leftrightarrow 4(7^t - 49) + 9^t\left[9.\left(\frac{7}{3}\right)^t - 49\right] = 0$.

Nhận thấy $t = 2$là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh $t = 2$là nghiệm duy nhất của phương trình.

- Xét $t > 2$: $7^t > 49$và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t > 49$nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.
- Xét $t < 2$: $7^t < 49$và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t < 49$nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $t = x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2-2}{2}$thay vào $P = \frac{x+2y+18}{x} = \frac{x^2+x+16}{x}$

$= x + \frac{16}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x.\frac{16}{x}} + 1 = 9$. Dấu bằng đạt được khi $x = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 4$.

Câu 17: Xét các số thực dương a, b, x,y thỏa mãn $a > 1$, $b > 1$và $a^{2x} = b^{3y} = a^6 b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3xy + 2x + y$có dạng $m + n\sqrt{30}$ (với m, nlà các số tự nhiên), tính $S = m + n$

A. 34 **B.** 36. **C.** 52. **D.** 48

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có: $a^{2x} = b^{3y} = a^6b^6 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} = a^6b^6 \\ b^{3y} = a^6b^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = log_a(a^6b^6) \\ 3y = log_b(a^6b^6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 + 6\,log_a b \\ 3y = 6 + 6\,log_b a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(1 + log_a b) \\ y = 2(1 + log_b a) \end{cases}$$

Do đó: $P = 3xy + 2x + y = 18(1 + log_a b)(1 + log_b a) + 6(1 + log_a b) + 2(1 + log_b a)$

$= 18 + 18\,log_b a + 18\,log_a b + 18 + 6 + 6\,log_a b + 2 + 2\,log_b a$

$= 44 + 24\,log_a b + 20\,log_b a$

Đặt $t = log_a b$. Vì $a, b > 1$nên $log_a b > log_a 1 = 0$.

Khi đó $P = 44 + 24t + \frac{20}{t} \geq 44 + 2\sqrt{24t.\frac{20}{t}} = 44 + 8\sqrt{30}$.

Vậy Pđạt giá trị nhỏ nhất là $44 + 8\sqrt{30}$khi $24t = \frac{20}{t} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{30}}{6}$hay $b = a^{\frac{\sqrt{30}}{6}}$.

Ta có: $\begin{cases} m = 44 \\ n = 8 \end{cases} \Rightarrow S = m + n = 52$

Câu 18: Cho hai số thực $x; y; z$ thỏa mãn hệ thức $e^{x+2y+z} + e^{2x-y-2} \leq 3x + y + z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 + 2z^2 - 22x$ bằng?

A. -19. **B.** 12. **C.** -15. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Chúng ta nắm bắt được dạng thì sẽ có cách giải như sau:

$e^{x+2y+z} + e^{2x-y-2} \leq 3x + y + z \Leftrightarrow e^u + e^v \leq u + v + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + 2y + z = 0 \\ v = 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ z = -5x + 4 \end{cases}$

Thế vào biểu thức T, ta được:

$$T = x^2 + (2x-2)^2 + 2(-5x+4)^2 - 22x = 55x^2 - 110x + 36 = 55(x-1)^2 - 19 \geq -19$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là: $T_{\min} = -19$.

Câu 19: Cho hai số thực dương a, b lớn hơn 1 và biết phương trình $a^{x^2}.b^{x+2} = 1$ có nghiệm thực. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$ có dạng $\frac{m}{n}$với m, n là số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $m + 2n$ bằng

A. 34. **B.** 21. **C.** 23. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương với $x^2 + (x+2)\log_a b = 0 \Leftrightarrow x^2 + x\log_a b + 2\log_a b = 0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta = (\log_a b)^2 - 8\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \log_a b \geq 8$ ( ) $log_a b > 0$.

Khi đó $P=\log_a b+\dfrac{4}{\log_a b}+1=f(t)=t+\frac{4}{t}+1\geq \underset{8;+\infty)}{min} f(t)=f(8)=\frac{19}{2}=\frac{m}{n}$.

Vậy $m+2n=23$.

Câu 20: Cho các số thực a,b thỏa mãn điều kiện $0<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=$

$log_a \frac{4(3b-1)}{9}+8\,log_{\frac{b}{a}}^2 a-1$.

A. 6. **B.** 8. **C.** $3\sqrt[3]{2}$. **D**. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $log_{\frac{b}{a}}^2 a=\frac{1}{log_a^2\frac{b}{a}}=\frac{1}{(log_a b-1)^2}$.

$(3b-2)^2\geq 0\Rightarrow 9b^2-12b+4\geq 0\Rightarrow \frac{12b-4}{9}\leq b^2\Rightarrow log_a\frac{4(3b-1)}{9}\geq log_a b^2=2\,log_a b$.

Do đó: $P\geq 2\,log_a b+\frac{8}{(log_a b-1)^2}-1\Rightarrow P\geq (log_a b-1)+(log_a b-1)+\frac{8}{(log_a b-1)^2}+1$.

Mà $0<b<a<1\Rightarrow log_a b>log_a a=1\Rightarrow log_a b-1>0$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $(log_a b-1)+(log_a b-1)+\frac{8}{(log_a b-1)^2}\geq 6\Rightarrow P\geq 7$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}3b-2=0\\ log_a b-1=\frac{8}{(log_a b-1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{2}{3}\\ log_a b=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Vậy $min\,P=7$.

Câu 21: Cho số thực $a,b>1$ thỏa mãn điều kiện $log_{2018} a+log_{2019} b=2020^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{log_{2019} a}+\sqrt{log_{2018} b}$?

A. $2020\sqrt{\log_{2019}2018+\log_{2018}2019}$. **B.** $\dfrac{1}{2020}\left(\log_{2019}2018+\log_{2018}2019\right)$.

C. $\dfrac{2020}{\sqrt{\log_{2019}2018+\log_{2018}2019}}$. **D.** $2020\sqrt{\log_{2019}2018}+2020\sqrt{\log_{2018}2019}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\sqrt{\log_{2019}a}+\sqrt{\log_{2018}b}=\sqrt{\log_{2019}2018}.\sqrt{\log_{2018}a}+\sqrt{\log_{2018}2019}\sqrt{\log_{2019}b}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có:

$P^2=\left(\sqrt{\log_{2019}2018}.\sqrt{\log_{2018}a}+\sqrt{\log_{2018}2019}\sqrt{\log_{2019}b}\right)^2$

$\leq\left(\log_{2019}2018+\log_{2018}2019\right)\left(\log_{2018}a+\log_{2019}b\right)=\left(\log_{2019}2018+\log_{2018}2019\right)2020^2$

$\Rightarrow P\leq 2020\sqrt{\log_{2019}2018+\log_{2018}2019}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\log_{2018}a}}{\sqrt{\log_{2019}2018}}=\dfrac{\sqrt{\log_{2019}b}}{\sqrt{\log_{2018}2019}}\\ \log_{2018}a+\log_{2019}b=2020^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\log_{2018}2019\right)\log_{2018}a=\left(\log_{2019}2018\right)\log_{2019}b\\ \log_{2018}a+\log_{2019}b=2020^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \&log\quad_{2018}a=\frac{2020^2}{1+c^2}\{log_{2019}b=\frac{2020^2c^2}{1+c^2}$ (với $c=log\quad_{2018}2019$)

Vậy tồn tại $a,b>1$ để đẳng thức xảy ra nên $\max P=2020\sqrt{\log_{2019}2018+\log_{2018}2019}$.

Câu 22: Cho $a>0, b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 6. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $16a^2+b^2+1 \geq 2\sqrt{16a^2b^2}+1=8ab+1$ do đó:

$\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)$

$\geq \log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)$

$=\log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)+\dfrac{1}{\log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)}$

$\geq 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right).\dfrac{1}{\log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)}}=2$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}16a^2=b^2\\8ab+1=4a+5b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=b\\2b^2+1=6b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=3\end{cases}$$

Vậy $a+2b=\frac{27}{4}$.

Câu 23: Cho $x,y,z>0$; $a,b,c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(10;15)$. **B.** $\left(\frac{-11}{2};\frac{13}{2}\right)$. **C.** $(-10;10)$. **D.** $[15;20]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$

$$\Rightarrow x\,log_{abc}\,a=y\,log_{abc}\,b=z\,log_{abc}\,c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=2\,log_{abc}\,a\\\dfrac{1}{y}=2\,log_{abc}\,b\\\dfrac{1}{z}=2\,log_{abc}\,c\end{cases}$$

Do đó: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2(log_{abc}\,a+log_{abc}\,b+log_{abc}\,c)=2\,log_{abc}\,a\,bc=2$

Suy ra: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2-\frac{1}{z}$

Ta có: $P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2=16\left(2-\frac{1}{z}\right)-z^2=32-\frac{16}{z}-z^2$ $(z>0)$.

Mặc khác, $\frac{16}{z}+z^2=\frac{8}{z}+\frac{8}{z}+z^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{z}.\frac{8}{z}.z^2}=12$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $32-12=20$ tại $z=2$.

DẠNG 2: ÁP DỤNG PHÁP HÀM SỐ, HÀM ĐẶC TRƯNG.

ÁP DỤNG HÀM SỐ

Câu 24: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \le b < a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = log_{\frac{a}{b}} a + 2 log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = log_a b$, vì $b > 1$ và $\sqrt{a} \le b < a$ nên $\frac{1}{2} \le t < 1$.

Ta có $P = log_{\frac{a}{b}} a + 2 log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4 = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4$ trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2};1\right)$, ta có

$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4}{t^2} = \frac{(3t-2)(2-t)}{t^2.(1-t)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin \left[\frac{1}{2};1\right)$ hoặc $t = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2};1\right)$.

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right)} f(t) = 5$ khi $t = \frac{2}{3}$.

Vậy $min\, P = 5$ khi $log_a b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a^2}$.

Câu 25: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + ln\frac{x+2y}{y}$ là $a + ln\, b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 45. **B.** 81. **C.** 115. **D.** 108.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $xy \le 4y - 1$ nên $\frac{x}{y} \le \frac{4}{y} - \frac{1}{y^2}$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, ta có $0 < t \le 4$ (vì $\frac{4}{y} - \frac{1}{y^2} \le 4, \forall y > 0$).

Ta có $P = 12 + \frac{6}{t} + ln(t+2)$; $P'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} < 0$, với mọi $0 < t \le 4$.

Do đó $P(4)_{min} = \frac{27}{2} + ln\, 6$. Suy ra $a = \frac{27}{2}$, $b = 6$ nên $a.b = 81$.

Câu 26: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ là?

A. $-3 - log_5 3$. **B.** -4. **C.** $-2 - \sqrt{3}$. **D.** $-2 - log_3 5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3^a = 5^b = 15^{-c}$; $t > 0$.

Suy ra $\begin{cases} a = log_3 t \\ b = log_5 t \\ -c = log_{15} t \end{cases} \Rightarrow -c = \frac{1}{log_t 15} = \frac{1}{log_t 3 + log_t 5} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$.

Ta có $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) - 4(a+b+c)$.

$\Rightarrow P = (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) = [(a+b+c)-2]^2 - 4 \ge -4$.

$\Rightarrow P\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=0_{min} \end{cases}.$

Câu 27: Xét các số thực a, b sao cho $b > 1$, $\sqrt{a} \le b < a$. Biểu thức $P = log_{\frac{a}{b}} a + 2\,log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $a^2 = b^3$. **B.** $a = b^2$. **C.** $a^2 = b$. **D.** $a^3 = b^2$.

Lời giải

Chọn A

Do $b > 1$ mà $a > b$ suy ra $a > 1$.

Ta có $\sqrt{a} \le b < a \Leftrightarrow \log_a \sqrt{a} \le \log_a b < \log_a a \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \log_a b < 1$.

Theo bài ra $P = log_{\frac{a}{b}} a + 2\,log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow P = \frac{1}{log_a a - log_a b} + 2\frac{log_a\left(\frac{a}{b}\right)}{log_a \sqrt{b}}$

$\Leftrightarrow P = \frac{1}{1-log_a b} + 4\frac{1-log_a b}{log_a b}$.

Đặt $t = \log_a b$ suy ra $t \in \left[\frac{1}{2};1\right)$ ta được $P = \frac{1}{1-t} + 4\frac{1-t}{t}$ với $t \in \left[\frac{1}{2};1\right)$.

$P' = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4}{t^2}$ cho $P' = 0 \Rightarrow t^2 = 4(1-t)^2$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 8t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn) hoặc $t = 2$(loại)

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
P'		$-$	0	$+$	
P	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên giá trị nhỏ nhất $P = 5$ khi $t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow log_a b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 = b^3$.

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $1 < x < \sqrt{y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (log_x y - 1)^2 + 8\left(log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

A. 18.

B. 9.

C. 27.

D. 30

Lời giải

Chọn C

Ta có $log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}.\frac{log_x y - 1}{\frac{1}{2}log_x y - 1} = \frac{log_x y - 1}{log_x y - 2} = \frac{2\,log_x \sqrt{y} - 1}{2\,log_x \sqrt{y} - 2}$.

Suy ra $P = \left(2\,log_x \sqrt{y} - 1\right)^2 + 8\left(\frac{2\,log_x \sqrt{y} - 1}{2\,log_x \sqrt{y} - 2}\right)^2$.

Đặt $t = 2\,log_x \sqrt{y}$, do $1 < x < \sqrt{y} \Leftrightarrow log_x 1 < log_x x < log_x \sqrt{y} \Rightarrow t > 2$.

Ta có hàm số $f(t) = (t-1)^2 + 8.\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2$ với $t > 2$.

$f'(t) = \frac{2(t-1)(t-4)(t^2-2t+4)}{(t-2)^3}$; $f'(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên trên $(2; +\infty)$ ta được

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	0	$+$	
$f(t)$	|| $+\infty$	$\searrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (log_x y - 1)^2 + 8\left(log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2$ là 27 đạt được khi $t = 4 \Leftrightarrow 2\,log_x \sqrt{y} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x^2 \Leftrightarrow y = x^4$.

Câu 28: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $b^2 = 3ab + 4a^2$ và $a \in [4; 2^{32}]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4} log_2 \frac{b}{4}$. Tính tổng $T = M + m$.

A. $T = \frac{1897}{62}$. **B.** $T = \frac{3701}{124}$. **C.** $T = \frac{2957}{124}$. **D.** $T = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $b^2 = 3ab + 4a^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 3a(b + a) \Leftrightarrow (a + b)(b - 4a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = 4a \end{array}\right.$

Vì a, b dương nên $b = 4a$, ta thay vào P ta được

$$P = log_{\frac{a}{2}} 4a + \frac{3}{4} log_2 a = \frac{log_2 4a}{log_2 \frac{a}{2}} + \frac{3}{4} log_2 a = \frac{log_2 a + 2}{log_2 a - 1} + \frac{3\,log_2 a}{4}$$

Đặt $log_2 a = x$ vì $a \in [4; 2^{32}]$ nên $x \in [2; 32]$

Xét hàm số $P(x) = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{4}x$

$$P'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{3}{4} \Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (l) \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	2		3		32
$P(x)$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	$\frac{778}{31}$

Vậy $M = \frac{778}{32}; m = \frac{19}{4} \Rightarrow T = M + m = \frac{3701}{124}$.

