LƯ SĨ PHÁP
Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

TOÁN 11

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG II
TỔ HỢP – XÁC SUẤT

CHƯƠNG III
DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

TẬP 1

NĂM 2017 – 2018

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Nội dung gồm 3 phần
Phần 1. Kiến thức cần nắm
Phần 2. Dạng bài tập có hướng dẫn giải và bài tập đề nghị
Phần 3. Phần trắc nghiệm có đáp án.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin gọi về số 01655.334.679 – 0916.620.899
Email: lsp0207@yahoo.com.vn
lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Tác giả
Lư Sĩ Pháp
Gv_Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Chương III. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC & PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

---0O0---

ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1; \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}; \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Các công thức lượng giác

2.1. Công thức cộng

☝ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

✌ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

✍ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$, với mọi α, β làm cho các biểu thức có nghĩa.

2.2. Công thức nhân đôi

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}; \alpha, 2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.3. Công thức nhân ba

- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2.4. Công thức hạ bậc

☝ $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

✌ $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

✍ $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, với α làm cho biểu thức có nghĩa.

2.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

① $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

② $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

③ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

④ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

, với mọi α, β làm cho các biểu thức có nghĩa.

2.7. Công thức biến đổi tích thành tổng

➢ $\cos\alpha.\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

➢ $\sin\alpha.\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$

➢ $\sin\alpha.\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

2.8. Công thức rút gọn

♦ $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

♦ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

♦ $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$, với α làm cho biểu thức có nghĩa

3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặt biệt

3.1. Hai góc đối nhau (cung đối) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ♦ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

♦ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ ♦ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

3.2. Hai góc bù nhau(cung bù)(α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ ♦ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

♦ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ ♦ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

3.3. Hai góc phụ nhau (cung phụ)(α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ ♦ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

♦ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ ♦ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

3.4. Hai góc hơn kém π (cung hơn kém π),(α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ♦ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

♦ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ ♦ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

3.5. Hai góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$),(α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ ♦ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

♦ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ ♦ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

3.6. Cung bội. ($k\in\mathbb{Z}$, α làm cho các biểu thức có nghĩa)

♦ $\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$ ♦ $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$

♦ $\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha$ ♦ $\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha$

4. Bảng giá trị lượng giác các góc (cung) đặt biệt

α / HSLG	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	- 1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	- 1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	- 1	$-\sqrt{3}$	||

|| : Không xác định

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Hàm số $y=\sin x$	Hàm số $y=\cos x$
• Có tập xác định là $\mathbb{R}$ • Có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$ • Là hàm số lẻ • Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$ • Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$ • Có đồ thị là một đường hình sin	• Có tập xác định là $\mathbb{R}$ • Có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$ • Là hàm số chẵn • Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$ • Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$ • Có đồ thị là một đường hình sin
Hàm số $y=\tan x$	Hàm số $y=\cot x$
• Có tập xác định là $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ • Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ • Là hàm số lẻ • Là hàm số tuần hoàn với chu kì là π • Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right);k\in\mathbb{Z}$ • Có đồ thị nhân mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận	• Có tập xác định là $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ • Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ • Là hàm số lẻ • Là hàm số tuần hoàn với chu kì là π • Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi;\pi+k\pi\right);k\in\mathbb{Z}$ • Có đồ thị nhân mỗi đường thẳng $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tập xác định của hàm số

- Hàm số xác định với một điều kiện
- Hàm số xác định bởi hai hay nhiều điều kiện
- Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
- Hàm số $y=\tan x$ xác định khi và chỉ khi $\cos x\neq 0$; Hàm số $y=\cot x$ xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0$

Lưu ý:

1	$\sin u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=0\Leftrightarrow u=k\pi$
2	$\cos u=1\Leftrightarrow u=k2\pi$	$\cos u=-1\Leftrightarrow u=\pi+k2\pi$	$\cos u=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$
3	$\tan u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\tan u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\tan u=0\Leftrightarrow u=k\pi$
4	$\cot u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\cot u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{4}+k\pi$	$\cot u=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$

- Hàm số $y=\frac{1}{A}$ xác định khi và chỉ khi $A\neq 0$
- Hàm số $y=\sqrt{A}$ xác định khi và chỉ khi $A\geq 0$

- Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ xác định khi và chỉ khi $A>0$

Bài 1.1. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ c) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ d) $y=\sqrt{3-\sin x}$

HD Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\geq 0$. Vì $1+\cos x\geq 0$ nên điều kiện là $1-\cos x>0$ hay $1-\cos x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

d) Vì $-1\leq\sin x\leq 1$ nên $3-\sin x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $D=\mathbb{R}$

Bài 1.2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ d) $y=\tan x+\cot x$

HD Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Bài 1.3. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y=\cos\dfrac{2x}{x-1}$ b) $y=\tan\dfrac{x}{3}$ c) y = cot2x

d) $y=\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ e) $y=\sqrt{\cos x+1}$ f) $y=\dfrac{2}{\cos x-\cos 3x}$

g) $y=\dfrac{3}{\sin^2 x-\cos^2 x}$ h) $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$ i) $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-7}{2\cos x-5}}$

HD Giải

a) Ta có $y=\cos\dfrac{2x}{x-1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\dfrac{2x}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\cos\frac{2x}{x-1}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Hàm số $y=\tan\frac{x}{3}$ xác định khi và chỉ khi $\cos\frac{x}{3}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+k3\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k3\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

e) Ta có $\cos x+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$

f) Ta có $\cos x-\cos 3x=-2\sin 2x\sin(-x)=4\sin^2 x\cos x$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

g) Ta có $\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$. Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

h) Ta có $1-\sin x\geq 0, 1+\cos x\geq 0$. Do đó hàm số xác định $\forall x\in\mathbb{R}$ khi $\cos x\neq -1$. Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

i) Ta có $3\sin x-7<0,\ 2\cos x-5<0$ nên $\frac{3\sin x-7}{2\cos x-5}>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$

<u>Bài 1.4</u>. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y=\cos\sqrt{x}$ b) $y=\sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ c) $y=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos^2 2x}}$

d) $y=\frac{\cot x}{\cos x-1}$ e) $y=\frac{2-\cos x}{1+\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$ f) $y=\frac{\tan x+\cot x}{1-\sin 2x}$

<u>HD Giải</u>

a) Ta có $y=\cos\sqrt{x}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\geq 0$.
Vậy tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)$

b) Ta có $y=\sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1+x}{1-x}\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x<1$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=[-1;1)$

c) Ta có $1-\cos 2x\geq 0, 1+\cos^2 2x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$

d) Hàm số $y=\frac{\cot x}{\cos x-1}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

e) Hàm số $y=\frac{2-\cos x}{1+\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{5\pi}{6}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{12}+k\pi\end{cases}; k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi\right\}; k\in\mathbb{Z}\right]$

f) Hàm số $y=\frac{\tan x+\cot x}{1-\sin 2x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin 2x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{k\pi}{2}\\ x\neq \frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}\right]$

Dạng 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Nhắc lại kiến thức: Về tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)$

Tìm tập xác định *D* của hàm số, kiểm chứng *D* là tập đối xứng hay không, tức là $\forall x, x\in D\Rightarrow -x\in D$ (1)

Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$:

- Nếu $f(-x)=f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn (2)
- Nếu $f(-x)=-f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ (3)

Do vậy

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D

Để kết luận $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D, ta chỉ cần tìm một điểm x_0 sao cho $f(-x_0)\neq f(x_0)$ và $f(-x_0)\neq -f(x_0)$

Lưu ý: vận dụng hai góc (cung) đối nhau của HSLG

Bài 1.5. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=\frac{\cos x}{x}$ b) y = *x* – sin*x* c) $y=\sqrt{1-\cos x}$

d) $y=1+\cos x.\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$ e) y = sin*x*.cos^2*x* + tan*x* f) y = sin*x* – cos*x*

g) $y=\sin^3 x-\tan x$ h) $y=\frac{\tan x+\cot x}{\sin x}$

HD Giải

a) Hàm số $y=f(x)=\frac{\cos x}{x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ta có $\forall x, x\in D\Rightarrow -x\in D$ và

$f(-x)=\frac{\cos(-x)}{(-x)}=-\frac{\cos x}{x}=-f(x)$. Vậy hàm số $y=f(x)=\frac{\cos x}{x}$ là hàm số lẻ.

b) Hàm số lẻ

c) Là hàm số chẵn

d) Là hàm số chẵn

e) Là hàm số lẻ

f) Hàm số $y=f(x)=\sin x-\cos x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Lấy $x=\frac{\pi}{6}$ ta có : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $f\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Vậy hàm số $y=f(x)=\sin x-\cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ

g) Là hàm số lẻ

h) Là hàm số lẻ

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là *D* và hai hằng số *M* và *m*.

➢ Nếu $\forall x\in D, f(x)\leq M$ và $\exists x_0$ sao cho $f(x_0)=M$ thì *M* gọi là GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên D và kí hiệu $\underset{D}{Max}\, y=M$

➢ Nếu $\forall x\in D, f(x)\geq m$ và $\exists x_0$ sao cho $f(x_0)=m$ thì *m* gọi là GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên D và kí hiệu $\underset{D}{Min}\, y = m$

➢ ***Chú ý***:

♦ $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ♦ $0 \le \sin^2 x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ♦ $0 \le |\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ♦ $0 \le \cos^2 x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ♦ $0 \le |\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Bài 1.6.</u> Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$ b) $y = 3 - 2\sin x$ c) $y = \sqrt{2\left(1 + \cos x\right)} + 1$ d) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

<u>HD Giải</u>

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{\cos x} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le 2\sqrt{\cos x} \le 3$ hay $1 \le y \le 3$

Vậy: $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $y = 3 - 2\sin x$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 2 \ge -2\sin x \ge -2 \Leftrightarrow 2 + 3 \ge 3 - 2\sin x \ge -2 + 3 \Leftrightarrow 5 \ge 3 - 2\sin x \ge 1$ hay $5 \ge y \ge 1$

Vậy: $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 5 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $y = \sqrt{2\left(1 + \cos x\right)} + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 + \cos x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 2\left(1 + \cos x\right) \le 4$

$$\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2\left(1 + \cos x\right)} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2\left(1 + \cos x\right)} + 1 \le 3$$

Vậy: $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 1.7.</u> Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau

a) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$ b) $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $y = 3 - 2|\sin x|$

d) $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$ e) $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x.\sin^2 x}$ f) $2\sin^2 x - \cos 2x$

<u>HD Giải</u>

a) Hàm số $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \le 2 \Leftrightarrow -1 + 3 \le 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3 \le 2 + 3$

$$\Leftrightarrow 1 \le 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3 \le 5 \text{ } hay \text{ } 1 \le y \le 5$$

Vậy: $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 5$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = -1$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Hàm số $y=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có: $-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le\sqrt{3}$ *hay* $-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}$

Vậy: GTLN của y là $\sqrt{3}$, đạt được khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $-\sqrt{3}$, đạt được khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

c) Hàm số $y=3-2\left|\sin x\right|$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $0\le\left|\sin x\right|\le1\Leftrightarrow-2\le-2\left|\sin x\right|\le0\Leftrightarrow1\le3-2\left|\sin x\right|\le3$ *hay* $1\le y\le3$

Vậy: GTLN của y là 3, đạt được khi $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là 1, đạt được khi $\sin x=\pm1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

d) Hàm số $y=\cos^2x+2\cos2x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\cos^2x+2\cos2x=\frac{1+\cos2x}{2}+2\cos2x=\frac{1+5\cos2x}{2}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có: $-2\le\frac{1+5\cos2x}{2}\le3$.

Vậy: GTLN của y là 3, đạt được khi $\cos2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là -2, đạt được khi $\cos2x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

e) Hàm số $y=\sqrt{5-2\cos^2x.\sin^2x}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\sqrt{5-2\cos^2x.\sin^2x}=\sqrt{5-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$.

Vì $0\le\sin^2 2x\le1$ nên $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le0\Leftrightarrow\frac{9}{2}\le5-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le5$ *hay* $\frac{3\sqrt{2}}{2}\le y\le\sqrt{5}$.

Vậy: GTLN của y là $\sqrt{5}$, đạt được khi $\sin^2 2x=0\Leftrightarrow\sin2x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $\sin^2 2x=1\Leftrightarrow\sin2x=\pm1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

f) Hàm số $y=2\sin^2x-\cos2x=1-2\cos2x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.
Ta có $-1\le1-2\cos2x\le3$

Vậy: GTLN của y là 3, đạt được khi $\cos2x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là -1, đạt được khi $\cos2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Bài 1.8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y=3+\sin x\cos x$ b) $y=4-2\cos^2x$ c) $y=\frac{2}{3+\cos x}$

d) $y=\frac{3}{5-\sin^2x}$ e) $y=\sqrt{1-\sin\left(x^2\right)}-1$ f) $y=4\sin\sqrt{x}$

HD Giải

a) GTLN của y là $\frac{7}{2}$, đạt được khi $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

b) GTLN của y là 4, đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là 2, đạt được khi $x=k2\pi \vee x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

c) Hàm số $y=\frac{2}{3+\cos x}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 2\le 3+\cos x\le 4\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\cos x}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{2}{3+\cos x}\le 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

d) GTLN của y là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{3}{5}$, đạt đươc khi $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

e) Hàm số $y=\sqrt{1-\sin\left(x^2\right)}-1$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có: $-1\le\sqrt{1-\sin\left(x^2\right)}-1\le\sqrt{2}-1$. Vậy

GTLN của y là $\sqrt{2}-1$, đạt được khi $x^2=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\ge 1$

GTNN của y là -1, đạt được khi $x^2=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k>0$

f) Hàm số $y=4\sin\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=\left[0;+\infty\right)$. Trên D ta có: $-4\le 4\sin\sqrt{x}\le 4$.

Vậy: GTLN của y là 4, đạt được khi $\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\ge 0$

GTNN của y là -4, đạt được khi $\sqrt{x}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\ge 1$

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ b) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

c) $y=\sin^2 x+2\sin x+6$ d) $y=\cos^4 x+4\cos^2 x+5$

HD Giải

a) $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=-\cos 2x$.

Mặt khác: $-1\le\cos 2x\le 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là -1, đạt được khi $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

b) $y=\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mặt khác $\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

c) Ta có $y=\sin^2 x+2\sin x+6=\left(\sin x+1\right)^2+5$. Mặt khác: $5\le\left(\sin x+1\right)^2+5\le 9$

GTLN của y là 9, đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là 5, đạt được khi $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

d) Ta có $y=\cos^4 x+4\cos^2 x+5=\left(\cos^2 x+2\right)^2+1$. Mặt khác: $5\le\left(\cos^2 x+2\right)^2+1\le 10$

GTLN của y là 10, đạt được khi $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

GTNN của y là 5, đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.10. Tìm tập xác định của các hàm số sau			
a) $y=\frac{\tan x}{1+\tan x}$	b) $y=\frac{1}{\sqrt{3}\cot 2x+1}$	c) $y=\frac{3\sin x+1}{3-3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$	d) $y=\frac{\sin x}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$
e) $y=\frac{1+\cos 9x}{\sqrt{1+\cos 9x}}+\cot 9x$	f) $y=\frac{\sin x}{2\cos x+2}$	g) $y=\frac{\tan 2x-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}$	h) $y=\frac{2-\cot 3x}{1-\sqrt{1+\sin 3x}}$

Bài 1.11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau			
a) $y=\sqrt{1+\cos 2x}-5$	b) $y=4+5\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$	c) $y=2-\sqrt{4+2\sin 5x}$	d) $y=\frac{3}{\cot^2 x+1}+1$
e) $y=1-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$	f) $y=1-8\sin^2 2x$	g) $y=\sqrt{9-9\left\lvert\sin 9x\right\rvert}$	h) $y=\left\lvert\sin 2x-5\right\rvert$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

• Nếu $|m| > 1$: phương trình (1) vô nghiệm

• Nếu $|m| \le 1$: Nếu α là một nghiệm của phương trình (1), nghĩa là $\sin\alpha = m$

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$$

• Nếu số đo của α được cho bằng độ thì: $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k360^0 \\ x = 180^0 - \alpha + k360^0 \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

Nhận thấy, ***trong một công thức nghiệm của phương trình lượng giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.***

Chú ý:

i) Nếu số thực α thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$.

Khi đó: $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

ii) Các trường hợp đặc biệt

- $m = -1$, phương trình $\sin x = -1$ có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $m = 0$, phương trình $\sin x = 0$ có nghiệm là $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $m = 1$, phương trình $\sin x = 1$ có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

iii) Tổng quát: $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

• Nếu $|m| > 1$: phương trình (2) vô nghiệm

• Nếu $|m| \le 1$: Nếu α là một nghiệm của phương trình (2), nghĩa là $\cos\alpha = m$

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

• Nếu số đo của α được cho bằng độ thì: $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k360^0 \\ x = -\alpha + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

i) Nếu α thoả điều kiện $0 \le \alpha \le \pi$ và $\cos\alpha$ = m thì ta viết α = arccosm.
Khi đó pt (2) có nghiệm là : $x = \pm\arccos m + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

ii) Các trường hợp đặc biệt khi $m \in \{0; \pm 1\}$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

iii) Tổng quát: $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (3), nghĩa là $\tan\alpha = m$ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k180^0; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu α thảo mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\tan\alpha = m$ thì ta viết α = arctanm. Lúc đó nghiệm của phương trình (3) là: $x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Các trường hợp đặc biệt biệt khi $m \in \{0; \pm 1\}$

  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Tổng quát : $\tan u = \tan v$ có nghiệm: $u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. Phương trình $\cot x = m$ (4) Điều kiện: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (4), nghĩa là $\cot\alpha = m$ thì $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k180^0; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu α thảo mãn điều kiện $0 < \alpha < \pi$ và $\cot\alpha = m$ thì ta viết $\alpha = arc\cot m$. Lúc đó nghiệm của phương trình (4) là: $x = \text{arc}\cot m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Tổng quát : $\cot u = \cot v$ có nghiệm: $u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: ***Kể từ đây, ta qui ước rằng nếu trong một biểu thức nghiệm của phương trình lương giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$***

Ghi nhớ công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

Với $u = u(x), v = v(x)$ và u, v làm cho biểu thức có nghĩa, $k \in \mathbb{Z}$

$1/ \sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$ $2/ \cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right.$

$3/ \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $4/ \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải phương trình lượng giác cơ bản

- Các công thức nghiệm của bốn phương trình lượng giác cơ bản
- Cung đối và cung bù

Bài 2.1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin x = \frac{2}{3}$ d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} + 10^0\right) = -\frac{1}{2}$ f) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ g) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ h) $\sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

HD Giải

a) Ta có: $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) Ta có: $-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (áp dụng cung đối đưa dấu trừ vào trong _ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$)

Phương trình đã cho tương đương: $\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{2}{3}<1$ nên có số α để $\sin\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$. Do đó:

$\sin x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\ x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

d) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}+x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}+x+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{5}=\pi-\left(\frac{\pi}{5}+x\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{5}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

e) $x=-80^0+k720^0$ và $x=400^0+k720^0; k\in\mathbb{Z}$

f) $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ và $x=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

g) $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$

h) $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{9}; x=\frac{7\pi}{54}+\frac{k2\pi}{9}, k\in\mathbb{Z}$

Bài 2.2. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ c) $\cos x=\frac{4}{5}$ d) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

e) $\cos\left(3x-45^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ g) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ h) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

HD Giải

a) Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với: $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) Ta có: $-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$ (Áp dụng cung bù_$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$)

Phương trình đã cho tương đương với: $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{4}{5}<1$ nên có số α để $\cos\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{4}{5}$. Do đó:

$\cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x = \arccos\frac{4}{5} + k2\pi \\ x = -\arccos\frac{4}{5} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos\left(3x - 45^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - 45^0\right) = \cos 30^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 45^0 = 30^0 + k360^0 \\ 3x - 45^0 = -30^0 + k360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25^0 + k120^0 \\ x = 5^0 + k120^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

f) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

g) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{9} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

h) Vì $\frac{3}{2} > 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2.3. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$ b) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x$ d) $\tan\left(x - 15^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\tan 2x = \frac{1}{2}$

HD Giải

a) $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan\left(x - 15^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(x - 15^0\right) = \tan 30^0 \Leftrightarrow x - 15^0 = 30^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$

e) $\tan 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 2.4. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cot x = -\sqrt{3}$ c) $\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot 2x$ d) $\cot\left(x - 15^0\right) = \sqrt{3}$ e) $\cot 3x = \frac{3}{5}$

HD Giải

a) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot 2x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\cot\left(x - 15^0\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x - 15^0\right) = \cot 30^0 \Leftrightarrow x - 15^0 = 30^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$

e) $\cot 3x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 3x = \text{arccot}\frac{3}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\text{arccot}\frac{3}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 2.5. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x - 1} = 0$ b) $\cot 3x = \tan\dfrac{2\pi}{5}$ c) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$ e) $\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x$ f) $\tan(2x + 45^0)\tan\left(180^0 - \dfrac{x}{2}\right) = 1$

HD Giải

a) Điều kiện : $\cos 3x \neq 1$. Ta có $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi$.

Do điều kiện, các giá trị $k = 2m, m \in \mathbb{Z}$ bị loại, nên $3x = (2m+1)\pi \Leftrightarrow x = (2m+1)\dfrac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = (2m+1)\dfrac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

b) Nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{30} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{5\pi}{144} + \dfrac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$. Vậy nghiệm của phương trình:

$x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}; x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) Với ĐKXĐ của phương trình, ta có $\tan(2x + 45^0) = \cot(45^0 - x)$ và $\tan\left(180^0 - \dfrac{x}{2}\right) = \tan\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ nên

$$\tan(2x + 45^0)\tan\left(180^0 - \dfrac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot(45^0 - 2x).\tan\left(-\dfrac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \tan(45^0 - 2x) \Leftrightarrow x = 30^0 + k120^0, k \in \mathbb{Z}$$

Dạng 2. Tìm nghiệm của phương trình trên một khoảng, đoạn.

- Giải phương trình và tìm nghiệm thỏa khoảng đề bài cho.

Bài 2.6. Giải các phương trình sau trong khoảng đã cho:

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$ b) $\cos(x-5) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$

c) $\tan(2x - 15^0) = 1$ với $-180^0 < x < 90^0$ d) $\cot 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$

HD Giải

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Xét điều kiện $0 < x < \pi$, ta có

- $0 < -\dfrac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{12} < k < \dfrac{1}{12} + 1 \Rightarrow k = 1$ (Do $k \in \mathbb{Z}$). Vì vậy : $x = \dfrac{11\pi}{12}$
- $0 < \dfrac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow k = 0$. Vì vậy: $x = \dfrac{7\pi}{12}$

Vậy: $x=\frac{11\pi}{12}$ và $x=\frac{7\pi}{12}$

b) $\cos(x-5)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x-5=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+5+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+5+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Xét điều kiện $-\pi<x<\pi$, ta có:

- $-\pi<\frac{\pi}{6}+5+k2\pi<\pi\Rightarrow k=-1$. Do vậy, có $x=5-\frac{11\pi}{6}$
- $-\pi<-\frac{\pi}{6}+5+k2\pi<\pi\Rightarrow k=-1$. Do vậy, có $x=5-\frac{13\pi}{6}$

Vậy: $x=5-\frac{11\pi}{6}$ và $x=5-\frac{13\pi}{6}$

c) $\tan\left(2x-15^0\right)=1\Leftrightarrow 2x=15^0+45^0+k180^0\Leftrightarrow x=30^0+k90^0,k\in\mathbb{Z}$

Xét điều kiện $-180^0<x<90^0$, ta có

- $-180^0<30^0+k90^0<90^0\Leftrightarrow -2<\frac{1}{3}+k<1\Leftrightarrow k\in\{-2,-1,0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x=-150^0, x=-60^0$ và $x=30^0$

d) $\cot 3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$. Xét điều kiện $-\frac{\pi}{2}<x<0$, ta có:

- $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}<0\Leftrightarrow k\in\{-1;0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{4\pi}{9}$ và $x=-\frac{\pi}{9}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.7. Giải các phương trình sau:

1. $\sin\left(2x-30^0\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$	3. $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$
4. $\sin 3x=\frac{2}{3}$	5. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)$	6. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos\left(60^0-3x\right)=-\frac{1}{2}$	8. $\cos\left(\frac{x}{2}+10^0\right)=-\frac{1}{2}$	9. $\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=1$
10. $\cos\left(2x-5\right)=\frac{3}{4}$	11. $\cos\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	12. $\cos\left(4x+125^0\right)=-1$
13. $\tan\left(2x+60^0\right)=-\sqrt{3}$	14. $\cot\left(5x-\frac{\pi}{9}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	15. $\cos\left(3x-135^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
16. $\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-2$	17. $\sin(9^o-9x)=0$	18. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2.8. Giải các phương trình sau:

1. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $0\le x\le 2\pi$	2. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $0\le x\le 2\pi$	3. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

4. $-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$ với $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$	5. $2\cos\left(45^0-x\right)+\sqrt{2}=0$ với $x\in\left[180^0;340^0\right]$	6. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$ với $-\pi\le x\le\pi$
7. $3+3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0, x\in\left[\frac{37\pi}{4};30\right)$	8. $\sqrt{3}\sin 5x+\sqrt{3}=0$ với $x\in\left(-90°;180°\right]$	9. $\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$ trên đoạn $[-2\pi;\pi]$

Bài 2.9. Giải các phương trình sau:

1. $\sin 3x-\cos 5x=0$	2. $\tan 3x.\tan x=1$	3. $\frac{\cos 3x}{\sin 3x-1}=0$
4. $\sin 3x+\sin 5x=0$	5. $\cot 2x.\cot 3x=1$	6. $\sin 2x.\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$
7. $\cot 9x=-\tan\left(\frac{\pi}{9}+9x\right)$	8. $\cos(50°+4x)+\sin 3x=0$	9. $\sin 5x+\cos x=0$

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Phương trình	Cách giải
1. Phương trình bậc nhất, bậc hai đối với một hàm số lượng giác, trong đó $f(x)$ là một biểu thức lượng giác nào đó.	Đặt ẩn phụ $t = f(x)$ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này và từ đó suy ngược lại nghiệm x. Khi đặt $t = \sin x$ hay $t = \cos x$, điều kiện là $\lvert t\rvert \le 1$ Khi đặt $t = \tan x$, $t = \cot x$, cần lưu ý điều kiện xác định của $\tan x$ và $\cot x$.
2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng: $a\sin x + b\cos x = c,(a^2+b^2 \ne 0)$ (2)	Thực hiện các bước sau: B1: Kiểm tra • Nếu $a^2+b^2 < c^2$ thì phương trình (2) vô nghiệm • Nếu $a^2+b^2 \ge c^2$, ta thực hiện tiếp B2 B2. Chia hai vế phương trình (2) cho $\sqrt{a^2+b^2}$. Từ đó áp dụng công thức cộng đưa phương trình (2) về phương trình lượng giác cơ bản dạng: $\sin u = \sin v$ hay $\cos u = \cos v$.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

- Phương trình dạng $at + b = 0, a \ne 0$
- Một số phương trình biến đổi đưa về phương trình bậc nhất
- Từ phương trình đã cho đưa về phương trình lượng giác cơ bản và giải

Bài 3.1. Giải các phương trình sau:

a) $2\cos\left(3x-60^0\right)+1=0$ b) $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{4}+20^0\right)+1=0$ d) $\sqrt{3}\cot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+3=0$

HD Giải

a) $2\cos\left(3x-60^0\right)+1=0 \Leftrightarrow \cos\left(3x-60^0\right)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x-60^0\right)=\cos 120^0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-60^0=120^0+k360^0\\3x-60^0=-120^0+k360^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=90^0+k120^0\\x=20^0+k120^0\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

b) $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\2x-\dfrac{\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{4}+20^0\right)+1=0 \Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{x}{4}+20^0\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{x}{4}+20^0\right)=\tan\left(-30^0\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^0 = -30^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = -200^0 + k720^0, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sqrt{3}\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3.2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$ b) $\cos\left(x + 30^0\right) + 2\cos^2 15^0 = 1$

c) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ d) $8\cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2}$

HD Giải

a) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

(lưu ý ĐK: $\cos 2x \neq 0$). Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(x + 30^0\right) + 2\cos^2 15^0 = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + 30^0\right) = 1 - 2\cos^2 15^0 \Leftrightarrow \cos\left(x + 30^0\right) = -\cos 30^0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + 30^0\right) = \cos 150^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120^0 + k360^0 \\ x = -180^0 + k360^0 \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = 120^0 + k360^0$ và $x = -180^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$

c) $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

d) $8\cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.3. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$ b) $\cos x.\cos 2x = 1 + \sin 2x.\sin x$

c) $4\sin x \cos x \cos 2x = -1$ d) $\tan x = 3\cot x$

HD Giải

a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có các nghiệm là $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x \cos 2x = 1 + \sin x \sin 2x \Leftrightarrow \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $4\sin x \cos x \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan x = 3\cot x$. Điều kiện $\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ta có $\tan x = \frac{3}{\tan x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

- Phương trình dạng $at^2 + bt + c = 0, a \ne 0$
- Một số phương trình biến đổi đưa về phương trình bậc hai
- Từ phương trình đã cho đưa về phương trình lượng giác cơ bản và giải
- Lưu ý điều kiện của bài toán (nếu có)

Bài 3.4. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ b) $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$

c) $4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0$ d) $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$

HD Giải

a) Đặt $\sin x = t$ (với $|t| \le 1$ (*)), ta được phương trình $2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -3$ (không thỏa (*))

Với: $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\sin 3x \ne 0$(*) Đặt $t = \cot 3x$, ta được phương trình $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 2$

Với $t = -1 \Rightarrow \cot 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Với $t = 2 \Rightarrow \cot 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}arc\cot 2 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

So với (*),vậy phương trình đã cho cáo các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{1}{3}arc\cot 2 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Đặt $t = \cos x$, (với $|t| \le 1$), ta được phương trình $4t^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Điều kiện $\sin 2x \ne 0$, khi đó ta có $\tan x \ne 0$

$5\tan x - 2\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\tan x - 2\frac{1}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

So với ĐK, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.5. Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + 1 = 0$ d) $\cos\left(4x + 60^0\right) - 5\cos\left(2x + 30^0\right) + 4 = 0$

HD Giải

a) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k2\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos\left(4x + 60^0\right) - 5\cos\left(2x + 30^0\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(2x + 30^0\right) - 5\cos\left(2x + 30^0\right) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x + 30^0\right) = 1 \\ \cos\left(2x + 30^0\right) = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x + 30^0 = k360^0 \Leftrightarrow x = -15^0 + k180^0,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dạng 3. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

- Phương trình có dạng $a\sin x + b\cos x = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$
- B1: Kiểm tra
  - Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì phương trình vô nghiệm
  - Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta thực hiện tiếp B2
- B2. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$. Từ đó áp dụng công thức cộng đưa phương trình về phương trình lượng giác cơ bản dạng: $\sin u = \sin v$ hay $\cos u = \cos v$.

Bài 3.6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ b) $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = -3$ c) $3\cos x + 4\sin x = -5$

d) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$ e) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$ f) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

HD Giải

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

b) $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = -3 \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{2}{3}\sin 3x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\cos 3x\right) = -3 \Leftrightarrow 3\left(\sin\alpha\sin 3x + \cos\alpha\cos 3x\right) = -3$. Trong đó $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}; \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Dó đó: $\cos\left(3x - \alpha\right) = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\alpha + \pi}{3} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \pi + \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ trong đó α là số thoả mãn $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

d) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16$, phương trình vô nghiệm.

e) $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$ và $x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin 2x - \cos 2x = 0$, với $\cos 2x \neq 0$, ta có $\tan 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.7. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$ b) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

c) $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ d) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\cos 3x + \sin 5x = 0$

HD Giải

$a)\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$$

b) ĐKXĐ: $\sin 4x \neq 0$,

ta có: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$

Cả hai nghiệm đều không thoả điều kiện bài toán. Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x \Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

$d)\ \sqrt{3}\cos 5x - 2\cos 3x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3.8. Giải các phương trình sau:

a) $4\sin x - 3\cos x = 5$ b) $3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = \frac{9}{2}$

c) $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$ d) $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 14x$

HD Giải

a) $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ với α thoả mãn $\sin\alpha = \frac{3}{5}; \cos\alpha = \frac{4}{5}$

b) $x = \alpha \pm \beta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ và $\cos\beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$

c) $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

d) $x = \frac{\alpha}{12} + \frac{k\pi}{6}, x = \frac{\pi - \alpha}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Bài 3.9. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$ b) $\cos x \sin 5x = \cos 2x \cos 4x$

c) $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$ d) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$

HD✍Giải

a) $\sin 2x\sin 5x = \sin 3x\sin 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 3x - \cos 7x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 7x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x\sin 5x = \cos 2x\cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z}$

$d)$ $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x = 2\sin 3x\cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x(\cos x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.10. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x\sin 7x = \sin 3x\sin 5x$

b) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$

c) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$

d) $\sin 4x\sin 5 + \sin 4x\sin 3x - \sin 2x\sin x = 0$

HD✍Giải

a) $\sin x\sin 7x = \sin 3x\sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos 8x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 8x\right) \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 16x + \sin 2x\right) \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 16x$

Vậy, nghiệm phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x - \cos 4x + \cos 8x - \cos 2x + \cos 10x\right) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin 4x\sin 5 + \sin 4x\sin 3x - \sin 2x\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x\sin 5 + \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x\sin 5x + \sin 5x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x(\sin 4x + \sin 2x) = 0$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{5}$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.11. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

b) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

d) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$

e) $8\cos^4 x = 1+\cos 4x$	f) $3\cos^2 2x - 3\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

HD✍Giải

a) Ta có $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x\right)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(1+2\cos 2) = 0$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Dùng công thức hạ bậc, rút gọn ta được:

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x \Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

e) Sử dụng công thức $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$ và $1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$ để biến đổi đưa về phương trình bậc hai đối cos2x. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$

Bài 3.12. Giải các phương trình sau:

a) $1+\sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0$	b) $\cos x\tan 3x = \sin 5x$
c) $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$	d) $\frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 8\sin x$

HD✍Giải

a) Ta có: $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2; 2\cos 2x = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$

$1+\sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 - \sin x - 3\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos x \\ 3\cos x + \sin x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

b) Điều kiện $\cos 3x \neq 0$

$\cos x\tan 3x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos x\sin 3x = \cos 3x\sin 5x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right) \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho: $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Điều kiện $\sin x \neq 0$

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \left(\sin x - \sin^2 x\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \sin x(1-\sin x)+\dfrac{1-\sin x}{\sin^2 x}=0 \Leftrightarrow (1-\sin x)\left(\sin^3 x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho: $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

d) Điều kiện $\sin 2x\neq 0$

$\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}=8\sin x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=8\sin^2 x\cos x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=8.\dfrac{1-\cos 2x}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=4\cos x-4\cos 2x\cos x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-3\cos x=-2(\cos x+\cos 3x)$

$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$ (thoả điều kiện $\sin 2x\neq 0$)

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.13. Giải các phương trình sau		
1. $\sqrt{3}\cot 2x+3=0$	2. $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+12x\right)+\sqrt{3}=0$	3. $2\sin 3x+\sqrt{2}\sin 6x=0$
4. $2\sin\left(3x-120^0\right)+\sqrt{3}=0$	5. $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)-1=0$	6. $\sqrt{3}\tan\left(3x-45^0\right)+1=0$

Bài 3.14. Giải các phương trình sau		
1. $2\cos^2 x-3\cos x=-1$	2. $4\sin^2 4x+3\sin 4x-1=0$	3. $6\sin^2 2x-\left(8+3\sqrt{3}\right)\sin 2x+4\sqrt{3}=0$
4. $2\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-3=0$	5. $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2=0$	6. $2\cos^2 4x-7\cos 4x-4=0$
7. $2\sin^2 4x+9\sin 4x-5=0$	8. $\tan^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-4\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+3=0$	9. $\sqrt{3}\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+1=0$
10. $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x+\sqrt{2}=0$	11. $2\sin^2 x+7\sin x-4=0$	12. $3\cos^2 2x-7\cos 2x+4=0$

Bài 3.15. Giải các phương trình sau		
1. $\cos 2x+\sqrt{2}\sin x-1=0$	2. $\cos x=\sqrt{2}\sin 7x-\sin x$	3. $\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=2\cos 3x$
4. $2\sin\left(x+10^0\right)-\sqrt{12}\cos\left(x+10^0\right)=3$	5. $\sqrt{3}\cos 8x-2\sin 4x\cos 4x=-\sin^2 x-\cos^2 x$	6. $3\sin\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}=-\sqrt{3}$
7. $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$	8. $3\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)-3\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=3\sqrt{2}$	9. $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=-\sqrt{2}$
10. $\sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=\sqrt{2}$	11. $3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=\sqrt{6}$	12. $\sqrt{6}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)=-2$
13. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$	14. $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}$	15. $\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x=-\sqrt{3}$

Bài 3.16. Giải các phương trình sau		
1. $\dfrac{\sin x+\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x-4\sin^3 x}{2\sin x-1}=0$	2. $\dfrac{\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{1+2\sin x\cos x}=1$	3. $\cos 3x+2\cos 2x=\cos x+2$

4. $\dfrac{\left(2\cos x-1\right)\sin 4x}{\cos x-\sin x}=2\sin 2x$	5. $\dfrac{1}{2}\sin 4x+\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$	6. $\dfrac{\cos x(\cos x+\sin x)-1}{\cos x-\cos^2 x}=0$
7. $2\sin 2x+2\cos x=0$	8. $\dfrac{\sin 2x+4\sin^2 x+2\sin x(1-\cos x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$	9. $5\sin 8x-2\sin x.\sin 3x-2\sin^2 x+1=0$
10. $\dfrac{\cos 3x+2\sin 2x.\cos x-8\sin 2x-\cos x+\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}=1$	11. $\dfrac{\cos^2 2x+6\sin^2 x-\cos^2 x-\frac{9}{2}}{\cos 3x+1}=0$	12. $4\sin 6x-8\sin 5x.\cos x-2\cos^2 x+1=0$
13. $\cos^2 3x+\cos^2 5x=\sin^2 4x+\sin^2 6x$	14. $\dfrac{(\cos x-\sin x)(1+\sin 2x)-\cos x-\sin x}{\tan x+1}=0$	15. $\dfrac{(\sin x-\cos x)(1+\sin 2x)+\cos x+\sin x}{\cot x+1}=0$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Phần I. Áp dụng công thức lượng giác

Thực hiện tính, rút gọn, chứng minh

Bài	Nội dung	Bài	Nội dung
1	Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết: a) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ b) $\cos\alpha = 0,8$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ c) $\tan\alpha = \frac{13}{8}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	2	Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết: a) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ c) $\tan\alpha = \frac{7}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d) $\cot\alpha = -\frac{14}{9}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
3	Tính giá trị các biểu thức sau: a) $A = \cos 2\alpha + 2\sin\alpha + \frac{1}{2}\tan(\alpha + 15^0) + 2\cos 6\alpha$ biết $\alpha = 30^0$ b) $B = 2\sin 60^0 + 3\cos 30^0 + \tan 45^0$ c) $C = \cot 30^0 + 2\sin 60^0 - 2\cos 30^0$ d) $D = \frac{2\sin^2 30^0}{1 - 2\cos^2 30^0}$ e) $E = 3\sin 90^0 + 2\cos 0^0 - 3\cos 60^0 + 10\cos 180^0$	4	Tính giá trị các biểu thức sau: a) $A = \sin x + \cos x.\tan x$, biết $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$, biết $\tan x = 2$ c) $C = \frac{\cot x}{\cot x - \tan x}$, biết $\sin x = \frac{3}{5}, (0^0 < x < 90^0)$ d) $D = \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a}$, biết $\cos a = -\frac{3}{5}, (90^0 < a < 180^0)$ e) $E = \frac{1}{\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x}$, biết $\tan x = \frac{1}{4}$
5	Rút gọn các biểu thức sau: a) $A = (1 + \sin x)\tan^2 x(1 - \sin x)$ b) $B = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ c) $C = 1 - \sin^2 x - \cos^2 x$ d) $D = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha.\cot^2\alpha$ e) $E = \left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right)^2 - \left(\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha}\right)^2$ f) $F = \left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)^2$ g) $G = \sqrt{(1 + \tan x)\cos^2 x + (1 + \cot x)\sin^2 x}$ h) $H = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$	6	Chứng minh các đẳng thức sau: a) $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$ b) $\frac{\sin a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{2}{\sin a}$ c) $\left(\frac{\sin x + \cot x}{1 + \sin x\tan x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x + \cot^2 x}{1 + \sin^2 x\tan^2 x}$ d) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} + \tan^2\beta.\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \tan^2\beta$ e) $\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)^2 = 4\tan^2 x$ f) $\frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x - 1}$

7	Rút gọn các biểu thức sau: a) $A=(1+\cot\alpha)\sin^3\alpha+(1+\tan\alpha)\cos^3\alpha$ b) $B=\dfrac{\sin^2 a+2\cos^2\alpha-1}{\cot^2\alpha}$ c) $C=\dfrac{\sin^2\alpha-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cot^2\alpha}$ d) $D=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$	8	Cho $\tan\alpha=\dfrac{3}{5}$, tính các giá trị của biểu thức sau: a) $A=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ b) $B=\dfrac{2\tan^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$ c) $C=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$
9	Biết $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính a) $A=\dfrac{2\tan\alpha-3\cot\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}$ b) $B=\dfrac{\cos^2\alpha+\cot^2\alpha}{\tan\alpha-\cot a}$	10	Biết $\tan\alpha-3\cot\alpha=6$ và $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Tính a) $A=\sin\alpha+\cos\alpha$ b) $B=\dfrac{2\sin\alpha-\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$
11	Cho $\tan\alpha=3$, tính các giá trị của biểu thức sau: a) $A=\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{4\sin\alpha-5\cos\alpha}$ b) $B=\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha+4\cos^3\alpha}$	12	Không dùng máy tính. Hãy tính: a) $A=\dfrac{1}{\sin 10^0}-4\sin 70^0$ b) $B=\cos 14^0+\cos 134^0+\cos 106^0$ c) $C=\dfrac{1}{\sin 18^0}-\dfrac{1}{\sin 54^0}$ d) $C=\dfrac{1}{\sin 10^0}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$
13	Chứng minh các đẳng thức sau: a) $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x.\cos x$ b) $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x.\cos x$ c) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$ d) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$ e) $\tan^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x.\tan^2 x$ f) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x.\cot^2 x$	14	Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến: a) $A=\cos^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x+\sin^2 x$ b) $B=(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2$ c) $C=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x$ d) $D=2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)$ e) $e=2(\cos^4 x+\sin^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)$
15	Cho *A*, *B*, *C* là ba góc của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: a) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$ b) $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$	16	Cho *A*, *B*, *C* là ba góc của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: a) $\sin(A+B)=\sin C$ b) $\cos(A+B)=-\cos C$
17	Chứng minh rằng nếu *A*, *B*,*C* là ba góc của một tam giác thì: a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ b) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ c) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ d) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$	18	Cho *A*, *B*, *C* là ba góc của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: a) $\sin A=-\cos\dfrac{3A+B+C}{2}$ b) $\cos C=\sin\dfrac{A+B+3C}{2}$ c) $\cos C=-\cos(A+B+2C)$ d) $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)=1$

19	Chứng minh rằng nếu *A*, *B*,*C* là ba góc của một tam giác thì: a) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$ b) $\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$ c) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ d) $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$	20	Chứng minh rằng nếu *A*, *B*,*C* là ba góc của một tam giác thì: a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ c) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ d) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$
21	Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác *ABC* cân tại *A* là $\frac{\sin A}{\sin B.\cos C}=2$	22	Cho $\tan B+\tan C=2\cot\frac{A}{2}$. Chứng minh tam giác *ABC* cân.
23	Cho $\sin A=\frac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}$. Chứng minh tam giác *ABC* vuông	24	Cho $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B+\cos C}{\cos C+\cos A}$. Chứng minh tam giác *ABC* vuông hoặc cân

Thực hiện tính:

Bài	Nội dung	Bài	Nội dung
1	Biết $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$. Tính $\cos(2\pi-\alpha),\tan(\alpha-7\pi)$ và $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	2	Cho α là góc mà $\tan\alpha=2$. Tính $P=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$
3	Cho góc $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ mà $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$	4	Cho góc $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ mà $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$. Tính $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$
5	Cho α là góc mà $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Tính $P=(\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha)\cos\alpha$	6	Cho góc $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ mà $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$
7	Cho α là góc mà $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5};0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Tính $\tan\alpha$	8	Cho *a*, *b* thỏa mãn $\tan(a+b)=3,\ \tan a.\tan b=2$. Tính $P=\frac{\sin 2a}{\cos(a+b)\cos(a-b)}$
9	Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sqrt{2}$. Tính $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$	10	Cho α là góc mà $\cot\alpha=2$. Tính $P=\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$
11	Cho $\tan\alpha=3$. Tính $P=\frac{8\cos^3\alpha+4\sin^3\alpha+3\cos\alpha}{2\cos\alpha-5\sin^3\alpha}$	12	Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $A=\tan\alpha+\cot 2\alpha$
13	Cho $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$. Tính $A=2\sin 3x.\cos x-\sin 4x$	14	Biết $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=(1-3\cos 2\alpha)(2+3\cos 2\alpha)$,

15	Cho góc α thỏa mãn hệ thức $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Tính $A=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	16	Biết $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$. Tính $P=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$
17	Cho $0<x<\frac{\pi}{4}$ và $x-y=\frac{3\pi}{4}$. Tính $P=(1-\tan x)(1+\tan y)$	18	Cho $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Tính $P=\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$
19	Biết $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$. Tính $\cos(2\pi-\alpha),\tan(\alpha-7\pi)$ và $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	20	Tính $P=(1+3\sin^2 x)(1+4\cos^2 x)$, biết rằng $\cos 2x=-\frac{2}{3}$
21	Cho $\tan\alpha=\frac{3}{2}$. Tính $A=\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$	22	Cho $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $P=(1+\tan\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
23	Biết $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Tính $P=5\sin\alpha.\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$	24	Cho $5\sin 2\alpha-6\cos\alpha=0$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2015\pi-\alpha)-\cot(2016\pi+\alpha)$

Phần II. Phương trình lượng giác

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3}-2\sin 2x=0$

b) $2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$

c) $2\tan\left(\frac{2x}{3}-20^0\right)+\sqrt{3}=0$

d) $4\sin x.\cos x.\cos 2x=1$

e) $2\sin x-\sqrt{2}\sin 2x=0$

f) $\tan 2x.\sin x+\sqrt{3}\left(\sin x-\sqrt{3}\tan 2x\right)-3\sqrt{3}=0$

g) $(2\sin x+1)^2-(2\sin x+1)\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)=0$

h) $8\cos^3 x-1=0$

HD Giải

a) $\sqrt{3}-2\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

b) $2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k6\pi \\ x=-\frac{5\pi}{4}+k6\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

c) Điều kiện : $x\neq 135^0+k270^0$

$2\tan\left(\frac{2x}{3}-20^0\right)+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \tan\left(\frac{2x}{3}-20^0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\tan(-30^0)\Leftrightarrow x=-15^0+k270^0,k\in\mathbb{Z}$

d) $4\sin x.\cos x.\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

e) $2\sin x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

f) Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

$\tan 2x.\sin x + \sqrt{3}\left(\sin x - \sqrt{3}\tan 2x\right) - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 3)(\tan 2x + \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

g) $\left(2\sin x + 1\right)^2 - \left(2\sin x + 1\right)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin x + \frac{5}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

h) $8\cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos x.\cos 3x = \cos 5x.\cos 7x$

b) $\sin 3x.\cos 7x = \sin 13x.\cos 17x$

c) $\cos 2x.\cos 5x = \cos 7x$

d) $\sin 4x.\sin 3x = \cos x$

e) $\sin 3x \sin 5x = \sin 11x.\sin 13x$

f) $\sin x.\sin 2x.\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$

HD Giải

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng và tìm ra nghiệm của phương trình.

a) $\cos x.\cos 3x = \cos 5x.\cos 7x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{8} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 3x.\cos 7x = \sin 13x.\cos 17x \Leftrightarrow \sin 10x = \sin 30x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{10} \\ x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{20} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos 2x.\cos 5x = \cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos 7x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin 4x.\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \cos(\pi - 7x) = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin 3x \sin 5x = \sin 11x.\sin 13x \Leftrightarrow \cos 8x = \cos 24x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{16} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $1+2\cos x+\cos 2x=0$ b) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

c) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$ d) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$

e) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$ f) $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$

HD Giải

a) $1+2\cos x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x+2\cos 3x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x.\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos\frac{5x}{2}=0 \\ \cos\frac{x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

c) Phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\pi+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

$d)\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

e) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2 \Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0$

Vậy, nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

f) $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x \Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x-\sin 2x)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, x=k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x$ b) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^3 4x$

c) $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$ d) $2\cos^3 x+\sin x\cos x+1=2(\sin x+\cos x)$

e) $\cos^3 x-\sin^3 x=\sin x-\cos x$ f) $\left(2\sin x+1\right)\left(3\cos 4x+2\sin x-4\right)+4\cos^2 x=3$

HD Giải

$a)$ $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x \Leftrightarrow \sin^3 x+\cos^3 x-\cos x=0 \Leftrightarrow \sin^3 x+\cos x(\cos^2 x-1)=0$

$\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin^2 x\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

b) Ta cần chú ý: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \Rightarrow \sin^3\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - \sin 3\alpha\right)$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Rightarrow \cos^3\alpha = \frac{1}{4}\left(\cos 3\alpha - 3\cos\alpha\right)$

Từ đó $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = \sin^3 4x \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 12x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}$

$c)$ $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x\cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$d)$ $2\cos^3 x + \sin x\cos x + 1 = 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2\cos x + \sin x\cos x + 1 - 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos^2 x - 1) + \sin x\cos x + 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x\sin^2 x + \sin x\cos x + 1 - 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x(1 - 2\sin x) + 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin x)(\sin x\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 2\sin x = 0 \\ \sin x\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$ (vì $\sin x\cos x + 1 = 0$ vô nghiệm)

e) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin 2x + 2\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (Vì $\frac{1}{2}\sin 2x + 2 = 0$ vô nghiệm)

$f)$ $\left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + 1 - 4\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x + 2\sin x - 4\right) + (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left[3\cos 4x + 2\sin x - 4 + 1 - 2\sin x\right] = 0 \Leftrightarrow \left(2\sin x + 1\right)\left(3\cos 4x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos 4x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 5.</u> Giải các phương trình sau:

a) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$ b) $\tan^2 x\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0$

c) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$ d) $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$

e) $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$ f) $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$

<u>HD Giải</u>

a) Với đều kiện $\sin x \neq 0$, ta có $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - 1\right)\left(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $2\sin x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$

Giải (2): $\sin x-\cos x-2\sin x\cos x=0$, đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow -2\sin x\cos x=t^2-1$ với $|t|\le\sqrt{2}$

$\sin x-\cos x-2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow t^2+t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (thoả điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$)

Suy ra: $\sin x-\cos x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

b) Với điều kiện $\cos x\ne 0$, ta có

$\tan^2 x\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^3 x-1=0\Leftrightarrow\sin^2 x\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^2 x\left(\cos^3 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\sin^3 x\right)-\left(1-\sin^2 x\right)\left(1-\cos^3 x\right)=0$

$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1-\cos x)\left[\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)-\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x+\cos^3 x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1-\cos x)\left[\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)+\sin x\cos x\left(\sin x-\cos x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1-\cos x)(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}1-\sin x=0 & (1)\\ 1-\cos x=0 & (2)\\ \sin x-\cos x=0 & (3)\\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0 & (4)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) không thoả điều kiện $\cos x\ne 0$

Giải phương trình (4), ta đặt $t=\sin x+\cos x$ với $|t|\le\sqrt{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,x=k2\pi,x=\dfrac{\pi}{4}\pm\alpha+m2\pi;k,m\in\mathbb{Z}$ với $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

c) Với điều kiện $\sin 2x\ne 0$, ta có $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}\Leftrightarrow\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x=1-\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2 2x-\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos^2 2x-\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow\cos 2x\left(\cos 2x-\sin 2x-1\right)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},x=-\dfrac{\pi}{4}+l\pi;k,l\in\mathbb{Z}$ (Chú ý loại nghiệm không thoả điều kiện)

d) Với điều kiện $\cos 2x\ne 0$, ta có $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x\Leftrightarrow 3\sin x-\cos^3 x-5\sin x\cos^2 x=0$

Với $\cos x\ne 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được một phương trình đối với tanx. Nhưng các nghiệm của phương trình này đều không thoả điều kiện $\cos 2x\ne 0$.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm

e) Các nghiệm của phương trình $x=\pi+k2\pi,x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ (viết $\tan^2 x=\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}$)

f) Với điều kiện $\cos x\ne 0$, đặt $t=\dfrac{1}{\cos x}$, ta có $2t^2-3t+1=0$. Vậy, nghiệm của phương trình

$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$ b) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}=8\sin x$

c) $\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$ d) $2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x$

e) $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ f) $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x$

HD✍Giải

a) $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x\Leftrightarrow\left(3\sin 3x-4\sin^3 3x\right)-\sqrt{3}\cos 9x=1$

$$\Leftrightarrow\sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 9x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{9}\\ x=\dfrac{7\pi}{54}+\dfrac{k2\pi}{9}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

b) Điều kiện $\sin 2x\neq 0$, ta có $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}=8\sin x\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=8\sin^2 x\cos x$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=8.\frac{1-\cos 2x}{2}\cos x\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=4\cos x-4\cos 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-3\cos x=-2(\cos x+\cos 3x)\Leftrightarrow\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow\cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

c) Điều kiện $\sin 2x\neq 0$,

$$\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\Leftrightarrow\sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0 & (1)\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1) và (2), các nghiệm của phương trình đã cho $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,x=\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$

d) $2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin 2x+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 2x=3-2\sqrt{2}$

Phương trình này vô nghiệm vì $\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2<\left(3-2\sqrt{\ }\right)^2$

e) Điều kiện $\sin 2x\neq 0$, ta có $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)\sin x\cos x=\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(2\sin x\cos x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\sin 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}\text{ (thoả điều kiện)}$$

f) $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\sin x(1-\sin^2 x)-\cos x-\cos^3 x=0$

$$\Leftrightarrow\cos x(\sin x\cos x-1-\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=0 & (1)\\ \sin x\cos x-1-\cos^2 x=0 & (2)\end{array}\right..$$

Giải (1) và (2), phương trình (2) vô nghiệm. Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2006 - 2007)

a) $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

b) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

c) $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$

d) $\dfrac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

e) $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x\tan\frac{x}{2}\right) = 4$

f) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

HD Giải

a) Phương trình đã cho tương đương với: $1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với $\sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x - 1\right) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Phươngt trình đã cho tương đương với

$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*) phương trình đã cho tương đương với:

$$2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do điều kiện (*) nên nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$

e) Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos\frac{x}{2} \neq 0$ (*) phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

So với (*), nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) Phương trình đã cho tương đương với

$-2\sin 2x\sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 8. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2008)

a) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ b) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

c) $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$ d) $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$

HD Giải

a) Điều kiện $\sin x\neq 0$ và $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x\cos x}+2\sqrt{2}\right)=0$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$ và $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với:

$\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sqrt{3}\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow\cos 2x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho tương đương với:

$4\sin x\cos^2 x+\sin 2x=1+2\cos x\Leftrightarrow(2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

d) Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x\Leftrightarrow\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

Bài 9. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2009)

a) $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$ b) $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\sin^3 x)$

c) $(1+2\sin x)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$ d) $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$

HD Giải

a) Điều kiện $\sin x\neq 1, \sin x\neq-\frac{1}{2}$ (*)

$\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}\Leftrightarrow(1-2\sin x)\cos x=\sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

So với (*), nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$(1-2\sin^2 x)\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

c) Phương trình tương đương với $(\sin x+1)(2\sin 2x-1)=0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

d) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3}\cos 5x-(\sin 5x+\sin x)-\sin x=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x-\frac{1}{2}\sin 5x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Bài 10. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2010)

a) $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

b) $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

c) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$

d) $4\cos\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}+2(8\sin x-1)\cos x=5$

HD✍Giải

a) Điều kiện $\cos x\neq 0$ và $1+\tan x\neq 0$

$\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)(1+\sin x+\cos 2x)=(1+\tan x)\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sin x+\cos 2x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}\cos x \Leftrightarrow \sin x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1$ (loại) hoặc $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$

b) $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\sin x+(\cos x+2)\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$ (vì $\sin x+\cos x+2=0$ (vô nghiệm))

c) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x-(1-2\sin^2 x)+3\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=0 \\ \cos x+\sin x+2=0\end{array}\right.$

♦ Phương trình: $\sin x+\cos x+2=0$ vô nghiệm

♦ Phương trình: $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$

d) $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\left(8\sin x-1\right)\cos x=5$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x+8\sin 2x-5=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 2x-8\sin 2x+3=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{3}{2}$ (vô nghiệm) hoặc $\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

Bài 11. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2011)

a) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$

b) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

c) $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

d) $\cos 4x+12\sin^2 x-1=0$

HD Giải

a) Điều kiện $\sin x\neq 0$ (*). Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(1+\sin 2x+\cos 2x\right)\sin^2 x=2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$

$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x=2\sqrt{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x+\sin x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0 \quad (1)\\ \cos x+\sin x-\sqrt{2}=0 \ (2)\end{array}\right.$

Giải (1): $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (thoả mãn (*))

Giải (2): $\cos x+\sin x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ (thoả mãn (*))

Vậy, phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x-1\right)+\cos x\left(\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-1\right)\left(\cos 2x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-1=0 \quad (1)\\ \cos 2x+\cos x=0 \quad (2)\end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Giải (2): $\cos 2x=-\cos x=\cos\left(\pi-x\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Vậy, phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

c) Điều kiện $\cos x\neq 0, \tan x\neq\sqrt{3}$ (*).

$\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0 \Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x+1\right)-\left(\sin x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sin x+1\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.; k\in\mathbb{Z}$

So với (*). Vậy, nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

d) $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + 6\left(1 - \cos 2x\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 2$ (vô nghiệm) hoặc $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 12. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2012)

a) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$ b) $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$ d) $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$

HD Giải

a) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right)\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sqrt{3}\sin x + \cos x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k\pi\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. ;k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi$ và $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

b) $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right. ;k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $x = k\dfrac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x \Leftrightarrow \left(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2}\right)\cos 2x = 0$

✓ $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

✓ $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi$ *hoặc* $x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi$ và $x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x \Leftrightarrow 2\cos 2x + \sin x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 2\cos 2x.\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 13. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2013)

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$

HD✍Giải

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\left(\sin x+\cos x\right) \Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(2\cos x-1=0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\cos x-1=0\end{array}\right.$$

- $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

So với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) $\sin 5x+2\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \sin 5x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x+\frac{\pi}{2}=2x+k2\pi\\ 5x+\frac{\pi}{2}=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=-\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ và $x=-\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}$.

c) $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\sin x+1=0\end{array}\right.$

- $\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
- $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\sin x \Leftrightarrow \sin 2x=\sin(-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\frac{2\pi}{3}\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{k2\pi}{3}$ và $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 14. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2014)

a) $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ b) $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x$

HD✍Giải

a) $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x \Leftrightarrow \sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x \Leftrightarrow \left(\sin x-2\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

- $\sin x-2=0 \Leftrightarrow \sin x=2$: Phương trình vô nghiệm
- $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x-2=0=\left(\sin x-\sqrt{2}\right)\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0$

- $\sin x-\sqrt{2}=0$: Phương trình vô nghiệm
- $2\cos x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Bài 15. Giải các phương trình sau: (THPTQG 2015, 2016)

a) Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. Tính $A=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

b) Tính giá trị của biểu thức $P=(1-3\cos2\alpha)(2+3\cos2\alpha)$, biết $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$

c) Giải phương trình: $2\sin^2 x+7\sin x-4=0$

HD Giải

a) Ta có: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$. Vì $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$

Khi đó suy ra: $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$. Vậy: $A=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{-\dfrac{3}{4}}{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=-\dfrac{12}{25}$

b) Ta có: $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

Vậy: $P=(1-3\cos2\alpha)(2+3\cos2\alpha)=\left(1-3.\dfrac{1}{9}\right)\left(2+3.\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{14}{9}$

c) $2\sin^2 x+7\sin x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-4\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

♦ Với $\sin x=-4\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

♦ Với $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Giải các phương trình

Bài	Giải phương trình	Bài	Giải phương trình
1	$\cos3x-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$	2	$\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$
3	$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=1$	4	$1+\sin2x=2\cos^2 x$
5	$2(2-\cos x)\cos x=\sqrt{3}\sin2x$	6	$\sin3x.\cos3x=\sin2x$
7	$1-\sin3x=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$	8	$\sin3x-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$
9	$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos x-\sin x=0$	10	$2\sin x-\sin2x=2\sin2x.\cos x$
11	$\sin2x+\cos(\pi-x)=0$	12	$\sin5x+\sin3x=\sin4x$

13	$\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=0$	14	$2\cos 4x\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=\sin 5x$
15	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin 2x=0$	16	$\sin 7x\cos 3x-\cos 2x=\cos 7x\sin 3x$
17	$\sin x+2\sin^2 2x=\sin 7x+1$	18	$2\cos 4x\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=\sin 5x$
19	$\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$	20	$\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x$
21	$\sin 5x+2\cos^2 x=1$	22	$\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$
23	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$	24	$1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
25	$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$	26	$2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$
27	$\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$	28	$2\cos 2x+\sin x=\sin 3x$
29	$\cos 4x+12\sin^2 x-1=0$	30	$\left(\sin 2x+\cos 2x\right)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$
31	$4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\left(8\sin x-1\right)\cos x=5$	32	$\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$
33	$\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$	34	$\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$
35	$(1+2\sin x)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$	36	$\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$
37	$2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$	38	$\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$
39	$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$	40	$2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$
41	$\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$	42	$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$
43	$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$	44	$3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$
45	$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x$	46	$\frac{1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}}{\cos x}=8\sin x$
47	$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x$	48	$\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{15\pi}{2}\right)=1+2\sin x$
49	$2\sin x-\sqrt{2}\sin 2x=0$	50	$1+2\cos x+\cos 2x=0$
51	$\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	52	$2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x$
53	$\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$	54	$\cos x+\sin x=1+\sin 2x+\cos 2x$

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $P=-\frac{1}{4}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P=\frac{1}{4}$.

Câu 2: Giải phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x$.

A. $x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\frac{5\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\pm\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y=6\tan 3x-4\cot 3x$.

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\left(0;+\infty\right)$.

C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho biết $\tan x=-3$. Tính giá trị của biểu thức $K=\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x+3}{1+4\sin^2 x}$.

A. $K=-\frac{2}{3}$. **B.** $K=\frac{11}{6}$. **C.** $K=-\frac{9}{7}$. **D.** $K=\frac{14}{23}$.

Câu 5: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$.

A. $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{5\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6: Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ có số nghiệm thuộc đoạn $\left[2\pi;4\pi\right]$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 7: Giải phương trình $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

A. $x=k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 8: Gọi A,B,C là ba góc nhọn của một tam giác thỏa $\tan A=\frac{1}{2},\tan B=\frac{1}{5},\tan C=\frac{1}{8}$. Tính tổng $S=A+B+C$.

A. $S=30^0$. **B.** $S=60^0$. **C.** $S=45^0$. **D.** $S=120^0$.

Câu 9: Giải phương trình $\cos\left(3x-60^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $x=35^0+k120^0$ hoặc $x=5^0+k120^0,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=35^0+k60^0$ hoặc $x=5^0+k60^0,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x = 35^0 + k180^0$ hoặc $x = 5^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = 35^0 + k360^0$ hoặc $x = 5^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.
B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
D. $D = [-1;1]$.

Câu 11: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. Tìm M.

A. $M = \frac{1}{2}$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 0$. **D.** $M = 2$.

Câu 12: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

A. $T = \frac{\pi}{2}$. **B.** $T = 8\pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Câu 13: Giải hương trình $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$.

A. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14: Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$.

A. $P = -\frac{12}{25}$. **B.** $P = -\frac{4}{3}$. **C.** $P = -\frac{25}{12}$. **D.** $P = \frac{12}{25}$.

Câu 16: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$.

A. $P = -4$. **B.** $P = -\frac{14}{9}$. **C.** $P = \frac{19}{4}$. **D.** $P = \frac{14}{9}$.

Câu 17: Cho hai hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \cos 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.
B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 18: Cho góc α mà $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Tính $P = (\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$.

A. $P = \frac{225}{128}$. **B.** $P = \frac{10}{11}$. **C.** $P = \frac{128}{225}$. **D.** $P = -\frac{225}{128}$.

Câu 19: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 20: Kí hiệu *m* là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. Tìm *m*.