Câu 29: Cho $m = \log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$ với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $m = \log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right) = \frac{1}{3}\log_a(ab) = \frac{1}{3}\left(1 + \log_a b\right)$.

$\Rightarrow 3m = 1 + \log_a b \Rightarrow \log_a b = 3m - 1$.

Do $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$.

Ta có: $P=\log_a^2 b+16\log_b a=\log_a^2 b+\dfrac{16}{\log_a b}=(3m-1)^2+\dfrac{16}{3m-1}$, với $m\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

$P'=6(3m-1)-\frac{48}{(3m-1)^2}$.

$P'=0\Leftrightarrow 6(3m-1)-\frac{48}{(3m-1)^2}=0\Leftrightarrow (3m-1)^3=8\Leftrightarrow 3m-1=2\Leftrightarrow m=1$.

Bảng biến thiên

m	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P=12\Leftrightarrow m=1$.

Câu 30: Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$ biết rằng $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x\neq 0$ và $-1\leq y\leq\frac{13}{2}$.

A. $P=1$. **B.** $P=4$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có biểu thức vế trái: $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\geq 4^{2-1}=4.(1)$

Xét biểu thức $f(x)=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$ với $-1\leq y\leq\frac{13}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{y+1}\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{\frac{15}{2}}\right]$ suy ra $f(x)=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}=g(t)=-t^3+3t+14$

Khảo sát hàm số $g(t)=-t^3+3t+14$trên đoạn $\left[0;\sqrt{\frac{15}{2}}\right]$ ta được kết quả: $g(t)\leq 16$.

$$\Rightarrow log_2 f(x)\leq log_2 16=4(2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}x^2=1\\ \sqrt{y+1}=1\end{cases}\Rightarrow x^2=1, y=0\Rightarrow P=1+1=2$.

Câu 31: Cho x,y là số thực dương thỏa mãn $log_5 x+log_5(7y)\geq log_5(x^2+7y)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=4x+7y$có dạng $a\sqrt{b}+c$, trong đó a,b,c là số tự nhiên và $a>1$. Xác định: $a+b+c$

A. $a+b+c=13$. **B.** $a+b+c=12$. **C.** $a+b+c=11$. **D.** $a+b+c=10$

Lời giải

Chọn A

Từ $log_5 x+log_5(7y)\geq log_5(x^2+7y)\Leftrightarrow 7xy\geq x^2+7y$.

Nhận xét: Nếu $0<x\leq 1$ thì $7y\geq 7xy\geq x^2+7y\Leftrightarrow 0\geq x^2$ (vô lý)

Xét$x>1$ thì $7xy\geq x^2+7y\Leftrightarrow 7y(x-1)\geq x^2\Leftrightarrow 7y\geq\frac{x^2}{x-1}$.

Vậy $P=4x+7y\geq 4x+\frac{x^2}{x-1}$.

Xét: $f(x)=4x+\frac{x^2}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$.

Có $f'(x)=4+\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{5x^2-10x+4}{(x-1)^2}$

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow 5x^2-10x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5-\sqrt{5}}{5}\text{(loai)}\\ x=\frac{5+\sqrt{5}}{5}\text{(nhan)}\end{array}\right.$.

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)=2\sqrt{5}+6$.

Câu 32: Cho x, ylà các số thực dương thoả mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **C.** $P = 3 + 2\sqrt{2}$. **D.** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow \ln xy \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 > 0$

Mà $x > 0, y > 0$nên $x > 1$và $y \geq \frac{x^2}{x-1}$. Suy ra $x + y \geq \frac{x^2}{x-1} + x$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x-1} + x = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}, x > 1$.

Ta có: $f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Do $x > 1$)$\Rightarrow f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	1		$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P = 3 + 2\sqrt{2}$.

Chú ý: Ta có tìm minh của $f(x)$như sau:

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3 \geq 2\sqrt{2(x-1)\frac{1}{x-1}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2(x-1) = \frac{1}{x-1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 33: Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ biết rằng $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1} = \log_2[14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$ với $x \neq 0$ và $-1 \leq y \leq \frac{13}{2}$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1} = \log_2[14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$.

Ta có $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1} \geq 4^{2\sqrt{x^2.\frac{1}{x^2}}-1} = 4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm 1$,.

Mặt khác $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 + 3\sqrt{y+1} - \left(\sqrt{y+1}\right)^3$.

Đặt $t = \sqrt{y+1}$ ta có $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{2}$. Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t + 14$. Ta tìm GTLN – GTNN của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]$ được $\min\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right) = \frac{56-9\sqrt{30}}{4}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f(1) = 16$.

Suy ra $\log_2[14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \leq \log_2 16 = 4$,.

Từ và suy ra ta có $\begin{cases} x = \pm 1 \\ t = \sqrt{y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Thay vào $P = 2$.

Câu 34: Xét các số thực x, ythỏa mãn $x > 0$và $x^4 + e^{4y} - 3 = x.e^y(1 - 2x.e^y)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \ln x + y$thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$. **B.** $2; 4)$. **C.** $-3; 0)$. **D.** $0; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^4 + e^{4y} - 3 = x.e^y(1 - 2x.e^y)$

Đặt $t = e^y (t > 0)$ta có: $x^4 + t^4 - 3 = xt(1 - 2xt) \Leftrightarrow 3 + xt = (x^2 + t^2)^2 \geq 4(xt)^2$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq xt \leq 1$.

Lại do $x, t > 0 \Rightarrow 0 < xt \leq 1 \Rightarrow 0 < x.e^y \leq 1 \Leftrightarrow ln\, x + y \leq 0$nên $P \leq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = t \\ xt = 1 \\ x, t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = t = 1$hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy $P0; 3)_{max}$.

Câu 35: Gọi S là tập các cặp số thực (x, y) sao cho $x \in [-1; 1]$ và $ln(x - y)^x - 2017x = ln(x - y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y + 1) - 2018x^2$ với $(x, y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x_0 \in (-1; 0)$. **B.** $x_0 = -1$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 \in 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - y > 0$

Ta có $ln(x - y)^x - 2017x = ln(x - y)^y - 2017y + e^{2018}$

$\Leftrightarrow (x - y)\, ln(x - y) - 2017(x - y) = e^{2018} \Leftrightarrow ln(x - y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0$ (*)

Xét hàm $f(t) = ln\, t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t}$, có $f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0$ với $\forall t > 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$,

suy ra $(*) \Leftrightarrow f(x - y) = 0 = f(e^{2018}) \Leftrightarrow x - y = e^{2018} \Leftrightarrow y = x - e^{2018}$

Khi đó $P = e^{2018x}(1 + x - e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$

$g'(x) = e^{2018x}(2019 + 2018x - 2018e^{2018}) - 4036x$

$g''(x) = e^{2018x}(2018.2020 + 2018^2 x - 2018^2 e^{2018}) - 4036$

$\leq e^{2018x}(2018.2020 + 2018^2 - 2018^2 e^{2018}) - 4036 < 0$ với $\forall x \in [-1; 1]$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$,

mà $g'(-1) = e^{-2018} + 2018 > 0$, $g'(0) = 2019 - 2018e^{2018} < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g(x_0) = 0$ và khi đó $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = g(x_0)$

Vậy P lớn nhất tại $x_0 \in (-1; 0)$.

Câu 36: Cho x, ythỏa mãn $log_4(x + y) + log_4(x - y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - y$.

A. $P\sqrt{3}_{min}$. **B.** $P\,\frac{10\sqrt{3}}{3}\,_{min}$ **C.** P_{min}. **D.** P_{min}.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết: $log_4(x + y) + log_4(x - y) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \\ x^2 - y^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \sqrt{y^2 + 4} \end{cases}$

Ta có: $P = 2x - y \geq 2\sqrt{y^2 + 4} - y$.

Xét hàm số: $f(y) = 2\sqrt{y^2 + 4} - y$có

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 4}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{y^2 + 4}}{\sqrt{y^2 + 4}}$$

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - \sqrt{y^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

BBT:

y	$-\infty$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $P = 2x - y \ge f(y) \ge 2\sqrt{3}$, dấu " = "xảy ra khi $\begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{y^2 + 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy $P\sqrt{3}_{min}$khi $\begin{cases} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Câu 37: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}$ và $log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1$. Xét biểu thức $P = 16yx^2 - 2x(3y + 2) - y + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó giá trị của $T = (4m + M)$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1 \Leftrightarrow 2(2x + y) - log\big(11 - (2x + y)\big) - 1 = 0$$

Đặt $t = 2x + y, 0 < t < 11$. Phương trình trở thành: $2t - log(11 - t) - 1 = 0. (1)$

Xét hàm số $f(t) = 2t - log(11 - t) - 1$ trên khoảng $(0; 11)$.

Có $y' = 2 + \frac{1}{11-t} > 0, \forall t \in (0; 11)$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến.

Dễ thấy (1) có nghiệm $t = 1$. Do đó $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Suy ra $2x = 1 - y$. Khi đó $P = 16y\frac{(1-y)^2}{4} - (1 - y)(3y + 2) - y + 5 = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$.

Xét hàm số $g(y) = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$ trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, có

$g'(y) = 12y^2 - 10y + 2 > 0, \forall y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Do đó, $\underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{min} g(y) = g(0) = 3, \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{max} g(y) = g(1) = 4$.

Suy ra $m = 3, m = 4$.

Vậy $T = 4.3 + 4 = 16$.

Câu 38: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $log_{\frac{1}{2}}x + log_{\frac{1}{2}}y \le log_{\frac{1}{2}}(x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P\frac{17}{2}_{min}$. **B**. P_{min}. **C.** $P\frac{25\sqrt{2}}{4}_{min}$. **D.** P_{min}.

Lời giải

Chọn B

• Với $x, y > 0$, ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x + y^2\right) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x.y) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x + y^2\right) \Leftrightarrow xy \ge x + y^2$

$\Leftrightarrow y^2 \le xy - x \Leftrightarrow y^2 \le x(y - 1)$. Suy ra: $y - 1 > 0$.

Từ $y^2 \le x(y-1) \Rightarrow x \ge \frac{y^2}{y-1}$, với $y > 1$.

Khi đó: $P = x + 3y \ge \frac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}$, với $y > 1$.

• Xét hàm số: $h(y) = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}$ trên khoảng $(1;\ +\infty)$.

Ta có: $h'(y) = 4 - \frac{1}{(y-1)^2} = \frac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}$;

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \notin (1;\ +\infty) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

y	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(y)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(y)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{(1;+\infty)} h(y) = 9$ khi $y = \frac{3}{2}$.

Suy ra: $P \ge \min\limits_{(1;+\infty)} h(y) = 9$.

Vậy P_{min} khi $y = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}-1} = \frac{9}{2}$.

Câu 39: Cho các số thực x, y, a, b thỏa mãn điều kiện $x > 1, y > 1, a > 0, b > 0$, $x + y = xy$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{ya^x + xb^y}{abxy}$ đạt giá trị nhỏ nhất m khi $a = b^q$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m + \frac{1}{q} = \frac{y}{y-1}$. **B.** $m + \frac{1}{q} = \frac{x}{x-1}$. **C.** $m + \frac{1}{q} = \frac{y-1}{y}$. **D.** $m + \frac{1}{q} = y$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \frac{a^{x-1}}{bx} + \frac{b^{y-1}}{ay} = f(a)$, suy ra $f'(a) = \frac{x-1}{bx}a^{x-2} - \frac{b^{y-1}}{ya^2} = 0 \Leftrightarrow a^x = b^y \Leftrightarrow x.\ln a = y.\ln b \Leftrightarrow$
$\ln a = \frac{y}{x}\ln b \Leftrightarrow a = b^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow a = b^{y-1}$

$f(b^{y-1}) = 1$, $\lim\limits_{a\to 0^+} f(a) = +\infty$, $\lim\limits_{a\to +\infty} f(a) = +\infty$

Ta có BBT

a	0		b^{y-1}		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT$\Rightarrow \min P = 1$, đạt được khi $a = b^{y-1}$.

Do đó $m = 1, q = y - 1 \Rightarrow m + \frac{1}{q} = \frac{y}{y-1}$.

Câu 40: Với hai số thực a, b bất kỳ, ta kí hiệu : $f_{(a;b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$. Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_{(a;b)}(x) = f_{(a;b)}(x_0)$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$. Số x_0 bằng

A. $2e - 1$. **B.** $2{,}5$. **C**. e. **D.** $2e$.

Lời giải

Chọn C

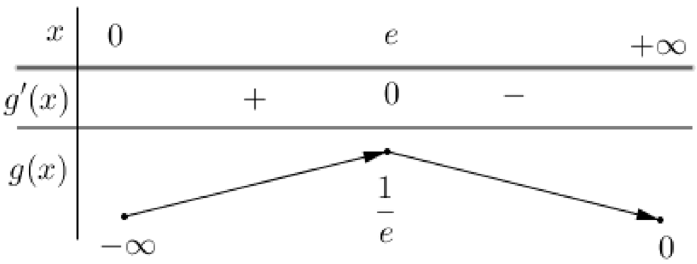
Trước tiên ta xét a, b thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0 < a < b$.

Ta có: $a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Bảng biến thiên



Do $0 < a < b$ và $g(a) = g(b)$ nên ta có $0 < a < e < b$.

Khi đó $f_{(a;b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$

$$= (|x-a| + |b-x|) + (|x-2| + |3-x|)$$
$$\geq |x-a+b-x| + |x-2+3-x| = b-a+1$$

Mặt khác do $a < e < b$ và $2 < e < 3$ nên ta có:

$$f_{(a;b)}(e) = |e-a| + |e-b| + |e-2| + |e-3| = e-a+b-e+e-2+3-e = b-a+1.$$

Vậy $x_0 = e$.

Câu 41: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln\frac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $xy \leq 4y - 1 \Leftrightarrow 4y \geq xy + 1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y \geq 2\sqrt{xy}$ nên: $\sqrt{\frac{x}{y}} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq 4$.

Xét $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln\frac{x+2y}{y} = 12 + 6.\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y} + 2\right)$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$, $0 < t \leq 4$.

Suy ra: $P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2-6t-12}{t^2.(t+2)} = \frac{(t-3)^2-21}{t^2.(t+2)}$.