A. $m=-\sqrt{2}.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=-\sqrt{3}.$ **D.** $m=-2.$

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3\tan x-2}{1+\sin x}.$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Câu 22: Tìm chu kì tuần hoàn *T* của hàm số $y=\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{3}.$

A. $T=8\pi.$ **B.** $T=4\pi.$ **C.** $T=12\pi.$ **D.** $T=6\pi.$

Câu 23: Kí hiệu *m* là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right).$ Tìm *m*.

A. $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=0.$

Câu 24: Giải phương trình $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0.$

A. $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\dfrac{k\pi}{3}$ hoặc $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\dfrac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\dfrac{k\pi}{3}$ hoặc $x=\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 25: Giải phương trình $\cos x=-\dfrac{1}{2}.$

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 26: Tìm chu kì tuần hoàn *T* của hàm số $y=\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

A. $T=10\pi.$ **B.** $T=5\pi.$ **C.** $T=\dfrac{2\pi}{5}.$ **D.** $T=\dfrac{\pi}{5}.$

Câu 27: Giải phương trình $\tan x=\sqrt{3}.$

A. $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **C.** $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 28: Tìm tất cả giá trị của *x* để hàm số $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)-3$ có giá trị nhỏ nhất bằng -5.

A. $x=\dfrac{13\pi}{5}+k4\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\dfrac{13\pi}{5}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\dfrac{\pi}{5}+k4\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\dfrac{13\pi}{5}+k4\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 29: Giải phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x.$

A. $x=\frac{k\pi}{2},x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=k2\pi,x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=k\pi,x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k2\pi,x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 30: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{2\cos x-5}{3\sin x-4}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

C. $D=\mathbb{R}.$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

Câu 31: Cho hàm số $y=\frac{\cos x}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đã cho là hàm số chẵn. **B.** Hàm số đã cho vừa chẵn, vừa lẻ.
C. Hàm số đã cho không chẵn, không lẻ. **D.** Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 32: Giải phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-2.$

A. $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 33: Giải phương trình $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0.$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 34: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y=\sin 3x.\cos 4x.$

A. $T=\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=4\pi.$ **D.** $T=3\pi.$

Câu 35: Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x}=\tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 36: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\tan x$ là các hàm số lẻ.
B. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ có cùng tập xác định.
C. Hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ có cung chu kì là π.
D. Hàm số $y=\cos x$ và $y=\cot x$ là các hàm số chẵn.

Câu 37: Cho các hàm số $f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x},g(x)=\frac{x^3-\sin x}{\cos 2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn. **B.** $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
C. $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số lẻ. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số chẵn.

Câu 38: Trên khoảng $(\pi;8\pi)$. Phương trình $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 39: Giải phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x.$

A. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 40: Cho góc α thảo mãn $\tan\alpha=2$. Tính $E=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$.

A. $E=\frac{10}{11}.$ **B.** $E=-\frac{10}{11}.$ **C.** $E=-\frac{11}{10}.$ **D.** $E=\frac{11}{10}.$

Câu 41: Giải phương trình $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2.$

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 42: Giải phương trình $2\sin^2x+7\sin x-4=0.$

A. $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=2$. Tính giá trị của $E=\frac{4+\sin2\alpha}{5\cos2\alpha}$.

A. $E=-\frac{8}{5}.$ **B.** $E=-\frac{4}{5}.$ **C.** $E=\frac{8}{5}.$ **D.** $E=\frac{4}{5}.$

Câu 44: Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(\frac{19\pi}{2};10\pi\right).$ **B.** $(-6\pi;-5\pi).$ **C.** $\left(-\frac{7\pi}{2};-3\pi\right).$ **D.** $\left(7\pi;\frac{15\pi}{2}\right).$

Câu 45: Giải phương trình $2\sin x(1+\cos2x)+\sin2x=1+2\cos x.$

A. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k\pi,x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 46: Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Phương trình $2\tan x-2\cot x-3=0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 47: Giải phương trình $\cos4x+12\sin^2x-1=0.$

A. $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$ **C.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 48: Giải phương trình $2\sin^2x+5\sin x-3=0.$

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 49: Giải phương trình $\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos 3x$.

A. $x=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 50: Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$ và $g(x)=\dfrac{|\sin x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.
B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
D. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 51: Cặp hàm số nào sau đây có cùng tập xác định ?

A. $y=\tan x$ và $y=\sin x$.
B. $y=\cos x$ và $y=\cot x$.
C. $y=\tan x$ và $y=\dfrac{2+\sin x}{\cos x}$.
D. $y=\tan x$ và $y=\cot x$.

Câu 52: Giải phương trình $2\tan\left(\dfrac{2x}{3}-20^0\right)+\sqrt{3}=0$.

A. $x=-15^0+k270^0, k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=15^0+k270^0, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=-45^0+k270^0, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=-35^0+k270^0, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 53: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+3$ có giá trị lớn nhất bằng 5.

A. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 54: Nếu xét trên khoảng $(0;2\pi)$. Trên những khoảng nào thì hàm $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cùng nghịch biến ?

A. $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
B. $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$.
C. $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.
D. $(\pi;2\pi)$.

Câu 55: Giải phương trình $8\cos^3 x-1=0$.

A. $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 56: Gọi m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x+2\sin x+6$. Tính $S=m+M$.

A. $S=5$.
B. $S=9$.
C. $S=-3$.
D. $S=14$.

Câu 57: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-7}{2\cos x-5}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.
B. $D=\mathbb{R}$.
C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 58: Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

A. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \cos x + \cos 3x$.

A. $T = \pi$. **B.** $T = 4\pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 60: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \frac{\pi}{3}$. **B.** $T = 3\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = \frac{1}{3}$.

Câu 61: Kí hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Tìm m.

A. $m = -\sqrt{2}$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = 3\sqrt{2}$. **D.** $m = -2$.

Câu 62: Cho hai hàm số $f(x) = \sin^3 x - \tan x$ và $g(x) = \frac{\cos x + \cot^2 x}{\sin x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

C. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn. **D.** $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 63: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2 - \cos x}{1 + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi\right\}; k \in \mathbb{Z}\right]$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 64: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sin^4 x - \cos^4 x$. Tìm M.

A. $M = 1$. **B.** $M = 2$. **C.** $M = -1$. **D.** $M = \sqrt{2}$.

Câu 65: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ thuộc đoạn $[0; \pi]$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 66: Với giá trị nào của hằng số A và của hằng số α thì hàm số $y = A\sin(x + \alpha)$ là 1 hàm số lẻ.

A. $A \neq 0, \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $A > 0, \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $A \neq 0, \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $A \neq 0, \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 67: Giải phương trình $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$.

A. $\sin 2\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\sin 2\alpha = -\frac{3}{8}$. **C.** $\sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\sin 2\alpha = -\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

Câu 69: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y=\sqrt{3+\cos^2 x}$ có giá trị lớn nhất bằng 2.

A. $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 70: Cho biết $\cot x=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{2+\cos x}{\sin^2 x-\sin x.\cos x-\cos^2 x+3}$.

A. $M=\dfrac{61}{79}$. **B.** $M=-\dfrac{19}{8}$. **C.** $M=\dfrac{11}{16}$. **D.** $M=\dfrac{121}{16}$.

Câu 71: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2+\cos x}{1+\sin x}}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(0;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 72: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$.

A. $S=\left\{-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 73: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3+4\cot 2x}{\cos 2x-1}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 74: Tìm hàm số lẻ trong các hàm số dưới đây.

A. $f(x)=\sin 3x.\sin 4x$. **B.** $f(x)=\dfrac{\tan^4 x}{2+\cos 2x}$.

C. $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{3+\cot^2 x}$. **D.** $f(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-2x)$.

Câu 75: Cho hai hàm số $f(x)=\tan 4x$ và $g(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn. **B.** $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 76: Giải phương trình $\tan\left(4x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

A. $x=45^0+k180^0, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=180^0+k180^0, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=60^0+k180^0, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=45^0+k45^0, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 77: Giải phương trình $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin 3x$.

A. $x=-\dfrac{\pi}{3}-k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{4\pi}{15}+\dfrac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=\dfrac{4\pi}{15}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{3}-k2\pi$ hoặc $x=\frac{4\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5},k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}-k2\pi$ hoặc $x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$

Câu 78: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y=\cos^4 x+4\cos^2 x+5$ có giá trị lớn nhất bằng 10.

A. $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 79: Tính giá trị của biểu thức $E=\frac{1}{\sin 18^0}+\frac{1}{\sin 54^0}.$

A. $E=-2.$ **B.** $E=2.$ **C.** $E=-1.$ **D.** $E=1.$

Câu 80: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$ **B.** $D=[-1;1).$ **C.** $D=\mathbb{R}.$ **D.** $D=[-1;1].$

Câu 81: Hàm số nào sau đây là hàm số không chẵn, không lẻ ?

A. $y=2\cos x+1.$ **B.** $y=2\sin x+x.$ **C.** $y=\sin x+2.$ **D.** $y=2\cos x-2x^2.$

Câu 82: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}.$ Tính $\sin 2\alpha.$

A. $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}.$ **B.** $\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}.$ **C.** $\sin 2\alpha=\frac{3}{8}.$ **D.** $\sin 2\alpha=\frac{1}{4}.$

Câu 83: Tìm tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **D.** $D=\mathbb{R}.$

Câu 84: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y=2\sin x+\tan x$ là hàm số lẻ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

B. Hàm số $y=\cos x+x\sin x$ có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

C. Hàm số $y=2\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y=\frac{\cos x}{4+\cos 2x}$ có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 85: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y=\cos^2 x-\sin x.$ Tìm $M.$

A. $M=\frac{1}{4}.$ **B.** $M=\frac{5}{4}.$ **C.** $M=\frac{3}{4}.$ **D.** $M=\frac{4}{5}.$

Câu 86: Tính giá trị của biểu thức $E=\tan 9^0-\tan 27^0-\tan 63^0+\tan 81^0.$

A. $E=2.$ **B.** $E=-4.$ **C.** $E=4.$ **D.** $E=-2.$

Câu 87: Giải phương trình $\sin x=\frac{1}{2}.$

A. $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 88: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos 5x-2\cos 3x+\sin 5x=0.$

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{8},k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{8}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Câu 89: Hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(\frac{19\pi}{2};10\pi\right).$ **B.** $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$ **C.** $\left(\frac{11\pi}{2};7\pi\right).$ **D.** $\left(-\frac{11\pi}{2};-5\pi\right).$

Câu 90: Nếu xét trên khoảng $(0;2\pi)$. Trên những khoảng nào thì hàm $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cùng đồng biến ?

A. $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$ **B.** $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right).$ **C.** $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right).$ **D.** $(\pi;2\pi).$

Câu 91: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2(1+\cos x)}+1.$

A. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=3.$ **B.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=2$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=3.$

C. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=-3$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=1.$ **D.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=-1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=3.$

Câu 92: Tìm tất cả giá trị của *x* để hàm số $y=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+3$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-1.$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 93: Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x+5\tan x+3=0.$

A. $x=-\frac{3\pi}{4}.$ **B.** $x=-\frac{5\pi}{6}.$ **C.** $x=-\frac{\pi}{3}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{4}.$

Câu 94: Cho biết $\tan x=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\sin x+2\cos^3 x-3\sin^3 x}{4\sin x+5\sin x\cos^2 x-6\sin^3 x}.$

A. $P=-\frac{4}{5}.$ **B.** $P=\frac{14}{23}.$ **C.** $P=\frac{79}{61}.$ **D.** $P=\frac{61}{79}.$

Câu 95: Giải phương trình $\sqrt{3}\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+1=0.$

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 96: Kí hiệu *m* là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sin^4 x-\cos^4 x$. Tìm *m*.

A. $m=-3.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=-2.$

Câu 97: Giải phương trình $\sin 3x=\cos x.$

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{8}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 98: Giải phương trình $\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin x-\cos\frac{\pi}{4}}=0.$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 99: Giải phương trình $\sin 3x=\sin x.$

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ hoặc $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Câu 100: Cho góc α thỏa mãn $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$. Tính $P=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$

A. $P=-\frac{49}{31}.$ **B.** $P=-\frac{31}{49}.$ **C.** $P=\frac{12}{5}.$ **D.** $P=\frac{49}{31}.$

Câu 101: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x.$

A. $x=\frac{\pi}{6}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{4}.$ **C.** $x=\frac{\pi}{2}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{3}.$

Câu 102: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x-\cos x=\sqrt{2}.$

A. $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

C. $S=\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$ **D.** $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Câu 103: Giải phương trình $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2(8\sin x-1)\cos x=5.$

A. $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\frac{5\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi;k\in\mathbb{Z}.$

Câu 104: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right).$

A. $T=8\pi$ **B.** $T=4\pi$ **C.** $T=2\pi$ **D.** $T=6\pi$

Câu 105: Giải phương trình $\sin 5x+2\cos^2 x=1.$

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7},k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7},k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{7}+\frac{k2\pi}{7},k\in\mathbb{Z}.$

Câu 106: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=3-2\sin x.$

A. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=-1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=5.$ **B.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\,y=-5$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,y=1.$

C. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = 1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 5.$ **D.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = -5$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = -1.$

Câu 107: Giải phương trình $8\cos 2x\sin 2x\cos 4x = \sqrt{2}.$

A. $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = -\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{32} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 108: Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 2x.$

A. $x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \frac{\pi}{6} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 109: Gọi m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3}{5 - \sin^2 x}$. Tính $P = m.M$

A. $P = 20.$ **B.** $P = \frac{9}{20}.$ **C.** $P = \frac{3}{4}.$ **D.** $P = 4.$

Câu 110: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2.$

A. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = -5$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 1.$ **B.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = -1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 1.$

C. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = -5$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 2.$ **D.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y = 1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y = 5.$

Câu 111: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{\cos x - \cos 3x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 112: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 113: Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right).$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 114: Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 115: Cho a, b là góc nhọn và $\cot a = \frac{3}{4}, \cot b = \frac{1}{7}$. Tính tổng $S = a + b.$

A. $S=\frac{\pi}{4}$. **B.** $S=\frac{5\pi}{14}$. **C.** $S=\frac{\pi}{6}$. **D.** $S=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 116: Giải phương trình $2\cos 2x+\sin x=\sin 3x$.

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 117: Giải phương trình $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$.

A. $x=\frac{3\pi}{2}+k\pi, x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 118: Giải phương trình $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$.

A. $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi, x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{4\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 119: Giải phương trình $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$.

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 120: Cho biết $\sin x=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $H=\frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}$.

A. $H=-\frac{7}{9}$. **B.** $H=\frac{14}{23}$. **C.** $H=\frac{61}{79}$. **D.** $H=-\frac{9}{7}$.

Câu 121: Cho hai hàm số $f(x)=x-\sin x$ và $g(x)=1+\cos x.\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. **D.** $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 122: Chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\sin 3x.\cos 3x$ là:

A. $T=6\pi$. **B.** $T=\frac{\pi}{3}$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Câu 123: Giải phương trình $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 124: Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2}+15^0\right)=\sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $290^0 \in X$. **B.** $220^0 \in X$. **C.** $240^0 \in X$. **D.** $200^0 \in X$.

Câu 125: Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\tan x+\cot x}{1-\sin 2x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}\right]$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Câu 126: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sqrt{\cos x}+1$.

A. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=-3$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y=1$. **B.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=-3$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y=3$.

C. $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=-1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y=3$. **D.** $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=1$ và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, y=3$.

Câu 127: Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{3\sin x-5}{\cos x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 128: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y=\cos^4 x+4\cos^2 x+5$ có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

A. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 129: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

A. $S=\left\{\frac{5\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 130: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P=\frac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $P=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$. **C.** $P=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{5}}$.

Câu 131: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin x+\cos x$. Tìm M.

A. $M=\sqrt{2}$. **B.** $M=2\sqrt{2}$. **C.** $M=1$. **D.** $M=-\sqrt{2}$.

Câu 132: Giải phương trình $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 133: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\tan x+\cot x}{1-\sin 2x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}\right]$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left[\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}\right]$.

Câu 134: Tính giá trị của biểu thức $E=\dfrac{\cos 70^0+\cos 10^0}{\cos 35^0\cos 5^0-\sin 35^0\sin 5^0}$.

A. $E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $E=\sqrt{3}$.

C. $E=1$.

D. $E=2\cos 40^0$.

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A		■	■				■		■	■					■			■		
B	■					■					■			■			■			
C					■			■					■						■	
D				■								■				■				■

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A								■							■			■	■	■
B			■				■							■			■			
C	■	■		■		■			■	■			■							
D					■						■	■				■				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A			■	■								■	■							
B	■	■								■							■	■		
C					■	■		■	■		■			■	■				■	
D							■									■				■

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	■		■	■	■			■				■					■			
B																			■	■
C						■			■	■	■				■					
D		■					■						■	■		■		■		

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A											■									■
B		■	■	■	■							■			■	■	■		■	
C	■					■		■		■										
D							■		■				■	■				■		

	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A							■	■		■	■		■			■				
B	■								■					■					■	
C		■			■	■														
D			■	■								■			■		■	■		■

	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134
A				■							■		■	
B		■					■	■						■
C	■				■							■		
D			■			■			■	■				

CHƯƠNG II

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

---o0o---

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Một số kí hiệu

Số phần tử của tập hợp hữu hạn *A*, được kí hiệu là *n*(*A*) hoặc $\left|A\right|$. Chẳng hạn: Nếu $A=\{a;b;c\}$ thí ta nói số phần tử của tập *A* là 3, ta viết $n(A)=3$ hay $\left|A\right|=3$

1. Qui tắc cộng

Giả sử công việc có thể được thực hiện theo phương án *A* hoặc phương án *B*. Có *n* cách chọn phương án *A* và *m* cách chọn phương án *B* (các cách chọn phương án *A* không trùng với bất cứ cách chọn nào của phương án *B*). Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi *n* + *m* cách.

Tổng quát:

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo một trong *k* phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Có n_1 thực hiện phương án A_1, n_2 thực hiện phương án A_2,… và n_k thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc đó được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách.

- Giả sử *A* và *B* là các tập hợp hữu hạn, không giao nhau. Khi đó: $n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)$ (1)
- Công thức (1) có thể mở rộng theo hai hướng:

a) Nếu *A* và *B* là hai tập hữu hạn bất kì thì $n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)$ (2)

b) Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hợp tuỳ ý, đôi một không giao nhau thì

$$n\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\right)=n\left(A_1\right)+n\left(A_2\right)+\ldots+n\left(A_m\right)$$

2. Qui tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn *A* và *B*. Công đoạn *A* có thể làm theo *n* cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn *A* thì công đoạn *B* có thể làm theo *m* cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo *n.m* cách.

Tổng quát:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn . Công đoạn A_1 thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, . . .,công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc đó được thực hiện bởi $n_1.\ n_2 \ldots n_k$ cách.

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Trong một lớp có 18 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn
a) Một bạn phụ trách lớp trưởng ?
b) Hai bạn, trong đó có một nam và một nữ ?

HD Giải

a) Theo quy tắc cộng, ta có 18 + 12 = 30 cách chọn một bạn phụ trách lớp trưởng (hoặc nam hoặc nữ)
b) Muốn có hai bạn gồm một nam và một nữ, ta phải thực hiện hai hành động lựa chọn:
Chọn một nam có 18 cách chọn, khi có một bạn nam rồi, có 12 cách chọn một bạn nữ
Vậy theo qui tắc nhân, ta có 18.12 = 216 cách chọn thoả ycbt.

Bài 1.2. Trên giá sách có 10 quyển sách tiếng Việt khác nhau, 8 quyển sách tiếng Anh khác nhau và 6 quyển sách tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn
a) Một quyển sách ?
b) Ba quyển sách tiếng khác nhau ?
c) Hai quyển sách tiếng khác nhau ?

HD Giải

a) Theo qui tắc cộng, ta có 10 + 8 + 6 = 24 cách chọn một quyển sách
b) Theo qui tắc nhân, ta có 10.8.6 = 480 cách chọn ba quyển sách tiếng khác nhau
c) Theo qui tắc nhân, có 10.8 = 80 cách chọn một quyển sách tiếng Việt và tiếng Anh, có 10.6 = 60 cách chọn một quyển sách tiếng Việt và tiếng Pháp và có 8.6 = 48 cách chọn một quyển sách tiếng Anh và tiếng Pháp. Vậy có 80 + 60 + 48 = 188 cách chọn thoả ycbt.

Bài 1.3. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, có bao nhiêu cách chọn một số hoặc là số chẵn hoặc là số nguyên tố ?

HD✍Giải

Kí hiệu $A=\{2,4,6,8\}$ là tập các số chẵn và tập $B=\{2,3,5,7,\}$ là các số nguyên tố

Khi đó, số cách chọn một số hoặc là số chẵn hoặc là số nguyên tố là $A\cup B$.

Mặt khác, theo đề bài ta có $n(A)=4, n(B)=4$ và $A\cap B=\{2\}$ hay $n(A\cap B)=1$. Theo qui tắc cộng mở rộng, ta có $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+4-1=7$

Vậy có 7 cách chọn một số thoả ycbt.

Bài 1.4. Trong một trường THPT, khối 11 có: 260 học sinh tham gia câu lạc bộ Tin học, 240 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán học, 50 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ và 100 học sinh không tham gia câu lạc bô nào trong hai câu lạc bô nêu trên. Hỏi khối 11 của trường đó có bao nhiêu học sinh.

HD✍Giải

Gọi tập hợp học sinh khối 11 ở trường THPT tham gia câu lạc bộ Tinh học và câu lạc bộ Toán học lần lượt là A và B.
Khi đó tập hợp học sinh khối 11 ở trường đó tham gia câu lạc bộ (Tin học và Toán học) là $A\cup B$

Theo bài toán, ta có $n(A)=260, n(B)=240, n(A\cap B)=50$

Theo qui tắc cộng mở rộng, số học sinh khối 11 tham gia câu lạc bộ (Tin học và Toán học) là
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=260+240-50=450$

Vậy khối 11 ở trường đó có 450 + 100 = 550 (học sinh)

Bài 1.5. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

HD✍Giải

Gọi số tự nhiên có hai chữ số đều chẵn có dạng là $\overline{ab}$, với $a,b\in\{0;2;4;6;8\}$ và $a\neq 0$.

Ta có:

	a	b
SCC	4	5

. Vậy có: 4.5 = 20 số thoả ycbt

Bài 1.6. Cho tập nền $B=\{1;2;4;5;7\}$. Có thể lập được từ B:

a) Bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau?
b) Bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?
c) Bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau ?

HD✍Giải

a) Gọi số gồm 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$; khi đó chọn các đối tượng $a,b,c,d\in B, a\neq b\neq c\neq d$

Ta có:

	a	b	c	d
SCC	5	4	3	2

. Vậy có: 5.4.3.2 = 120 số.

b) Gọi số gồm 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$; khi đó chọn các đối tượng $a,b,c,d\in B, a\neq b\neq c\neq d$

Do số cần tìm là số chẵn nên $d\in\{2;4\}$. Ta có:

	a	b	c	d
SCC	4	3	2	2

Vậy có: 4.3.2.2 = 48 số
c) Ta đã có: $120-48=72$ số.

Bài 1.7. Cho tập nền $B=\{0;1;2;3\}$. Có thể lập được từ B:

a) Bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau?
b) Bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?
c) Bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau ?

HD✍Giải

Áp dụng cách giải như bài 1.6, nhưng lưu ý : Chọn số cần tìm $\overline{abcd}$ thì $a \neq 0$

a) Đs: 18 số thoả ycbt
b) Đs: 10 số thoả ycbt
c) Đs: 8 số thoả ycbt

Bài 1.8. Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên
a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau)
b) Có 4 chữ số khác nhau ?

HD✍Giải

Gọi số có bốn chữ số dạng $\overline{abcd}$, trong đó $a,b,c,d \in \{1,5,6,7\}$

a) Số có bốn chữ số không nhất thiết khác nhau

Ta có:

	a	b	c	d
SCC	4	4	4	4

. Vậy, theo qui tắc nhân, ta có 4.4.4.4 = 256 (số)

b) Số có bốn chữ số khác nhau. Ta có:

	a	b	c	d
SCC	4	3	2	1

. Vậy có 4.3.2.1 = 24 (số)

Bài 1.9. Một kết sắt có 5 núm khoá riêng biệt, mỗi núm khoá đều có vòng đánh số 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9. Một dãy 5 chữ số cho một cách mở kết. Có bao nhiêu phương án mở kết khác nhau?

HD✍Giải

Đặt $B = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ Gọi $\overline{abcde}$ là một phương án mở kết tuỳ ý cần tìm.

Ta có:

	a	b	c	d	e
SCC	10	10	10	10	10

. Vậy có $10^5 = 100000$ phương án mở két.

Bài 1.10. Có bao nhiêu số gồm ba chữ số trong đó chỉ có đúng chữ số 5 ?

HD✍Giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ và $a,b,c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Để số thoả ycbt có ba khả năng xảy ra:

TH1. Các số có dạng $\overline{5bc};(b \neq 5, c \neq 5)$, khi đó ta có 9 cách chọn b và 9 cách chọn b.

Vậy có 9.9 = 81 số dạng $\overline{5bc}$

TH2. Các số có dạng $\overline{a5c};(a \neq \{0;5\}, c \neq 5)$, khi đó ta có 8 cách chọn a và 9 cách chọn c.

Vậy có 8.9 = 72 số dạng $\overline{\text{a}5c}$

TH3. Các số có dạng $\overline{ab5};(a \neq \{0;5\}, b \neq 5)$, khi đó ta có 8 cách chọn a và 9 cách chọn b.

Vậy có 8.9 = 72 số dạng $\overline{\text{ab}5}$

Tóm lại ta có: 81 + 72 + 72 = 225 số thoả ycbt.

Bài 1.11. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau ?

HD✍Giải

Đặt $B = \{5,6,7,8,9\}$. Gọi dạng số cần tìm là $\overline{abcde}$, $a,b,c,d,e \in B$

Ta có:

	a	b	c	d	e
SCC	5	4	3	2	1

. Vậy có: 5.4.3.2.1 = 120 số thoả ycbt

Bài 1.12. Cho 8 chữ số 0;1;2;3;4;5;6;7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10 ?

HD✍Giải

Đặt $B = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Gọi 4 số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $a_i \neq a_j; i \neq j, a_1 \neq 0, i,j = \overline{1,4}$, $a_i \in B$

Do bốn số không chia hết cho 10 nên $a_4 \neq 0$. Ta có:

	a_1	a_2	a_3	a_4
SCC	6	6	5	7

Vậy có : 6.6.5.7 = 1260 cách chọn số thoả ycbt.

Bài 1.13. Từ 5 chữ số 0;1;3;5;7 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

HD✍Giải

Gọi 4 số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $a_i \neq a_j; a_1 \neq 0$ .Trong đó $a_1, a_2, a_3, a_4 \in B = \{0;1;3;5;7\}$ và do bốn số không chia hết cho 5 nên $a_4 \neq \{0;5\}$.

Ta có:

	a_1	a_2	a_3	a_4
SCC	3	3	2	3

. Vậy có : 3.3.3.2 = 54 cách chọn số thoả ycbt.

Bài 1.14. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ ?

HD✍Giải

Gọi số có 6 chữ số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $a_i \neq a_j; a_1 \neq 0$, trong đó $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in B = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Do chữ số đầu tiên là số lẻ nên $a_1 \in \{1,3,5,7,9\}$ và vì là số chẵn nên $a_6 \in \{0;2;4;6;8\}$. Ta có:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
SCC	5	8	7	6	5	5

Vậy ta có: 5.8.7.6.5.5 = 42000 số chọn thoả ycbt.

Bài 1.15. Cho 5 chữ số 0;1;2;3;4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số sao cho trong mỗi chữ số đó, mỗi chữ số trên có mặt đúng một lần ?

HD✍Giải

Gọi số cần tìm có dạng là $\overline{abcde}$, $a,b,c,d,e \in B = \{0;1;2;3;4\}$($a \neq 0$ và e là số chẵn nên $e \in \{0;2;4\}$. Khi đó ta xét 3 trường hợp của e.

TH1. Số có dạng $\overline{abcd0}$. Chọn $a,b,c,d \in B = \{1;2;3;4\}$ thì ta có: 4.3.2.1 = 24 số chẵn dạng $\overline{abcd0}$

TH2. Số có dạng $\overline{abcde}$, $e \in \{2;4\}$ có 2 cách chọn, chọn $a \in B = \{1;2;3;4\} \backslash \{e\}$ có 3 cách chọn, chọn $b \in B = \{0;1;2;3;4\} \backslash \{e;a\}$ có 3 cách chọn, chọn $c \in B = \{0;1;2;3;4\} \backslash \{e;a;b\}$ có 2 cách chọn và chọn $d \in B = \{0;1;2;3;4\} \backslash \{e;a;b;c\}$ có 1 cách chọn. Vậy: 2.3.3.2.1 = 36.

Vậy có: 24 + 36 = 60 số thoả ycbt

Bài 1.16. Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có bốn cặp anh em sinh đôi. Nhà trường cần chọn một nhóm 3 học sinh trong 50 học sinh trên dự Đại hội cháu ngoan Bác Hồ sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

HD✍Giải

Một nhóm 3 học sinh sao cho không có cặp em học sinh sinh đôi nào, nên ta có các TH sau: TH1. Trong nhóm có 3 người có 1 người trong bốn cặp sinh đôi.

Chọn 1 người trong bốn cặp sinh đôi có 8 cách chọn người thứ nhất, có 50 – 8 = 42 cách chọn người thứ 2 và có 41 cách chọn người thứ 3. Vậy có 8.42.41 = 13776 cách chọn.

TH2. Trong nhóm 3 người không có ai trong bốn cặp sinh đôi. Có 42 cách chọn người thứ nhất, 41 cách chọn người thứ hai và 40 cách chọn người thứ ba. Vậy có 42.41.40 = 68880 cách chọn

Tóm lại có: 13776 + 68880 = 82656 cách chọn

Bài 1.17. Có 5 con đường nối hai thành phố X và Y, có 4 con đường nối 2 thành phố Y và Z. Muốn đi từ X đến Z phải qua Y.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn đi từ X đến Z qua Y ?

b) Có bao nhiêu cách chọn đường đi từ X đến Z rồi về lại X bằng những con đường về không trùng với đường đã đi khác nhau ?

HD Giải

a) Có 5 cách chọn đường đi từ X đến Y và có 4 cách chọn đường đi từ Y đến Z. Do đó có 4.5 = 20 cách chọn đường đi từ X đến Z qua Y.

b) Khi trở về từ Z đến Y thì còn 3 con đường để chọn: có 3 cách chọn. Từ Y trở về X thì có 4 con đường để chọn: có 4 cách chọn. Do đó có 3.4 = 12 cách chọn đường đi về không qua con đường đã đi. Vậy có tất cả: 20 . 12 = 240 cách chọn đường đi và về trên tuyến đường từ X đến Z qua Y bằng những con đường khác nhau.

Bài 1.18. Có 4 con đường từ A đến B, 2 con đường nối từ B đến C và 3 con đường nối từ C đến D.
a) Có bao nhiêu cách đi từ A đấn D mà qua B và C chỉ một lần?
b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A ?

HD Giải

a) Từ A đến B có 4 con đường, từ B đến C có 2 con đường, từ C đến D có 3 con đường. Từ A muốn đến bắt buộc phải đi qua B và C.
Vậy theo qui tắc nhân, số cách đi từ A đến D là 4.2.3 = 24 (cách)
b) Tương tự, ta có số cách đi từ A đến D rồi trở về A là 4.2.3.3.2.4 = 24^2 = 576 (cách)

Bài 1.19. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau?

HD Giải

Số có 6 chữ số và chữ số 2 đứng cạnh số 3. Ta xem (23) là số a. Khi đó gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ (thay vì có 6 chữ số), trong đó $a,b,c,d,e \in B = \{0;1;2;3;4;5\}$. Ta có: 4 cách chọn a, 4 cách chọn b, có 3 cách chọn c, có 2 cách chọn d và có 1 cách chọn e, mà chữ số 2, 3 đứng cạch nhau nên nó là hoán vị cho nhau. Vậy có : 4.3.2.1.2 = 192 số thoả ycbt.

Bài 1.20. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?
b) Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam, một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

HD Giải

a) Nhà trường cần chọn một học sinh nên: Chọn nam có 280 cách chọn và có 325 cách chọn nữ. Vậy có: 280 + 325 = 605 cách chon.
b) Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ, nên có: Chọn nam có 280 cách chọn và ứng với cách chọn nam ta có 325 cách chọn nữ.
Vậy có: 280.325 = 91000 cách.