Với $0 < t \leq 4$ thì $-3 < t-3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (t-3)^2 < 9$ nên $(t-3)^2 - 21 < 0, \forall t \in 0;4$.

Do đó: $f'(t) < 0$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;4]$.

Suy ra: $f(t) \geq f(4), \forall t \in 0;4$. Hay $P \geq f(4) = 12 + \frac{6}{4} + \ln 6 \Leftrightarrow P \geq \frac{27}{2} + \ln 6$.

Vậy $P\frac{27}{2}\ln 6_{min}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $a = \frac{27}{2}$; $b = 6$ nên $ab = 81$.

Câu 42: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. P_{min}. **B.** P_{min}. **C.** P_{min}. **D.** P_{min}.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$.

Từ giả thiết $ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1 \Leftrightarrow ln(1-2x) + (1-2x) = ln(x+y) + (x+y)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = ln\, t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$ do đó hàm $f(t)$ đơn điệu.

Vậy $(1) \Leftrightarrow 1 - 2x = x + y \Leftrightarrow 3x + y = 1$ (2)

Có $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$

Đặt $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$, ta có $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2}$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Do đó $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right)} g(x) = 8$. Vậy P_{min}.

Bổ sung: có thể đánh giá $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x} \geq \frac{4}{x+\frac{1}{2}-x} = \frac{1}{8}$

Câu 43: Xét các số thực x, $y$thỏa mãn $x^2 + y^2 > 1$và $log_{x^2+y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất P_{max} của biểu thức $P = 2x + y$ bằng

A. $P_{max} = \dfrac{19+\sqrt{19}}{2}$. **B.** $P_{max} = \dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$. **C.** $P_{max} = \dfrac{11+10\sqrt{2}}{3}$. **D.** $P_{max} = \dfrac{7-\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $log_{x^2+y^2}(2x+3y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + 3y \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0$.

$\Delta_x' = 1 - (y^2 - 3y) = -y^2 + 3y + 1$.

Để tồn tại x, $y$thì $\Delta_x' \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Khi đó $x = 1 \pm \sqrt{-y^2 + 3y + 1}$.

Ta có: $P = 2x + y \leq 2\left(1 + \sqrt{-y^2 + 3y + 1}\right) + y = f(y)$.

$f'(y) = \frac{-2y+3}{\sqrt{-y^2+3y+1}} + 1$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-y^2 + 3y + 1} = 2y - 3 \Leftrightarrow -y^2 + 3y + 1 = 4y^2 - 12y + 9$, $I = 16$.

$\Leftrightarrow y = \frac{15+\sqrt{65}}{10}$.

Bảng biến thiên.

y	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{15+\sqrt{65}}{10}$		$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
$f'(y)$		+	0	−	
$f(y)$		$\nearrow$	$\frac{7+\sqrt{65}}{2}$	$\searrow$	

Do đó $P = x + 2y \leq \frac{7+\sqrt{65}}{2}$

Vậy $P_{Max} = \frac{7+\sqrt{65}}{2}$khi $\begin{cases} y = \frac{15+\sqrt{65}}{10} \\ x = 1 + \sqrt{-y^2 + 3y + 1} = \frac{5+\sqrt{65}}{5} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 > 1$)

Câu 44: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $log_2 a + log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{log_3 a} + \sqrt{log_2 b}$ bằng

A. $\sqrt{log_2 3} + \sqrt{log_3 2}$. **B.** $\sqrt{log_2 3 + log_3 2}$.

C. $\frac{1}{2}(log_2 3 + log_3 2)$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{log_2 3 + log_3 2}}$.

Lời giải

Chọn B

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$P = \sqrt{log_3 a} + \sqrt{log_2 b} = \sqrt{\frac{log_2 a}{log_2 3}} + \sqrt{\frac{log_3 b}{log_3 2}} = \sqrt{\frac{log_2 a}{log_2 3}} + \sqrt{\frac{1-log_2 a}{log_3 2}}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{log_2 3}} + \sqrt{log_2 3}.\sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{log_2 3}} - \frac{\sqrt{log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = log_2 3\sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t.log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+log_2^2 3}$.

$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{1+log_2^2 3}\right) = \sqrt{log_2 3 + log_3 2} \Rightarrow min\, P = \sqrt{log_2 3 + log_3 2}$.

Câu 45: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $log_2\frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T = 10M - m$.

A. $T = 60$. **B.** $T = 94$. **C.** $T = 104$. **D.** $T = 50$.

Lời giải

Chọn B

$$log_2\frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow log_2(x^2+5y^2) - log_2(x^2+10xy+y^2) + log_2 2 + 2(x^2+5y^2) - (x^2+10xy+y^2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow log_2(2x^2+10y^2) + 2(x^2+5y^2) \leq log_2(x^2+10xy+y^2) + (x^2+10xy+y^2)$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 \leq x^2 + 10xy + y^2$ vi)

$$\Leftrightarrow x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 9$$

$$P = \frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 9}{\frac{x}{y}+1}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, điều kiện: $1 \leq t \leq 9$

$f(t) = \frac{t^2+t+9}{t+1}$; $f'(t) = \frac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$f(1) = \frac{11}{2}$; $f(2) = 5$; $f(9) = \frac{99}{10}$

Nên $M = \frac{99}{10}$, $m = 5$. Vậy $T = 10M - m = 94$.

ÁP DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

Câu 46: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1} = (x^2+y).2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất y_{min} của y.

A. y_{min}. **B.** y_{min}. **C.** y_{min}. **D.** $y\sqrt{3}_{min}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(xy-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy-1-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y+1}(1)$

Xét hàm $f(t) = (t-1).2^t$ với $t \geq 1$.

Khi đó $f'(t) = 2^t + (t-1).2^t.ln\,2 > 0$ với $\forall t \geq 1$.

Từ $(1) \Leftrightarrow 2xy - 1 = x^2 + y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2+2}{2x-1}$

$$y' = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Loại $x = -1$ vì điều kiện của t nên $f(2) = 2$.

Câu 47: Cho các số thực x, ythỏa mãn $0 \le x, y \le 1$và $log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$
Tìm giá trị nhỏ nhất của Pvới $P = 2x + y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)$ (1).

Xét hàm số $f(t) = log_3 t + t$với $t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$luôn đồng biến với $\forall t > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + y = 1 - xy \Leftrightarrow y=\frac{1-x}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$ (2).

Thế (2)vào Pta được $P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$Với $0 \le x \le 1$

$P' = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$; $P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [0;1] \\ x = -2 \notin [0;1] \end{array}\right.$. $P(0) = 1; P(1) = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Plà 1 đạt được khi $x = 0; y = 1$.

Câu 48: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a + 3b - 4 \Leftrightarrow log_5(4a+2b+5) - log_5 5(a+b)$$
$$= 5(a+b) - (4a+2b+5)$$

$\Leftrightarrow log_5(4a+2b+5) + (4a+2b+5) = log_5 5(a+b) + 5(a+b)$(*)

Hàm số $f(t) = log_5 t + t (t > 0)$ có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 5} + 1 > 0$

$f(t)$ đồng biến nên (*)$\Leftrightarrow f(4a+2b+5) = f\big(5(a+b)\big) \Leftrightarrow 4a + 2b + 5 = 5(a+b)$.

$$4a + 2b + 5 = 5(a+b) \Leftrightarrow a = 5 - 3b$$

$T = a^2 + b^2 \Rightarrow T = (5-3b)^2 + b^2 = 10b^2 - 30b + 25 = 10\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \ge \frac{5}{2}$.

Vậy GTNN $T = \frac{5}{2}$.

Câu 49: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A. $P\frac{11}{2}_{min}$. **B.** $P\frac{27}{5}_{min}$. **C.** $P\sqrt{3}_{min}$. **D.** $P\sqrt{2}_{min}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)[log_3(x+1) + log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9$.

$$\Leftrightarrow (y+1)[log_3(x+1) + log_3(y+1) + x - 1] = 9$$

$$\Leftrightarrow log_3(x+1) + x - 1 = \frac{9}{y+1} - log_3(y+1)$$

$\Leftrightarrow log_3(x+1) + x + 1 - 2 = \frac{9}{y+1} - 2 + log_3\frac{9}{y+1}$ (*).

Xét hàm số $f(t) = log_3 t + t - 2$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1=\frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x=\frac{9}{y+1}-1=\frac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y \in (0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\frac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\frac{9}{y+1}=2(y+1)+\frac{9}{y+1}-3 \geq -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P\sqrt{2}_{min}$ khi $2(y+1)=\frac{9}{y+1} \Leftrightarrow y=\frac{3}{\sqrt{2}}-1$.

Câu 50: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $3^{xy-5}+2^{x-2y}+x(y+1)=\frac{32}{2^{xy}}+\frac{1}{3^{x-2y}}+2y+5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức$P=3x+2y$.

A. $P\sqrt{6}_{min}$. **B.** $P\sqrt{2}_{min}$. **C.** $P\sqrt{2}_{min}$. **D.** $P\sqrt{2}_{min}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{xy-5}+2^{x-2y}+x(y+1)=\frac{32}{2^{xy}}+\frac{1}{3^{x-2y}}+2y+5$

$\Leftrightarrow 3^{xy-5}-\frac{1}{2^{xy-5}}+xy-5=3^{2y-x}-\frac{1}{2^{2y-x}}+2y-x(*)$

Xét hàm số $g(t)=3^t-\frac{1}{2^t}+t$ có $g'(t)=3^t.ln\,3-\frac{1}{2^t}.ln\frac{1}{2}+1>0, \forall t$

suy ra hàm số $g(t)$ luôn đồng biến.

Từ (*) ta có $g(xy-5)=g(2y-x) \Leftrightarrow xy-5=2y-x \Leftrightarrow x=\frac{2y+5}{y+1}$

Suy ra $P=\frac{6y+15}{y+1}+2y=\frac{2y^2+8y+15}{y+1}$

$$\Leftrightarrow P=\frac{2(y+1)^2+4(y+1)+9}{y+1}=2(y+1)+4+\frac{9}{y+1} \geq 4+6\sqrt{2}.$$

Câu 51: Cho hai số thức a,bthỏa mãn $16.2^{a+2b}=\frac{8(1-2ab)}{a+2b}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{4}ab+ab^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Từ giải thiết suy ra $1-2ab>0$. Theo bài ra:

$$16^{ab}.2^{a+2b}=\frac{8(1-2ab)}{a+2b} \Leftrightarrow a^{a+2b}(a+2b)=\frac{8(1-2ab)}{16^{ab}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{a+2b}(a+2b)=\frac{8(1-2ab)}{2^{4ab}} \Leftrightarrow 2^{a+2b}(a+2b)=2^{2-4ab}(2-4ab)(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t \in D=(0;+\infty)$

Do hàm số liên tục trên D và có $f'(t)=2^t+t.2^t.ln\,t>0, \forall t \in D$ suy ra hàm số đồng biến trên D.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow a+2b=2-4ab \Leftrightarrow a(1+4b)=2-2b$ suy ra $2-2b>0 \Leftrightarrow b<1$.

Ta có $P=\frac{1}{4}ab+ab^2=\frac{1}{4}ab(1+4b)=\frac{1}{4}b(2-2b)=\frac{1}{2}b(1-b) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

Vậy $max\,P=\frac{1}{8}$ xảy ra khi $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 52: Cho hai số dương x,y thỏa mãn $log_3\left(\frac{x+y}{3y^2+3y+x}\right)=3y^2-2x-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2xy-18x+72y-45$ trên nửa khoảng $0;5$.

A. 2020. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$log_3\left(\frac{x+y}{3y^2+3y+x}\right)=3y^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow log_3(x+y)-log_3(3y^2+3y+x)=3y^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow log_3(x+y)+2x+1=log_3(3y^2+3y+x)+3y^2$$
$$\Leftrightarrow log_3(3x+3y)+3x+3y=log_3(3y^2+3y+x)+3y^2+3y+x$$

Hàm đặc trưng $f(t)=log_3 t+t\forall t>0 \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0\forall t>0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó: $3x+3y=3y^2+3y+x \Leftrightarrow 2x=3y^2$

Thay vào P ta có: $P=f(y)=3y^3-27y^2+72y-45$

□$f'(y)=9y^2-54y+72$

□$f'(y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=4 \end{array}\right.$

□Ta có bảng biến thiên:

y	0		2		4		5
$f'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(y)$	-45	$\nearrow$	15	$\searrow$	3	$\nearrow$	15

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của P là 15

Câu 53: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $6.3^y+y+1=3x+log_3(x+3^y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2y}$ bằng

A. $\frac{\ln 3}{e}$. **B.** $\frac{e-\ln 3}{2}$. **C.** $\frac{e.\ln 3}{2}$. **D**. $e\ln 3$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=log_3(x+3^y) \Leftrightarrow 3^t=x+3^y \Leftrightarrow 3x=3^{t+1}-3^{y+1}$

Khi đó phương trình $6.3^y+y+1=3x+log_3(x+3^y)$ trở thành:

$$3^{y+1}+y+1=3^{t+1}-3^{y+1}+t$$
$$\Leftrightarrow 3.3^{y+1}+y+1=3^{t+1}+t$$
$$\Leftrightarrow 3^{y+2}+y+1=3^{t+1}+t(1)$$

Xét hàm số: $f(x)=3^{x+1}+x$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=3^{x+1}.\ln 3+1>0, \forall x\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số luôn đồng biến

Do (1) suy ra$f(y+1)=f(t) \Leftrightarrow y+1=t \Leftrightarrow y+1=log_3(x+3^y) \Leftrightarrow 3^{y+1}-3^y=x \Leftrightarrow x=2.3^y$

Khi đó $P=\frac{x}{2y}=\frac{3^y}{y}=g(y)$có $\Rightarrow g'(y)=\frac{3^y.y\ln 3-3^y}{y^2}=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\ln 3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} P=g\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=e\ln 3$.

Câu 54: Cho hai số thực x,y thỏa mãn hệ thức $\log_{0,1}\frac{x^2+4x-2y+10}{2x^2+y^2+6}=4x+4-x^2-y^2-2y$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=3x+4y+12$. Giá trị biểu thức $(M+2m)$ tương ứng bằng

A. 28. **B.** 26. **C.** 29. **D**. 27.

Lời giải

Chọn D

- Điều kiện xác định: $\frac{x^2+4x-2y+10}{2x^2+y^2+6}>0 \Leftrightarrow x^2+4x-2y+10>0.(*)$
- Ta sẽ đưa phương trình về dạng $\log_a\frac{u}{v}=v-u \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow u=v$ (với $a>1$)
- Giả thiết $\log_{0,1}\frac{x^2+4x-2y+10}{2x^2+y^2+6}=4x+4-x^2-y^2-2y$

$\Leftrightarrow \log(x^2+4x-2y+10)-\log(2x^2+y^2+6)=(2x^2+y^2+6)-(x^2+4x-2y+10)$.

$\Leftrightarrow \log(x^2+4x-2y+10)+(x^2+4x-2y+10)=\log(2x^2+y^2+6)+(2x^2+y^2+6)$ (1)

- Xét hàm số đồng biến $f(t) = \log t + t$ vì $f'(t) = \frac{1}{t\ln 10} + 1 > 0\ \forall t > 0$.
- Từ (1) suy ra $f(x^2 + 4x - 2y + 10) = f(2x^2 + y^2 + 6) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2y + 10 = 2x^2 + y^2 + 6$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ (2)
- Xét biểu thức: $T = 3x + 4y + 12 = 3(x-2) + 4(y+1) + 14$
- Theo BĐT buhia, ta có $\left(3(x-2) + 4(y+1)\right)^2 \le (3^2 + 4^2)((x-2)^2 + (y+1)^2) = 225$

$\Leftrightarrow |3(x-2) + 4(y+1)| \le 15 \Leftrightarrow -|3(x \le -2) + 4(y+1)| \le 3(x-2) + 4(y+1) \le |3(x \le -2) + 4(y+1)| \Leftrightarrow -15 \le 3(x-2) + 4(y+1) \le 15 \Leftrightarrow -1 \le T = 3(x-2) + 4(y+1) + 14 \le 29$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của T là: $T_{\max} = 9; T_{\min} = -1 \Rightarrow (M + 2m) = 27$.

Câu 55: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $log_2\left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right) = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của Cho $x; y$là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

A. 3. **B.** $5 + 2\sqrt{5}$. **C.** $3 - 2\sqrt{5}$. **D.** $1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4)$

$\Leftrightarrow 5^{x+4y} - 3^{-x-4y} + x + 4y = 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1$(1).

Xét hàm số $f(t) = 5^t - 3^{-t} + t$trên $\mathbb{R}$.

Vì $f'(t) = 5^t.\ln 5 + 3^{-t}.\ln 3 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$nên hàm số $f(t)$đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1)và (2)ta có $x + 4y = xy - 1$(3). Dễ thấy $x = 4$không thỏa mãn (3).

Với $x \ne 4$, (3) $\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-4}$kết hợp điều kiện $y > 0$suy ra $x > 4$.

Do đó $P = x + y = x + \frac{x+1}{x-4}$.

Xét hàm số $g(x) = x + \frac{x+1}{x-4}$trên $(4; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{5}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 + \sqrt{5} \\ x = 4 - \sqrt{5} \end{array}\right.$.

x	4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \underset{(4;+\infty)}{min}(x)\sqrt{5}$ $_{min}$.

Câu 56: Cho các số thực x, y với $x \ge 0$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in (2;3)$. **B.** $m \in (-1;0)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Đẳng thức đã cho tương đương $e^{x+3y} - \frac{1}{e^{x+3y}} + x + 3y = e^{-xy-1} - \frac{1}{e^{-xy-1}} + (-xy-1)$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{e^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = e^t + \frac{1}{e^t} + 1 \Rightarrow f'(t) > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)$ được viết lại thành

$$f(x+3y)=f(-xy-1)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1\Leftrightarrow y(x+3)=-x-1\Leftrightarrow y=\frac{-x-1}{x+3}.$$

Thay $y=\frac{-x-1}{x+3}$ vào biểu thức T ta được

$$T=x+2\left(\frac{-x-1}{x+3}\right)+1=x+2\left(\frac{2}{x+3}-1\right)+1=x+\frac{4}{x+3}-1=x+3+\frac{4}{x+3}-4.$$

Đặt $x+3=a$. Vì $x\geq 0$ nên $a\geq 3$. Ta có

$$T=a+\frac{4}{a}-4=\left(\frac{4a}{9}+\frac{4}{a}\right)+\frac{5a}{9}-4\overset{\text{Côsi}}{\geq}2\sqrt{\frac{4a}{9}.\frac{4}{a}}+\frac{5.3}{9}-4=\frac{1}{3}.$$

Do đó với $a=3$ thì $min\,T=\frac{1}{3}$ suy ra $m=\frac{1}{3}\in(0;1)$.

Câu 57: Cho hai số thực dương x, $y$thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1}=(x^2+y).2^{x^2+y}$.Tìm giá trị nhỏ nhất y_{min}của y.

A. y_{min}. **B.** y_{min}. **C.** y_{min}. **D.** $y\sqrt{3}_{min}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(xy-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y}\Leftrightarrow(2xy-1-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y+1}(1)$

Xét hàm $f(t)=(t-1).2^t$với $t\geq 1$.

Khi đó $f'(t)=2^t+(t-1).2^t.ln\,2>0$với $\forall t\geq 1$.

Từ $(1)\Leftrightarrow 2xy-1=x^2+y+1\Leftrightarrow y=\frac{x^2+2}{2x-1}$

$$y'=\frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$$

Loại $x=-1$vì điều kiện của $t$nên $f(2)=2$.

Câu 58: Cho các số dương x,y thỏa mãn $log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\leq 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$ bằng

A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$. **B.** $11\sqrt{3}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $\begin{cases}\frac{x+y-1}{2x+3y}>0\\x,y>0\end{cases}\Leftrightarrow x+y>1$

Ta có:

$$log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\leq 4$$
$$\Leftrightarrow(log_5(x+y-1)+1)+5(x+y-1)\leq log_5(2x+3y)+2x+3y$$
$$\Leftrightarrow log_5[5(x+y-1)]+5(x+y-1)\leq log_5(2x+3y)+2x+3y(*)$$

Xét hàm số $f(t)=log_5(t)+t$ trên $(0;+\infty)$ ta có

$$f'(t)=\frac{1}{t\,ln\,5}+1>0,\forall t\in(0;+\infty).$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)=log_5(t)+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$(*)\Leftrightarrow 5(x+y-1)\leq 2x+3y$$
$$\Leftrightarrow 3x+2y\leq 5$$

Mặt khác, ta có:

$$A=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$$
$$=\left(9x+\frac{4}{x}\right)+\left(4y+\frac{9}{y}\right)-(3x+2y)\geq 2.6+2.6-5=19$$

$\Rightarrow$ GTNN của $A = 19$, dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{4}{x} \\ 4y = \frac{9}{y} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} (N)$

Câu 59: Cho các số thực x, y với $x \geq 0$ thỏa mãn $5^{x+3y} + 5^{xy+1} + x(y+1) + 1 = 5^{-xy-1} + \frac{1}{5^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;2)$. **C.** $m \in (2;3)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^{x+3y} + 5^{xy+1} + x(y+1) + 1 = 5^{-xy-1} + \frac{1}{5^{x+3y}} - 3y$

$\Leftrightarrow 5^{x+3y} - 5^{-x-3y} + x + 3y = 5^{-xy-1} - 5^{xy+1} - xy - 1$.

Xét hàm số $f(t) = 5^t - 5^{-t} + t$ có $f'(t) = 5^t \ln 5 + 5^{-t} \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x+3y) = f(-xy-1) \Leftrightarrow x + 3y = -xy - 1$

$\Leftrightarrow y(3+x) = -x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-x-1}{3+x}$ (do $x \geq 0$ nên $x + 3 \neq 0$) $\Leftrightarrow x + 2y + 1 = x + \frac{-2x-2}{x+3} + 1$

$= \frac{x^2+2x+1}{x+3}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$ với $x \geq 0$ có $g'(x) = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \geq 0$.

Do đó: $g(x) \geq g(0) = \frac{1}{3}, \forall x \geq 0$ hay $x + 2y + 1 \geq \frac{1}{3}, \forall x \geq 0$. Vậy $m = \frac{1}{3} \in (0;1)$.

Câu 60: Cho $x, y \in (0;2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$ bằng

A. $\sqrt{1 + \ln 3 - \ln 2}$. **B.** $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$. **C.** $1 + \sqrt{\ln 3 - \ln 2}$. **D.** $1 + \sqrt{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq \frac{1}{e}$.

Ta có : $(x-3)(x+8) = ey(ey-11) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = e^2y^2 - 11ey$

$\Leftrightarrow e^2y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0$, có $\Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \geq 1$.

Do đó $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ey = \frac{11+(2x+5)}{2} \\ ey = \frac{11-(2x+5)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ey = x + 8 \\ ey = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{x+8}{e} \\ y = \frac{3-x}{e} \end{array}\right.$.

+) Do $y = \frac{x+8}{e} > \frac{9}{e} > 2$ nên loại $y = \frac{x+8}{e}$.

+) Với $y = \frac{3-x}{e}$, $1 \leq x < 2$:

Cách 1:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $1;2)$.

Ta có $P' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}}$

$$P' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} - x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} = x\sqrt{\ln x}$$

Xét hàm $f(t) = t\sqrt{\ln t}$ trên $1;+\infty)$, có $f'(t) = \sqrt{\ln t} + \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} > 0, \forall t \in (1;+\infty)$.

Khi đó $\Leftrightarrow f(3-x) = f(x) \Leftrightarrow 3 - x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	1		$\frac{3}{2}$		2
P'		$+$	0	$-$	
P			$2\sqrt{\ln 3-\ln 2}$		

Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{ln\,3 - ln\,2}$ tại $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2e}$.

Cách 2:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{ln\,x} + \sqrt{ln(3-x)}$ trên $1; 2)$.

$\Rightarrow P^2 = \left[\sqrt{ln\,x} + \sqrt{ln(3-x)}\right]^2 \le 2(ln\,x + ln(3-x)) = 2\,ln[x(3-x)] \le 2\,ln\left(\frac{x+3-x}{2}\right)^2 =$ $4(ln\,3 - ln\,2), \forall x \in 1; 2)$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{ln\,x} = \sqrt{ln(3-x)} \\ x = 3 - x \\ x \in 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{ln\,3 - ln\,2}$ tại $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2e}$.

Câu 61: Cho hai số thực $x; y$thỏa mãn: $log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + log_2[(5-x)(1+x)] = 2\,log_3\frac{5+4x-x^2}{3} + log_2(2y+8)^2$.

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\sqrt{x^2+y^2} - m\right|$không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con khác rỗng.

A. 16385. **B.** 2047. **C.** 32. **D**. 16383.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $\begin{cases} -1 < x < 5 \\ y \ne -4 \end{cases}$.

Ta có: $log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + log_2[(5-x)(1+x)] = 2\,log_3\frac{5+4x-x^2}{3} + log_2(2y+8)^2$

$\Leftrightarrow log_{3^{\frac{1}{2}}}(y+4)^2 + log_2[(5-x)(1+x)]$

$= 2\{log_3[(5-x)(1+x)] - log_3 3\} + [log_2 4 + log_2(y+4)^2]$

$\Leftrightarrow 2\,log_3(y+4)^2 + log_2[(5-x)(1+x)] = 2\,log_3[(5-x)(1+x)] + log_2(y+4)^2$

$\Leftrightarrow 2\log_3(y+4)^2 - \log_2(y+4)^2 = 2\log_3\left[(5-x)(1+x)\right] - \log_2\left[(5-x)(1+x)\right] (*)$

Xét hàm số: $f(t) = 2\,log_3 t - log_2 t$ trên $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{2}{t.ln\,3} - \frac{1}{t.ln\,2} = \frac{2\,ln\,2 - ln\,3}{t.ln\,2.ln\,3} > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f((y+4)^2) = f\big((5-x)(1+x)\big)$$

$\Leftrightarrow (y+4)^2 = (5-x)(1+x)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

Đặt: $\begin{cases} x = 2 + 3\,cos\,t \\ y = -4 + 3\,sin\,t \end{cases}$

$P = \left|\sqrt{x^2+y^2} - m\right| = \left|\sqrt{(2+3\,cos\,t)^2 + (-4+3\,sin\,t)^2} - m\right| = \left|\sqrt{29 + 12\,cos\,t - 24\,sin\,t} - m\right|$

Ta có: $29 - 12\sqrt{5} \le 29 + 12\,cos\,t - 24\,sin\,t \le 29 + 12\sqrt{5}$

$$\Rightarrow -3 + 2\sqrt{5} \le \sqrt{29 + 12\,cos\,t - 24\,sin\,t} \le 3 + 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow -3 + 2\sqrt{5} - m \le \sqrt{29 + 12\,cos\,t - 24\,sin\,t} - m \le 3 + 2\sqrt{5} - m$$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} P\left|-3+2\sqrt{5}-m\right|_{max} \\ P\left|3+2\sqrt{5}-m\right|_{max}[\end{array}\right.$

$P_{max}\Rightarrow\begin{cases}\left|-3+2\sqrt{5}-m\right|\le 10\\ \left|3+2\sqrt{5}-m\right|\le 10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-10\le -3+2\sqrt{5}-m\le 10\\ -10\le 3+2\sqrt{5}-m\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-13+2\sqrt{5}\le m\le 7+2\sqrt{5}\\ -7+2\sqrt{5}\le m\le 13+2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow -7+2\sqrt{5}\le m\le 7+2\sqrt{5}.$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;..10;11\}$.

Do đó số phần tử của S là: 14

$\Rightarrow$Số tập con khác rỗng của S là $2^{14}-1=16383$.

Câu 62: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x, y\le 1$ trong đóx, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của Pvới $P=2x+y$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy}>0; 1-xy\ne 0\Rightarrow x+y>0; 1-xy>0$khi đó

$log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0\Leftrightarrow log_3(x+y)+(x+y)=log_3(1-xy)+(1-xy)(1)$

Xét hàm số $f(t)=log_3 t+t(t>0)$ có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0\forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\frac{1-x}{1+x}$

Xét hàm số $f(x)=2x+\frac{1-x}{x+1}$với $x\in[0;1]$có $f'(x)=2+\frac{-2}{(x+1)^2}chof'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$f(0)=1; f(1)=2\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x)=1\Rightarrow$**Chọn B**

Câu 63: Cho $x; y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. 3. **B.** $5+2\sqrt{5}$. **C.** $3-2\sqrt{5}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+4y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$

$\Leftrightarrow 5^{x+4y}-3^{-x-4y}+x+4y=5^{xy-1}-3^{1-xy}+xy-1(1)$.

Xét hàm số $f(t)=5^t-3^{-t}+t$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f'(t)=5^t.\ln 5+3^{-t}.\ln 3+1>0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x+4y=xy-1(3)$. Dễ thấy $x=4$ không thỏa mãn (3).

Với $x\ne 4$, $(3)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-4}$ kết hợp điều kiện $y>0$ suy ra $x>4$.

Do đó $P=x+y=x+\frac{x+1}{x-4}$.

Xét hàm số $g(x)=x+\frac{x+1}{x-4}$ trên $(4;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{5}{(x-4)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{5}\\x=4-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

x	4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x)$	$+\infty$ ↘	$5+2\sqrt{5}$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiê
n ta có $P \underset{(4;+\infty)}{min}(x)\sqrt{5}$ $_{min}$.