Bài 1.21. Có bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 4000 có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 3, 5, 7 nếu:

a) Các chữ số của nó không nhất thiết khác nhau ?
b) Các chữ số của nó khác nhau ?

HD Giải

a) Gọi các số như vậy có dạng $\overline{abcd}$ với $a \in \{5,7\}$, còn b, c và d thuộc $\{1,3,5,7\}$. Do đó

Số các số cần tìm là 2.4.4.4 = 128 số
b) Chữ số a có 2 cách chọn, chữ số b có 3 cách, chọn c có 2 cách và d có 1 cách. Vậy có 2.3.2 = 12 cách chọn số như vậy.

Bài 1.22. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng (2000; 3000) có thể tạo nên từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 nếu:
a) Các chữ số đó không nhất thiết khác nhau ?
b) Các chữ số của nó khác nhau?

HD Giải

a) Các số lẻ trong khoảng (2000; 3000) có dạng $\overline{2abc}$ với $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ và $c \in \{1,3,5\}$.

Vậy có 6.6.3 = 108 số

b) Chữ số c có 3 cách chọn, b có 4 cách chọn và a có 3 cách chọn. Vậy có 3.4.3 = 36 số.

Bài 1.23. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và nằm trong khoảng (2000; 4000).

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$.

Số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và nằm trong khoảng (2000; 4000) nên a có thể chọn là 2 hoặc 3.

Do vậy: Số cách chọn a là 2 cách

Số cách chọn b là 9 cách

Số cách chọn c là 8 cách

Số cách chọn d là 7 cách

Vậy: 2.9.8.7 = 1008 (số)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.24. Giữa hai thành phố A và B có 5 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B rồi trở về A mà không có đường nào được đi hai lần ?

Bài 1.25. Có bao nhiêu số nguyên dương gồm không quá ba chữ số khac nhau ?

Bài 1.26. Một lớp có 40 học sinh, đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và bóng chuyền. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao ?

Bài 1.27. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta có thể lập được bao nhieu số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5.

Bài 1.28. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Bài 1.29. Có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau có thể lập từ các chữ số 0, 2, 4, 6, 8 ?

Bài 1.30. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được:

a) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau ?

b) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

Bài 1.31. Có thể lập ra bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và số đó phải chia hết cho 5, đồng thời số 1 phải xuất hiện ở một trong ba vị trí đầu tiên ?

§2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

GIAI THỪA

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, tích số 1,2,…,n được gọi là n giai thừa. Kí hiệu n!. Vậy n! = 1.2.3…n với $n \in \mathbb{N}^*$
Qui ước: 0! = 1; 1! = 1
Ta suy ra các kết quả sau:
n! = n.(n – 1)! = n.(n – 1).(n – 2)! = n.(n – 1)(n – 2)…2.1

Nếu $n, m \in \mathbb{N}^*$ và n > m thì: $\frac{n!}{m!} = n(n-1)(n-2)...(m+1)$

Ví dụ: 5! = 5.4.3.2.1 =120; 10! = 10.9! = 10.9.8! = 10.9.8.7! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

$\frac{20!}{17!} = 20.19.18 = 6840$

I. <u>HOÁN VỊ</u>

1. <u>Định nghĩa:</u>

Cho tập hợp *A* có *n* phần tử $(n \ge 1)$. Khi sắp xếp *n* phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập *A*(gọi tắt là hoán vị của *A*)

2. <u>Số hoán vị của *n* phần tử</u>: Kí hiệu P_n. $P_n = n! = n.(n-1).(n-2)\ .\ .\ .2.1$

II. <u>CHỈNH HỢP</u>

1. <u>Định nghĩa</u>: Cho tập hợp *A* có *n* phần tử và số nguyên *k*. Khi lấy ra k phần tử của *A* ($1 \le k \le n$) và sắp xếp *k* phần tử này theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử của *A*(gọi tắt là chỉnh hợp chập *k* của *A*)

2. <u>Số chỉnh hợp chập k của n phần tử</u>: Kí hiệu $A_n^k (n, k \in \mathbb{N}^*)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

Nếu k = n thì $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$. Vậy một chỉnh hợp n chập n được gọi là một hoán vị của n phần tử, từ đó suy ra: $A_n^n = A_n^k . A_{n-k}^{n-k}; 1 \le k \le n$

III. <u>TỔ HỢP</u>

1. <u>Định nghĩa:</u> Cho tập *A* có *n* phần tử và số nguyên *k* với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của *A* có *k* phần tử được gọi là một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử của *A* (gọi tắt là một tổ hợp chập *k* của *A*)

2. <u>Số tổ hợp chập k của n phần tử</u>: Kí hiệu $C_n^k (1 \le k \le n, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Hay} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

3. <u>Tính chất:</u>

a) $C_n^0 = 1 = C_n^n; C_n^1 = n; n \in \mathbb{N}^*$

b) $C_n^k = C_n^{n-k}; \quad 0 \le k \le n$

c) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}; \quad 1 \le k < n$

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n; 0 \le k \le n$

B. BÀI TẬP

<u>Bài 2.1</u>. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 học sinh vào ngồi trong một cái bàn dài đủ chỗ ngồi.

<u>HD Giải</u>

Mỗi cách sắp xếp 4 học sinh vào 4 chỗ ngồi là hoán vị của 4 phần tử.
Vậy số cách sắp xếp là: P_n = 4! = 4.3.2.1 = 24 cách.

Bài 2.2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 người khách vào mười ghế kê thành một dãy ?

HD Giải

Mỗi cách sắp xếp chỗ ngồi của 10 khách theo hàng ngang cho một hoán vị của 10 và ngược lại.
Vậy có 10! cách sắp xếp

Bài 2.3. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từ các chữ số 1,2,3,4 ?

HD Giải

Trên tập nền $B = \{1;2;3;4\}$. Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$.

Để thành lập số gồm bốn chữ số đó ta cần xếp 4 chữ số của tập nền B vào 4 vị trí hàng nghìn a, hàng trăm b, hàng chục c và hàng đơn vị d. Vậy có tất cả: $P_4 = 4! = 24$ số thoả ycbt. (Dùng quy tắc đếm để giải bài này)

Bài 2.4. Có thể lập được bao nhiêu chữ số lẻ gồm năm chữ số khác nhau từ tập $B = \{0;1;2;3;4\}$

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}; a \neq 0; e \in \{1;3\}$. Ta xét hai trường hợp:

TH1. Dạng số: $\overline{abcd1}; a \neq 0$. Chọn $a \in \{2;3;4\}$ có 3 cách chọn, chọn $b,c,d \in \{0;2;3;4\} \setminus \{a\}$ thì số cách chọn là số cách sắp xếp ba số tuỳ ý của tập $\{0;2;3;4\} \setminus \{a\}$ vào nghìn b, hàng trăm c và hàng chục d. Nên có $P_3 = 3! = 6$ cách.

Vậy có :3.6 = 18 số dạng $\overline{abcd1}$

TH2, Dạng số $\overline{abcd3}; a \neq 0$ .Lí luận tương tự ta có 18 số dạng $\overline{abcd3}$

Tóm lại, ta có: 18 + 18 = 36 số thoả ycbt.

Bài 2.5. Trong một vòng loại Olympic, trên tám đường bơi, 8 vận động viên không cùng một lúc về đích. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hạng xảy ra ?

HD Giải

Tất cả 8 vận động viên đều về đích nhưng không cùng một lúc(không ai đến đích cùng với một người khác) trên 8 đường bơi, thì cách sắp xếp hạng 8 vận động viên là một hoán vị của 8 phần tử khi sắp xếp vào 8 vị trí (thứ hạng) phân biệt, không lặp.
Nên ta có: $P_8 = 8! = 40320$ kết quả.

Bài 2.6. Tính tổng S của tất cả các số gồm 4 chữ số khác nhau và số đã lập được từ nền $B = \{1;2;3;4\}$ bằng phép hoán vị ?

HD Giải

Phép hoán vị trên nền B cho ta thành lập các số gồm bốn số khác nhau là: $P_4 = 4! = 24$ số

Để ý rằng, tất cả các số đều viết dưới dạng cặp đôi như sau:

$\begin{cases}1234\\4321\end{cases};\begin{cases}1243\\4312\end{cases};\begin{cases}1423\\4132\end{cases};\begin{cases}1432\\4123\end{cases};\begin{cases}4123\\1432\end{cases};\begin{cases}2341\\3214\end{cases};\begin{cases}3241\\2314\end{cases};\begin{cases}3421\\2134\end{cases};\begin{cases}3124\\2431\end{cases};\begin{cases}2413\\3142\end{cases};\begin{cases}4213\\1342\end{cases};\begin{cases}4231\\1324\end{cases}$ có tổng tất cả 24 số, sắp xếp như trên từng cặp trong 12 cặp có tổng là 5555.

Vậy tổng S = 12.5555 = 66660.

Bài 2.7. Chứng minh rằng trên tập $B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ có thể lập thành được các số gồm bảy chữ số khác nhau mà tổng của chúng thì chia hết cho 720.

HD Giải

Phép hoán vị $P_7 = 7! = 5040$, cho ta số các số gồm 7 chữ số khác nhau thành lập được từ B. Để ý rằng trong 5040 số tìm được, ta luôn viết được: $\frac{5040}{2} = 2520$ cặp số có tổng là 8 888 888

Như $\begin{cases}1234567\\7654321\end{cases};\begin{cases}2134567\\6754321\end{cases};\begin{cases}3124567\\5764321\end{cases}$;....Nên tổng S của chúng là: S = 2520.8888888

Mà 720 = 90.8 và $\begin{cases}2520:90=28\\8888888:8=1111111\end{cases}$ .Vậy S chia hết cho 720 (thoả ycbt)

Bài 2.8. Có bao nhiêu cách xếp năm bạn học sinh A,B,C,D và E vào một chiếc ghế dài đủ năm chỗ ngồi sao cho:

a) Bạn C ngồi chính giữa?

b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

HD Giải

a) Xếp C ngồi chính giữa có 1(cách), Xếp A, B, D, E vào bốn chỗ còn lại có $P_4 = 4! = 24$ (cách). Vậy có tất cả là 24 cách xếp thoả ycbt.

b) Xếp A, E ngồi ở hai đầu ghế có 2! = 2 (cách), xếp B, C, D vào ba chỗ còn lại có 3! = 6 (cách). Vậy có tất cả là 2.6 = 12 cách thoả ycbt.

Bài 2.9. Trong một phòng học có hai bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi, nếu:

a) Tất cả các học sinh ngồi tuỳ ý ?

b) Tất cả học sinh nam ngồi một bàn và học sinh nữ ngồi một bàn?

HD Giải

a) Hai cái bàn và 10 ghế, nên khi xếp 10 học sinh ngồi tuỳ ý, đó là hoán vị của 10 học sinh ứng với 10 ghế. Vậy có $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ cách thoả ycbt.

b) Ta có: 5 ghế xếp cho 5 học sinh nam có: 5! cách xếp và 5 ghế xếp cho 5 học sinh nữ có : 5! cách xếp. Vậy hai cái bàn có: 2.(5!)(5!) = 28800 cách xếp thoả ycbt.

Bài 2.10. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau lấy từ 0; 2;3;6;9?

HD Giải

Tập nền $B = \{0;2;3;6;9\}$. Số chẵn là những số có tận cùng là 0; 2 và 6 từ tập nền B

- Nếu môt số có 5 chữ số tận cùng là 0 thì bốn chữ số đầu là hoán vị của 2; 3; 6 ;9. tacó $P_4 = 4!$ số như vậy.
- Nếu một số có 5 chữ số tận cùng là 2 thì bốn chữ số đầu là hoán vị của 0; 3; 6; 9 trong đó loại bỏ đi các hoán vị đầu là 0. Ta có: $P_4 = 4!$ Trong đó $P_3 = 3!$ hoán vị bắt đầu là 0. Vậy có 5 chữ số tận cùng là 2 là: $P_4 – P_3 = 4! – 3!$
- Tương tự cho 5 chữ số tận cùng là 6 là: $P_4 – P_3 = 4! – 3!$.

Tóm lại có tất cả là: 4! + 4! – 3! + 4! – 3! = 60 thoả ycbt.

Bài 2.11. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc.

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau ?

b) Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau ?

HD Giải

a) Cách xếp 10 học sinh thành một hàng dọc là: 10! = 3 628 800 cách

b) Giả sử học sinh nam xếp vào vi trị chẵn có: 5! (cách), học sinh nữ xếp váo vị trí lẻ có: 5! (cách). Sau đó đổi chỗ: chẵn cho nữ và lẻ cho nam nên có: 2!(cách)

Vậy có: 5!.5!.2! = 28800(cách)

Bài 2.12. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số khác nhau đôi một được lập bằng cách dùng bảy chữ số 1;2;3;4;5;7;9 sao cho 2 chữ số chẵn không nằm liền nhau ?

HD Giải

Các số có 7 chữ số lấy từ tập $B = \{1;2;3;4;5;7;9\}$ là một hoán vị của 7 phần tử.

Vậy số cần tìm là: $P_7 = 7!$ (số).

Các số có 7 chữ số mà 2 chữ số chẵn 2; 4 đứng kề nhau là: 2!.6! (số).

Vậy số thoả ycbt: 7! – 2!.6! = 3600(số)

Bài 2.13. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có An và Bình, vào 10 ghế kê thành hàng ngang, sao cho:

a) Hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau ?

b) Hai bạn An và Bình không ngồi cạnh nhau?

HD Giải

a) Có 2.9 = 18 cách xếp chỗ cho An và Bình ngồi cạnh nhau, 8 bạn kia được xếp vào 8 chỗ còn lại. Vậy có 8! Cách xếp 8 bạn còn lại và do đó có 18.8! cách xếp sao cho An và Bình ngồi cạnh nhau.

b) Có 10! Cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn. Từ đó có 10! – 18.8! = 72.8! cách xếp chỗ cho 10 bạn mà An và Bình không ngồi cạnh nhau.

Bài 2.14. Có 6 học sinh được xếp ngồi vào 6 chỗ đã ghi số thứ tự trên mặt bàn dài.

a) Tìm số cách sắp xếp 6 học sinh này ngồi vào bàn ?
b) Tìm số cách sắp xếp 6 học sinh này sao cho hai học sinh A và B không ngồi cạnh nhau?

HD Giải

a) Mỗi một cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 chỗ có ghi số thứ tự là một hoán vị 6 phần tử. Vậy số cách sắp xếp là: $P_6 = 6! = 720$(cách).
b) Mỗi một cách sắp xếp A và B hoặc B và A theo thứ tự đó ngồi cạnh nhau là một hoán vị của 5 phần tử. Vậy cách xếp A và B ngồi cạnh nhau là: $2.P_5 = 2.5!$(cách)
Vậy số cách sắp xếp cần tìm là: $720 – 2.5! = 480$(cách)

Bài 2.15. Từ ba đỉnh của tam giác ABC có thể lập được bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{O}$.

HD Giải

Hai điểm bất kì phân biệt xác định được hai vectơ khác vectơ $\vec{O}$. Từ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC thì không có điểm nào thẳng hàng và hai điểm tuỳ ý thì luôn phân biệt nhau. Do đó ta lấy hai điểm tuỳ ý trong ba điểm thì số vectơ lập được là chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử

Vậy: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3.2 = 6$ (vectơ)

Bài 2.16. Cho một đa giác lồi có 15 cạnh. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{O}$ với điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của đa giác ?

HD Giải

Đa giác lồi có 15 cạnh nên có 15 đỉnh , hai đỉnh thì luôn phân biệt nhau và cứ 3 đỉnh thì không thẳng hàng. Do đó ta lấy 2 điểm tuỳ ý trong 15 điểm thì số vectơ lập được là một chỉnh hợp chập 2 của 15 phần tử. Vậy số vectơ là: $A_{15}^2 = \frac{15!}{(15-2)!} = 15.14 = 210$ (vectơ)

Bài 2.17. Một câu lạc bộ Toán học lúc thành lập có 14 thành viên, cần bầu chọn ra một thành viên làm giám đốc CLB, một thành viên làm phó giám đốc CLB và một thành viên làm kế toán trưởng CLB. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để bầu mà không có ai kiêm nhiệm ?

HD Giải

Khi bầu chọn 3 thành viên trong 14 thành viên ra làm giám đốc, phó giàm đốc và kế toán trưởng ($k < n$) thì thứ tự cần đảm bảo.

Nên cách số cách chọn để bầu người không kiêm nhiệm là: $A_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!} = 2184$ (cách)

Bài 2.18. Có bao nhiêu số nguyên dương gồm 5 chữ số khác không và khác nhau đôi một?

HD Giải

Mỗi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_i \neq a_j; i \neq j$ và $a_i \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}, i = 1,...,5$. Như vậy ta có thể coi mỗi số dạng trên là một chỉnh hợp chập 5 của 9 chữ số. Vậy số cần tìm là:

$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15120$ (số)

Bài 2.19. Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

HD Giải

Vì bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ cắm hoa khác nhau nên mỗi lần chọn ra ba bông hoa để cắm vào ba lọ, ta có một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy số cách cắm hoa vào ba lọ khác nhau là:

$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ (cách)

Bài 2.20. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

HD Giải

Mắc nối tiếp 4 bóng đèn từ 6 bóng đèn khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Vậy số cách mắc là: $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ (cách)

Bài 2.21. Từ nền $B = \{0;1;3;5;7\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm ba chữ số khác nhau ?

HD✍Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abc}; a \neq 0$ và xét hai thường hợp

TH1. Chọn $a \in B \setminus \{0\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn

TH2. Chọn $b,c \in B \setminus \{a\}$ tương đương việc sắp xếp 2 chữ số tuỳ ý của $b,c \in B \setminus \{a\}$ vào hai vị trí còn lại (k < n và tình thứ tự phải đảm bảo) $\Rightarrow$ có $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$ cách chọn

Vậy số cần tìm là: 4.12 = 48 (số)

Cách khác: Số có nghĩa và không có nghĩa gồm ba chữ số lập được từ B là một chinh hợp chập 3 của 5 phần tử trong B. $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ (số). Số các số nghĩa: $\overline{0bc}$ cần loại bỏ đi tương đương việc sắp xếp $b,c \in \{1;3;5;7\}$ vào hai vị trí cò lại và tính thứ tự phải bảo đảm. Số đó là chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử: $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$ (số).

Vậy số cần tìm là: 60 – 12 = 48 số

Bài 2.22. Cho tập nền $B = \{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau ?

HD✍Giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}; a \neq 0; e \in \{0;2;4\}$ và $a,b,c,d \in \{0;1;2;3;4;5\}$. Xét các trường hợp:

TH1. Dạng số $\overline{abcd0}; a \neq 0$, Chọn $a,b,c,d \in \{1;2;3;4;5\}$ có $A_5^4 = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$ (số dạng $\overline{abcd0}$)

TH2. Dạng số $\overline{abcd2}; \overline{abcd4}; a \neq 0$. Chọn $a \in \{1;3;4;5\}$ *hay* $a \in \{1;2;3;5\}$ đều có 4 cách chọn, chọn $a,b,c,d \in \{1;2;3;4;5\}$ có $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$ số. Vậy số dạng $\overline{abcd2}; \overline{abcd4}; a \neq 0$ có 2.4.24 = 192(số)

Vậy số cần tìm là: 120 + 192 = 312 (số)

Bài 2.23. Với tập nền $B = \{0;1;2;3;4;5;6\}$, ta có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5 ?

HD✍Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcde}; a \neq 0; a,b,c,d,e \in B$. Số có 5 chữ số phải có mặt chữ số 5 ta xét các trường hợp:

TH1. Dạng $\overline{5bcde}$, chọn $b,c,d,e \in \{0;1;2;3;4;6\}$ có $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$ (số)

TH2. Dạng các $\overline{a5cde}\left(\overline{ab5de}; \overline{abc5e}; \overline{abcd5}\right); a \neq 0$. Chọn $a \in \{1;2;3;4;6\}$ có 5 cách chọn, chọn $b,c,d \in \{0;1;2;3;4;6\} \setminus \{a\}$ có $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ (số).

Có bốn số dạng trên nên có 4.60 =1200 (số)

Vậy có 360 + 1200 = 2560 số thoả ycbt.

Bài 2.24. Từ 7 chữ số 0;1;2;3;4;5;6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

HD✍Giải

Số cần tìm có dạng $\overline{abcde}; a \neq 0; a,b,c,d,e \in B = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ và là số chẵn.

TH1. Dạng $\overline{abcd0}$. Chọn $a,b,c,d \in \{1;2;3;4;5;6\}$ có $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$ số dạng $\overline{abcd0}$

TH2. Dạng các $\overline{abcd2}\left(\overline{abcd4};\overline{abcd6}\right); a \neq 0$. Chọn $a \in \{1;3;4;5;6\} \setminus \{e\}$ có 5 cách chọn, chọn

$b,c,d \in \{0;1;3;4;5;6\} \setminus \{a;e\}$ có $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ (số).

Vậy có 5. 60 = 300 số dạng $\overline{abcd2}$

Có ba số dạng trên nên có: 3.300 = 900 số

Tóm lại có: 360 + 900 = 1260 số thoả ycbt.

Bài 2.25. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 (chữ số hàng vạn khác 0)?

HD Giải

Số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 có dạng: $\overline{abcd0}; a \neq 0$ trong đó

$a,b,c,d \in B = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ do $a \neq 0$, khi đó ta có $A_9^4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = 3024$ số thoả ycbt.

Bài 2.26. Cho 6 chữ số 1;2;3;4;5;6. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

HD Giải

Số gồm bốn chữ số khác nhau có dạng $\overline{abcd}; a \neq 0$ trong đó

$a,b,c,d \in B = \{1;2;3;4;5;6\}$ nên ta có: $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$ (số).

Số $\overline{abcd}; a \neq 0$ chia hết cho 5 khi d = 5 và chọn $a,b,c \in \{1;2;3;4;6\}$ có

$A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ (số)

Bài 2.27. Từ tập nền $B = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ có thể lập được :

a) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau ?

b) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

HD Giải

a) Nếu kể cả trường hợp số 0 đứng đầu, thì ta có: A_7^5 số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau.

Trong A_7^5 các số đó gồm có A_6^4 số gồm 5 chữ số mà chữ số 0 đứng đầu. Vậy số gồm 5 chữ số khác nhau lập từ tập nền B là: $A_7^5 - A_6^4 = 2160$ (số)

b) Xem bài 2.22

Bài 2.28. Xét các chữ số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là 2,3,4,5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu:

a) 5 chữ số 1 được xếp kề nhau ?

b) Các chữ số được xếp tuỳ ý ?

HD Giải

a) Gọi nhóm 11111 là số a. Bài toán yêu cầu ta cần sắp xếp năm số : a,2,3,4,5 vào 5 vị trí khác nhau. Số cách sắp xếp là: $P_5 = 5! = 120$ số thoả ycbt.

b) Lập một số có 9 chữ số thoả mãn yêu cầu, thực chất là việc xếp bốn số 2,3,4,5 vào 4 vị trí tuỳ ý trong 9 vị trí, còn 5 vị trí còn lại thì chữ số 1 lặp 5 lần.

Vậy có: $A_9^4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = 3024$ số thoả ycbt.

Bài 2.29. Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau ?

HD Giải

Kết quả của sự phân công là một nhóm gồm ba bạn, tức là một tổ hợp chập 3 của 10 ban. Vậy số cách phân công là: $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ (cách)

Bài 2.30. Trong mặt phẳng có 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau đồng thời cắt 6 đường thẳng đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên bởi 14 đường thẳng đã cho ?

HD Giải

Gọi A và B lần lượt là tập hợp 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng song song cắt 6 đường thẳng đã cho. Mỗi hình bình hành được tạo bởi hai đường thẳng của tập A và hai đường thẳng của tập B. Vậy số hình bình hành cần tìm là: $C_6^2.C_8^2 = 15.28 = 420$ (hình)

Bài 2.31. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của chúng thuộc tập hợp gồm 10 điểm nằm trên đường tròn?

HD Giải

Cứ ba điểm dựng được một tam giác. Vậy có thể dựng được $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ tam giác.

Bài 2.32. Một đa giác lồi 20 cạnh có bao nhiêu đường chéo ?

HD Giải

Số đoạn nối hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{20}^2, số cạnh của đa giác là 20. Vậy số đường chéo cần tìm là: $C_{20}^2 - 20 = 170$ đường chéo

Bài 2.33. Một nhóm có 10 học sinh, dự định bầu ra một ban đại diện gồm 3 người.
a) Có bao nhiêu cách bầu như dự định ?
b) Có bao nhiêu cách bầu như dự định, nhưng bắt buộc trong mỗi cách bầu phải có mặt nhóm trưởng ?

HD Giải

a) Chọn ra ba học sinh (k = 3 trong 10 học sinh đại diện n =10) để có được một cách bầu (không tính thứ tự). Nên số cách bầu là: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ (cách).

b) Để ý mỗi cách bầu 3 đại diện trong đó phải có mặt nhóm trưởng, tương đương việc chọn 2 đại diện trong 9 người (không có nhóm trưởng). Nên số cách bầu là: $C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36$ (cách)

Bài 2.34. Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên đó ?

HD Giải

Số cách chọn 3 em biết tiếng Anh là: $m_1 = C_8^3 = 56$ cách

Số cách chọn 4 em biết tiếng Pháp là : $m_2 = C_7^4 = 35$ cách

Số cách chọn 2 em biết tiếng Đức là : $m_3 = C_5^2 = 10$ cách

Vậy số cách lập một nhóm đi thực tế là: $M = m_1.m_2.m_3 = 19600$(cách)

Bài 2.35. Một tổ gồm có 8 nam và 6 nữ. Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

HD Giải

Có $m_1 = C_6^2 = 15$ cách chọn 2 nữ và có $m_2 = C_8^3 = 56$ cách chọn 3 nam.

Vậy có tất cả: $M = m_1.m_2 = 15.56 = 840$ cách chọn thoả ycbt.

Bài 2.36. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2.

HD Giải

Trên d_1 có 17 điểm phân biệt, như vậy số đoạn thẳng nối hai đầu mút là 2 trong 17 điểm đó là: $C_{17}^2 = 136$(đoạn thẳng)

Tương tự: có $C_{20}^2 = 190$(đoạn thẳng với đầu mút) là 2 trong 20 điểm cho trên d_2.

Xét một điểm đã cho trong 17 điểm trên d_1, ứng với mỗi đoạn gồm 2 điểm trong 20 điểm trên d_2 ta được một tam giác. Nên có 17.190 = 3230 tam giác với 2 đỉnh trên d_2, 1 đỉnh trên d_1

Tương tự như vậy có 20 . 136 = 2720 tam giác với 2 đỉnh trên d_1, 1 đỉnh trên d_2.

Vậy có : 3230 + 2720 = 5950 tam giác thoả ycbt.

Bài 2.37. Trên một mặt phẳng, 9 đường thẳng song song cắt 10 đường thẳng song song khác thì tạo nên bao nhiêu hình bình hành trên mặt phẳng đó ?

HD✍Giải

Gọi A và B lần lượt là tập hợp 9 đường thẳng song song với nhau và 10 đường thẳng song song cắt 9 đường thẳng đã cho. Mỗi hình bình hành được tạo bởi hai đường thẳng của tập A và hai đường thẳng của tập B. Vậy số hình bình hành cần tìm là: $C_9^2.C_{10}^2 = 36.46 = 1620$ (hình)

Bài 2.38. Một tổ có 7 nam sinh và 4 nữ sinh. Giáo viên cần chọn 3 học sinh xếp bàn ghế của lớp, trong đó có ít nhất 1 nam sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

HD✍Giải

Số cách chọn 3 học sinh xếp bàn ghế của lớp, trong đó có ít nhất 1 nam sinh là: $C_4^2.C_7^1 + C_4^1.C_7^2 + C_7^3 = 161$ (cách)

Bài 2.39. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lý nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ. Cần có cả nhà Toán học và nhà Vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách lập ?

HD✍Giải

Để ý giả thiết yều cầu có cả nam và nữ, có cả nhà Toán học và nhà Vật lý. Nên trong đoàn công tác cần phải có 1 nhà Vật lý luôn là Nam và 1 nhà Toán học nữ. Lúc đó người thứ ba có thể là: nhà Toán học nam hoặc nhà Vật lý nam hoặc nhà toán học nữ.

Vậy có: $C_5^1.C_3^1.C_4^1 + C_3^2.C_4^1 + C_3^1.C_4^2 = 90$ cách chọn thoả ycbt.

Bài 2.40. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0)?

HD✍Giải

Số cần tìm có dạng $\overline{abcdef}$, với a,b,c,d,e,f thuộc vào một trong hai nhóm .

TH1. Nhóm chữ số chẵn và lẻ: $\{0;2;4;6;8\};\{1;3;5;7;9\}$. Lấy 3 chữ số lẻ trong 5 số lẻ có: $C_5^3 = 10$ cách.

Lấy 3 chữ số chẵn trong 5 chữ số chẵn có: $C_5^3 = 10$ cách. Do mỗi nhóm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ khác nhau tạo được nên có 6! = 720 số có 6 chữ số (kể cả a = 0)

Vậy có: 10.10.720 = 72000số 6 chữ số khác nhau, trong đó 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (kể cả a = 0)

TH2. Khi a = 0. Lấy 3 chữ số lẻ trong 5 số lẻ có: $C_5^3 = 10$ cách. Lấy 2 chữ số chẵn trong 4 chữ số chẵn có: $C_4^2 = 6$ cách. Do mỗi nhóm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ khác nhau tạo được nên có 5! = 120 số

Vậy có: 10.6.120 = 7200số 6 chữ số khác nhau, trong đó 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn và số đầu tiên bằng 0.

Tóm lại có 72000 – 7200 = 64800 số lập được thoả ycbt.

Bài 2.41. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của chúng là các đỉnh của thập giác?

HD✍Giải

Mỗi tam giác được tạo bởi một tập hợp 3 đỉnh của thập giác và ngược lại. Như vậy, số tam giác bằng số các tổ hợp chập 3 của 10 đỉnh, tức là bằng : $C_{10}^3 = 120$

Bài 2.42. Có bao nhiêu đường chéo của thập giác ?

HD✍Giải

Từ 10 đỉnh của thập giác có thể kẻ được $C_{10}^2 = 45$ đoạn thẳng trong đó có 10 cạnh của thập giác.

Vậy ta có: 45 – 10 = 35 (đường chéo)

Bài 2.43. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn bốn học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

HD✍Giải

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C có 1 học sinh. Số cách chọn: $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$
- Lớp B có 2 học sinh, các lớp C, A có 1 học sinh. Số cách chọn: $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$
- Lớp C có 2 học sinh, các lớp B, A có 1 học sinh. Số cách chọn: $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$

Số cách chọn học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là: 120 + 90 + 60 = 270
Vậy số cách chọn cần tìm là: 495 – 270 = 225.