Câu 64: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$$

$\Leftrightarrow log_{\sqrt{3}}3(x+y)+3(x+y) = log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2.$

Xét hàm số $f(t) = log_{\sqrt{3}}t+t,\ t>0$ có $f'(t) = \frac{1}{t\ln\sqrt{3}}+1>0, \forall t>0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f\left(3(x+y)\right) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2\ (1)$

Cách 1: Từ $(1) \Leftrightarrow xy = (x+y)^2-3(x+y)+2$.

Ta có $x = x+xy-xy = x(y+1)-xy \le \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2-xy$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \le \frac{(x+y+1)^2}{4}-(x+y)^2+3(x+y)-2$.

Đặt $t = x+y,\ t>0$.

Suy ra: $P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \le \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận)

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

Dựa vào BBT, ta có $max\,P = \underset{(0;+\infty)}{max}f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Ta có: $P = 2+\frac{x-11}{x+y+6}$.

Trong (1) coi y là ẩn, x là tham số. Ta có $y^2+(x-3)y+x^2-3x+2 = 0$ có nghiệm khi

$\Delta = (x-3)^2-4(x^2-3x+2) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{3+2\sqrt{3}}{3} < 3$ nên $x-11<0$

Vậy $P<2$ nên trong 4phương án thì P_{max} khi đó $x = 2,\ y = 1$.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Ta có: $P = 3-\frac{y+17}{x+y+6} < 3$ với $x, y > 0$.

+ Nếu $P = 2$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 2 \Leftrightarrow x = 11$. Thay vào (1) ta được: $y^2 + 3y + 90 = 0$ (vô lý).

+ Nếu $P = 1$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$. Thay vào (1), ta được:

$3(x + 5 - 2x) = x^2 + (5 - 2x)^2 + x(5 - 2x) + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy P_{max}.

Câu 65: Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4 + 9.3^{x^2-2y} = \left(4 + 9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+18}{x}$.

A. $P = 9$. **B.** $P = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P = 1 + 9\sqrt{2}$. **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta đặt $t = x^2 - 2y$, $t \in \mathbb{R}$.

Phương trình $4 + 9.3^{x^2-2y} = \left(4 + 9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$ trở thành

$4 + 9.3^t = (4 + 9^t).\frac{49}{7^t} \Leftrightarrow 4(7^t - 49) + 9^t\left[9.\left(\frac{7}{3}\right)^t - 49\right] = 0$.

Nhận thấy $t = 2$ là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☑ Xét $t > 2$: $7^t > 49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t > 49$ nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.

☑ Xét $t < 2$: $7^t < 49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t < 49$ nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $t = x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2-2}{2}$ thay vào $P = \frac{x+2y+18}{x} = \frac{x^2+x+16}{x}$

$= x + \frac{16}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x.\frac{16}{x}} + 1 = 9$. Dấu bằng đạt được khi $x = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 4$.

Câu 66: Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $\frac{x^2.2^{x^2+1}}{x-1} + (y - 1).2^{x+y-xy} = 0$. Tìm giá trị lớn nhất M của y, biết rằng $x > 1$.

A. $M = -\frac{7}{2}$. **B.** $M = -3$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{x^2.2^{x^2+1}}{x-1} + (y - 1).2^{x+y-xy} = 0 \Leftrightarrow x^2.2^{x^2} = (x + y - xy - 1).2^{x+y-xy-1} (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ trên $0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 2^t + t.2^t \ln 2 > 0 \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t) = t.2^t$ đồng biến trên $0; +\infty)$.

Suy ra: $(*) \Leftrightarrow f(x^2) = f(x + y - xy - 1) \Leftrightarrow x + y - xy - 1 = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2-x+1}{1-x}$ do $x > 1$.

Ta có: $y' = \frac{(2x-1)(1-x)+x^2-x+1}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	-3	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $M = -3$.

Câu 67: Cho hai số thực x, y không âm thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$x^2 + 2x - y + 1 = log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + log_2(2(x+1)^2) = log_2(2y+1) + (2y+1)$.

Xét hàm số $f(t) = t + log_2 t, (t > 0)$; $f'(t) = 1 + \frac{1}{t.\ln 2} > 0, \forall t > 0$

Suy ra $2(x+1)^2 = 2y + 1 \Rightarrow 2y = 2(x+1)^2 - 1$.

$P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1 = e^{2x-1} + 4x^2 - 2(x+1)^2 + 1 + 1 = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x = g(x)$.

$g'(x) = 2e^{2x-1} + 4x - 4$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $0; +\infty)$ nên $g'(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, nhẩm được nghiệm $x = \frac{1}{2}$ nên nghiệm đó là duy nhất.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $min\, P = -\frac{1}{2}$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Câu 68: Cho hai số thực x, $y$thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2.$$

Gọi Slà tập các giá trị nguyên của tham số mđể giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\sqrt{x^2+y^2} - m\right|$không vượt quá 10. Hỏi Scó bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

A. 2047. **B.** 16383. **C.** 16384. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $-1 < x < 5, y \neq -4$. Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2.$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3\left(y^2+8y+16\right)-2\log_3\left(5+4x-x^2\right)=\log_2\left(y^2+8y+16\right)-\log_2\left(5+4x-x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 4-1\right).\log_2\left(y^2+8y+16\right)=\left(\log_3 4-1\right).\log_2\left(5+4x-x^2\right)$$

$\Leftrightarrow y^2 + 8y + 16 = 5 + 4x - x^2$ (vì hàm $f(t)=\left(\log_3 4-1\right).\log_2 t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$).

$\Rightarrow (x^2+y^2+11)^2 = (4x-8y)^2 \le 80(x^2+y^2) \Rightarrow (x^2+y^2)^2 - 58(x^2+y^2) + 121 \le 0$

$\Rightarrow 29 - 12\sqrt{5} \le x^2 + y^2 \le 29 + 12\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{29-12\sqrt{5}} \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Đặt $a = \sqrt{29-12\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{29+12\sqrt{5}}$, ta có: $\underset{[a;b]}{max} P = max\{|a-m|, |b-m|\}$.

Do đó, $\underset{[a;b]}{max} P \le 10 \Leftrightarrow \begin{cases} |a-m| \le 10 \\ |b-m| \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 10 \le m \le a + 10 \\ b - 10 \le m \le b + 10 \end{cases} \Rightarrow b - 10 \le m \le a + 10$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$nên $S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

Câu 69: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện$log_{16}\left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2)$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng?

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$log_{16}\left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$$

$$\Leftrightarrow log_{16}(x+y+z)+2(x+y+z)=log_{16}(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\,log_{16}(x+y+z)+4(x+y+z)=2\,log_{16}(2x^2+2y^2+2z^2+1)+2(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow log_4(x+y+z)+4(x+y+z)+1=log_4(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(x^2+y^2+z^2)+1$$

$$\Leftrightarrow log_4 4\,(x+y+z)+4(x+y+z)=log_4(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(2x^2+2y^2+2z^2+1)$$

Xét hàm số: $f(t)=log_4 t+t(t>0)$.

Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

Suy ra: $f\big(4(x+y+z)\big)=f(2x^2+2y^2+2z^2+1)$

$$\Rightarrow 4(x+y+z)=2x^2+2y^2+2z^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+\frac{1}{2}=0(S)$$

Ta có mặt cầu: $(S):\begin{cases} I(1;1;1) \\ R=\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$

Ta có: $F=\frac{x+y-z}{x+y+z}\Leftrightarrow (F-1)x+(F-1)y+(F+1)z=0(P)$

Để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung:

$d[I;(P)]\le R\Leftrightarrow \frac{|F-1+F-1+F+1|}{\sqrt{2(F-1)^2+(F+1)}}\le\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\Leftrightarrow 3F^2-2F-13\le 0$.

$\Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{10}}{3}\le F\le\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x+y-z}{x+y+z}$bằng $\frac{2}{3}$.

Câu 70: Cho hai số thực dương x,y thay đổi thỏa mãn đẳng thức: $(2xy-1)4^{xy-1}=(x^2+y+1)2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất y_{min} của y.

A. y_{min}. **B.** $y\sqrt{3}_{min}$. **C.** y_{min}. **D.** y_{min}.

Lời giải

Chọn D

Do x,y là số thực dương đẳng thức $(2xy-1)4^{xy-1}=(x^2+y+1)2^{x^2+y}$. Suy ra $2xy-1>0$.

Khi đó ta có $log_2(2xy-1)+(2xy-1)=log_2(x^2+y+1)+(x^2+y+1)$ (1)

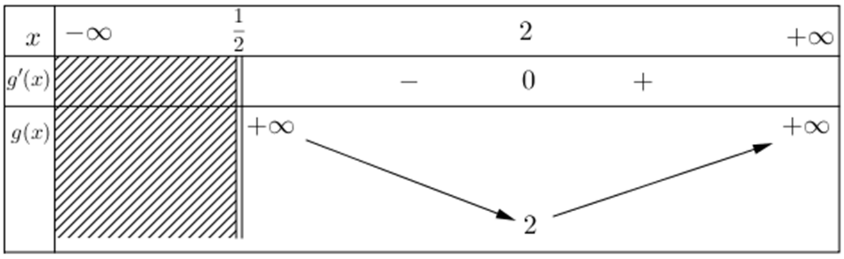
Xét hàm số $f(t)=log_2 t+t$. Hàm số này đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên từ (1) ta được $f(2xy-1)=f(x^2+y+1)\Leftrightarrow 2xy-2=x^2+y\Leftrightarrow y(2x-1)=x^2+2$

Do $y>0$, $x^2+2>0$ nên $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ Suy ra $y=\frac{x^2+2}{2x-1}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{x^2+2}{2x-1}$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên $g(x)$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra y_{min}tại $x = 2$.

Câu 71: Cho $x; y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3 + \sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $3 + 2\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y \Leftrightarrow \log_3(2x + y + 1) - \log_3(x + y) = x + 2y$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x + y + 1) = \log_3(3x + 3y) + x + 2y - 1$$

$\Leftrightarrow \log_3(2x + y + 1) + 2x + y + 1 = \log_3(3x + 3y) + 3x + 3y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 3y \Leftrightarrow x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2y$.

Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{2}$.

Xét $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $T \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{y(1-2y)}} = 3.\sqrt[3]{\frac{2}{2y(1-2y)}} \geq 3.\sqrt[3]{8} = 6$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 1 - 2y = \sqrt{y} \\ 2y = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 72: Cho hai số thực dương $a$và $b$thỏa mãn $4^{ab}.2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = ab + 2ab^2$bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{3}{17}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $1 - ab > 0$.

$4^{ab}.2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b} \Leftrightarrow (a + b).2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{2^{2ab}} \Leftrightarrow (a + b).2^{a+b} = (2 - 2ab).2^{2-2ab}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$với $t \in (0; +\infty) = D$. Dễ thấy hàm số $f(t)$liên tục trên Dvà
$f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0, \forall t \in D$suy ra $f(t)$là hàm số đồng biến trên D.

(1) $\Leftrightarrow a + b = 2 - 2ab \Rightarrow a(1 + 2b) = 2 - b$ (2). Từ (2), suy ra $2 - b > 0 \Rightarrow b < 2$.

Ta được $Q = ab + 2ab^2 = ba(1 + 2b) \overset{(2)}{=} b(2 - b)$.

Theo bất đẳng thức Cô – si, ta được $Q = b(2 - b) \leq \left[\frac{b+(2-b)}{2}\right]^2 = 1$.

Vậy $\max Q = 1$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$.

Câu 73: Cho$x$, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+y$.

A. $T\sqrt{2}_{min}$. **B.** $T\sqrt{3}_{min}$. **C.** $T\sqrt{5}_{min}$. **D.** $T\sqrt{2}_{min}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề ra ta có

$$5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$$
$$\Leftrightarrow 5^{x+2y}-\frac{1}{3^{x+2y}}+x+2y=5^{xy-1}-\frac{1}{3^{xy-1}}+xy-1$$

Xét $f(t)=5^t-\frac{1}{3^t}+t.\Rightarrow f'(t)=5^t\,ln5+3^{-t}\,ln3+1>0$

$\Rightarrow x+2y=xy-1\Rightarrow y=\frac{x+1}{x-2}$.Do $y>0,x>0\Rightarrow\frac{x+1}{x+2}>0\Rightarrow x>2$

Ta có: $T=x+y=x+\frac{x+1}{x-2}=\frac{x^2-x+1}{x-2}$

$$T'=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{3}\in(2;+\infty)\\x=2-\sqrt{3}\notin(2;+\infty)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

Chỉnh lại bbt cho em,chỉ xét với $x>2$nhé,kết quả không thay đổi.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		0		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
T'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
T	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $T\sqrt{3}_{min}$ tại $x=2+\sqrt{3}$.

Câu 74: Cho hai số thực x,y dương thỏa mãn hệ thức $3^{x^2-y-\sqrt{y^2+1}}\log x+\log\sqrt{\sqrt{y^2+1}-y}=0$.

Khi biểu thức $T=y^2-x^2-y+\sqrt{y^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì biểu thức $P=(x^2-1)^2+2y$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết: $3^{x^2-y-\sqrt{y^2+1}}\log x+\log\sqrt{\sqrt{y^2+1}-y}=0\Leftrightarrow\frac{3^{x^2}}{3^{y+\sqrt{y^2+1}}}\log x+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=0$

$\Leftrightarrow 2.3^{x^2}\log x+3^{y+\sqrt{y^2+1}}\log\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}=0\Leftrightarrow 3^{x^2}\log x^2=3^{y+\sqrt{y^2+1}}\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

$\Leftrightarrow f(x^2)=f\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$. Với hàm số: $f(t)=3^t\log t$; $f'(t)=3^t.\log t.\ln 3+3^t.\frac{1}{t.\ln 10}>0$

Suy ra $f(x^2)=f\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\Leftrightarrow x^2=y+\sqrt{y^2+1}$. Thế vào biểu thức T ta được:

$T=y^2-x^2-y+\sqrt{y^2+1}=y^2-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)-y+\sqrt{y^2+1}=y^2-2y=(y-1)^2-1\geq-1$.

Dấu $''=''$ xảy ra khi $y=1\Rightarrow x^2=y+\sqrt{y^2+1}=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Suy ra: $P=(x^2-1)^2+2y=4$.

Câu 75: Xét các số thực dương x,y thoả mãn $2018^{2(x^2-y+1)}=\frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P=2y-3x$ bằng

A. $P\frac{3}{4}_{min}$. **B.** $P\frac{5}{6}_{min}$. **C.** $P\frac{7}{8}_{min}$. **D.** $P\frac{1}{2}_{min}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x^2-y+1) = log_{2018}(2x+y) - log_{2018}(x^2+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow log_{2018}(x^2+2x+1) + 2(x^2+2x+1) = log_{2018}(2x+y) + 2(2x+y)(*).$$

Xét hàm: $f(t) = log_{2018} t + 2t, t > 0$.

Suy ra: $f'(t) = \frac{1}{t\ln 2018} + 2 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $(*) \Leftrightarrow f(x^2+2x+1) = f(2x+y) \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2+1$.

Khi đó: $P = 2y - 3x = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$.

Kết luận: $P\frac{7}{8}_{min}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

Câu 76: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $log_2 x + x(x+y) \geq log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ bằng

A. $\frac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\frac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 6 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có: $log_2 x + x(x+y) \geq log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow log_2 x^2 + x^2 \geq log_2[x(6-y)] + x(6-y)$ (*)

Xét hàm số $f(t) = log_2 t + t$ với $t > 0$, Ta có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2) \geq f[x(6-y)] \Leftrightarrow x^2 \geq x(6-y) \Leftrightarrow x \geq 6-y \Leftrightarrow x+y \geq 6(**)$ (do $x > 0$)

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức $(**)$, ta có: $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{3}{2}(x+y) + \left(\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{8}{y}\right) \geq \frac{3}{2}.6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}} = 19$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 19.

Câu 77: Xét các số thực $x,\ y\ (x \geq 0)$thỏa mãn

$2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \frac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$.

Gọi $m$là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;2)$. **C.** $m \in (2;3)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \frac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$

$$\Leftrightarrow 2018^{x+3y} - 2018^{-x-3y} + x + 3y = 2018^{-xy-1} - 2018^{xy+1} - xy - 1$$

$\Leftrightarrow f(x+3y) = f(-xy-1)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2018^t - 2018^{-t} + t$, với $t \in \mathbb{R}$ta có

$f'(t) = 2018^t \ln 2018 + 2018^{-t} \ln 2018 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Do đó $f(t)$đồng biến trên $\mathbb{R}$nên $(1) \Leftrightarrow x + 3y = -xy - 1$
$\Leftrightarrow y(x+3) = -x - 1 \Rightarrow y = -\frac{x+1}{x+3} \Rightarrow T = x - \frac{2(x+1)}{x+3}$.
Xét hàm số $f(x) = x - \frac{2(x+1)}{x+3}$, với $x \in 0; +\infty)$có
$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.
Do đó $f(x)$đồng biến trên $0; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = -\frac{2}{3}$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

Câu 78: Cho $0 \leq x; y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{136}{3}$. **B.** $\frac{391}{16}$. **C.** $\frac{383}{16}$. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019} \Leftrightarrow \frac{2017^{1-y}}{2017^x} = \frac{x^2+2018}{(1-y)^2+2018}$
$\Leftrightarrow 2017^{1-y}[(1-y)^2 + 2018] = 2017^x(x^2+2018)$
Xét hàm số $f(t) = 2017^t(t^2+2018)$, với $0 \leq t \leq 1$.
$\Rightarrow f'(t) = (t^2+2018).2017^t.\ln 2017 + 2t.2017^t = 2017^t[(t^2+2018).\ln 2017 + 2t] > 0$
$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $0 \leq t \leq 1$
$\Rightarrow 1 - y = x \Leftrightarrow y = 1 - x$
Cách 1:
Theo giả thiết $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$

$$= [4x^2 + 3(1-x)].[4(1-x)^2 + 3x] + 25x(1-x)$$
$$= (4x^2 - 3x + 3)(4x^2 - 5x + 4) + 25x(1-x)$$
$$= 16x^4 - 20x^3 + 16x^2 - 12x^3 + 15x^2 - 12x + 12x^2 - 15x + 12 + 25x - 25x^2$$
$$= 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$$

Xét hàm số $S(x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$, với $0 \leq x \leq 1$.
$\Rightarrow S'(x) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$. Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pm\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	12	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	12

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} M = \max\limits_{[0;1]} S(x) = \frac{25}{2} \\ m = \min\limits_{[0;1]} S(x) = \frac{191}{16} \end{cases}$.

Vậy $M+m=\frac{25}{2}+\frac{191}{16}=\frac{391}{16}$.

Cách 2:

Từ $0\le x;y\le 1$và $x+y=1$ suy ra $0\le xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Viết lại $S=16x^2y^2+12(x^3+y^3)+34xy$

$$S=16x^2y^2+12[(x+y)^3-3xy(x+y)]+34xy$$

$$S=16x^2y^2-2xy+12$$

Đặt $t=xy,t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$thì $S=f(t)=16t^2-2t+12$.

Khảo sát hàm $f(t)$ ta được $\min\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{191}{16}$, $\max\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{12}$.

Vậy $M+m=\frac{25}{2}+\frac{191}{16}=\frac{391}{16}$

Câu 79: Cho các số thực $a,b\ c$ thỏa mãn $\log_2\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a+2b+c}{a+b+c+a}$ bằng

A. $\frac{4-\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\frac{5+2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4+\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}>0\Leftrightarrow a+b+c>0\ (*)$.

Ta biến đổi hệ thức ban đầu $\Leftrightarrow\log_2\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$

$$\Leftrightarrow 1+\log_2\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}=a^2+b^2+c^2+1-2a-2b-2c$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{2a+2b+2c}{a^2+b^2+c^2+1}=a^2+b^2+c^2+1-(2a+2b+2c)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2a+2b+2c)-\log_2(a^2+b^2+c^2+1)=a^2+b^2+c^2+1-(2a+2b+2c)$$

$\Leftrightarrow\log_2(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c)=\log_2(a^2+b^2+c^2+1)+(a^2+b^2+c^2+1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t,t>0\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0\Rightarrow f(t)$ tăng trên $(0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow f(2a+2b+2c)=f(a^2+b^2+c^2+1)\Leftrightarrow 2a+2b+2c=a^2+b^2+c^2+1$

Suy ra: $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2\ (**)$

Dễ thấy điều kiện $(*)$ được thỏa mãn ở hệ thức: $2a+2b+2c=a^2+b^2+c^2+1>0$

Ta có: $P=\frac{a+2b+c}{a+b+c+a}\Leftrightarrow(P-1)a+(P-2)b+(P-1)c=-P$

$$\Leftrightarrow(P-1)(a-1)+(P-2)(b-1)+(P-1)(c-1)=4-4P$$

$\Rightarrow(4-4P)^2=[(P-1)(a-1)+(P-2)(b-1)+(P-1)(c-1)]^2$ Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\Rightarrow(4-4P)^2\le[(P-1)^2+(P-2)^2+(P-1)^2][(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]$$

$$\Rightarrow(4-4P)^2\le 2[(P-1)^2+(P-2)^2+(P-1)^2]\Leftrightarrow 5P^2-8P+2\le 0\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{6}}{5}\le P\le\frac{4+\sqrt{6}}{5}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $P_{\max}=\frac{4+\sqrt{6}}{5}$.

Câu 80: Cho hai số thực x,y thỏa mãn hệ thức $\log_5\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}=5x+2y-5xy+1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2-10xy+4y+2019$ tương ứng bằng

A. 2019. **B.** 2010. **C.** 2011. **D.** 1990.

Lời giải

Chọn D

- Điều kiện xác định: $\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}>0.(*)$
- Ta có $\log_5\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}=5x+2y-5xy+1\Leftrightarrow\log_5\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}=(5x+7y+1)-(5xy+5y)$

$\Leftrightarrow 1+\log_5\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}=(5x+7y+12)-5(xy+y+2)$.

$\Leftrightarrow \log_5\frac{5xy+5y+10}{5x+7y+12}=(5x+7y+12)-(5xy+5y+10)$.

$\Leftrightarrow \log_5(5xy+5y+10)-\log_5(5x+7y+12)=(5x+7y+12)-(5xy+5y+10)$.

$\Leftrightarrow \log_5(5xy+5y+10)+(5x+7y+12)=\log_5(5x+7y+12)+(5xy+5y+10)$.

$\Leftrightarrow f(5xy+5y+10)=f(5x+7y+12)\Leftrightarrow 5xy+5y+10=5x+7y+12$.

- Suy ra $5xy-2y=5x+2\Rightarrow T=x^2-2(5xy-2y)+2019=x^2-2(5x+2)+2019=(x-5)^2+1990$
- Khi $x=5\Rightarrow y=\frac{17}{23}\Rightarrow$ thỏa mãn điều kiện (*).
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của T là: $T_{\min}=1990$.

Câu 81: Cho $x,y>0$ thỏa $2019^{2(x^2-y+2)}-\frac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-4x$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2019^{2(x^2-y+2)}-\frac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow 2019^{2(x^2+4x+4)-2(4x+y+2)}=\frac{4x+y+2}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2019^{2(x+2)^2}.(x+2)^2=2019^{2(4x+y+2)}.(4x+y+2)(*)$.

Đặt $\begin{cases}u=(x+2)^2\\ v=4x+y+2\end{cases}(u,v>0)$

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 2019^{2u}.u=2019^{2v}.v\Leftrightarrow f(u)=f(v)$

với $f(t)=2019^{2t}.t,(t>0)$

$$\Rightarrow f'(t)=2019^{2t}.2\ln 2019.t+2019^{2t}>0,\forall t>0$$

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y+2\Leftrightarrow y=x^2+2$.

$\Rightarrow P=2y-4x=2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2\geq 2$.

Vậy P_{min}.

Câu 82: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\leq 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{6(2x+y)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích ab là

A. $ab=18$. **B.** $ab=81$. **C.** $ab=28$. **D.** $ab=82$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0,y>0$ ta có

$xy\leq 4y-1\Leftrightarrow \frac{x}{y}<-\frac{1}{y^2}+\frac{4}{y}\Leftrightarrow \frac{x}{y}<-\left(\frac{1}{y^2}-2.2.\frac{1}{y}+4\right)+4\Leftrightarrow \frac{x}{y}<4-\left(\frac{1}{y}-2\right)^2\Rightarrow \frac{x}{y}\leq 4$.

Vậy $0<\frac{x}{y}\leq 4$.

$P=\frac{6(2x+y)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}=12+6.\frac{y}{x}+\ln\left(\frac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t=\frac{x}{y}\Rightarrow 0<t\leq 4$.

$P(t)=12+6\frac{1}{t}+\ln(t+2)\Rightarrow P'(t)=-\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t+2}=\frac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$.

$$P'(t)=0\Leftrightarrow t^2-6t-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3-\sqrt{21}(L)\\ t=3+\sqrt{21}(TM)\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

t	0		4
$P'(t)$		$-$	
$P(t)$		$\searrow$	$\frac{27}{2}+\ln 6$

Vậy $a.b = 81$.

Câu 83: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+1-\sqrt{y^2+1}}\log_2 x + 2^y\log_2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) = 0$. Giá trị lớn nhất của $P = 3x^2 - y^2 - 3y$ tương ứng bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta đổi biến giả thiết như sau:

$$2^{x^2+1-\sqrt{y^2+1}}\log_2 x + 2^y\log_2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2.2^{x^2}\log_2 x}{2^{\sqrt{y^2+1}}}$$

$$= -2^y\log_2\frac{\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}{\sqrt{y^2+1}+y}$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2}\log_2 x = -2^y.2^{\sqrt{y^2+1}}\log_2\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} \Leftrightarrow 2.2^{x^2}\log_2 x = 2^y.2^{\sqrt{y^2+1}}\log_2\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2}\log_2 x^2 = 2^{y+\sqrt{y^2+1}}\log_2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \Leftrightarrow f(x^2) = f\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \Leftrightarrow x^2 = y+\sqrt{y^2+1}$$

(Với hàm $f(t) = 2^t\log_2 t \Rightarrow f'(t) = 2^t\log_2 t.\ln 2 + 2^t.\frac{1}{t\ln 2} > 0$ với $\forall t > 0$. Suy ra hàm đặc trưng đang xét là đơn điệu tăng).

Thay $x^2 = y + \sqrt{y^2+1}$ vào biểu thức:

$P = 3\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) - y^2 - 3y = -y^2 + 3\sqrt{y^2+1} = \frac{13}{4} - \left(\sqrt{y^2+1}-\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{13}{4}$.

Dấu $'' = ''$ xảy ra khi $\sqrt{y^2+1} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{2};\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức P là: $P_{\text{Max}} = \frac{13}{4}$.

Câu 84: Xét các số thực x, y thỏa mãn $x > 0$ và $x^4 + e^{4y} - 3 = x.e^y(1-2x.e^y)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \ln x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;\ 2)$. **B.** $[2;\ 4)$. **C.** $[-3;\ 0)$. **D.** $[0;\ 3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^4 + e^{4y} - 3 = x.e^y(1-2x.e^y)$

Đặt $t = e^y (t > 0)$ ta có: $x^4 + t^4 - 3 = xt(1-2xt) \Leftrightarrow 3 + xt = (x^2+t^2)^2 \ge 4(xt)^2$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le xt \le 1$.

Lại do $x, t > 0 \Rightarrow 0 < xt \le 1 \Rightarrow 0 < x.e^y \le 1 \Leftrightarrow \ln x + y \le 0$ nên $P \le 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = t \\ xt = 1 \\ x, t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = t = 1$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy $P_{\max} = 0 \in [0;\ 3)$.

Câu 85: Cho hai số thực x, y lớn hơn 1 và thỏa mãn $y^x.(e^x)^{e^y} \ge x^y.(e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = log_x\sqrt{xy} + log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x, y > 1$, ta có

$$y^x.(e^x)^{e^y} \geq x^y.(e^y)^{e^x}$$
$$\Leftrightarrow ln\left(y^x.(e^x)^{e^y}\right) \geq ln\left(x^y.(e^y)^{e^x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x\,ln\,y + xe^y \geq y\,ln\,x + ye^x$$
$$\Leftrightarrow \frac{ln\,y}{y} + \frac{e^y}{y} \geq \frac{ln\,x}{x} + \frac{e^x}{x}\,(1).$$

Xét hàm số $g(t) = te^t - e^t + 1 - ln\,t$ trên $1; +\infty)$, có $g'(t) = te^t - \frac{1}{t} > 0, \forall t \geq 1$.

Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $1; +\infty)$ nên $g(t) > g(1) = 1 > 0, \forall t > 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{ln\,t}{t} + \frac{e^t}{t}$ trên $(1; +\infty)$, có $f'(t) = \frac{g(t)}{t^2} > 0, \forall t > 1$, nên $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Với $x, y > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow y \geq x$.