Bài 2.44. Chứng minh rằng $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_{n}^{k}}$ (n, k là số nguên dương, $k\le n$)

HD Giải

Ta có

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n+2}.\frac{k!(n+1-k)!+(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}[(n+1-k)+(k+1)]=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_{n}^{k}}$$

Bài 2.45. Tìm giá trị của biểu thức $M=\frac{A_{n+1}^{4}+3A_{n}^{3}}{(n+1)!}$. Biết rằng $C_{n+1}^{2}+2C_{n+2}^{2}+2C_{n+3}^{2}+C_{n+4}^{2}=149$

HD Giải

Điều kiện $n\ge 3, n\in\mathbb{N}$. Ta có $C_{n+1}^{2}+2C_{n+2}^{2}+2C_{n+3}^{2}+C_{n+4}^{2}=149\Leftrightarrow n^2+4n-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\n=-9\end{array}\right.$

Nhận n = 5 và $M=\frac{A_{6}^{4}+3A_{5}^{3}}{6!}=\frac{3}{4}$

Bài 2.46. Chứng minh rằng với $4\le k\le n, k, n\in\mathbb{Z}^{+}$ ta có:
$C_{n}^{k}+4C_{n}^{k-1}+6C_{n}^{k-2}+4C_{n}^{k-3}+C_{n}^{k-4}=C_{n+4}^{k}$

HD Giải

Sử dụng PP nhóm các hạng tử thích hợp và sử dụng hằng đẳng thức Pa-xcan.

$$\text{VT}=\left(C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}\right)+3\left(C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k-2}\right)+3\left(C_{n}^{k-2}+C_{n}^{k-3}\right)+\left(C_{n}^{k-3}+C_{n}^{k-4}\right)$$

$$=C_{n+1}^{k}+3C_{n+1}^{k-1}+3C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}$$

$$=\left(C_{n+1}^{k}+C_{n+1}^{k-1}\right)+2\left(C_{n+}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}\right)+\left(C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}\right)$$

$$=C_{n+2}^{k}+2C_{n+2}^{k-1}+C_{n+2}^{k-2}$$

$$=\left(C_{n+2}^{k}+C_{n+2}^{k-1}\right)+\left(C_{n+2}^{k-1}+C_{n+2}^{k-2}\right)$$

$$=C_{n+3}^{k}+C_{n+3}^{k-1}=C_{n+4}^{k}=VP$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2.47. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu một quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ? (Đs: 1260 cách)
Bài 2.48. Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm bốn điểm phân biệt ? (Đs: 16 tập con)
Bài 2.49. Trong một đa giác đều bảy cạnh, kẻ các đường chéo. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo, trừ các đỉnh ? (Đs: 35 giao điểm)
Bài 2.50. Tìm các số nguyên dương gồm năm chữ số sao cho mỗi chữ số của số đó lớn hơn chữ số ở bên phải của nó.(Đs: 252 số)
Bài 2.51. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam ngồi vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

a) Ghế sắp thành hàng ngang ? (Đs: $4!.C_{7}^{4}$ cách)

b) Ghế sắp quanh một bàn tròn ?(Đs: $5!.A_{6}^{4}$ cách)

Bài 2.52. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A=\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right)$ (Đs: $A=\frac{2}{3}$)

b. $B=\frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}$ (Đs: B = 46)

c. $C=P_1A_2^1+P_2A_3^2+P_3A_4^3+P_4A_5^4-P_1P_2P_3P_4$ (Đs: C = 2750)

d. $D=\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right).A_5^2$ (Đs: D = 42)

e. $E=\frac{A_6^4+A_5^4}{A_4^4}$ (Đs: E = 20)

f. $F=\frac{\frac{1}{3}C_6^2-\frac{1}{3}C_8^3+\frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3A_5^3}$ (Đs: $F=\frac{1}{36}$)

g. $G=\frac{C_{100}^{98}+C_{1000}^{998}}{C_{1000}^2+C_{100}^2}$ (Đs: G = 1)

h. $H=C_5^3C_4^2+C_4^2C_3^1+C_3^1C_3^0$ (Đs: H = 81)

Bài 2.53. Chứng minh rằng:

a) $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$

b) CMR: với $1\le k\le n$ ta có: $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_{n-1}^k+...+C_{k+1}^k+C_k^k$

HD: Ta có:

$C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$

$C_n^{k+1}=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k+1}$ => đpcm

....

$C_{k+2}^{k+1}=C_{k+1}^k+C_{k+1}^{k+1}$

Bài 2.54. Giải các phương trình sau: $(x,n\in\mathbb{N})$

a) $2A_x^2+50=A_{2x}^2; x\in\mathbb{N}$ (Đs: x = 5)

b) $\frac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\frac{1}{6}$ (Đs: x = 2 v x = 3)

c) $P_{x+3}=720A_x^5.P_{x-5}$ (Đs: x = 7)

d) $A_n^3+3A_n^2=\frac{1}{2}P_{n+1}$ (Đs: n = 4)

e) $A_x^2.C_x^{x-1}=48$ (ĐK: $x\ge 1$, Đs: x = 4)

f) $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$ (ĐK: C_x^4 có nghĩa $0\le x\le 4\Rightarrow x=2$ là nghiệm)

Bài 2.55. Giải các phương trình sau:

a) $C_{14}^k+C_{14}^{k+2}=2C_{14}^{k+1}$ (ĐK: $0\le k\le 12; k\in\mathbb{N}$, Đs: k = 4 v k = 8)

b) $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$ (ĐK: $x\ge 3, x\in\mathbb{N}$, Đs: x = 7)

c) $C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+C_x^{x-3}+...+C_x^{x-10}=1023$ (ĐK: $x\ge 10, x\in\mathbb{N}$, x = 10)

d) $C_{x+1}^y:C_x^{y+1}:C_x^{y-1}=6:5:2$ (Đs: x = 8, y = 3)

e) $\left(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1$ (Đs: x = 7, y = 3)

Bài 2.56. Chứng minh rằng:

a. $k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

b. $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k$

c. $2C_n^k+5C_n^{k+1}+4C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+2}^{k+2}+C_{n+3}^{k+3}$

d. $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k; (3 \le k \le n; n \in \mathbb{N}^*)$

e. $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k; (4 \le k \le n; n \in \mathbb{N}^*)$

(HD: Áp dụng công thức biến đổi $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}; 0 \le k \le n$)

Bài 2.57. Giải các phương trình sau

a) $2A_{x+2}^2 - 3C_{x+1}^{x-1} = 30$ b) $3C_x^3 - A_{x+1}^2 = 18$ c) $C_x^2 + C_x^3 = 4C_x^4$

c) $C_{x+1}^{x-1} + A_{x+1}^2 = 100$ d) $A_x^3 + 2C_x^{x-2} = 9x$ g) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Công thức nhị thức Niu-Tơn

Với hai số thực a và b tuỳ ý và với mọi số n nguyên dương ta có

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

(1) gọi là công thức khai triển nhị thức Niu-tơn.

2. Tính chất của nhị thức Niu-tơn
   a) Số các số hạng tử của công thức là $n + 1$
   b) Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng từ 0 đến n đồng thời tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử đều bằng n
   c) Số hạng tổng quát của công thức có dạng $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k; (k = 0, 1, \ldots, n)$
   d) Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}; 0 \le k \le n$
3. Một số dạng đặc biệt

   Dạng 1. Thay a = 1 và b = x vào (1), ta được:

   $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n (2)$ và cho $x = 1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

   Dạng 2. Thay a = 1, b = - x vào (1), ta được:

   $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k x^k + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n \quad (3)$

   và thay $x = 1 \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Khai triển $(b+a)^6$ thành tổng các đơn thức?

HD Giải

Theo công thức khai triển Nhị thức Niu-tơn, ta có:

$$(b+a)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 ab^5 + C_6^6 b^6$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Bài 3.2. Khai triển $(x-a)^5$ thành tổng các đơn thức?

HD Giải

Theo công thức Nhị thức Niu-tơn, ta có:

$$(x-a)^5 = \left[x+(-a)\right]^5 = x^5 + 5x^4(-a) + 10x^3(-a)^2 + 10x^2(-a)^3 + 5x(-a)^4 + (-a)^5$$

$$= x^5 - 5x^4 a + 10x^3 a^2 - 10x^2 a^3 + 5xa^4 - a^5$$

Bài 3.3. Với n là số nguyên dương, chứng minh các hệ thức sau:

a) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$

b) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$

HD Giải

a) Ta có $\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (1).

Chọn x = 1 thay vào (1), ta được: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$

b) Ta có $\left(1+x\right)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (2)

Chọn x = -1, thay vào (2), ta được: $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 x^2 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Suy ra: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$

Hoặc ta có thể chứng minh theo nhận xét từ công thức khai triển nhị thức Niu-tơn.

Bài 3.4. Chứng minh rằng: $4^nC_n^0-4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2-\ldots+(-1)C_n^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$

HD Giải

Ta có: $\left(a+b\right)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n$

Nhận xét VT = $4^nC_n^0-4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2-\ldots+(-1)C_n^n=(4-1)^n=3^n$

Nhận xét $VP=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=(1+2)^n=3^n$

Suy ra: $4^nC_n^0-4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2-\ldots+(-1)C_n^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$

Bài 3.5. Cho tập A là một tập hợp có 20 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con của tập A?

HD Giải

Số tập con của A không có phần tử nào là C_{20}^0

Số tập con của A có một phần tử là C_{20}^1

Số tập con của A có 2 phần tử là C_{20}^2

…………………………………………………….

Số tập con của A có 20 phần tử là C_{20}^{20}

Suy ra, tổng số tập con của A là: $C_{20}^0+C_{20}^1+C_{20}^2+\ldots+C_{20}^{20}=2^{20}$

Bài 3.6. Tính tổng:

a) $A=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$

b) $B=C_6^0+3C_6^1+3^2C_6^2+3^3C_6^3+\ldots+3^6C_6^6$

c) $C=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$

d) $D=C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$

HD Giải

a) $A=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(1+1)^5=2^5$

b) $B=C_6^0+3C_6^1+3^2C_6^2+3^3C_6^3+\ldots+3^6C_6^6=(1+3)^6=4^6$

c) $C=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=(1+2)^n=3^n$

d) Áp dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}$

Khi đó $D=C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}=C_{11}^5+C_{11}^4+C_{11}^3+C_{11}^2+C_{11}^1+C_{11}^0$

Do đó: $2D=C_{11}^0+C_{11}^1+C_{11}^2+\ldots+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}=(1+1)^{11}=2048\Rightarrow D=1024$

Bài 3.7. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=C_{2009}^0+C_{2009}^1+C_{2009}^2+\ldots+C_{2009}^{2009}$

b) $B=C_{2009}^0-C_{2009}^1+C_{2009}^2-\ldots+(-1)^{2009}C_{2009}^{2009}$

c) $C=C_{2009}^0+2C_{2009}^1+2^2C_{2009}^2+\ldots+2^{2009}C_{2009}^{2009}$

d) $D=3C_{2009}^0+3^2C_{2009}^1+3^3C_{2009}^2+\ldots+3^{2010}C_{2009}^{2009}$

HD Giải

Ta có: $\left(1+x\right)^{2009}=C_{2009}^0+C_{2009}^1x+C_{2009}^2x^2+\ldots+C_{2009}^{2009-1}x^{2009-1}+C_{2009}^{2009}x^{2009}(1)$

a) Chọn x = 1 thay vào (1), ta được: $A=C_{2009}^0+C_{2009}^1+C_{2009}^2+\ldots+C_{2009}^{2009}=(1+1)^{2009}=2^{2009}$

b) Chọn x = -1 thay vào (1), ta được: $B=C_{2009}^0-C_{2009}^1+C_{2009}^2-\ldots+(-1)^{2009}C_{2009}^{2009}=(1-1)^{2009}=0$

c) Chọn x = 2, thay vào (1), ta được: $C=C_{2009}^0+2C_{2009}^1+2^2C_{2009}^2+\ldots+2^{2009}C_{2009}^{2009}=(1+2)^{2009}=3^{2009}$

d) $D=3\left(C_{2009}^0+3C_{2009}^1+3^2C_{2009}^2+\ldots+3^{2009}C_{2009}^{2009}\right)$ và chọn x = 3 thay vào (1), ta được:

$$D=3\left(C_{2009}^0+3C_{2009}^1+3^2C_{2009}^2+\ldots+3^{2009}C_{2009}^{2009}\right)=3(1+3)^{2009}=3.4^{2009}$$

Bài 3.8. Tính:

a) $A=1-10C_{2n}^1+10^2C_{2n}^2-10^3C_{2n}^3+\ldots-10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+10^{2n}$

b) $B=3^{17}C_{17}^0-4.3^{16}C_{17}^1+4^2.3^{15}C_{17}^2-4^3.3^{14}C_{17}^3+\ldots-4^{17}C_{17}^{17}$

HD✍Giải

a) $A = 1 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - 10^3 C_{2n}^3 + \ldots - 10^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}$

$= C_{2n}^0 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - 10^3 C_{2n}^3 + \ldots - 10^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} 10^{2n} = (1-10)^{2n} = 81^n$

b) $B = 3^{17} C_{17}^0 - 4.3^{16} C_{17}^1 + 4^2.3^{15} C_{17}^2 - 4^3.3^{14} C_{17}^3 + \ldots - 4^{17} C_{17}^{17} = (3-4)^{17} = -1$

Bài 3.9. Cho khai triển $\left(1+2x\right)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Tìm số hạng thứ 5 trong khai triển đó, biết rằng $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 729$

HD✍Giải

Ta có: $\left(1+2x\right)^n = C_n^0 + 2C_n^1 x + 2^2 C_n^2 x^2 + \ldots + 2^n C_n^n x^n$

Theo giả thiết, ta có: $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 729 \Leftrightarrow (1+2)^n = 729 \Leftrightarrow n = 6$

Số hạng thứ 5 là: $T_5 = C_6^5 2^4 x^4$

Bài 3.10. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$.

HD✍Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là: ($0 \le k \le 6$)

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_6^k (2x)^{6-k}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_6^k.2^{6-k}.(-1)^k x^{6-3k}$$

Số hạng không chứa x là (ta phải tìm k): 6 – 3k = 0, nhận k = 2.

Vậy số hạng cần tìm là: $T_3 = C_6^2 2^{6-2}(-1)^2 = 240$

Bài. 3.11. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$.

HD✍Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là: ($0 \le k \le 18$) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{18}^k (x^3)^{18-k}.\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^k = C_{18}^k.x^{54-6k}$

Nếu T_{k+1} không chứ x (độc lập với x) thì ta có: 54 – 6k = 0, nhận k = 9. Vậy số hạng cần tìm là: $T_{10} = C_{18}^9$

Bài 3.12. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(1 + x)^{12}$?

HD✍Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là: ($0 \le k \le 12$)

$T_{k+1} = C_{12}^k (1)^{12-k} x^k = C_{12}^k x^k$. Ta cần hệ số của x^5 nên ta có: k = 5.

Vậy hệ số cần tìm là: $T_6 = C_{12}^5 = 729$

Bài 3.13. Biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1 + 3x)^n$ là 90. Hãy tìm n ?

HD✍Giải

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển nhị thức : $T_{k+1} = C_n^k (3x)^k$ .Vậy số hạng chứa x^2 là $T_3 = C_n^2 9.x^2$ và theo đề bài ta có: $C_n^2 9 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow n = 5$

Bài 3.14. Tìm số hạng thứ năm trong khai triển $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^{10}$, mà khai triển đó số mũ của x giảm dần.

HD✍Giải

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển nhị thức : $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k}\left(\dfrac{2}{x}\right)^k$ .Tìm số hạng thứ năm. Vậy ta có:

$$T_5 = C_{10}^4 x^{10-4}\left(\frac{2}{x}\right)^4 = 210.x^6.\frac{16}{x^4} = 3360x^2$$

Bài 3.15, Trong khai triển của $\left(1+ax\right)^n$ ta có số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là 24*x*, số hạng thứ ba là $252x^2$. Hãy tìm a và n.

HD Giải

Ta có: $\left(1+ax\right)^n = 1 + C_n^1 ax + C_n^2 a^2x^2 + \dots$

Theo đề bài cho: $\begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^1 a^2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)a^2}{2} = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = 24 \\ (n-1)a = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ n = 8 \end{cases}$

Bài 3.16. Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(x + y)^{25}$.

HD Giải

Số hạng thứ *k* + 1 trong khai triển nhị thức : $T_{k+1} = C_{25}^k x^{25-k} y^k$. Hệ số $x^{12}y^{13}$ ứng k = 13.

Tức là: $C_{25}^{13} = 5200300$

Bài 3.17. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3 + xy\right)^{25}$

HD Giải

Số hạng thứ *k* + 1 trong khai triển nhị thức : $T_{k+1} = C_{15}^k (x^3)^{15-k}(xy)^k = C_{15}^k x^{45-2k} y^k$.

Hệ số $x^{25}y^{10}$, ứng *k* = 10. Tức là: $C_{15}^{10} = 3003$

Bài 3.18. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

HD Giải

Theo hằng đẳng thức Pa-xcan ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = C_{n+3}^{n+1} = \dfrac{(n+3)!}{(n+1)!2!} = \dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$. Suy ra $(n+3)(n+2) = 14(n+3) \Rightarrow n = 12$

Số hạng thứ k trong khai triển của biểu thức đã cho là $T_{k+1} = C_{12}^k x^{-3(12-k)}.x^{\frac{5k}{2}}$. Hệ số của số hạng thứ x^8, tương ứng $-3(12-k) + \dfrac{5k}{2} = 8 \Rightarrow k = 8$. Vậy số hạng cần tìm là : $C_{12}^8.x^8$

Bài 3.19. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x\left(1-2x\right)^5 + x^2\left(1+3x\right)^{10}$

HD Giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x\left(1-2x\right)^5$ là $(-2)^4.C_5^4$

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2\left(1+3x\right)^{10}$ là $3^3.C_{10}^3$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x\left(1-2x\right)^5 + x^2\left(1+3x\right)^{10}$ là $(-2)^4.C_5^4 + 3^3.C_{10}^3 = 3320$

Bài 3.20. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(2+x\right)^n$, biết: $3^nC_n^n - 3^{n-1}C_n^{n-1} + 3^{n-2}C_n^{n-2} - 3^{n-3}C_n^{n-3} + \dots + (-1)^nC_n^n = 2048$

HD Giải

Ta có: $3^nC_n^n - 3^{n-1}C_n^{n-1} + 3^{n-2}C_n^{n-2} - 3^{n-3}C_n^{n-3} + \dots + (-1)^nC_n^n = (3-1)^n = 2^n$. Nên $2^n = 2048 \Rightarrow n = 11$. Hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(2+x\right)^{11}$ là $C_{11}^{10}2^1 = 22$

Bài 3.21. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thừc Niu-tơn của $\left(2x + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$,$(x > 0)$

HD Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển Niu-tơn của $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$ là

$T_{k+1}=C_{18}^{15}\left(2x\right)^{18-k}.\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{k}=C_{18}^{k}.2^{18-k}.x^{18-\frac{6k}{5}}$. Số hạng không chứa x ứng với k thảo mãn:

$18-\frac{6k}{5}=0\Leftrightarrow k=15$. Vậy số hạng cần tìm là $T_{16}=C_{18}^{15}.2^{3}=6528$

Bài 3.22. Cho khai triển nhị thức Niu-tơn sau: $\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$

a) Tìm số hạng thứ 4, thứ 5 của khai triển
b) Tìm số hạng chứa với số mũ tự nhiên

HD Giải

Ta có, số hạng tổng quát thứk + 1 của khai triển $T_{k+1}=C_{13}^{k}\left(x\right)^{13-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}$, $k\in\mathbb{N},0\le k\le 13$

$T_{k+1}=C_{13}^{k}.x^{\frac{39-4k}{3}}$

a) Số hạng thứ 4 của khai triển là: $T_4=C_{13}^{3}.x^{9}$

Số hạng thứ 5 của khai triển là: $T_5=C_{13}^{4}.x^{\frac{23}{3}}$

b) Để T_{k+1} chứa x với số mũ tự nhiên thì:

$$\frac{39-4k}{3}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\begin{cases}(39-4k)\,\vdots\,3\\ 0\le k\le\frac{39}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4k\,\vdots\,3\\ 0\le k\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\,\vdots\,3\\ 0\le k\le 9\end{cases}\Rightarrow k=0,3,6,9$$

Do đó các số hạng cần tìm là: $T_1=C_{13}^{0}.x^{13};T_4=C_{13}^{3}.x^{9};T_7=C_{13}^{6}.x^{5};T_{10}=C_{13}^{9}.x$

Bài 3.23.

a) Tìm số hạng của khai triển nhị thức Niu-tơn sau: $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{9}$ là một số nguyên

b) Tính A_n^2 nếu biết số hạng thứ 6 của khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{n}$ không phụ thuộc vào *x*.

HD Giải

a) Số hạng thứ k + 1 của khai triển: $T_{k+1}=C_9^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{k}=C_9^{k}.3^{\frac{9-k}{2}}.2^{\frac{k}{3}}$, $k\in\mathbb{Z},0\le k\le 9$

Để T_{k+1} là số nguyên thì $\frac{9-k}{2}\in\mathbb{Z}$ và $\frac{k}{3}\in\mathbb{Z}$. Suy ra $\begin{cases}k=1,3,5,7,9\\ k=0,3,6,9\end{cases}$. Vậy: k = 3 và k = 9.

Với k = 3, số hạng cần tìm là $T_4=C_9^{3}.3^{3}.2=4536$

Với k = 9, số hạng cần tìm là $T_{10}=C_9^{9}.3^{0}.2^{3}=8$

b) Số hạng thứ 6 của khai triển là: $T_6=C_n^{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-5}\left(\frac{1}{x}\right)^{5}=C_9^{5}.x^{\frac{n-20}{3}}$

Vì T_6 không phụ thuộc vào x nên $\frac{n-20}{3}=0\Rightarrow n=20$. Vậy : $A_n^2=A_{20}^2=380$

Bài 3.24. Cho đa giác đều có 2n cạnh $A_1A_2...A_{2n}$ ($n\ge 2$, n nguyên) nội tiếp trong một đường tròn. Biết rằng số tam giác có 3 đỉnh lấy trong 2n điểm $A_1,A_2,...,A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có 4 đỉnh lấy trong $2n$ điểm $A_1,A_2,...,A_{2n}$. Tìm n.

HD Giải

Số tam giác thoả mãn ycbt là C_{2n}^3 tam giác. Số đường chéo qua tâm đường tròn là *n*, cứ hai đường chéo qua tâm thì có 1 hình chữ nhật. Suy ra, có C_n^2 hình chữ nhật

Từ đó ta có phương trình $C_{2n}^3 = 20.C_n^2$. Suy ra $n = 8$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3.25. Tính hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x-3y)^{200}$. (Đs: $-C_{200}^{101}2^{101}3^{99}$)

Bài 3.26. Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x+y)^{13}$. (Đs: 1287)

Bài 3.27. Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^{11}$. (Đs: 330)

Bài 3.28. Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(2-x)^9$. (Đs: - 94 595072)

Bài 3.29. Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(3-2x)^{15}$. (Đs: $-C_{15}^7 3^8 2^7$)

Bài 3.30. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(1-2x)^{10}$? (Đs: 8064)

Bài 3.31. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{11}$? (Đs: 330)

Bài 3.32. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm *n*.(Đs: n = 32)

Bài 3.33. Tính hệ số của x^8y^9 trong khai triển $(3x+2y)^{17}$. (Đs: $C_{17}^8 3^8 2^9$)

Bài 3.34. Biết tổng các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ là 64. Tìm số hạng của khai triển không chứa x. (ĐS: $n = 2$, $k = 2$; $T_3 = C_6^2$)

Bài 3.35. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển nhị thức $\left(x^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ bằng 36. Tính số hạng thứ 7. $\left(\text{ĐS}: n=9, T_7 = C_9^6\left(x^2\sqrt{x}\right)^3.\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^6 = 84x^3\sqrt{x}\right)$

§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ - XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Biến cố

a. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Kết quả của nó không đoán được
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xãy ra của phép thử đó
- Phép thử thường được kí hiệu bởi **T**

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xãy ra của phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga). Ta chỉ xét các phép thử với không gian mẫu Ω là tập hữu hạn.

b. Biến cố

- Với tập con *A* của Ω được gọi là một biến cố.
- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho *A* xảy ra, được gọi là kết quả thuận lợi cho *A*
- Tập hợp các kết qủa thuận lợi cho *A* được kí hiệu là Ω_A. Khi đó ta nói biến cố *A* được mô tả bởi tập Ω_A.
- Tập $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể (gọi tắt là biến cố không). Còn tập Ω được gọi là biến cố chắc chắn.

2. Xác suất của biến cố.

a. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là tập hữu hạn và các kết qủa của T là đồng khả năng xảy ra. Nếu *A* là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập các kết quả thuận lợi cho *A* thì xác suất của *A* là một số, kí hiệu là *P*(*A*), được xác định bởi công thức $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$

b. Định nghĩa thống kê của xác suất.

- Số lần xuất hiện biến cố *A* được gọi là tận số của *A* trong *N* lần thực hiện phép thử T
- Tỉ số giữa tận số của *A* với số *N* được gọi là tần xuất của *A* trong *N* lần thực hiện phép thử T

Phương pháp tính xác suất

Bước 1. Mô tả không gian mẫu. Kiểm tra tính hữu hạn của Ω, tính đồng khả năng của các kết quả

Bước 2. Đặt tên cho các biến cố bằng các chữ cái $A, B, \ldots$

Bước 3. Xác định các tập con $A, B, \ldots$ của không gian mẫu. Tính $n(A), n(B), \ldots$

Bước 4. Tính $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}, \ldots$

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tìm xác suất để thẻ được lấy ghi số:

a) Chẵn b) Chia hết cho 3 c) Lẻ và chia hết cho 3

HD Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}, n(\Omega) = 20$. Kí hiệu A, B, C là các biến cố tương ứng với câu a), b), c)

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}, n(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}$

c) $C = \{3,9,15\}, n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{20}$

Bài 4.2. Một con súc sắc cân đối đồng chất được gieo hai lần. Tính xác suất sao cho:
a) *A*: "Tổng số chấm của hai lần gieo là 6"
b) *B*: "Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt một chấm"
c) *C*: "Số chấm trong hai lần gieo bằng nhau"
d) *D*: "Tổng số chấm của hai lần gieo là 8"
e) *E*: "Tổng số chấm của hai lần gieo là chẵn"

HD Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{(i;j)/1 \le i; j \le 6\}, n(\Omega) = 36$

a) $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{36}$

b) $B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}, n(B) = 11 \Rightarrow P(B) = \frac{11}{36}$

c) $C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, n(C) = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$

d) $D = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}, n(D) = 5 \Rightarrow P(D) = \frac{5}{36}$

e)
$$E = \left\{\begin{matrix}(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,3),(3,1),(1,5),(2,4),(4,2),(5,1),(2,6),(3,5), \\ (5,3),(6,2),(4,6),(6,4)\end{matrix}\right\}$$

$n(E) = 18 \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$

Bài 4.3. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự:
a) Từ 001 đến 099.
b) Từ 150 đến 199.

HD Giải

Ta có: $n(\Omega) = C_{199}^5$

a) Gọi A là biến cố: "Chọn 5 học sinh có số thứ tự 001 đến 099"

Suy ra $n(A) = C_{99}^5$. Vậy $P(A) = \frac{C_{99}^5}{C_{199}^5} \approx 0,029$

b) Gọi B là biến cố: "Chọn 5 học sinh có số thứ tự 150 đến 199"

Suy ra $n(B) = C_{50}^5$. Vậy $P(B) = \frac{C_{50}^5}{C_{199}^5} \approx 0,0009$

Bài 4.4. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 50.
a) Mô tả không gian mẫu;
b) Gọi *A* là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho *A*;
c) Tính xác suất của *A*;
d) Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

HD Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,...,50\}$

b) $\Omega_A = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$

c) $P(A) = \frac{15}{50} = 0,3$

d) Gọi *B* là biến cố " số được chọn nhỏ hơn 4". Ta có $P(B) = \frac{3}{50} = 0,06$

Bài 4.5. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để:
a) Số được chọn là số nguyên tố;
b) Số được chọn chia hết cho 3;

HD Giải

a) Gọi *A* là biến số " số được chọn là số nguyên tố". Ta có $\Omega_A = \{2,3,5,7\}$ và $P(A) = \frac{4}{8} = 0,5$

b) Gọi *B* là biến cố " số được chọn chia hết cho 3". Ta có $\Omega_B = \{3,6\}$ và $P(B) = \frac{2}{8} = 0,25$

Bài 4.6. Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong một danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10 (chính xác đến hàng phần nghìn).

HD Giải

Gọi *A* là biến cố "5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10"

Không gian mẫu $\Omega = C_{20}^5$. Kết quả thuận lợi của biến cố A là $\Omega_A = C_{10}^5$

Vậy $P(A) = \frac{C_{10}^5}{C_{20}^5} \approx 0,016$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4.7. Danh sách lớp của Nguyên được đánh số từ 1 đến 30. Nguyên có số thứ tực là 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Tính xác suất để Nguyên được chọn
b) Tính xác suất để Nguyên kkhông được chọn
c) Tính xác suất để một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Nguyên được chọn

Bài 4.8. Gieo hai con súc sắc cân đối

a) Mô tả không gian mẫu
b) Gọi *A* là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiên của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Liệt kê các kết quả thuận lợi của *A*. Tính *P*(*A*).
c) Cũng hỏi như trên cho các biến cố *B*: "có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" và *C*: " có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

Bài 4.9. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.

Bài 4.10. Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả cầu đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

§5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Quy tắc cộng xác suất

a. Biến cố hợp

Cho hai biến cố *A* và *B*. Biến cố "*A* hoặc *B* xảy ra", kí hiệu $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố *A* và *B*

Tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố " có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ được gọi là hợp của k biến cố đó.

b. Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố *A* và *B*. Hai biến cố *A* và *B* được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

c. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến *A* và *B* xung khắc thì xác suất của *A* hoặc của *B* xảy ra là $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B)$

Tổng quát: Cho *k* biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó

$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$

d. Biến cố đối

Cho *A* là một biến cố. Khi đó biến cố không xảy ra *A*, kí hiệu $\overline{A}$ gọi là biến cố đối của *A*

Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. Tuy nhiên hai biến cố xung khắc chưa chắc là hai biến cố đối nhau.

2. Quy tắc nhân xác suất

a. Biến cố giao

Cho hai biến cố *A* và *B*. Biến cố "Cả *A* và *B* cùng xảy ra", kí hiệu là *AB*, được gọi là giao của hai biến cố *A* và *B*.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho *A* và *B* thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho *AB* là $\Omega_A \cap \Omega_B$

b. Biến cố độc lập

Hai biến cố *A* và *B* gọi là độc lập với nhau nếu việc xãy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nếu hai biến cố *A*, *B* độc lập với nhau thì *A* và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

c. Quy tắc nhân xác suất

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì $P(A.B) = P(A).P(B)$

Nếu $P\left(AB\right) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố *A* và *B* không độc lập với nhau.

B. BÀI TẬP

Bài 5.1. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất và quan sát số chấm xuất hiện.
a) Mô tả không gian mẫu
b) Xác định các biến cố sau:
A: "Xuất hiện mặt chẵn chấm"
B: " Xuất hiện mặt lẻ chấm"
C: "Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3"
c) Trong các biến cố trên, hãy tìm các biến cố xung khắc.

HD Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \left\{1,2,3,4,5,6\right\}$

b) Ta có $A = \left\{2,4,6\right\}; B = \left\{1,3,5\right\}; C = \left\{3,4,5,6\right\}$

c) Các biến cố A và B là xung khắc, vì $A \cap B = \emptyset$

Bài 5.2. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm, được thay vào phương trình bậc hai: $x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:
a) Phương trình có nghiệm
b) Phương trình vô nghiệm
c) Phương trình có nghiệm nguyên

HD Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, n(\Omega) = 6$

Kí hiệu A, B, C lần lượt là các biến cố tương ứng với các câu a), b), c). Ta thấy phương trình bậc hai $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 8 \geq 0$. Do đó:

a) $A = \{b \in \Omega / b^2 - 8 \geq 0\} = \{3,4,5,6\}, n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \dfrac{2}{3}$

b) Vì $B = \overline{A}$ nên $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{3}$

c) $C = \{3\}, n(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \dfrac{1}{6}$

Bài 5.3. Kết quả (b, c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình: $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để:
a) Phương trình vô nghiệm
b) Phương trình có nghiệm kép
c) Phương trình có nghiệm

HD Giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{(b;c)/1 \leq b;c \leq 6\}, n(\Omega) = 36$. Kí hiệu *A, B, C* là các biến cố cần tìm xác suất ứng với các câu a), b), c). Ta có: $\Delta = b^2 - 4c$

$$a)\ A = \{(b,c) \in \Omega / b^2 - 4c < 0\} = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,2),...,(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\} \quad n(A) = 17 \Rightarrow P(A) = \frac{17}{36}$$

b) $B = \{(b,c) \in \Omega / b^2 - 4c = 0\} = \{(2,1),(4,4)\}, n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{18}$

c) Ta có $C = \overline{A} \Rightarrow P(C) = P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{17}{36} = \dfrac{19}{36}$

Bài 5.4. Một hộp đựng 10 quả cầu đánh số từ 1 đến 10, đồng thời các quả từ 1 đến 6 được sơn màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu *A* là biến cố:"Quả lấy ra màu đỏ", *B* là biến cố: "Quả lấy ra ghi số chẵn". Hỏi *A* và *B* có độc lập không ?

HD Giải

Kí hiệu *A* là biến cố :"Quả lấy ra màu đỏ", *B* là biến cố: "Quả lấy ra ghi số chẵn"

Không gian mẫu: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, n(\Omega) = 10$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}, n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{5}$, $\quad B = \{2,4,6,8,10\}, n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{2}$

$A \cap B = \{2,4,6\}, n(A \cap B) = 3 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{10}$

Mặt khác: $P(AB) = \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{2} = P(A).P(B)$. Vậy *A, B* độc lập với nhau.