Đặt $u = log_x y$. Do $y \geq x > 1$ nên $u \geq 1$. Ta có $P = h(u) = \frac{1+u}{2} + \frac{1}{u}$. Nhận thấy $h'(u) = \frac{u^2-2}{2u^2}$, nên $h'(u) = 0$ khi $u = \sqrt{2}$, $h'(u) < 0$ khi $1 \leq u < \sqrt{2}$, $h'(u) > 0$ khi $u > \sqrt{2}$. Dẫn tới $P = h(u) \geq h\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \forall u \geq 1$, đẳng thức xảy ra khi $u = \sqrt{2}$.

Vậy $min\,P = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $y = x^{\sqrt{2}}$ và $x > 1$.

Câu 86: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn hệ thức: $2\,log_2 a - log_2 b \leq log_2(a + 6b)$. Tìm giá trị lớn nhất P_{Max} của biểu thức $P = \dfrac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2}$.

A. $P_{Max} = \frac{2}{3}$. **B.** $P_{Max} = 0$. **C.** $P_{Max} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $P_{Max} = \frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\,log_2 a - log_2 b \leq log_2(a + 6b) \Leftrightarrow log_2 a^2 \leq log_2(ab + 6b^2) \Leftrightarrow a^2 \leq ab + 6b^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{a}{b} \leq 2$.

Do a, b dương nên $0 < \frac{a}{b} \leq 2$.

Đặt $t = \frac{a}{b}, 0 < t \leq 2$.

Khi đó: $P = \dfrac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2} = \dfrac{t-1}{t^2-2t+2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-1}{t^2-2t+2}$ với $0 < t \leq 2$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2+2t}{(t^2-2t+2)^2} \geq 0, \forall t \in 0; 2$.

Suy ra $f(t) \leq f(2) = \frac{1}{2}$. Vậy $\underset{0;2}{Max} f(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 2$.

Do đó $P_{Max} = \dfrac{1}{2}$.

DẠNG 3: ÁP DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH.

Câu 87: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2 + y^2 \leq 4$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2x + 2my + 3m - 4) \geq 1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn bài toán. Số phần tử của tập S là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

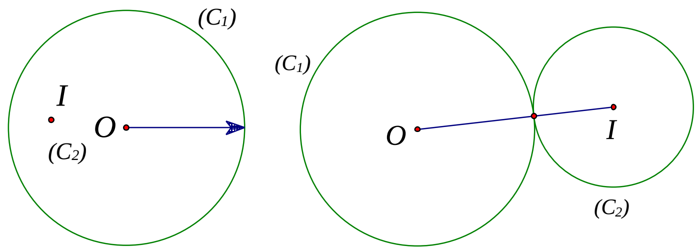
Miền điều kiện $x^2 + y^2 \leq 4$ là miền nằm trong hình tròn (C_1) tâm là gốc toạn độ $O(0;0)$ bán kính $R_1 = 2$ kể cả đường tròn (C_1) như hình vẽ.

Từ giả thiết:

$$\log_{x^2+y^2+1}(2x + 2my + 3m - 4) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + 2my + 3m - 4 \geq x^2 + y^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-m)^2 \leq m^2 + 3m - 4$$

Nằm trong hình tròn (C_2) tâm $I(1; m)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m^2 + 3m - 4}$ $(m \leq -`4\,;\ m \geq 1)$ kể cả đường tròn (C_2) như hình vẽ.

Để tồn tại một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đềtoán thì xảy ra hai trường hợp sau:



Trường hợp 1: Đường tròn (C_2) có $R_2 = 0$ coi như chỉ là một điểm I và điểm I này sẽ nằm trong hoặc trên (C_1)

Ta có điều kiện tương ứng:

$\begin{cases} R_2 = 0 \\ OI \leq R_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 = \sqrt{m^2 + 3m - 4} = 0 \\ OI = \sqrt{1^2 + m^2} \leq R_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; m = -4 \\ |m| \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn) (1)

Trường hợp 2: Đường tròn (C_1) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C_2).

Ta có điều kiện tương ứng:

$$OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + m^2} = 2 + \sqrt{m^2 + 3m - 4}$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 1^2 = 4 + m^2 + 3m - 4 + 4\sqrt{m^2 + 3m - 4}$$
$$\Leftrightarrow 1 - 3m = 4\sqrt{m^2 + 3m - 4}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{1}{3} \\ (1-3m)^2 = 16m^2 + 48m - 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{3} \\ 7m^2 + 54m - 65 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m = \frac{-27-4\sqrt{74}}{7} \\ m = \frac{-27+4\sqrt{74}}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-27-4\sqrt{74}}{7}, (m \in \mathbb{Z})$ (loại)

Câu 88: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$. **B.** $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$. **C.** $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$. **D.** $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Lời giải

Chọn D

• Ta có: $log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$\Leftrightarrow log_{\sqrt{3}}(x+y) - log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + log_{\sqrt{3}}3 = x^2+y^2+xy+2-3(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2+log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) = 3(x+y)+log_{\sqrt{3}}3(x+y)$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3(x+y)$.

$\Leftrightarrow x^2+xy+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}-\frac{3y}{2}+\frac{3}{4}-3\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{9}{4} = 1$.

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - 3\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{9}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1\ (*)$

Đặt: $\begin{cases} a = x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a-\frac{b}{\sqrt{3}}+1 \\ y = \frac{2b}{\sqrt{3}}+1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (*) trở thành: $a^2+b^2=1\ (C)$ là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

• $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6} \Rightarrow P(x+y+6) = x+2y+3$.

$\Rightarrow P\left(a+\frac{b}{\sqrt{3}}+8\right) = a+\sqrt{3}b+6$.

$\Rightarrow (P-1)a+\frac{P-3}{\sqrt{3}}b+8P-6 = 0\ (\Delta)$.

• Điều kiện để đường tròn (C) và đường thẳng Δ có giao điểm là:

$d(O;\Delta) \le 1 \Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2+\frac{(P-3)^2}{3}}} \le 1$.

$\Leftrightarrow |8P-6| \le \sqrt{(P-1)^2+\frac{(P-3)^2}{3}}$.

$\Leftrightarrow \frac{188}{3}P^2-92P+32 \le 0$.

$\Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \le P \le \frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

$\Rightarrow P\frac{69+\sqrt{249}}{94}_{max}$.

Câu 89: Cho hai số thực x, y thỏa điều kiện $\log_{x^2-2x+3}(2x+y+1) \ge 1, x+y \le 6$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x+y$ lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $P = \alpha+\beta$ bằng:

A. 7.   **B.** 5.   **C.** 8.   **D.** 11.

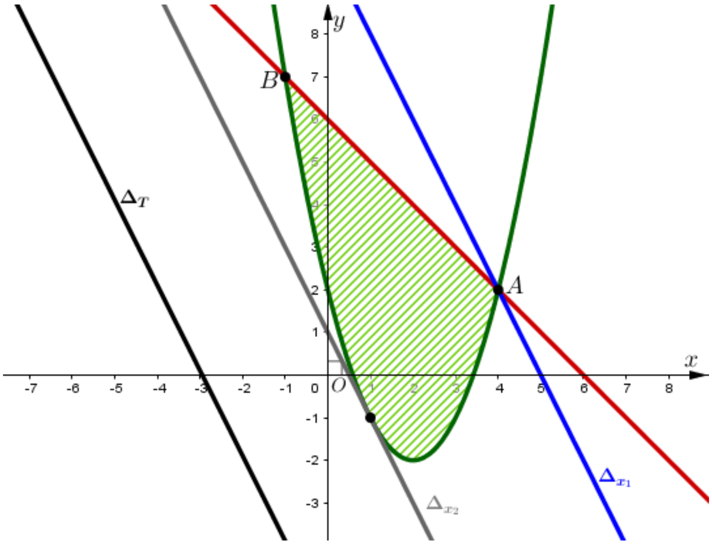
Lời giải

Chọn D

Đây là dạng toán max-min trên miền D điển hình.

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases} \log_{x^2-2x+3}(2x+y+1) \ge 1 \\ x+y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1 \ge x^2-2x+3 \\ y \le 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge x^2-4x+2 \\ y \le 6-x \end{cases}$

Chúng ta dễ dàng phác họa nhanh được miền D như trên hình vẽ.



Ta xác định rõ được hai giao điểm của hai đường cong tạo nên miền D là:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; y = 7 \Rightarrow A(-1;7) \\ x = 4; y = 2 \Rightarrow B(4;2) \end{array}\right.$$

Tiếp đó ta xử lý tới biểu thức max-min: $T = 2x + y \Leftrightarrow y = -2x + T$; đây là một họ đường thẳng song song với nhau ta gọi họ đường thẳng Δ_T.

Trong đó mỗi cặp $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện bài tọa đã cho sẽ ứng với một điểm $M(x; y) \in D$

Điều kiện là đường thẳng Δ_T phải cắt miền D (có ít nhất một điểm chung với miền D).

Bằng trực quan trên đồ thị, ta có thể xác định được trường hợp đường thẳng Δ_{x_1} đi qua điểm B ứng với giá trị T_1. Thõa mản: $y = -2x + T_1 \Leftrightarrow 2 = -2.4 + T_1 \Rightarrow T_1 = 10$.

Đường thẳng Δ_{x_2} tiếp xúc với đường parabol (P) tại hoành độ $x < 2$ ứng với giá trị T_2. Thỏa mãn phương trình có nghiệm kép: $y = -2x + T_2 = x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - T_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = 1$

Các giá trị T phải nằm trong đoạn: $1 = T_2 \le T \le T_1 = 10$

Suy ra: $\begin{cases} T_{\max} = 10 = \alpha \\ T_{\min} = 1 = \beta \end{cases} \Rightarrow P = \alpha + \beta = 11$.

Câu 90: Cho các số thực $a,\ b,\ m,\ n$ sao cho $2m + n < 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + log_2(3a + 2b) \\ 9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}} + ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}$.

A. $2\sqrt{5} - 2$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5} - 2$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + log_2(3a + 2b) \Leftrightarrow log_2(a^2 + b^2 + 9) = log_2[2(3a + 2b)]$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 = 4$.

Gọi $H(a; b)$, suy ra H thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 2$.

Lại có $9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}} + ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81$

$\Leftrightarrow 3^{-(2m+n)+\left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81$, (1)

Với $\forall m, n$ thỏa mãn $2m + n < 0$, ta có:

+) $-(2m + n) + \frac{-4}{2m+n} \ge 2\sqrt{[-(2m + n)].\left(\frac{-4}{2m+n}\right)} = 4 \Rightarrow 3^{-(2m+n)+\left(\frac{-4}{2m+n}\right)} \ge 81$

+) $ln[(2m + n + 2)^2 + 1] \ge ln\,1 = 0$.

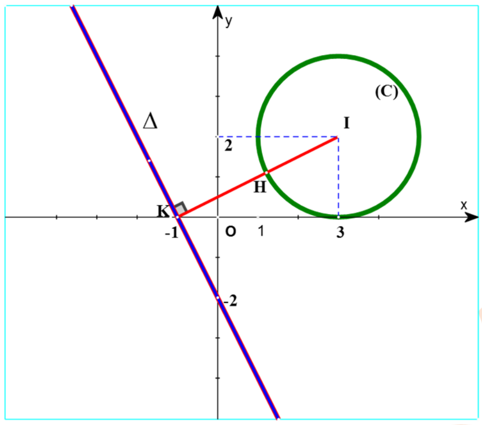
Suy ra $3^{-(2m+n)+\left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + ln[(2m + n + 2)^2 + 1] \ge 81$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -(2m+n) = \frac{-4}{2m+n} \\ 2m+n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m+n+2=0.$

Gọi $K(m;n)$, suy ra K thuộc đường thẳng Δ có phương trình $2x+y+2=0$.

Ta có: $P = \sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2} = HK$.

$d(I,\Delta) = \frac{|2.3+2+2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2\sqrt{5} > 2 \Rightarrow$ đường thẳng Δ không cắt đường tròn (C).



Do đó HK ngắn nhất khi K là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ và điểm H là giao điểm của đoạn thẳng IK với đường tròn (C).

Lúc đó $HK = IK - IH = 2\sqrt{5} - 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{5} - 2$.

Câu 91: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $log_{(x+y)}(x^2+y^2) \le 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 48(x+y)^3 - 156(x+y)^2 + 133(x+y) + 4$ là

A. 29. **B.** $\frac{1369}{36}$. **C.** 30. **D.** $\frac{505}{36}$.

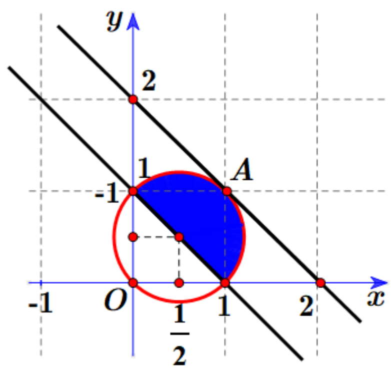
Lời giải

Chọn C

TH1: $log_{(x+y)}(x^2+y^2) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>1 \\ x^2+y^2 \le x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2} \, (*) \end{cases}$ (1).

Tập nghiệm của BPT (*) là tọa độ tất cả các điểm thuộc hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Miền nghiệm của hệ (1) là phần tô màu như hình vẽ.

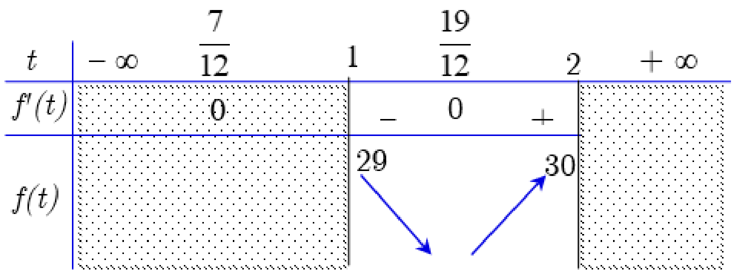


Đặt $t = x+y \Rightarrow 1 < t \le 2$

Khi đó $f(t) = 48t^3 - 156t^2 + 133t + 4$

$f'(t) = 144t^2 - 312t + 133$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{19}{12} \\ t = \frac{7}{12} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Do đó, $\max\limits_{1<t\le 2} f(t) = 30 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x + y = 2$.

TH2: $log_{(x+y)}(x^2+y^2) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y < 1 \\ x^2+y^2 \ge x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y < 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{2} \end{cases} (2)$.

(2) không thỏa điều kiện $x > 0, y > 0$.