Bài 5.5 Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 quả xanh. Lấy ngẫy nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:
a) Cả hai quả đều đỏ
b) Hai quả cùng màu
c) Hai quả khác màu

HD✍Giải

Kí hiệu A: "Quả lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ"
Kí hiệu B: "Quả lấy từ hộp thứ hai màu đỏ"
Kí hiệu C: "Hai quả lấy ra cùng màu"
Kí hiệu D: "Hai quả lấy ra khác màu"
Không gian mẫu là kết quả của hai hành đồng lấy quả từ hai hộp liên tiếp. Theo qui tắc nhân: $n(\Omega) = 50$ và A, B độc lập nhau

Ta có: $A \cap B$: "Quả lấy ra từ hai hộp cùng màu đỏ" và $\overline{A} \cap \overline{B}$: "Quả lấy ra từ hai hộp cùng màu xanh"

a) Cần tính $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{4}{10} = 0,24$

(Cách khác: Theo qui tắc nhân ta có: n($A \cap B$) = 3.4 =12 $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{12}{50} = 0,24$)

b) Từ trên suy ra: $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 12$

$$P(C) = P\left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{A} \cap \overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{12}{50} + \frac{12}{50} = 0,48$$

c) Dễ thấy D và C là hai biến cố đối nhau, nghĩa là $D = \overline{C} \Rightarrow P(D) = P(\overline{C}) = 1 - 0,48 = 0,52$

Bài 5.6. Túi bên phải có 3 bi đỏ, 2 bi xanh; túi bên trái có 4 bi đỏ, 5 bi xanh. Lấy một bi từ mỗi túi một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất sao cho:
a) Hai bi lấy ra cùng màu b) Hai bi lấy ra khác màu

HD✍Giải

Kí hiệu A: "Bi lấy ra từ túi phải có màu đỏ", B: "Bi lấy ra từ túi trái có màu đỏ", C: "Hai bi lấy ra cùng màu" và D: "Hai bi lấy ra khác màu"
Không gian mẫu là kết quả của hai hành đồng lấy quả từ hai hộp liên tiếp. Theo qui tắc nhân:
$n(\Omega) = 5.9 = 45$ và A, B độc lập nhau

Ta có: $A \cap B$: "Bi lấy ra từ hai túi phải và túi trái cùng màu đỏ" và $\overline{A} \cap \overline{B}$: " Bi lấy ra từ hai túi phải và túi trái cùng màu xanh"

a) $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, Hiển nhiên $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$ và n($A \cap B$) = 3.4 =12 ,

$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2.5 = 10$. $P(C) = P\left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{A} \cap \overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{12}{45} + \frac{10}{45} = \frac{22}{45}$

b) Dễ thấy D và C là hai biến cố đối nhau, nghĩa là $D = \overline{C} \Rightarrow P(D) = P(\overline{C}) = 1 - \frac{22}{45} = \frac{23}{45}$

Bài 5.7. Hai bạn lớp A và hai bạn lớp B được xếp vào ngồi 4 ghế sắp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho:
a) Các bạn lớp A ngồi cạnh nhau b) Các bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau

HD✍Giải

Giả sử hai bạn lớp A được đánh số 1, 2 và hai bạn lớp B được đánh số 3, 4. Kết quả xếp chỗ tương ứng với một hoán vị của tập $B = \{1,2,3,4\}$. Như vậy số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = P_4 = 4! = 24$

Kí hiệu: C là biến cố: "Hai bạn lớp A ngồi cạnh nhau"
D là biến cố: "Hai bạn cùng lớp không ngồi cạnh nhau"
a) Đầu tiên xếp hai bạn lớp A ngồi vào hai ghế liền nhau, có 2.3 = 6 cách , sau đó xếp hai bạn lớp B vào 2 ghế còn lại có 2 cách. Theo qui tắc nhân ta có n(C) = 6.2 = 12 và P(C) = 0,5
b) Đầu tiên xếp bạn A ngồi ở vị trí thứ nhất, chẳng hạn từ bên trái: có 2!.2! cách xếp bốn bạn ngồi xen kẽ. Sau đó xếp bạn lớp B ngồi vị trí thứ nhất. Ta cũng có 2!.2! cách ngồi xen kẽ. Vậy $n(D)$ = 2. 2!.2! = 8 do đó: $P(D) = \frac{1}{3}$

Bài 5.8. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lí và 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên ba quyển sách. Tính xác suất sao cho:
a) Ba quyển lấy ra thuộc ba môn khác nhau

b) Cả ba quyển lấy ra đều là sách Toán
c) Ít nhất một quyển sách Toán

HD Giải

Không gian mẫu là một tổ hợp chập 3 của 9 quyển sách nên $n(\Omega) = C_9^3 = 84$. Kí hiệu *A, B, C* là các biến cố tương ứng câu a), b), c)

a) Để có một phần tử của A ta phải tiến hành ba lần lựa chọn (từ mỗi loại sách một quyển). Vậy *n*(*A*) = 4.3.2 = 24 và $P(A) = \frac{2}{7}$

b) Cả ba quyển sách lấy ra đều là sách Toán , nên $n(B) = C_4^3 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{21}$

c) Gọi $\overline{C}$ là biến cố: "Trong ba quyển không có quyển sách Toán nào", ta có: $n(\overline{C}) = C_5^3 = 10$ và $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$

Bài 5.9. Một hộp đựng chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

HD Giải

Gọi *A* là biến cố: " Rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ", *B* là biến cố: "Cả hai thẻ được rút ra là thẻ chẵn". Khi đó biến cố *C*: " Tích hai số ghi trên thẻ là một số chẵn" là: $C = A \cup B$.
Do hai biến cố *A* và *B* xung khắc, nên $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Vì có 4 thẻ chẵn và 5 thẻ lẻ nên ta có: $P(A) = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{20}{36}; P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$. Vậy $P(C) = P(A \cup B) = \frac{20}{36} + \frac{6}{36} = \frac{13}{18}$

Bài 5.10. Một hộp đựng bốn viên bi xanh, ba viên bi đỏ và hai viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi.
a) Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu
b) Tính xác suất để chọn hai viên bi khác màu.

HD Giải

a) Gọi *A* là biến cố: "Chọn được hai viên bi xanh", *B* là biến cố "Chọn được hai viên bi đỏ" và *C* là biến cố: "Chọn được 2 viên bi vàng". *D* là biến cố: "Chọn được hai viên bi cùng màu"
Theo đề bài, ta có $D = A \cup B \cup C$ và các biến cố *A, B, C* đôi một xung khắc.
Vậy $P(D) = P(A \cup B \cup D) = P(A) + P(B) + P(C)$

Mặt khác, ta có: $P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}; P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}; P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$

Vậy: $P(D) = P(A \cup B \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

b) Biến cố: "Chọn được hai viên bi khác màu" chính là biến cố $\overline{D}$. Vậy $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

Bài 5.11. Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Tìm xác suất để một viên đạn trúng mục tiêu và một viên đạn trượt mục tiêu ?

HD Giải

Gọi *A* là biến cố: " Viên đạn đầu trúng mục tiêu", *B* là biến cố: " Viên đạn thứ hai trúng mục tiêu", *C* là biến cố: " Một viên đạn trúng mục tiêu và một viên đạn trượt mục tiêu".

Khi đó ta có: $C = A\overline{B} \cup \overline{A}B$ và hai viên đạn bắn độc lập nhau.

Vậy : $P(C) = P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A).P(\overline{B}) + P(B).P(\overline{A}) = 0,6.0,4 + 0,4.0,6 = 0,48$

Bài 5.12. Ba người đi săn *A, B, C* độc lập với nhau cùng nổ súng vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của *A, B, C* tương ứng là: 0,7; 0,6; 0,5.
a) Tính xác suất để xạ thủ *A* bắn trúng còn hai xạ thủ kia bắn trượt.
b) Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng

HD Giải

a) Gọi H là biến cố: "Xạ thủ A bắn trúng còn hai xạ thủ kia bắn trượt". Ta có

$P(H) = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) = (0,7)(0,4)(0,5) = 0,14$

b) Gọi $\overline{K}$ là biến cố: "Không có xạ thủ nào bắn trúng". Ta có:

$P(\overline{K}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = (0,3)(0,4)(0,5) = 0,06$

Vậy xác suất cần tìm là : $P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 0,94$

Bài 5.13. Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

HD Giải

Ta có: n(Ω)= C_{10}^4 = 210

Số cách chọn 4 quả cầu toàn đỏ là 1.

Số cách chọn 4 quả cầu toàn xanh là C_6^4 = 15.

Gọi A là biến cố: "Chọn 4 quả cầu có cả quả màu đỏ và xanh"

Suy ra: $n(A)$ = 210 – 15 – 1 = 194. Vậy $P(A) = \frac{194}{210}$

Bài 5.14. Xác suất để làm thí nghiệm thành công là 0,4. Một nhóm 5 học sinh, mỗi học sinh độc lập với nhau tiến hành cùng thí nghiệm trên.
a) Tính xác suất để cả nhóm không có ai làm thí nghiệm thành công.
b) Tính xác suất để ít nhất có một học sinh trong nhóm làm thí nghiệm thành công (tính chính xác đến hàng phần trăm).

HD Giải

a) Xác suất để một học sinh trong nhóm làm thí nghiệm không thành công là 1 – 0,4 = 0,6. Theo qui tắc nhân xác suất, xác suất để cả nhóm (5 HS) không có ai làm thí nghiệm thành công là : $(0,6)^5 \approx 0,08$

b) Xác suất cần tìm là $1 - (0,6)^5 \approx 0,92$

Bài 5.15. Gieo một con súc sắc cân đối ba lần. Tính xác suất để có đúng hai lần xuất. hiện mặt 6 chấm.

HD Giải

Gọi A là biến cố "lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm", B là biến cố " lần gieo thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm", C là biến cố " lầm gieo thứ ba xuất hiện mặt 6 chấm"
H là biến có " có đúng hai lần xuất hiện mặt 6 chấm"

Khi đó: $P(H) = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C)$

Ta có: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}; P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = P(\overline{C}) = \frac{5}{6}$. Vậy $P(H) = \frac{15}{216}$

Bài 5.16. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

HD Giải

Gọi A là biến cố " không có chữ số 1"; B là biến cố " không có chữ số 5"

Ta có $P(A) = P(B) = (0,9)^5$ và $P(AB) = (0,8)^5$

Từ đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2.(0,9)^5 - (0,8)^5 = 0,8533$

Bài 5.17. Một túi chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.
a) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi
i) Tính xác suất được hai viên bị đen
ii) Tính xác suất để được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng
b) Lấy ngẫu nhiên ba viên bi trong túi
i) Tính xác suất để được 3 viên bi đỏ
ii)Tính xác suất để được 3 viên bi với ba màu khác nhau

HD Giải

a) Số trường hợp có thể xảy ra là: C_{16}^2

i) Số trường hợp rút được hai viên bi đen là C_6^2. Vậy xác suất rút được hai viên bi đen là $\frac{C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{1}{8}$

ii) Số trường hợp rút được 1 viên bi trắng và 1 viên bi đen là $C_7^1.C_6^1=42$. Vậy xác suất để được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng là $\frac{42}{C_{12}^2}=\frac{7}{20}$

b) Số trường hợp có thể xảy ra là C_{16}^3

i) Số trường hợp rút được 3 viên bi đỏ là $C_3^3=1$. Vậy xác suất rút được 3 viên bi đỏ là $\frac{1}{C_{16}^3}=\frac{1}{560}$

ii) Theo qui tắc nhân, ta có 7.6.3 = 126 cách chọn 3 viên bi có 3 màu khác nhau. Vậy xác suất rút được 3 viên bi có 3 màu khác nhau là $\frac{126}{C_{16}^3}=\frac{9}{40}$

Bài 5.18. Chọn ngẫu nhiên một thẻ từ năm thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5. Kí hiệu:
A là biến cố " Thẻ ghi số bé hơn 3 được chọn"
B là biến cố " thẻ ghi số chẵn chọn được"
a) Mô tả không gian mẫu
b) Liệt kê các phần tử của tập *A* và *B*
c) Vì sao *A* và *B* không xung khắc
d) Tính $P(A),P(B),P(A\cap B),P(A\cup B)$

HD Giải

a) $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$

b) $A=\{1,2\},B=\{2,4\}$

c) $A\cap B=\{2\}$ nên *A* và *B* không xung khắc

d) $P(A)=\frac{2}{5}=P(B);P(A\cap B)=\frac{1}{5},A\cup B=\{1;2;4\},P\left(A\cup B\right)=\frac{3}{5}$

Bài 5.19. Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.

HD Giải

Giả sử T là phép thử "Gieo ba con súc sắc". Kết quả của T là một bộ ba số (*x; y; z*) tương ứng là kết quả của việc giao com súc sắc thứ nhất, thứ hai, thứ ba. Không gian mẫu của T có 6.6.6 = 216 phần tử.
Gọi *A* là biến cố: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc là 9". Ta có tập hợp các kết quả thuận lợi cho *A* là: $\Omega_A=\left\{(x;y;z)/\,x+y+z=9,1\le x,y,z\le 6,x,y,z\in\mathbb{N}^*\right\}$
Nhận xét: 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3
Các tập $\{1;2;6\};\{1;3;5\};\{2;3;4\}$ mỗi tập có 6 phần tử của Ω_A, tập $\{1;4;4\};\{2;2;5\}$ mỗi tập có 3 phần tử của Ω_A và tập $\{3;3;3\}$ có duy nhất một phần tử của Ω_A

Vậy $\left|\Omega_A\right|=6+6+6+3+3+1=25$. Vậy $P(A)=\frac{25}{216}$

Bài 5.20. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập $\{1,2,...,11\}$
a) Tính xác suất để tổng ba số được chọn là 12
b) Tính xác suất để tổng ba số được chọn là số lẻ

HD Giải

Không gian mẫu $\Omega=C_{11}^3=165$

a) Gọi *A* là biến cố "tổng ba số được chọn là 12". Khi đó, các bộ (a, b, c) mà a + b + c = 12 và a < b < c là (1,2,9), (1,3,8), (1,4,7), (1,5,6), (2,3,7), (2,4,6) và (3,4,5). Vậy $P(A)=\frac{7}{165}$

b) Gọi *B* là biến cố "tổng ba số được chọn là số lẻ".

Tổng a + b + c lẻ khi và chỉ khi: Hoặc cả ba số đều lẻ hoặc ba số có một số lẻ và hai số chẵn

Ta có $C_6^3 = 20$ cách chọn số lẻ từ tập số lẻ $\{1,3,5,7,9,11\}$ và có $C_6^1.C_5^2 = 60$ cách chọn một số lẻ và hai số chẵn. Vậy $P(B) = \dfrac{20+60}{165} = \dfrac{16}{33}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5.21. Một túi chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên ba viên bi trong túi. Tính xác suất để:

i) Lấy được viên bi đỏ

ii) Lấy được cả ba viên bi không đỏ

iii) Lấy được một viên bi trắng, một viên bi đỏ, một viên bi đen

b) Lấy ngẫu nhiên bốn viên bi trong túi. Tính xác suất để:

i) Lấy được đúng một viên bi trắng

ii) Lấy được đúng hai viên bi trắng

c) Lấy ngẫu nhiên mười viên bi. Tính xác suất rút được 5 viên bi trắng, 3 viên bi đen và 2 viên bi đỏ.

Bài 5.22. Một hộp đựng 9 thẻ đánh số từ 1,2, . . ., 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để:

a) Tích nhận được là số lẻ.

b) Tích nhận được là số chẵn.

Bài 5.23. Một hộp đựng 9 thẻ đánh số từ 1,2, . . ., 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ. Tính xác suất để:

a) Các thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

b) Có đúng một trong ba thẻ ghi các số 1, 2, 3 được rút.

c) Không thẻ nào trong ba thẻ ghi các số 1, 2, 3 được rút.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Có bao nhiêu cách xếp 7 người vào hai dãy ghế sao cho ghế đầu có 4 người và dãy sau có 3 người.

HD Giải

Chọn 4 người để xếp vào 4 ghế ở đầu: có A_7^4 cách. Còn 3 người xếp vào 3 ghế ở dãy sau: có 3! Cách

Vậy có tấ cả $A_7^4.3! = 5040$ cách xếp

Bài 2. Một câu lạc bộ có 30 thành viên

a) Có bao nhiêu cách chọn 5 thành viên vào Uỷ ban thương trực ?

b) Có bao nhiêu cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ ?

HD Giải

a) Số cách chọn 5 người vào Uỷ ban thường trực là $C_{30}^5 = 142506$

b) Cần chọn 3 người giữ các chức vụ Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ. Số cách chọn là $A_{30}^3 = 24360$

Bài 3. Trong không gian cho tập hợp gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với các đỉnh thuộc tập hợp đã cho ?

HD Giải

Cứ 4 điểm không đồng phẳng cho ta được một tứ diện. Vậy số tứ diện cần tìm $C_9^4 = 126$ (tứ diện)

Bài 4. Trong khai triển của $\left(a^{-\frac{1}{6}}\sqrt{b} + b^{-\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a}\right)^{21}$, xác định số hạng mà luỹ thừa của a và b giống nhau.

HD Giải

Ta có số hạng tổng quát trong khai triển là $T_{k+1} = C_{21}^k b^{\frac{k}{2}}.a^{-\frac{k}{6}}.a^{\frac{21-k}{3}}.b^{\frac{k-21}{6}} = C_{21}^k a^{\frac{42-3k}{6}}.b^{\frac{4k-21}{6}}$

Theo đề bài, ta có $42 - 3k = 4k - 21$. Suy ra $k = 9$

Bài 5.

a) Giải bất phương trình $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$

b) Giải phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$

HD Giải

a) Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \ge 2$

Ta có $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30 \Leftrightarrow (x+1)x + 3x(x-1) < 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3$

So với điều kiện, suy ra $x = 2$

b) Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \ge 10$. Ta có

$$A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9.\frac{x!}{(x-8)!} \Leftrightarrow (x-9)(x-8) + x - 8 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, suy ra $x = 11$

Bài 6. Tính xác suất sao cho trong 13 con bài tú lơ khơ được chia nhẫu nhiên cho bạn Nguyên có 4 con pích, 3 con rô, 3 con cơ và 3 con nhép.

HD Giải

Số cách rút ra 13 con bài là C_{52}^{13}. Như vậy $n\left(\Omega\right) = C_{52}^{13}$

Kí hiệu A: "Trong 13 con bài có 4 con pích, 3 con rô, 3 con cơ và 3 con nhép".

Ta có $n(A) = C_{13}^4.C_9^3.C_6^3 = \frac{13!}{4!(3!)^2}$

Vậy $P(A) = \dfrac{13!}{4!(3!)^2.C_{52}^{13}} \approx 0,000002$

Bài 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó:
a) Chia hết cho 3
b) Chia hết cho 5

HD Giải

a) Các số chia hết cho 3 có dạng là $3k\ (k \in \mathbb{N})$. Ta phải có $3k \le 999$ nên $k \le 333$

Vậy có 334 số chi hết cho 3 bé hơn 1000. Suy ra $P = \dfrac{334}{1000} = 0,334$

b) Các số chi hết cho 5 có dạng $5k\ (k \in \mathbb{N})$. Ta phải có $5k < 1000$ nên $k < 200$

Vậy có 200 số chia hết cho 5 bé hơn 1000. Suy ra $P = \dfrac{200}{1000} = 0,2$

Bài 8. Ba người đi săn *A, B, C* độc lập với nhau cùng nổ súng vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của *A, B, C* tương ứng là: 0,4; 0,3; 0,2.
a) Tính xác suất để xạ thủ *A* bắn trúng còn hai xạ thủ kia bắn trượt.
b) Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng

HD Giải

a) Gọi *H* là biến cố: "Xạ thủ *A* bắn trúng còn hai xạ thủ kia bắn trượt". Ta có

$P(H) = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) = (0,4)(0,7)(0,8) = 0,224$

b) Gọi $\overline{K}$ là biến cố: "Không có xạ thủ nào bắn trúng". Ta có:

$P(\overline{K}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = (0,6)(0,7)(0,8) = 0,336$

Vậy xác suất cần tìm là : $P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 0,664$

Bài 9. Bốn khẩu pháo cao xạ *A, B, C* và *D* cùng bắn độc lập vào một mục tiêu. Biết xác suất bắn trúng của các khẩu pháo trên tương ứng là: $P(A) = \dfrac{1}{2}, P(B) = \dfrac{2}{3}, P(C) = \dfrac{4}{5}, P(D) = \dfrac{5}{7}$. Tính xác suất để mục tiêu bị trúng đạn.

HD Giải

Gọi *H*: "Các khẩu pháo bắn trượt mục tiêu". Ta tính xác suất để mục tiêu không bị trúng đạn tức là khi cả 4 khẩu pháo đều bắn trượt. Ta có $P(H) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{5}.\dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{105}$

Xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là $P\left(\overline{H}\right) = 1 - P(H) = 1 - \dfrac{1}{105} = \dfrac{104}{105}$

Bài 10. Một hộp đựng 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi.
a) Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu
b) Tính xác suất để chọn hai viên bi khác màu.

HD Giải

a) Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$

Gọi *A* là biến cố: "Chọn được hai viên cùng màu".

Ta có: $n(A) = C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 = 19$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{19}{66}$

b) Biến cố: "Chọn được hai viên bi khác màu" chính là biến cố $\overline{A}$.

Vậy $P(\overline{A}) = 1 - P(D) = 1 - \dfrac{19}{66} = \dfrac{47}{66}$

Bài 11. Có ba hòm, mỗi hòm chứa 5 thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để:
a) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không lớn hơn 4?
b) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6 ?

HD Giải

Không gian mẫu $\Omega = \left\{ (x, y, z) / 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5, 1 \le z \le 5; x, y, z \in \mathbb{N}^* \right\}$ trong đó x, y, z theo thứ tự là số ghi trên thẻ rút ở hòm thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Ta có $n\left(\Omega\right) = 5.5.5 = 125$.

a) Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không lớn hơn 4". Khi đó $\overline{A}$ là biến cố " Tổng số ghi trên ba tấm thẻ được chọn nhiều nhất là 3". Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \left\{ (1,1,1) \right\}$ nên $n\left(\Omega_{\overline{A}}\right) = 1$

Vậy $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{125} = 0,992$

b) Gọi B là biến cố "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6"

Khi đó $\Omega_B = \left\{ (x, y, z) / x + y + z = 6, 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5, 1 \le z \le 5; x, y, z \in \mathbb{N}^* \right\}$

Ta có 6 = 1 + 2 + 3 = 1 + 1 + 4 = 2 + 2 + 2

Tập $\left\{1,2,3\right\}$ cho ta 6 phần tử của Ω_B, tập $\left\{1,1,4\right\}$ cho ta 3 phần tử của Ω_B, tập $\left\{2,2,2\right\}$ chỉ cho duy nhất 1 phần tử của Ω_B. Vậy $n\left(\Omega_B\right) = 6 + 3 + 1 = 10$

Do đó $P(B) = \dfrac{10}{125} = 0,08$

Bài 12. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0), trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1 ?

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}, a_1 \ne 0, a_i \ne a_j, i \ne j; i, j = \overline{1,6}$ và $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in B = \left\{0, 1, ..., 9\right\}$

Chọn một chữ số trong các chữ số $\left\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right\}$ để cho bằng 0 có 5 cách chọn

Chọn 5 chữ số còn lại từ $B \setminus \left\{0,1\right\}$ có A_8^5 cách chọn

Vậy số thoả mãn yêu cầu là: $5A_8^5 = 33600$ (số).

Bài 13. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số (chữ số đầu tiên phải khác 0), biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần ?

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}, a_1 \ne 0,$ và $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in B = \left\{0, 1, ..., 9\right\}$

- Xét trường hợp a_1 tuỳ ý (có thể bằng 0)

Chọn 2 vị trí xếp hai chữ số 2: có C_7^2 cách chọn

Chọn 3 vị trí xếp ba chữ số 3: có C_5^3 cách chọn

Còn hai vị trí, chọn hai chữ số xếp vào hai vị trí này: có $2!.C_8^2$

Do đó, ta có $C_7^2.C_5^3.2!C_8^2 = 11760$ (số)

- Xét trường hợp $a_1 = 0$

Chọn 2 vị trí xếp hai chữ số 2: có C_6^2 cách chọn

Chọn 3 vị trí xếp ba chữ số 3: có C_4^3 cách chọn

Chọn một số xếp vào vị trí còn lại: có 7 cách chọn

Do đó có: $C_6^2.C_4^3.7 = 420$ (số)

Vậy số thoả ycbt: 11760 – 420 = 11340(số).

Bài 14. Từ các chữ số 1, 2, 5, 7, 8, lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và nhỏ hơn 276?

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3}; a_i \ne a_j; i \ne j; i, j = \overline{1,3}; a_1, a_2, a_3 \in B = \left\{1,2,5,7,8\right\}$ và $n < 276$

- $a = 1$, khi đó b, c lấy trong $B \setminus \left\{a\right\}$. Do đó có $A_4^2 = 12$ (số)
- $a = 2, b < 7 \Rightarrow b \in \left\{1,5\right\}$ và $c \in B \setminus \left\{a, b\right\}$. Do đó có $2.A_3^1 = 6$ (số)

- $a=2,b=7\Rightarrow c\in\{1,5\}$. Do đó có 2 (số)

Vậy số các số n thoả ycbt: 12 + 6 + 2 = 20(số)

Bài 15. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau ?

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}; a_i\neq a_j; i\neq j; i,j=\overline{1,4}; a_1,a_2,a_3,a_4\in B=\{0,1,2,4,...,9\}$

Số cách chọn a_4 có 2 cách chọn

Số cách chọn a_1,a_2,a_3 có A_9^3 cách chọn

Vậy có $2A_9^3$ số có 4 chữ số chia hết cho 5 (kể cả trường hợp $a_1=0$)

Số trường hợp $a_1=0$ là A_9^2

Vậy số cần tìm thoả yêu cầu bài toán là: $2A_9^3-A_9^2=952$ (số)

Cách khác*: Giải theo quy tắc đếm.*

Bài 16. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số và thoả mãn điều kiện: Sáu chữ số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị ?

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}; a_i\neq a_j; i\neq j; i,j=\overline{1,6}; a_i\in B=\{1,2,3,4,5,6\}$

Điều kiện: $a_1+a_2+a_3=a_4+a_5+a_6-1$. Vì 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

Vậy suy ra $a_1+a_2+a_3=10$ hiển nhiên $a_4+a_5+a_6=11$

Ta có các trường hợp sau xảy ra:

$\{1,3,6\}$ *và* $\{2,4,5\}$. *Ta có* $:3!.3!=36$ *số*

$\{1,4,5\}$ *và* $\{2,3,6\}$. *Ta có* $:3!.3!=36$ *số*

$\{2,3,5\}$ *và* $\{1,4,6\}$. *Ta có* $:3!.3!=36$ *số*

Theo quy tắc cộng ta có: 36 + 36 + 36 = 108 số cần tìm.

Bài 17. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

HD Giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}; a_i\neq a_j; i\neq j; i,j=\overline{1,6}; a_i\in B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Theo đề bài, ta có $a_3+a_4+a_5=8$, suy ra $a_3,a_4,a_5\in\{1,2,5\}$ *hay* $a_3,a_4,a_5\in\{1,3,4\}$

Trường hợp: $a_3,a_4,a_5\in\{1,2,5\}$

Số cách chọn a_3,a_4,a_5 có $3!=6$ cách chọn

Số cách chọn a_1,a_2,a_6 có A_6^3 cách chọn

Vậy có $6.A_6^3=720$ (số)

Trường hợp: $a_3,a_4,a_5\in\{1,3,4\}$, thực hiện giải tương tự, ta có 720 (số)

Vậy có 720 + 720 = 1440 số cần tìm.

Bài 18. Đội tuyển học sinh giỏi của trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em học sinh được chọn ?

HD Giải

Số cách chọn 8 học sinh từ 18 em của đội tuyển là $C_{18}^8=43758$ cách

Trong 43758 cách chọn bất kì trên bao gồm:

- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 12 và 11 là C_{13}^8
- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 12 và 10 là C_{12}^8

- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 10 và 11 là C_{11}^{8}

Vậy số cách chọn thoả yêu cầu bài toán là: $C_{18}^{8}-\left(C_{13}^{8}+C_{12}^{8}+C_{11}^{8}\right)=41811$ (cách chọn)

Bài 19. Giả sử có khai triển $\left(1-x\right)^{n}+x\left(1+x\right)^{n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

Biết $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=512$. Hãy tính hệ số a_3

HD✍Giải

Từ giả thiết chọn $x=1\Rightarrow 2^{n-1}=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=512\Rightarrow n=10$

Với $n=10$, ta có

$\left(1-x\right)^{10}+x\left(1+x\right)^{9}=C_{10}^{0}-C_{10}^{1}x+C_{10}^{2}x^2-C_{10}^{3}x^3\ldots+C_{10}^{10}+C_{9}^{0}x+C_{9}^{1}x^2+C_{9}^{2}x^3+\ldots+C_{9}^{9}x^{10}$

Từ đó suy ra $a_3=-C_{10}^{3}+C_{9}^{2}=-84$

Bài 20. Gọi $a_1,a_2,\ldots,a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau: $\left(x+1\right)^{10}\left(x+2\right)=x^{11}+a_1x^{10}+a_2x^9+\ldots+a_{11}$.

Hãy tính hệ số a_5

HD✍Giải

Ta có $\left(x+1\right)^{10}=C_{10}^{0}x^{10}+C_{10}^{1}x^{9}+C_{10}^{2}x^{8}+C_{10}^{3}x^{7}+C_{10}^{4}x^{6}+C_{10}^{5}x^{5}+\ldots+C_{10}^{9}x+C_{10}^{10}$

Suy ra $\left(x+1\right)^{10}\left(x+2\right)=\ldots+\left[C_{10}^{5}+2C_{10}^{4}\right]x^6+\ldots$

Vậy $a_5=C_{10}^{5}+2C_{10}^{4}=672$

Bài 21. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{n}$, biết rằng

$C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{n}=2^{20}-1$

HD✍Giải

Từ giả thiết, ta có $C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{n}=2^{20}$ (1)

Vì $C_{2n+1}^{k}=C_{2n+1}^{2n+1-k},\forall k,0\le k\le 2n$, nên

$C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{n}=\frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}\right)$ (2)

Từ khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(1+1\right)^{2n+1}$

suy ra $C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $2^{2n}=2^{20}\Leftrightarrow n=10$

Ta có $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{n}C_{10}^{k}\left(x^{-4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{10}^{k}x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^{k} thoả mãn: $11k-40=26\Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số của x^{26} là : $C_{10}^{6}=210$

Bài 22. Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n}=C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n}+C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)+\ldots+C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n}$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm x,n

HD✍Giải

Ta có $C_n^3=5C_n^1\Leftrightarrow\begin{cases}n\in\mathbb{Z}^+,n\ge 3\\(n-2)(n-1)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\in\mathbb{Z}^+,n\ge 3\\\left[\begin{array}{l}n=7\\n=-4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow n=7$

Và $T_4 = C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) = 20n \Leftrightarrow C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy $n = 7, x = 4$

Bài 23. Tìm số nguyên dương $n: C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243$

HD Giải

Từ khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$. Ta chọn $x = 2$ ta được

$(1+2)^n = 3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$. Do đó $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243 \Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$

Vậy $n = 5$

Bài 24. Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$

HD Giải

Điều kiện $n \ge 3$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100 \Leftrightarrow \left(C_n^2\right)^2 + 2C_n^2 C_n^3 + \left(C_n^3\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(C_n^2 + C_n^3\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10 \Leftrightarrow (n-1)n(n+1) = 3.4.5 \Rightarrow n = 4$$

Vậy $n = 4$

Bài 25. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n (x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

HD Giải

Ta có $\left(x^2+1\right)^n (x+2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{2n-2k} \sum\limits_{h=0}^{n} C_n^h x^{n-h} 2^h = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{h=0}^{n} C_n^k C_n^h 2^h x^{3n-(2k+h)}$

Từ giả thiết, ta suy ra $2k + h = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1, h = 1 \\ k = 0, h = 3 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra: $a_{3n-3} = 2C_n^1 C_n^1 + 2^3 C_n^0 C_n^3 = 26n \Rightarrow n = 5$

Vậy $n = 5$

Bài 26. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1 + x^2(1-x)\right]^8$

HD Giải

Ta có

$$\left[1 + x^2(1-x)\right]^8 = C_8^0 + C_8^1 x^2(1-x) + C_8^2 x^4(1-x)^2 + C_8^3 x^6 (1-x)^3 + C_8^4 x^8 (1-x)^4 + \ldots + C_8^8 x^{16}(1-x)^8$$

Số hạng chứa x^8 trong khai triển trên chỉ có trong $C_8^3 x^6(1-x)^3$ và $C_8^4 x^8 (1-x)^4$

Suy ra hệ số của x^8 là $3C_8^3 + C_8^4 = 238$

Bài 27. Tìm n là số nguyên dương thoả mãn bất phương trình: $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$

HD Giải

Bất phương trình $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$, có điều kiện $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$ (*)

$$A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{2.n!}{(n-2)!2!} \le 9n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n(n-1) \le 9n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le n \le 4$$

Từ (*), suy ra $n = 3, n = 4$

Bài 28. Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_n x^n$. Biết rằng tồn tại số k nguyên($n \le k \le n-1$) sao cho : $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Hãy tính n

HD Giải

Ta có $\left(1+x\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$

Và

$$\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24} \Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} \\ \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1) = 9k \\ 3(n-k) = 8(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n+2}{11} \\ k = \frac{3n-8}{11} \end{cases} \Leftrightarrow 3n-8 = 2n+2 \Leftrightarrow n = 10$$

Bài 29. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $\left(2-3x\right)^{2n}$, trong đó n nguyên dương thoả mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$

HD Giải

Ta có $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Chọn $x=1$ ta được: $(1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Chọn $x=-1$ ta được: $(1-1)^{2n+1} = 0 = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - \ldots - C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow 2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

Suy ra: $2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10$

Ta có: $\left(2-3x\right)^{10}$ có số hạng khai triển tổng quát: $T_{k+1} = C_{10}^k(-1)^k2^{10-k}\left(3x\right)^k$

Hệ số của x^7 ứng với k = 7.

Vậy hệ số của x^7 là $-C_{10}^7 3^7 2^3 = -2099520$

Bài 30. Cho tập A gồm n phần tử $\left(n \ge 4\right)$. Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \left\{1;2;3;\ldots;n\right\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

HD Giải

Theo bài toán, ta có:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20\frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow (n-3)(n-2) = 20.12 \Rightarrow n = 18 \text{ (Vì } n \ge 4\text{)}$$

C_{18}^k lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} C_{18}^k \ge C_{18}^{k+1} \\ C_{18}^k \ge C_{18}^{k-1} \end{cases} \Rightarrow k = 9$. Vậy: $k = 9$

Bài 31. Cho n số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, x \ne 0$.

HD Giải

Ta có: $5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n = 7$ (vì n nguyên dương)

Khi đó: $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{7}\frac{(-1)^kC_7^k}{2^{7-k}}x^{14-3k}$

Số hạng chứa x^5 tương ứng với $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng cần tìm là $\dfrac{(-1)^3C_7^3}{2^4}x^5 = -\dfrac{35}{16}x^5$

Bài 32. Gọi *S* là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của *S*. Chọn ngẫu nhiên một số từ *S*, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

HD Giải

Số phần tử của *S* là $n(S)=A_7^3=210$. Gọi *A* là biến cố: "Chọn được từ S số được chọn là số chẵn"

Ta có $n(A) =$ 3.6.5 = 90 (cách)

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{90}{210}=\dfrac{3}{7}$

Bài 33. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra cùng màu.

HD Giải

Số cách chọn 2 viên bi, mỗi viên từ một hộp là: 7.6 = 42
Số cách chọn 2 vuên bi đỏ, mỗi viên từ một hộp là: 4.2 = 8
Số cách chọn 2 vuên bi trắng, mỗi viên từ một hộp là: 3.4 = 12

Xác suất lấy ra được hai viên bi cùng màu là: $P=\dfrac{8+12}{42}=\dfrac{10}{21}$

Bài 34. Từ một hộp chứa 16 thẻ đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều đánh số chẵn.

HD Giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{16}^4=1820$

Gọi biến cố A: "Chọn được 4 thẻ đều đánh số chẵn"

Kết quả thuận lợi cho biến có A là $n(A)=C_8^4=70$

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{70}{1820}=\dfrac{1}{26}$

Bài 35. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta đã giử đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

HD Giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{12}^3=220$

Gọi biến cố A: "3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại"

Kết quả thuận lợi cho biến có A là $n(A)=C_5^1.C_4^1.C_3^1=60$

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{60}{220}=\dfrac{3}{11}$

Bài 36. Cho đa giác đều n đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 27 đường chéo.

HD Giải

Số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $C_n^2-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$

Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{n(n-3)}{2}=27 \Leftrightarrow n=9$ hoặc $n=-6$

Do $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$ nên giá trị n cần tìm là $n=9$

Bài 37. Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các Trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để ít nhất 2 đội của Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

HD Giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$

Gọi A là biến cố "ít nhất 2 đội của Trung tâm y tế cơ sở được chọn"

Ta có số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_{20}^3 C_5^1 + C_{20}^3 = 2090$

Vậy: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{209}{230}$

Bài 38. Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để 3 câu hỏi A và 3 câu hỏi B chọn là giống nhau.

HD Giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \left(C_{10}^3\right)^2 = 14400$

Gọi A là biến cố "3 câu hỏi A và 3 câu hỏi B chọn là giống nhau"

Ta có số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_{10}^3.1 = 120$ (vì với mỗi cách chọn 3 câu hỏi của A, B chỉ có duy nhất cách chọn 3 câu hỏi giống như A)

Vậy: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{14400} = \dfrac{1}{120}$

Bài 39. Học sinh A thiết kế bảng điều kiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tọa thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều kiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

HD Giải

Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$

Gọi E là biến cố: "B mở được cửa phòng học". Ta có:

$E = \{(0;1;9),(0;2;8),(0;3;7),(0;4;6),(1;2;7),(1;3;6),(1;4;5);(2;3;5)\}$. Do đó $n(E) = 8$

Vậy: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{90}$

Bài 40. Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2016 có 4 môn thi trắc nghiệm và 4 môn thi tự luận. Một giáo viên được bốc thăm ngẫu nhiên để phụ trách coi thi 5 môn. Tính xác suất để giáo viên đó phụ trách coi thi ít nhất 2 môn trắc nghiệm.

HD Giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_8^5 = 56$

Gọi A là biến cố "Giáo viên đó phụ trách coi thi ít nhất 2 môn trắc nghiệm"

Ta có số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_4^2.C_4^3 + C_4^3.C_4^2 + C_4^4.C_4^1 = 52$

Vậy: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{52}{56} = \dfrac{13}{14}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 41. Giải các bất phương trình

a) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0$ b) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \le 100$

c) $\dfrac{A_{n+1}^{4}}{C_{n-1}^{n-3}} < 14P_3$ d) $\dfrac{1}{2}A_{2x}^{2} - A_{x}^{2} \le \dfrac{6}{x}C_{x}^{3} + 10$

Bài 42.

a) Định x và y sao cho : $C_{x+1}^{y} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y-1} = 6:5:2$

b) Định x và y sao cho: $\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_{x}^{y-1} : C_{x}^{y-1} = 10:2:1$

Bài 43. Một tổ có 7 học sinh nữ, 5 học sinh nam. Cần chọn 6 học sinh trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 44. Một đôi văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người trong đó phải có ít nhất 3 nữ.

Bài 45. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1 và 5 ?

Bài 46. Từ 9 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

Bài 47. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Bài 48. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{19}$

Bài 49. Tìm số hạng không chứa a trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\dfrac{1}{a^3} + a^2\right)^{10}$

Bài 50. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{n}$. Biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$.

Bài 51. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{2A_{n+2}^{4} + 3A_{n}^{3}}{(n+1)!}$ biết rằng $C_{n+1}^{2} + 2C_{n+2}^{2} + 2C_{n+3}^{2} + C_{n+4}^{2} = 149$

Bài 52. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(x^2+2\right)^n$, biết rằng $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.

Bài 53. Tìm hệ số không chứa x trong khai triển $\left(3x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{30}$

Bài 54. Trong khai triển nhị thức $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, hệ số của số hạng thứ ba lớn hơn hệ số của số hạng thứ hai là 35. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nói trên.

Bài 55. Giải các phương trình

a) $P_x.A_x^2 + 72 = 6\left(A_x^2 + 2P_x\right)$ b). $C_{n-1}^{4} - C_{n-1}^{3} - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^{2} = 0$

c) $A_x^{10} + A_x^{9} = 9A_x^{8}$ d) $2P_3 + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$

Bài 56. Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 qủa cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả cầu lấy ra cùng màu b) Có ít nhất một quả cầu trắng.

Bài 57. Trong một bệnh viện có 40 bác sĩ ngoại khoa. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ca mổ, nếu mỗi ca gồm:

a) Một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ? b) Một bác sĩ mổ và bốn bác sĩ phụ?

Bài 58. Chọn ngẫu nhiên ba học sinh từ một tổ gồm có sáu nam và bốn nữ. Tính xác suất sao:

a) Cả ba học sinh đều là nam b) Có ít nhất một nam

CHƯƠNG II. TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một lớp có 40 học sinh đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng kí môn bóng đá, 25 em đăng kí môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí cả hai môn thể thao ?

A. 10. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 20.

Câu 2: Số 6000 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 40. **B.** 32. **C.** 24. **D.** 42.

Câu 3: Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các Trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tìm xác suất P để ít nhất 2 đội của Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

A. $P=\dfrac{209}{230}$. **B.** $P=\dfrac{1}{115}$. **C.** $P=\dfrac{209}{230}$. **D.** $P=\dfrac{19}{46}$.

Câu 4: Hỏi có bao nhiêu số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

A. 30. **B.** 90000. **C.** 17280. **D.** 180000.

Câu 5: Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Tìm xác suất P để một viên đạn trúng mục tiêu và một viên đạn trượt mục tiêu.

A. $P=0,56$. **B.** $P=0,84$. **C.** $P=0,98$. **D.** $P=0,48$.

Câu 6: Gieo hai con súc sắc cân đối. Tìm xác suất P để tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ.

A. $P=\dfrac{6}{36}$. **B.** $P=\dfrac{9}{36}$. **C.** $P=\dfrac{7}{36}$. **D.** $P=\dfrac{8}{36}$.

Câu 7: Cho tập nền $B=\{1;2;4;5;7\}$. Có thể lập được từ B bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ?

A. 120. **B.** 72. **C.** 48. **D.** 60.

Câu 8: Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(x+y)^{25}$.

A. C_{25}^{13}. **B.** C_{13}^{12}. **C.** C_{25}^{12}. **D.** $2.C_{25}^{13}$.

Câu 9: Tìm giá trị của biểu thức $J=3^{17}C_{17}^{0}-4.3^{16}C_{17}^{1}+4^2.3^{15}C_{17}^{2}-4^3.3^{14}C_{17}^{3}+\ldots-4^{17}C_{17}^{17}$.

A. $J=7^n$. **B.** $J=17$. **C.** $J=-1$. **D.** $J=12^n$.

Câu 10: Trong khai triển của $(3x+2y)^{17}$. Tìm hệ số của x^8y^9.

A. $2^83^9C_{17}^{9}$. **B.** $2^93^9C_{17}^{8}$. **C.** $2^93^8C_{17}^{8}$. **D.** $2^83^9C_{17}^{8}$.

Câu 11: Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 qủa cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả. Tính xác suất sao cho có ít nhất một quả cầu trắng.

A. $P=\dfrac{200}{210}$. **B.** $P=\dfrac{1}{105}$. **C.** $P=\dfrac{209}{210}$. **D.** $P=\dfrac{2}{7}$.

Câu 12: Một hộp đựng chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Tìm xác suất P để rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên thẻ với nhau có kết quả nhận được là một số chẵn.

A. $P=\dfrac{7}{18}$. **B.** $P=\dfrac{1}{6}$. **C.** $P=\dfrac{13}{18}$. **D.** $P=\dfrac{5}{9}$.

Câu 13: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả cầu đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất P để lấy ra hai quả cùng màu.

A. $P=\dfrac{13}{25}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\dfrac{24}{25}$. **D.** $P=\dfrac{12}{25}$.

Câu 14: Trên một mặt phẳng, 9 đường thẳng song song cắt 10 đường thẳng song song khác thì tạo nên bao nhiêu hình bình hành trên mặt phẳng đó ?

A. 90. **B.** 1630. **C.** 1620. **D.** 180.

Câu 15: Giả sử có khai triển $(1-x)^n + x(1+x)^{n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Biết $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 512$. Hãy tất cả giá trị thực của *n*.

A. $n = 10$. **B.** $n = 100$. **C.** $n = 7$. **D.** $n = 10$ và $n = 9$.

Câu 16: An có 12 cuốn sách tham khảo khác nhau, trong đó có 6 cuốn sách toán, 4 cuốn sách vật lí và 2 cuốn sách hóa học. An muốn xếp chúng vào 3 ngăn A, B, C trên giá sách sao cho mỗi ngăn chứa một loại sách. Hỏi An có bao nhiêu cách xếp?

A. 220. **B.** 1320. **C.** 207360. **D.** 34560.

Câu 17: Cho tập *A* là một tập hợp có 20 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con của tập *A* ?

A. 20. **B.** 20^{20}. **C.** 2^{20}. **D.** 2^{20-1}.

Câu 18: Biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+3x)^n$ là 90. Hãy tìm *n*.

A. $n = 5$. **B.** $n = 9$. **C.** $n = 10$. **D.** $n = 7$.

Câu 19: Trong mặt phẳng có 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau đồng thời cắt 6 đường thẳng đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên bởi 14 đường thẳng đã cho ?

A. 320. **B.** 96. **C.** 420. **D.** 48.

Câu 20: Túi bên phải có 3 bi đỏ, 2 bi xanh; túi bên trái có 4 bi đỏ, 5 bi xanh. Lấy một bi từ mỗi túi một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất *P* sao cho hai bi lấy ra khác màu.

A. $P = \frac{22}{45}$. **B.** $P = \frac{12}{45}$. **C.** $P = \frac{13}{45}$. **D.** $P = \frac{23}{45}$.

Câu 21: Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có An và Bình, vào 10 ghế kê thành hàng ngang, sao cho Hai bạn An và Bình không ngồi cạnh nhau?

A. 10! – 8!. **B.** 8. 8!. **C.** 72. 8!. **D.** 2!.5!.5!.

Câu 22: Một hộp đựng 11 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Tìm xác suất *P* để tổng số ghi trên 6 tấm thẻ ấy là một số lẻ. (**lưu ý:** Tổng là số lẻ: hoặc là l lẻ và 5 chẵn hoặc là 3 lẻ và 3 chẵn hoặc là 5 lẻ và 1 chẵn)

A. $P = \frac{100}{231}$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** $P = \frac{118}{231}$. **D.** $P = \frac{115}{231}$.

Câu 23: Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu một quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ?

A. 18. **B.** 1630. **C.** 1620. **D.** 9.

Câu 24: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6, người ta lập tất cả các số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số trong các số lập được. Tìm xác suất *P* để số được chọn chia hết cho 3.

A. $P = \frac{1}{360}$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = \frac{2}{3}$. **D.** $P = \frac{1}{15}$.

Câu 25: Hai thí sinh *A* và *B* tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tìm xác suất *P* để 3 câu hỏi *A* và 3 câu hỏi *B* chọn là giống nhau.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = \frac{1}{6}$. **D.** $P = \frac{1}{120}$.

Câu 26: Chọn ngẫu nhiên 6 số dương trong tập $\{1;2;3;...;10\}$ và sắp xếp theo thứ tự tăng dần (từ thấp lên cao). Tìm xác suất *P* để số 3 được chọn xếp ở vị trí thứ hai.

A. $P = \dfrac{1}{3}$. **B.** $P = \dfrac{1}{6}$. **C.** $P = \dfrac{1}{2}$. **D.** $P = \dfrac{1}{60}$.

Câu 27: Có ba chiếc hộp *A*, *B*, *C*, mỗi hộp chứa ba chiếc thẻ được đánh số từ 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ. Tìm xác suất *P* để tổng số ghi trên ba tấm thẻ bằng 6.

A. $P = \dfrac{6}{27}$. **B.** $P = \dfrac{1}{27}$. **C.** $P = \dfrac{7}{27}$. **D.** $P = \dfrac{1}{3}$.

Câu 28: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, biết rằng hai số đúng kề nhau phải khác nhau ?

A. 59049. **B.** 27216. **C.** 81000. **D.** 90000.

Câu 29: Số 80041500 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 342. **B.** 243. **C.** 423. **D.** 432.

Câu 30: Một người đi qu lịch mang 3 hộp thịt, 2 hộp quả và 3 hộp sữa. Do trời mưa nên các hộp bị mất nhãn. Người đó chọn ngẫu nhiên 3 hộp. Tính xác suất *P* để trong đó có một hộp thịt, một hộp sữa và một hộp quả.

A. $P = \dfrac{1}{18}$. **B.** $P = \dfrac{1}{3}$. **C.** $P = \dfrac{1}{7}$. **D.** $P = \dfrac{9}{28}$.

Câu 31: Kết quả (b,c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình: $x^2 + bx + c = 0$. Tìm xác suất *P* để phương trình có nghiệm kép.

A. $P = \dfrac{17}{18}$. **B.** $P = \dfrac{17}{36}$. **C.** $P = \dfrac{19}{36}$. **D.** $P = \dfrac{1}{18}$.

Câu 32: Có bao nhiêu đường chéo của thập giác ?

A. 30. **B.** 10. **C.** 35. **D.** 45.

Câu 33: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ . Tìm xác suất *P* để có đúng một trong ba thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

A. $P = \dfrac{2}{15}$. **B.** $P = \dfrac{4}{21}$. **C.** $P = \dfrac{5}{14}$. **D.** $P = \dfrac{5}{42}$.

Câu 34: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tìm xác suất *P* để số đó chia hết cho 3.

A. $P = \dfrac{333}{1000}$. **B.** $P = \dfrac{331}{1000}$. **C.** $P = \dfrac{335}{1000}$. **D.** $P = \dfrac{334}{1000}$.

Câu 35: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2.

A. 5950. **B.** 2720. **C.** 3230. **D.** 340.

Câu 36: Tổ của An và Bình có 7 học sinh. Tìm số cách sắp xếp 7 học sinh ấy theo một hàng dọc mà An đứng đầu hàng, Bình đứng cuối hàng.

A. 240. **B.** 5040. **C.** 216. **D.** 120.

Câu 37: Tìm giá trị của biểu thức $N = 3C_{2009}^0 + 3^2C_{2009}^1 + 3^3C_{2009}^2 + ... + 3^{2010}C_{2009}^{2009}$. là

A. $N = 3^{2010}$. **B.** $N = 3.4^{2009}$. **C.** $N = 4^{2010}$. **D.** $N = 5^{2009}$.

Câu 38: Gọi T_k là số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6, x \neq 0$. Tìm số hạng T_k.

A. $T_4 = 240$. **B.** $T_3 = 420$. **C.** $T_6 = 240$. **D.** $T_3 = 240$.

Câu 39: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ . Tìm xác suất *P* để các thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

A. $P = \dfrac{1}{21}$. **B.** $P = \dfrac{5}{42}$. **C.** $P = \dfrac{7}{42}$. **D.** $P = \dfrac{5}{14}$.

Câu 40: Từ một hộp chứa 16 thẻ đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất P để 4 thẻ được chọn đều đánh số chẵn.

A. $P=\frac{1}{26}$. **B.** $P=\frac{25}{26}$. **C.** $P=1$. **D.** $P=\frac{1}{2}$.

Câu 41: Giải phương trình $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12$.

A. $n=2;n=3$. **B.** $n=2;n=4$. **C.** $n=4;n=6$. **D.** $n=3;n=4$.

Câu 42: Với bốn chữ số 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt ?

A. 24. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 64.

Câu 43: Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau ?

A. 10! – 5!. **B.** 5!.5!. **C.** 2!.5!.5!. **D.** 10!.

Câu 44: Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^2C_n^3+C_n^3C_n^{n-3}=100$.

A. $n=9$. **B.** $n=4$. **C.** $n=2$. **D.** $n=6$.

Câu 45: Tính A_n^2 nếu biết số hạng thứ 6 của khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x.

A. $A_n^2=420$. **B.** $A_n^2=380$. **C.** $A_n^2=3003$. **D.** $A_n^2=480$.

Câu 46: Tìm giá trị của biểu thức $M=C_{2009}^0+2C_{2009}^1+2^2C_{2009}^2+...+2^{2009}C_{2009}^{2009}$. là

A. $M=2009$. **B.** $M=3^{2009}$. **C.** $M=3$. **D.** $M=2010$.

Câu 47: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất P để số được chọn là số chẵn.

A. $P=\frac{2}{7}$. **B.** $P=\frac{3}{7}$. **C.** $P=\frac{1}{3}$. **D.** $P=\frac{91}{210}$.

Câu 48: Cho đa giác đều có 2n cạnh $A_1A_2...A_{2n}$ ($n\geq 2$, n nguyên) nội tiếp trong một đường tròn. Biết rằng số tam giác có 3 đỉnh lấy trong 2n điểm $A_1,A_2,...,A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có 4 đỉnh lấy trong $2n$ điểm $A_1,A_2,...,A_{2n}$. Tìm n.

A. $n=8$. **B.** $n=6$. **C.** $n=4$. **D.** $n=12$.

Câu 49: Trong một đa giác đều bảy cạnh, kẻ các đường chéo. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo, trừ các đỉnh ?

A. 27. **B.** 35. **C.** 840. **D.** 28.

Câu 50: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$.

A. $x=3$ và $x=8$. **B.** $x=7$. **C.** $x=7$ và $x=9$. **D.** $x=8$.

Câu 51: Trong một vòng loại Olympic, trên tám đường bơi, 8 vận động viên không cùng một lúc về đích. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hạng xảy ra ?

A. 42000. **B.** 43020. **C.** 42300. **D.** 40320.

Câu 52: Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2016 có 4 môn thi trắc nghiệm và 4 môn thi tự luận. Một giáo viên được bốc thăm ngẫu nhiên để phụ trách coi thi 5 môn. Tìm xác suất P để giáo viên đó phụ trách coi thi ít nhất 2 môn trắc nghiệm.

A. $P=\frac{13}{14}$. **B.** $P=\frac{2}{7}$. **C.** $P=\frac{1}{4}$. **D.** $P=\frac{2}{5}$.

Câu 53: Ta xếp 5 quả cầu trắng khác nhau và 5 quả cầu đỏ khác nhau vào 10 vị trí theo một dãy, sao cho quả cầu cùng màu không đứng cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy ?

A. 28800. **B.** 14000. **C.** 156. **D.** 240.

Câu 54: Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

Tìm số hạng thứ 5 trong khai triển đó, biết rằng $a_0+a_1+a_2+...+a_n=729$.

A. $T_5 = C_6^5 2^3 x^4$. **B.** $T_5 = C_6^5 2^2 x^4$. **C.** $T_5 = C_6^5 2^5 x^4$. **D.** $T_5 = C_6^5 2^4 x^4$.

Câu 55: Có 6 học sinh và 3 thầy giáo *A, B, C* sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh ?

A. 43200. **B.** 35684. **C.** 55012. **D.** 94536.

Câu 56: Tính tổng *S* của tất cả các số gồm 4 chữ số khác nhau và số đã lập được từ nền $B = \{1; 2; 3; 4\}$ bằng phép hoán vị ?

A. $S = 7\ 777\ 777$. **B.** $S = 66660$. **C.** $S = 5\ 555\ 555$. **D.** $S = 88880$.

Câu 57: Cho số nguyên dương *n* thỏa mãn điều kiện $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$. Gọi T_k là số hạng chứa x^2 trong khai triển theo công thức nhị thức Niu_tơn của biểu thức $P(x) = \left(x + \frac{2}{x^2}\right)^n, x \neq 0$. Tìm số hạng T_k.

A. $T_3 = 211x^2$. **B.** $T_3 = 112x^2$. **C.** $T_2 = 121x^2$. **D.** $T_2 = 112x^2$.

Câu 58: Trong một vòng loại Olympic, trên tám đường bơi, 8 vận động viên không cùng một lúc về đích. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hạng xảy ra ?

A. 42030. **B.** 40320. **C.** 40312. **D.** 40230.

Câu 59: Số 337211875 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 140. **B.** 210. **C.** 120. **D.** 240.

Câu 60: Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất *P* để 2 viên bi được lấy ra cùng màu.

A. $P = \frac{13}{42}$. **B.** $P = \frac{4}{21}$. **C.** $P = \frac{10}{21}$. **D.** $P = \frac{2}{7}$.

Câu 61: Tim hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$.

A. 3001. **B.** 3003. **C.** 2901. **D.** 3010.

Câu 62: Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

A. 108. **B.** 246. **C.** 462. **D.** 642.

Câu 63: Giải phương trình $x^2 - 8x + n = 0$. Biết số nguyên dương *n* thỏa mãn $C_n^3 - 2C_{n-1}^3 + C_{n+2}^3 = 466$.

A. $x = 7$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 3$.

Câu 64: Trong kì thi cuối năm lớp 11, xác suất để Bình đạt điểm giỏi môn toán là 0,92; môn văn là 0,88. Tìm xác suất *P* để Bình đạt điểm giỏi cả hai môn toán và văn.

A. 0,5. **B.** 0,8096. **C.** 0,9904. **D.** 0,0096.

Câu 65: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 6 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 600.000 ?

A. 30360. **B.** 393600. **C.** 39360. **D.** 33960.

Câu 66: Số 2389976875 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 420. **B.** 360. **C.** 120. **D.** 240.

Câu 67: Một tổ có 7 nam sinh và 4 nữ sinh. Giáo viên cần chọn 3 học sinh xếp bàn ghế của lớp, trong đó có ít nhất 1 nam sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

A. 28. **B.** 161. **C.** 990. **D.** 165.

Câu 68: Số 653672250 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 360. **B.** 260. **C.** 240. **D.** 144.

Câu 69: Tìm số nguyên dương *n* thỏa mãn: $\frac{1}{A_n^{n-1}} + \frac{1}{C_{n+1}^{n-1}} + \frac{1}{A_{n+1}^2} = 1$.

A. $n = 6$. **B.** $n = 2$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 3$.

Câu 70: Cho *n* số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm tất cả các giá trị của *n*.

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 4$ và $n = 2$. **D.** $n = 7$ và $n = 9$.

Câu 71: Từ ba đỉnh của tam giác *ABC* có thể lập được bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{O}$.

A. 12(vectơ). **B.** 6(vectơ). **C.** 9(vectơ). **D.** 3(vectơ).

Câu 72: Tìm số nguyên dương *n* thỏa mãn: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 3C_{n+3}^2 = 45$.

A. $n = 3$ và $n = 2$. **B.** $n = 4$ và $n = 1$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 3$.

Câu 73: Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_{n+1}^3 - C_n^{n-2} = C_n^{n-1}.C_{n+4}^1$.

A. $n = 12$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 11$.

Câu 74: Số 3969000 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 40. **B.** 240. **C.** 120. **D.** 432.

Câu 75: Tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$ thuộc khoảng nào ?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(0;4)$.

Câu 76: Tìm tất cả giá trị n là số nguyên dương thoả mãn bất phương trình: $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$.

A. $n = 4$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 3, n = 5$. **D.** $n = 3, n = 4$.

Câu 77: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều số đứng chính giữa thì giống nhau ?

A. 920. **B.** 1000. **C.** 720. **D.** 900.

Câu 78: Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

A. 1260. **B.** 2400. **C.** 1280. **D.** 4200.

Câu 79: Một hộp đựng 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tìm xác suất *P* để chọn được hai viên bi cùng màu.

A. $P = \frac{47}{66}$. **B.** $P = \frac{6}{66}$. **C.** $P = \frac{12}{66}$. **D.** $P = \frac{19}{66}$.

Câu 80: Trên tập $B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ có thể lập thành được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số khác nhau.

A. 5400. **B.** 4500. **C.** 4050. **D.** 5040.

Câu 81: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

A. $x = 11$ và $x = 5$. **B.** $x = 11$.

C. $x = 11$ và $x = 10$. D, $x = 5$.

Câu 82: Một hộp đựng bốn viên bi xanh, ba viên bi đỏ và hai viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tìm xác suất *P* để chọn được hai viên bi khác màu.

A. $P = \frac{9}{13}$. **B.** $P = \frac{2}{9}$. **C.** $P = \frac{13}{18}$. **D.** $P = \frac{5}{18}$.

Câu 83: Một bài trắc nghiệm khách quan có 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời. Hỏi có bao nhiêu phương án chọn trả lời ?

A. 4^{10}. **B.** 10^4. **C.** 4. **D.** 40.

Câu 84: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và nằm trong khoảng (2000; 4000).

A. 1006. **B.** 1012. **C.** 1016. **D.** 1008.

Câu 85: Tìm giá trị của biểu thức $K = C_{2009}^0 - C_{2009}^1 + C_{2009}^2 - ... + (-1)^{2009} C_{2009}^{2009}$.

A. $K = 2009$. **B.** $K = 2010$. **C.** $K = 2^{2009}$. **D.** $K = 0$.

Câu 86: Cho một đa giác lồi có 15 cạnh. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{O}$ với điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của đa giác ?

A. 225(vectơ). **B.** 30(vectơ). **C.** 105(vectơ). **D.** 210(vectơ).

Câu 87: Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_{n+1}^2.A_n^2 - \left(A_{2n}^1\right)^2 = 4n^3$.

A. $n=9$. **B.** $n=16$. **C.** $n=12$. **D.** $n=5$.

Câu 88: Gọi T_k là số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n, x\neq 0$, biết rằng: $C_n^1+C_n^3=13n$ (n là số tự nhiên lớn hơn 2, x là số thực khác 0). Tìm số hạng T_k.

A. $T_7=210$. **B.** $T_6=310$. **C.** $T_5=120$. **D.** $T_5=210$.

Câu 89: Kết quả (b,c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình: $x^2+bx+c=0$. Tìm xác suất P để phương trình vô nghiệm.

A. $P=\frac{17}{36}$. **B.** $P=\frac{17}{18}$. **C.** $P=\frac{19}{36}$. **D.** $P=\frac{1}{18}$.

Câu 90: Một đoàn đại biểu gồm 4 học sinh được chọn từ một tổ gồm 5 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong đó có ít nhất một nam và ít nhất một nữ ?

A. 124. **B.** 3024. **C.** 126. **D.** 120.

Câu 91: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(2+x)^n$, biết: $3^nC_n^n-3^{n-1}C_n^{n-1}+3^{n-2}C_n^{n-2}-3^{n-3}C_n^{n-3}+\ldots+(-1)^nC_n^n=2048$.

A. 11. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 22.

Câu 92: Hỏi có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ cái từ bảng chữ cái Tiếng Anh ?

A. 7893600. **B.** 56780. **C.** 120. **D.** 65780.

Câu 93: Trong khai triển của $(1+ax)^n$ ta có số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là 24x, số hạng thứ ba là $252x^2$. Hãy tìm a và n .

A. $\begin{cases}a=3\\n=4\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=3\\n=8\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=8\\n=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=2\\n=8\end{cases}$.

Câu 94: Trong một trò chơi điên tử, xác suất để An thắng một trân là 0,4 (không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trân để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95?

A. 9 trận. **B.** 5 trận. **C.** 7 trận. **D.** 6 trận.

Câu 95: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 ?

A. 80640. **B.** 5040. **C.** 2520. **D.** 3024.

Câu 96: Trong khai triển của $(1-2x)^8$. Tìm hệ số của x^2.

A. 212. **B.** 112. **C.** 122. **D.** 121.

Câu 97: Tìm giá trị của biểu thức $H=C_{2009}^0+C_{2009}^1+C_{2009}^2+\ldots+C_{2009}^{2009}$.

A. $H=2009$. **B.** $H=0$. **C.** $H=2^{2009}$. **D.** $H=2$.

Câu 98: Gọi T_k là số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}, x\neq 0$. Tìm số hạng T_k.

A. $T_{10}=48620$. **B.** $T_9=48620$. **C.** $T_{10}=48820$. **D.** $T_{11}=43758$.

Câu 99: Lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ?

A. 2652. **B.** 1326. **C.** 450. **D.** 104.

Câu 100: Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Gọi P là xác suất trong 4 quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh. Khi đó:

A. $P=\frac{9}{210}$ **B.** $P=\frac{97}{105}$ **C.** $P=\frac{1}{15}$ **D.** $P=\frac{194}{220}$

Câu 101: Một hộp chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 10 viên bi. Tìm xác suất P để rút được 5 viên bi trắng, 3 viên bi đen và 2 viên bi đỏ.