Câu 92: Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $\log_2(x+y-1) \le 1, x \ge 0, y \ge 0$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 1$ lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $P = \alpha^2 + \beta^2$ bằng:

A. 12. **B**. 104. **C.** 20. **D.** 48.

Lời giải

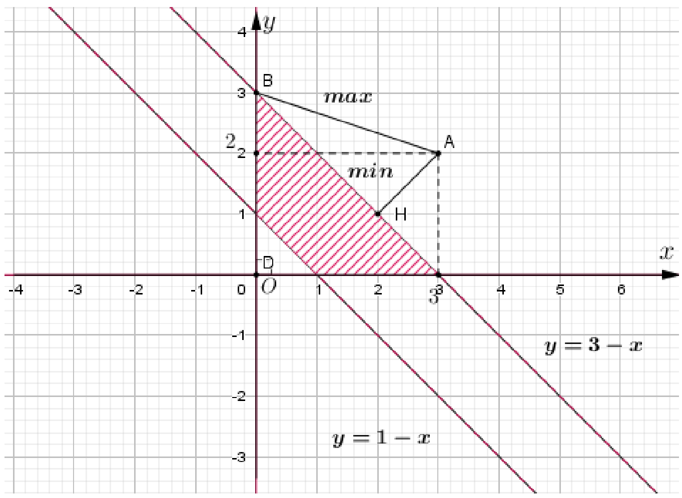
Chọn B

Đây là bài toán max-min trên miền D điển hình.

Từ giả thiết ta suy ra: $\log_2(x+y-1) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1 > 0 \\ x+y = 1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 1-x \\ y \le 3-x \end{cases}$

Chúng ta có miền D như sau: $D = \{x \ge 0; y \ge 0; y > 1-x; y \le 3-x\}$.

Chúng ta dễ dàng phác họa nhanh được miền D như trên hình vẽ.



Mô tả qua về miền D như sau: là phần gạch chéo bao gồm tất cả các đường biên chỉ bỏ đi phần đường biên màu đỏ ứng với đường thẳng $y = 1 - x$

Tiếp đó ta xử lý tới biểu thức max-min: $T = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 1 = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 12$

Trong đó mỗi cặp $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho sẽ ứng với một điểm $M(x; y) \in D$

Nếu ta gọi điểm $A(3; 2) \Rightarrow T = AM^2 - 12$.

Đến đây ta chỉ việc đi tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của khoảng cách AM.

Dễ thấy trực quan hình vẽ: $\begin{cases} AM_{\max} = AK = \sqrt{10} \\ AM_{\min} = AH = d(A; (x+y-3=0)) = \frac{|3+2-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} T_{\max} = AM^2{}_{\max} - 12 = -2 = \alpha \\ T_{\min} = AM^2{}_{\min} - 12 = -10 = \beta \end{cases} \Rightarrow P = \alpha^2 + \beta^2 = 104$.

Câu 93: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2 + y^2 = 9$ và $\log_{x^2+y^2+2}(2x - 2y + m - 1) \geq 1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn bài toán. Tổng giá trị tất cả các phần tử của tập S nằm trong khoản nào cho ở dưới đây?

A. $(4; 5)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(2; 3)$. **D.** $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Miền điều kiện $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \log_{x^2+y^2+2}(2x - 2y + m - 1) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x - 2y + m - 1 \geq x^2 + y^2 + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9\ (C_1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq m - 1\ (C_2) \end{cases}$ có duy nhất 1 nghiệm.

(C_1) là đường tròn có tâm là gốc toạn độ $O(0; 0)$ bán kính $R_1 = 3$.

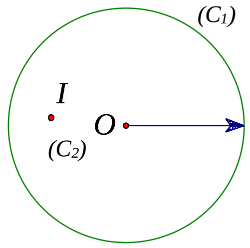
(C_2) là miền trong đường tròn và đường tròn tâm $I(1\,; -1), R_2 = \sqrt{m-1}$ $(m > 1)$.

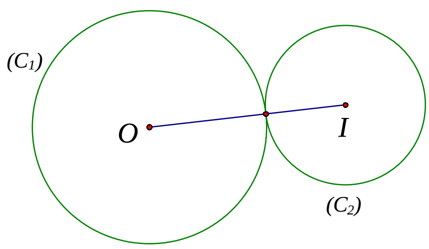
Để tồn tại một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đề toán thì xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đường tròn (C_2) có $R_2 = 0$ coi như chỉ là một điểm $I(1\,; -1)$ và điểm $I(1\,; -1)$ này sẽ nằm trong hoặc trên (C_1)

Ta có điều kiện tương ứng:

$$\begin{cases} R_2 = 0 \\ OI \leq R_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 = m - 1 = 0 \\ OI = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \leq R_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$





Trường hợp 2: Đường tròn (C_1) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C_2).

Ta có điều kiện tương ứng:

$$OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 3 + \sqrt{m-1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 3 - \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow m - 1 = 11 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 12 - 6\sqrt{2}$ (thỏa mãn $m > 1$)

Vậy tìm được: $m_1 = 12 - 6\sqrt{2}$, $m_2 = 1$. Suy ra $m_1 + m_2 = 13 - 6\sqrt{2} \approx 4{,}5$.

Câu 94: Cho hai số thực x và y thõa mãn các điều kiện $x^2 + y^2 \geq 9$ và $\log_{x^2+y^2}(x(8x^2 + 8y^2 - 7x) - 7y^2) \geq 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + y$ lần lượt là M và m. Khi đó giá trị của biểu thức $\left(M + 3m\sqrt{2}\right)$ bằng:

A. $12 + 18\sqrt{2}$. **B.** 24. **C.** $6\sqrt{10}$. **D.** $10 - 2\sqrt{3}$

Lời giải

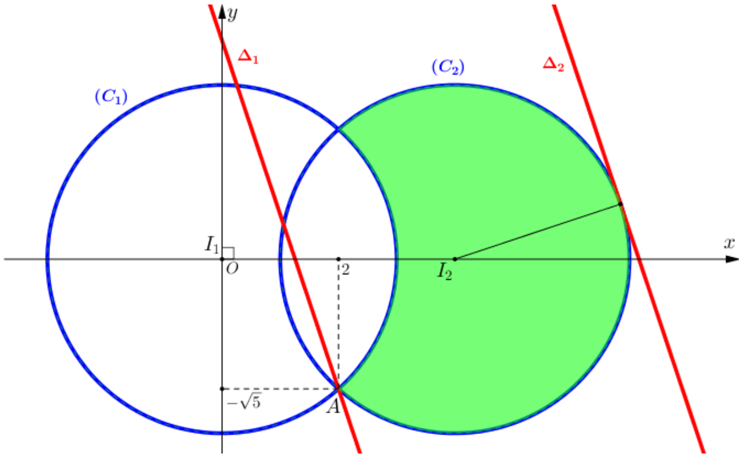
Chọn A

Từ

$\log_{x^2+y^2}(x(8x^2 + 8y^2 - 7x) - 7y^2) \geq 2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(8x - 7) \geq (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 \leq 9$

Như vậy x và y thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ (x-4)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$. Đây là miền D giới hạn bởi bên trong đường tròn $(C_2): (x-4)^2 + y^2 = 9$ và bên ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 \geq 9$

Hai đường tròn cùng bán kính $R_1 = R_2 = 3$ và tâm $I_1(0; 0)$ và tâm $I_2(4; 0)$ như hình vẽ.



Giao điểm của hai đường tròn là $(2; \pm\sqrt{5})$. Cụ thể điểm A như hình vẽ, có $A(2; -\sqrt{5})$

Xét họ đường thẳng Δ song song với nhau: $3x + y - P = 0$

Để thỏa mãn bài toán thì họ đường thẳng này phải cắt miền D.

Ứng với vị trí đường thẳng Δ_1 đi qua điểm A, ta có: $3.2 - \sqrt{5} - P = 0 \to P_1 = 6 - \sqrt{5}$

Ứng với vị trí đường thẳng Δ_2 tiếp xúc với (C_2) ta có: $d(I; \Delta_2) = R_2$

$$\Leftrightarrow \frac{|3.4 + 0 - P|}{\sqrt{9+1}} = 3 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = 12 - 3\sqrt{10} \\ P = 12 + 3\sqrt{10} \end{array}\right. \Rightarrow P_2 = 12 + 3\sqrt{10}$$

Suy ra: giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P tương ứng là: $\begin{cases} M = P_2 = P_{\max} = 12 + 3\sqrt{10} \\ m = P_1 = P_{\min} = 6 - \sqrt{5} \end{cases}$

Suy ra: $(M + 3m\sqrt{2}) = 12 + 18\sqrt{2}$.

Câu 95: Cho hai số thực x và y thõa mãn đồng thời các điều kiện: $x + y + 2 \geq 0$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2x - 2y + 3) \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = 2x + y$ lần lượt là a và b. Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng:

A. $-2 + 2\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $4 - 2\sqrt{3}$. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

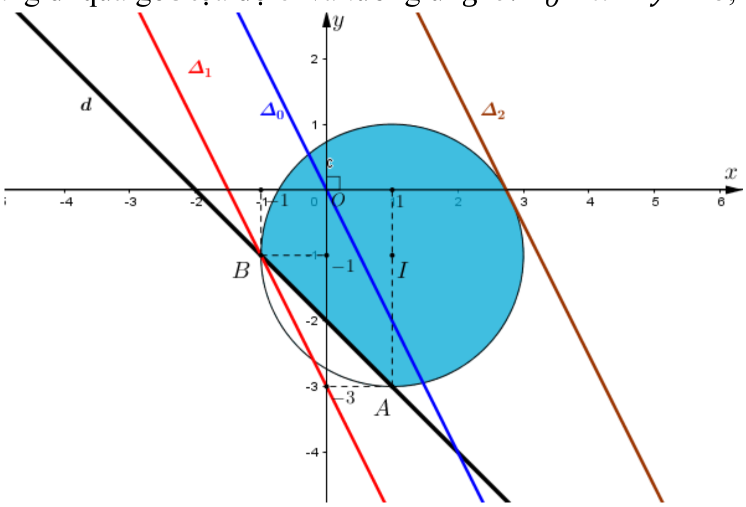
Từ giả thiết $\log_{x^2+y^2+1}(2x - 2y + 3) \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 2y + 3 \geq x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$

Như vậy, điểm $M(x; y)$ nằm trong miền D giới hạn bởi: $D = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4; x + y + 2 \geq 0\}$

Miền D được xác định như hình vẽ:

Biểu thức P được biến đổi về dạng họ đường thẳng: $\Delta: 2x + y - P = 0$

Khi $P = 0$ thì đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và tương ứng là: $\Delta_O: 2x + y = 0$, như hình vẽ.



Ứng với vị trí: $\Delta_1: 2x + y - P_1 = 0$; đi qua điểm $B(-1;-1)$; suy ra: $2(-1) + (-1) - P_1 = 0 \Leftrightarrow P_1 = -3$

Suy ra: ở vị trí $\Delta_2: 2x + y - P_2 = 0$ (thì $P_2 > 0$). Ở vị trí này đường thẳng Δ_2 tiếp xúc với đường tròn (C), nên ta có: $\begin{cases} d(I;\Delta_2) = R \\ P_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|2.1-1-P_2|}{\sqrt{4+1}} = 2 \\ P_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = 1 \pm 2\sqrt{5} \\ P_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_2 = 1 + 2\sqrt{5}$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_2 = 1 + 2\sqrt{5} = b$; $P_1 = -3 = a$.

Suy ra: $a + b = -2 + 2\sqrt{5}$.

Câu 96: Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + log_2(5 - x)(1 + x) = 2\,log_3\frac{5+4x-x^2}{3} + log_2(2y + 8)^2$.

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

A. 2047. **B.** 16383. **C.** 16384. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $y \neq -4; -1 < x < 5$.

Ta có: $log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + log_2(5 - x)(1 + x) = 2\,log_3\frac{-x^2+4x+5}{3} + log_2(2y + 8)^2$ (1)

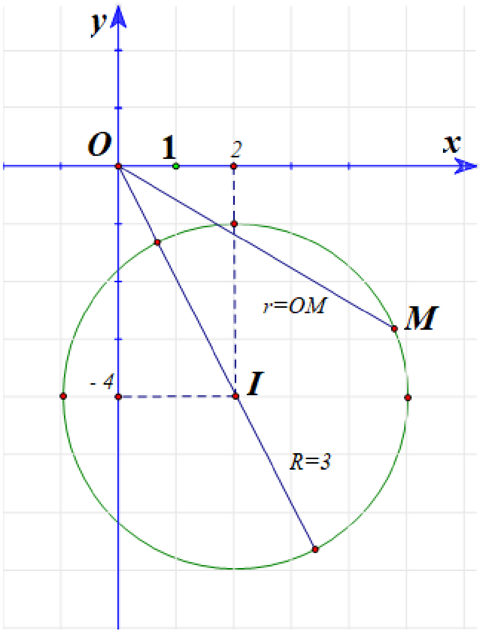
$\Leftrightarrow 2\,log_3(y + 4)^2 + log_2(-x^2 + 4x + 5) = 2[log_3(-x^2 + 4x + 5) - 1] + log_2[4(y + 4)^2]$

$\Leftrightarrow 2\,log_3(y + 4)^2 - log_2(y + 4)^2 = 2\,log_3(-x^2 + 4x + 5) - log_2(-x^2 + 4x + 5)$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 2\,log_3 t - log_2 t$, $t > 0$, ta có: $f'(t) = \frac{2}{t\ln 3} - \frac{1}{t\ln 2} = \frac{1}{t}.\frac{2\ln 2 - \ln 3}{\ln 2.\ln 3} > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$, suy ra: $(2) \Leftrightarrow (y + 4)^2 = -x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$

$\Rightarrow$ Tập hợp các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn (1) là đường tròn (C) tâm là $I(2; -4)$ và bán kính $R = 3$ bỏ bớt 2 điểm $(-1; -4)$, $(5; -4)$.



Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường tròn $(C) \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là khoảng cách từ M đến gốc O.

Vì $IO = 2\sqrt{5} > 3$ nên O nằm ngoài (C) và ta có: $2\sqrt{5} - 3 \le r \le 2\sqrt{5} + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 3 - m \le r - m \le 2\sqrt{5} + 3 - m$

$\Rightarrow$ Với $P = |r - m|$, $maxP = max\{|2\sqrt{5} - 3 - m|, |2\sqrt{5} + 3 - m|\}$

$\Rightarrow$ Để thỏa mãn bài toán ta phải có: $\begin{cases} |2\sqrt{5} - 3 - m| \le 10 \\ |2\sqrt{5} + 3 - m| \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \le 2\sqrt{5} - 3 - m \le 10 \\ -10 \le 2\sqrt{5} + 3 - m \le 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5} - 13 \le m \le 2\sqrt{5} + 7 \\ 2\sqrt{5} - 7 \le m \le 13 + 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 7 \le m \le 2\sqrt{5} + 7$.

Ta có: $2\sqrt{5} - 7 \approx -2{,}5; 2\sqrt{5} + 7 \approx 11{,}5 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; .; 11\} \Rightarrow$ Tập S có 14 phần tử $\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng của tập S là: $2^{14} - 1 = 16383$.