A. $P = \frac{27}{65}$. **B.** $P = \frac{45}{286}$. **C.** $P = \frac{35}{5040}$. **D.** $P = \frac{11}{3003}$.

Câu 102: Kết quả (b,c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình: $x^2 + bx + c = 0$. Tìm xác suất P để phương trình có nghiệm.

A. $P = \frac{1}{18}$. **B.** $P = \frac{17}{36}$. **C.** $P = \frac{19}{36}$. **D.** $P = \frac{17}{18}$.

Câu 103: Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có An và Bình vào 10 ghế kê thành hàng ngang, sao cho hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau ?

A. 10!. **B.** 9!. **C.** 18. 8!. **D.** 2.10!.

Câu 104: Số 283618125 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 120. **B.** 240. **C.** 220. **D.** 420.

Câu 105: Gieo hai con súc sắc cân đối. Tìm xác suất P để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 7.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = \frac{1}{6}$. **C.** $P = \frac{7}{36}$. **D.** $P = \frac{2}{9}$.

Câu 106: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt ?

A. 2700. **B.** 7216. **C.** 26216. **D.** 27216.

Câu 107: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ . Tìm xác suất P để không thẻ nào trong ba thẻ các ghi số 1, 2, 3 được rút.

A. $P = \frac{1}{21}$. **B.** $P = \frac{5}{14}$. **C.** $P = \frac{5}{9}$. **D.** $P = \frac{7}{25}$.

Câu 108: Một đa giác lồi 20 cạnh có bao nhiêu đường chéo ?

A. 180. **B.** 380. **C.** 170. **D.** 190.

Câu 109: Tìm giá trị của biểu thức $H = C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$.

A. $H = 210$. **B.** $H = 9$. **C.** $H = 81$. **D.** $H = 18$.

Câu 110: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{C_n^1} = \frac{1}{n-1}$.

A. $n = 7$. **B.** $n = 9$. **C.** $n = 12$. **D.** $n = 4$.

Câu 111: Một hộp đựng bốn viên bi xanh, ba viên bi đỏ và hai viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tìm xác suất P để chọn được hai viên bi cùng màu.

A. $P = \frac{5}{9}$. **B.** $P = \frac{5}{18}$. **C.** $P = \frac{5}{16}$. **D.** $P = \frac{13}{18}$.

Câu 112: Một câu lạc bộ Toán học lúc thành lập có 14 thành viên, cần bầu chọn ra một thành viên làm giám đốc CLB, một thành viên làm phó giám đốc CLB và một thành viên làm kế toán trưởng CLB. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để bầu mà không có ai kiêm nhiệm ?

A. 2184. **B.** 364. **C.** 42. **D.** 14!.

Câu 113: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng (2000; 3000) có thể tạo nên từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 nếu các chữ số đó không nhất thiết khác nhau.

A. 108. **B.** 36. **C.** 48. **D.** 72.

Câu 114: Một tổ gồm có 8 nam và 6 nữ. Cần chọn một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

A. 240240. **B.** 840. **C.** 120. **D.** 2002.

Câu 115: Số 2025000 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 240. **B.** 120. **C.** 221. **D.** 210.

Câu 116: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Hỏi bao nhiêu là số chẵn ?

A. 120. **B.** 100. **C.** 60. **D.** 90.

Câu 117: Cho đa giác đều n đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 27 đường chéo.

A. $n=9$. **B.** $n=10$. **C.** $n=12$. **D.** $n=7$.

Câu 118: Cho tập *A* gồm n phần tử $(n\geq 4)$. Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của *A* bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm *n*.

A. $n=9$. **B.** $n=18$. **C.** $n=20$. **D.** $n=8$.

Câu 119: Giải phương trình $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$.

A. $n=4$. **B.** $n=5$ và $n=-9$. **C.** $n=5$. **D.** $n=9$.

Câu 120: Có 4 con đường từ *A* đến *B*, 2 con đường nối từ *B* đến *C* và 3 con đường nối từ *C* đến D. Có bao nhiêu cách đi từ *A* đến *D* rồi quay lại *A* ?

A. 504. **B.** 576. **C.** 192. **D.** 675.

Câu 121: Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau ?

A. 120. **B.** 360. **C.** 720. **D.** 30.

Câu 122: Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Biết rằng $a_0+a_1+a_2+...+a_n=729$. Tìm *n*.

A. $n=9$. **B.** $n=5$. **C.** $n=6$. **D.** $n=7$.

Câu 123: Túi bên phải có 3 bi đỏ, 2 bi xanh; túi bên trái có 4 bi đỏ, 5 bi xanh. Lấy một bi từ mỗi túi một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất *P* sao cho hai bi lấy ra cùng màu.

A. $P=\frac{13}{45}$. **B.** $P=\frac{23}{45}$. **C.** $P=\frac{22}{45}$. **D.** $P=\frac{12}{45}$.

Câu 124: Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau ?

A. 2.5!. **B.** 9!. **C.** 5!.5!. **D.** 10!.

Câu 125: Hỏi từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau ?

A. 192. **B.** 72. **C.** 48. **D.** 24.

Câu 126: Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm bốn điểm phân biệt ?

A. 16. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 18.

Câu 127: Giải phương trình $x^2-2nx-5=0$. Biết số nguyên dương *n* thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_5^n=9$.

A. $x=2\pm\sqrt{5}$. **B.** $x=4\pm\sqrt{21}$. **C.** $x=\pm 4$. **D.** $x=4\pm\sqrt{2}$.

Câu 128: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Tìm xác suất *P* để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp.

A. $P=\frac{6}{16}$. **B.** $P=\frac{1}{16}$. **C.** $P=\frac{2}{16}$. **D.** $P=\frac{4}{16}$.

Câu 129: Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông) ?

A. 210. **B.** 105. **C.** 21. **D.** 120.

Câu 130: Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự. Mỗi ông bắt tay một lần với mọi người trừ vợ mình. Các bà không ai bắt tay với nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay ?

A. 216. **B.** 234. **C.** 78. **D.** 185.

Câu 131: Có 5 người đến buổi hòa nhạc. Tìm số cách xếp 5 người này vào một hàng có 5 ghế.

A. 10. **B.** 5. **C.** 125. **D.** 120.

Câu 132: Trong các số tự nhiên từ 100 đến 999 có bao nhiêu số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần ?

A. 204. **B.** 120. **C.** 168. **D.** 312.

Câu 133: Tìm giá trị của biểu thức $F=1-10C_{2n}^1+10^2C_{2n}^2-10^3C_{2n}^3+...-10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+10^{2n}$.

A. $F = 81^{2n}$. **B.** $F = 10^n$. **C.** $F = 10^{2n}$. **D.** $F = 81^n$.

Câu 134: Tìm số nguyên dương $n: C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$.

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 9$ và $n = 7$. **D.** $n = 4$ và $n = 5$.

Câu 135: Viết ngẫu nhiên một số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và 5 chữ số đó không có chữ số 0. Tìm xác suất P để viết được ít nhất 2 chữ số là số chẵn.

A. $P = \frac{1}{126}$. **B.** $P = \frac{1}{6}$. **C.** $P = \frac{10}{63}$. **D.** $P = \frac{5}{6}$.

Câu 136: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tìm xác suất P để số đó chia hết cho 5.

A. $P = 0,4$. **B.** $P = 0,7$. **C.** $P = 0,5$. **D.** $P = 0,2$.

Câu 137: Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lý nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ. Cần có cả nhà Toán học và nhà Vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách lập ?

A. 1320. **B.** 90. **C.** 32. **D.** 220.

Câu 138: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả cầu đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất P để lấy ra hai quả khác màu.

A. $P = \frac{3}{5}$. **B.** $P = \frac{12}{25}$. **C.** $P = \frac{24}{25}$. **D.** $P = \frac{13}{25}$.

Câu 139: Có bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó có đúng hai chữ số 2 ?

A. 13 640 319. **B.** 10 640 319. **C.** 9 920 232. **D.** 3 720 087.

Câu 140: Từ 7 chữ số 0;1;2;3;4;5;6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

A. 2520. **B.** 21. **C.** 1260. **D.** 5040.

Câu 141: Trong kì thi cuối năm lớp 11, xác suất để Bình đạt điểm giỏi môn toán là 0,92; môn văn là 0,88. Tìm xác suất P để Bình đạt điểm giỏi ít nhất một môn.

A. 0,9904. **B.** 0,5. **C.** 0,8096. **D.** 0,0096.

Câu 142: Giải bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 - n \geq 0$. Biết số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^3 - A_{n+1}^{n-2} + 90 = 0$.

A. $x \geq 2$. **B.** $-3 \leq x \leq 1$. **C.** $x \leq -4$. **D.** $-3 < x < 2$.

Câu 143: Một hộp chứa 12 thẻ, trong đó có 2 thẻ ghi số 1; 4 thẻ ghi số 5 và 6 thẻ ghi số 10. Chọn ngẫu nhiên 6 thẻ. Tìm xác suất P để các số được chọn có tổng các số không nhỏ hơn 50.

A. $P = \frac{132}{924}$. **B.** $P = \frac{37}{924}$. **C.** $P = \frac{127}{924}$. **D.** $P = \frac{99}{924}$.

Câu 144: Gieo một con súc sắc cân đối ba lần. Tìm xác suất P để có đúng hai lần xuất hiện mặt 6 chấm.

A. $P = \frac{15}{216}$. **B.** $P = \frac{5}{216}$. **C.** $P = \frac{5}{6}$. **D.** $P = \frac{1}{216}$.

Câu 145: Hỏi có bao nhiêu số chẵn gồm 6 số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ ?

A. 40000. **B.** 24000. **C.** 48000. **D.** 42000.

Câu 146: Học sinh A thiết kế bảng điều kiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều kiển. Tìm xác suất P để B mở được cửa phòng học đó.

A. $P = \frac{2}{45}$. **B.** $P = \frac{1}{45}$. **C.** $P = \frac{1}{90}$. **D.** $P = \frac{1}{9}$.

Câu 147: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

A. 10. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 148: Một chiếc tàu của tập đoàn dầu khí quốc gia Việt Nam khoan thăm dò dầu khí trên thềm lục địa tỉnh Bình Thuận có xác suất khoan trúng túi dầu là *P*. Tìm *P* biết rằng trong hai lần khoan độc lập, xác suất để chiếc tàu đó khoan trúng túi dầu ít nhất một lần là 0,36.

A. $P=\frac{3}{5}$. **B.** $P=\frac{5}{9}$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=\frac{1}{5}$.

Câu 149: Giải bất phương trình $2C_{x+1}^2+3A_x^2<30$.

A. $-\frac{5}{2}<x<3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $0<x\le 3$.

Câu 150: Gieo hai con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tìm xác suất *P* để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8.

A. $P=\frac{5}{36}$. **B.** $P=\frac{1}{12}$. **C.** $P=\frac{5}{6}$. **D.** $P=\frac{2}{21}$.

Câu 151: Từ một hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen lấy ngẫu nhiên hai quả. Tìm xác suất *P* để lấy được hai quả cầu trắng .

A. $P=\frac{12}{30}$. **B.** $P=\frac{9}{30}$. **C.** $P=\frac{10}{30}$. **D.** $P=\frac{6}{30}$.

Câu 152: Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh bàn tròn. Tìm xác suất *P* để cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

A. $P=\frac{2880}{482880}$. **B.** $P=\frac{2880}{362880}$. **C.** $P=\frac{2990}{362990}$. **D.** $P=\frac{3880}{363880}$.

Câu 153: Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta đã giử đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất *P* để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

A. $P=\frac{5}{11}$. **B.** $P=\frac{3}{11}$. **C.** $P=\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{5}$.

Câu 154: Gieo ba con súc sắc cân đối. Tìm xác suất *P* để số chấm xuất hiện trên ba con của ba con súc sắc nhu nhau.

A. $P=\frac{1}{36}$. **B.** $P=\frac{1}{216}$. **C.** $P=\frac{12}{216}$. **D.** $P=\frac{3}{216}$.

Câu 155: Gieo một con súc sắc cân đối hai lần. Tìm xác suất *P* để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm.

A. $P=\frac{2}{9}$. **B.** $P=\frac{12}{36}$. **C.** $P=\frac{1}{6}$. **D.** $P=\frac{11}{36}$.

Câu 156: Có bao nhiêu cách xếp năm bạn học sinh A,B,C,D và E vào một chiếc ghế dài đủ năm chỗ ngồi sao cho hai bạn *A* và *E* ngồi ở hai đầu ghế ?

A. 9. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 24.

Câu 157: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

A. 20. **B.** 925. **C.** 952. **D.** 120.

Câu 158: Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 qủa cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả. Tính xác suất *P* sao cho bốn quả cầu lấy ra cùng màu.

A. $P=\frac{1}{14}$. **B.** $P=\frac{7}{120}$. **C.** $P=\frac{1}{210}$. **D.** $P=\frac{8}{105}$.

Câu 159: Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tìm xác suất *P* để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.

A. $P=\frac{11}{12}$. **B.** $P=\frac{1}{144}$. **C.** $P=\frac{121}{144}$. **D.** $P=\frac{23}{144}$.

Câu 160: Cho n số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$.

A. $-35x^5$. **B.** $-\frac{35}{14}x^5$. **C.** $-\frac{35}{16}x^5$. **D.** $-\frac{37}{16}x^5$.

Câu 161: Cho tập nền $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau ?

A. 213. **B.** 30. **C.** 312. **D.** 120.

Câu 162: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng (2000; 3000) có thể tạo nên từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 nếu các chữ số đó khác nhau.

A. 36. **B.** 60. **C.** 120. **D.** 108.

Câu 163: Giải phương trình $A_x^2.C_x^{x-1}=48$.

A. $x=4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$ và $x=3$.

Câu 164: Có 4 con đường từ A đến B, 2 con đường nối từ B đến C và 3 con đường nối từ C đến D . Có bao nhiêu cách đi từ A đấn D mà qua B và C chỉ một lần ?

A. 8. **B.** 42. **C.** 24. **D.** 12.

Câu 165: Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tìm xác suất P để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.

A. $P=\frac{5}{216}$. **B.** $P=\frac{5}{216}$. **C.** $P=\frac{9}{216}$. **D.** $P=\frac{25}{216}$.

Câu 166: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(1+x)^{12}$.

A. 297. **B.** 792. **C.** 729. **D.** 972.

Câu 167: Gieo hai con súc sắc cân đối. Tìm xác suất P để hiệu số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 2.

A. $P=\frac{1}{12}$. **B.** $P=\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{5}{36}$. **D.** $P=\frac{1}{9}$.

Câu 168: Một hộp đựng 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tìm xác suất P để chọn được hai viên bi khác màu.

A. $P=\frac{19}{66}$. **B.** $P=\frac{47}{66}$. **C.** $P=\frac{12}{66}$. **D.** $P=\frac{6}{66}$.

Câu 169: Cho đa giác đều n đỉnh ($n\in\mathbb{N}, n\geq 3$). Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. $n=27$. **B.** $n=18$. **C.** $n=21$. **D.** $n=15$.

Câu 170: Có bao nhiêu cách xếp năm bạn học sinh A,B,C,D và E vào một chiếc ghế dài đủ năm chỗ ngồi sao cho bạn C ngồi chính giữa?

A. 16. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 42.

Câu 171: Một con súc sắc cân đối được gieo ba lần. Tìm xác suất P để tổng số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đầu bằng số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba.

A. $P=\frac{10}{216}$. **B.** $P=\frac{16}{216}$. **C.** $P=\frac{15}{216}$. **D.** $P=\frac{12}{216}$.

Câu 172: Trên tập $B=\{1;2;3;4;5;6;7\}$ có thể lập thành được bao số tự nhiên gồm bảy chữ số khác nhau.

A. 4050. **B.** 4500. **C.** 5400. **D.** 5040.

Câu 173: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+C_x^{x-3}+...+C_x^{x-10}=1023$.

A. $x=10$. **B.** $x=11$ và $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$ và $x=9$.

Câu 174: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

A. $C_{12}^{8}.x^8$. **B.** $C_{12}^{4}.x^8$. **C.** $C_{8}^{2}.x^8$. **D.** $C_{10}^{8}.x^8$.

Câu 175: Số 31752000 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 420 **B.** 120 **C.** 240 **D.** 128

Câu 176: Một tập hợp có 100 phần tử. Hỏi nó có bao nhiêu tập con có nhiều hơn 2 phần tử ?

A. $2^{100}-5051$. **B.** $2^{100}+5051$. **C.** 2^{100}. **D.** 5051.

Câu 177: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 6000 ?

A. 1008. **B.** 24000. **C.** 3003. **D.** 1800.

Câu 178: Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, có bao nhiêu cách chọn một số hoặc là số chẵn hoặc là số nguyên tố ?

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 179: Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các Trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 2 đội của Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

A. 2900. **B.** 2300. **C.** 2090. **D.** 9020.

Câu 180: Giải bất phương trình sau: $\frac{A_{n+4}^{4}}{P_{n+2}}<\frac{15}{P_{n-1}}$.

A. $n=4,n=5,n=6$. **B.** $n=2,n=3,n=4$. **C.** $n=3,n=2,n=5$. **D.** $n=3,n=4,n=5$.

Câu 181: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tìm xác suất *P* để tích nhận được là số lẻ.

A. $P=\frac{5}{18}$. **B.** $P=\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{13}{18}$. **D.** $P=\frac{1}{6}$.

Câu 182: Số 360 có bao nhiêu ước nguyên dương ?

A. 24. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 42.

Câu 183: Giải phương trình $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=2^{20}-1$.

A. $n=10$ và $n=11$. **B.** $n=10$. **C.** $n=11$. **D.** $n=11$ và $n=7$.

ĐÁP ÁN
CHƯƠNG II. TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A																				
B																				
C																				
D																				

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
A																				
B																				
C																				
D																				

	181	182	183
A			
B			
C			
D			

Chương III
DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:
B1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$
B2. Giả thiết mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq 1$) (giả thiết quy nạp)
B3. Chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$
2. Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \geq p, (p \in \mathbb{N}, p > 1)$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:
B1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = p$
B2. Giả thiết mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ (giả thiết quy nạp)
B3. Chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ (1)

HD Giải

B1: $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng 1^2. Hệ thức (1) đúng.
B2. Đặt $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 1$) , nghĩa là: $S_k = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ (giả thiết quy nạp)
Ta phải chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, tức là:
$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$
Từ giả thiết quy nạp ta có: $S_{k+1} = S_k + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.
Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (2)

HD Giải

Với $n = 1$, ta có vt = 1 = $\frac{1(1+1)}{2} = vp$. Vậy hệ thức (2) đúng
Đặt $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là
$S_k = 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$,
tức là: $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
Từ giả thiết quy nạp ta có:
$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
Vậy hệ thức (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.3. Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (3)

HD Giải

Khi $n = 1$: Hệ thức (3) đúng vì: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$

Đặt $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là

$S_k = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Ta phải đi chứng minh (3) đúng với n = k +1.

Ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$

Điều này chứng tỏ (3) đúng với $n = k$ +1. Vậy hệ thức (3) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.4. Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (4)

HD✍Giải

Khi $n = 1$: Hệ thức (4) đúng

Đặt $S_n = 1^3 + 2^3 + . . . + n^3$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là

$S_k = 1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải đi chứng minh (4) đúng với $n = k$ +1.

Ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Vậy hệ thức (4) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.5. Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ thì $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1) = n^2(n+1)$ (5)

HD✍Giải

Khi $n = 1$: Hệ thức (5) đúng

Đặt $S_n = 1.2 + 2.5 + 3.8 + ...+ n(3n - 1)$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là:

$S_k = 1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + k(3k-1) = k^2(k+1)$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải đi chứng minh (5) đúng với $n = k$ +1. Ta có:

$S_{k+1} = S_k + (k+1)[3(k+1)-1] = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2+3k+2) = (k+1)^2(k+2)$

Vậy hệ thức (5) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.6. Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ thì $2 + 5 + 8 + ... + 3n - 1 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ (6)

HD✍Giải

Khi $n = 1$, Hệ thức (6) đúng

Đặt $S_n = 2 + 5 + 8 + ... + 3n - 1$.Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là

$S_k = 2 + 5 + 8 + ... + 3k - 1 = \dfrac{k(3k+1)}{2}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải đi chứng minh (6) đúng với $n = k$ +1.

Ta có: $S_{k+1} = S_k + 3(k+1) - 1 = \dfrac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \dfrac{3k + k + 6k + 4}{2} = \dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$

Vậy hệ thức (6) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.7. Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ (7)

HD✍Giải

Khi $n = 1$, Hệ thức (7) đúng

Đặt $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n}$.Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là

$S_k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2^k - 1}{2^k}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải đi chứng minh (7) đúng với n = k +1.

Ta có: $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$

Vậy hệ thức (7) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 1.8. Chứng minh rằng $n\in\mathbb{N}^*$ thì $3+9+27+...+3^n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-3\right)$ (8)

HD Giải

Với n = 1: Hệ thức (8) đúng

Đặt $S_n = 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k\ge 1$), nghĩa là

$S_k=3+9+27+...+3^k=\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-3\right)$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải đi chứng minh (8) đúng với $n = k+1$. Ta có: $S_{k+1}=S_k+3^{k+1}=\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-3\right)+3^{k+1}=\frac{1}{2}\left(3^{(k+1)+1}-3\right)$

Vậy hệ thức (8) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 1.9. Chứng minh rằng $1.2^2+2.3^2+...+(n-1).n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ (9) với mọi số nguyên $n\ge 2$

HD Giải

Với n = 2, ta có $1.2^2=\frac{2(2^2-1)(3.2+2)}{12}$. Như vậy (9) đúng với n = 2.

Giả sử (9) đúng với khi $n = k$, $k\ge 2$, nghĩa là $1.2^2+2.3^2+...+(k-1).k^2=\frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh (9) đúng với n = k + 1. Ta có:

$$S_{k+1}=S_k+k(k^2+1)=\frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}+k(k^2+1)=\frac{k(k+1)[(k-1)(3k+2)+12(k+1)]}{12}$$

$$=\frac{k(k+1)(3k^2+11k+10)}{12}=\frac{k(k+1)[3k(k+2)+5(k+2)]}{12}=\frac{(k+1)(k^2+2k)(3k+5)}{12}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2]}{12}$$

Điều này chứng tỏ (9) cũng đúng với $n = k + 1$. Vậy (9) đúng với mọi $n\ge 2$

Bài 1.10. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có

a) n^3-n chia hết cho 3 (a)

b) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133 (b)

c) $2n^3-3n^2+n$ chia hết cho 6. (c)

HD Giải

a) Đặt $A_n = n^3 - n$.

Với n = 1, ta có $A_1=0\,\vdots\,3$

Giả sử $A_k=(k^3-k)\,\vdots\,3$, ($k\ge 1$)(giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh $A_{k+1}\,\vdots\,3$. Ta có:

$A_{k+1}=(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=(k^3-k)+3(k^2+k)=S_k+3(k^2+k)$

Theo giả thiết quy nạp $A_k=(k^3-k)\,\vdots\,3$, hơn nữa $3(k^2+k)\,\vdots\,3$. Nên $A_{k+1}\,\vdots\,3$

Vậy $A_n = n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

b) Đặt $B_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

Với n = 1, ta có $B_1=133\,\vdots\,133$

Giả sử $B_k=(11^{k+11}+12^{2k-1})\,\vdots\,133$, ($k\ge 1$)(giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $B_{k+1}\,\vdots\,133$. Ta có:

$B_{k+1} = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}.12^2 = 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}(11+133) = 11A_k + 13312^{2k-1}$, theo giả thiết quy nạp $B_k = (11^{k+11} + 12^{2k-1}) \vdots 133$, hơn nữa 133.12^{2k-1} cũng chia hết cho 133. Nên $B_{k+1} \vdots 133$

Vậy $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133

c) Đặt $C_n = 2n^3 - 3n^2 + n$

Với $n = 1$, ta có $C_1 = 0 \vdots 6$

Giả sử $C_k = (2k^3 - 3k^2 + k) \vdots 6$, ($k \geq 1$)(giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh $C_{k+1} \vdots 6$. Ta có:

$C_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) = (2k^3 - 3k^2 + k) + 6k^2$, theo giả thiết quy nạp

$C_k = (2k^3 - 3k^2 + k) \vdots 6$, hơn nữa $6k^2 \vdots 6$. Nên $C_{k+1} \vdots 6$

Vậy $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Bài 1.11. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $A_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có A_n chia hết cho 5.

HD✍Giải

Với $n = 1$, ta có $A_1 = 7.2^{2.1-2} + 3^{2.1-1} = 7 + 3 = 10 \vdots 5$ đúng.

Giả sử $A_k = 7.2^{2.k-2} + 3^{2k-1} \vdots 5$, ($k \geq 1$)(giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 5$.

Ta có:

$A_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1} = 4(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1} = 4A_k + 5.3^{2k-1}$.

Theo giả thiết quy nạp $A_k = 7.2^{2.k-2} + 3^{2k-1} \vdots 5$, hơn nữa $5.3^{2k-1} \vdots 5$, nên $A_{k+1} \vdots 5$

Vậy $A_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho với mọi n nguyên dương.

Bài 1.12. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $A_n = 5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có A_n chia hết cho 19.

HD✍Giải

Khi $n = 1$, ta có $A_1 = 5.2^{3.1-2} + 3^{3.1-1} = 19 \vdots 19$

Giả sử $A_k = (5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}) \vdots 19$, ($k \geq 1$)(giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 19$.

Ta có: $A_{k+1} = 5.2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 8\left(5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) + 19.3^{3k-1} = 8A_k + 19.3^{3k-1}$, theo giả thiết quy nạp

$A_k = (5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}) \vdots 19$, hơn nữa $19.3^{3k-1} \vdots 19$. Nên $A_{k+1} \vdots 19$

Vậy $A_n = 5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19 với mọi n nguyên dương.

Bài 1.13. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3 b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6 d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7

HD✍Giải

a) Đặt $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

Khi $n = 1$, ta có $S_1 = 9 \vdots 3$. Giả sử $S_k = (k^3 + 3k^3 + 5k) \vdots 3$,($k \geq 1$),(giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $S_{k+1} \vdots 3$. Ta có:

$S_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 1 + 5k + 5$

$= k^3 + 3k^2 + 5k + 3k^2 + 9k + 9 = S_k + 3(k^2 + 3k + 3)$

Theo giả thiết quy nạp thì $S_k = (k^3 + 3k^3 + 5k) \vdots 3$, hơn nữa $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ nên $S_{k+1} \vdots 3$

Vậy $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chi hết cho 3, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

b) Đặt $S_n = 4^n + 15n - 1$

Với $n = 1$, ta có $S_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18 \vdots 9$.Giả sử $S_k = (4^k + 15k - 1) \vdots 9$,($k \geq 1$),(giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $S_{k+1} \vdots 9$. Ta có:

$S_{k+1} = (4^{k+1} + 15(k+1) - 1) = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 = 4S_k - 9(5k - 2)$

Theo giả thiết quy nạp thì $S_k = (4^k + 15k - 1)\vdots 9$ nên $4S_k \vdots 9$, hơn nữa $9(5k-2)\vdots 9$, nên $S_{k+1}\vdots 9$

Vậy Đặt $S_n = 4^n + 15n - 1$ chi hết cho 9, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Đặt $S_n = n^3 + 11n$

Với $n = 1$, ta có $S_1 = 1^3 + 11.1 = 12 \vdots 6$. Giả sử $S_k = (k^3 + 11k)\vdots 6$, ($k \geq 1$),(giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh $S_{k+1}\vdots 6$

Ta có: $S_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4) = S_k + 3(k^2 + k + 4)$

Theo giả thiết quy nạp thì $S_k = (k^3 + 11k)\vdots 6$, hơn nữa: $k^2 + k + 4 = k(k+1) + 4$ là số chẵn, nên $S_{k+1}\vdots 6$.

Vậy $S_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

d) Đặt $S_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Ta chứng minh tương tư.

Bài 1.14. Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}; n \in \mathbb{N}^*$

a) Tính S_1, S_2, S_3

b) Dự đoán công thức S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

HD Giải

a) $S_1 = \frac{1}{2}; S_2 = \frac{2}{3}; S_3 = \frac{3}{4}$

b) Ta viết lại: $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}; S_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}; S_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$.

Ta có thể dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$ (1)

Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp

Khi $n = 1$, $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử đẳng thức (1) đúng với $n = k$, $k \geq 1$ (giả thiết quy nạp), nghĩa là:

$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$. Ta phải chứng minh nó đúng với $n = k + 1$, tức là: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Ta có: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$,

nên đẳng thức (1) đúng với $n = k + 1$. Vậy đẳng thức (1) được chứng minh

Bài 1.15. Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4

b) Dự đoán công thức S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

HD Giải

a) $S_1 = \frac{1}{5}; S_2 = \frac{2}{9}; S_3 = \frac{3}{13}; S_4 = \frac{4}{17}$

b) Ta viết lại: $S_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4.1+1}; S_2 = \frac{2}{9} = \frac{2}{4.2+1}; S_3 = \frac{3}{13} = \frac{3}{4.3+1}; S_4 = \frac{4}{17} = \frac{4}{4.4+1}$.

Ta có thể dự đoán $S_n = \frac{n}{4n+1}$

Chứng minh tương tự như bài 1.14

Bài 1.16. Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

HD Giải

Với n = 4, ta có tứ giác và nó có hai đường chéo.

Thay n = 4 vào công thức, ta có số đường chéo của tứ giác : $\frac{4(4-3)}{2}=2$. Vậy công thức đúng với n = 4

Giả sử đa giác lồi k cạnh ($k \geq 4$) có số đường chéo $\frac{k(k-3)}{2}$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh công thức đúng với k + 1, nghĩa là phải chứng minh đa giác lồi k + 1 cạnh có số đường chéo là: $\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$

Nối A_1, A_k, ta được đa giác k cạnh $A_1A_2\ldots A_k$ có $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo (giả thiết quy nạp).

Nối A_{k+1} với các đỉnh $A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}$, ta được thêm $k-2$ đường chéo, ngoài ra A_1A_k cũng là đường chéo.

Vậy số đường chéo của đa giác k + 1 cạnh là: $\frac{k(k-3)}{2}+k-2+1=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$.

Như vậy, khẳng định cũng đúng với đa giác k + 1 cạnh.. Vậy ycbt đã được chứng minh

Bài 1.17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta luôn có: $2^n > 2n+1$ (1)

HD Giải

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp qui nạp.

Với n = 3, ta có $2^3=8$ và $2n + 1 = 2.3 + 1 = 7$. Rõ ràng, 8 > 7 và do đó (1) đúng khi n = 3.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 3$, tức là $2^k > 2k+1$,

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là $2^{k+1} > 2(k+1)+1$

Từ giả thiết qui nạp, ta có $2^{k+1}=2.2^k > 2(2k+1)=4k+1 > 2k+3 = 2(k+1)+1$

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$

Bài 1.18. Cho số thực $x > -1$. Chứng minh rằng $\left(1+x\right)^n \geq 1+nx$ (2)với mọi số nguyên dương n.

HD Giải

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp qui nạp với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Với n = 1, ta có $(1+x)^1 = 1+x = 1+1.x$. Như vậy (2) đúng khi n = 1

Giả sử (2) đúng khi $n = k$, tức là $\left(1+x\right)^k \geq 1+kx, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$,

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $\left(1+x\right)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Từ giả thiết $x > -1$ và giả thiết qui nạp, ta có

$\left(1+x\right)^{k+1} = (1+x)\left(1+x\right)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$

Vậy (2) đúng với mọi n nguyên dương

Bài 1.19. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}++\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad (3)$$

HD Giải

Với n = 1, ta có $1 < 2\sqrt{1}$. Như vậy, (3) đúng khi n = 1

Giả sử (3) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$

Từ giả thiết qui nạp, ta có: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}++\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ (*)

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số k và k + 1, ta có

$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{k}.\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}<\frac{k+(k+1)+1}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}$ (**). Từ (*) và (**) ta có điều cần chứng minh

Vậy (3) đúng với mọi số nguyên dương n

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.20. Chứng minh rằng với $n\in\mathbb{N}^*$ ta luôn có:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

b) $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

c) $1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$

d) $2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

Bài 1.21. Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng: $n\left(2n^2-3n+1\right)$ chia hết cho 6.

Bài 1.22. Chứng minh rằng: $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{\text{n dấu căn}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Bài 1.23. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 3$ ta có $3^n>n^2+4n+5$.

Bài 1.24. Chứng minh các bất đẳng thức sau $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

a) $2^{n+2}>2n+5$

b) $\sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leq 1$

§2. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa dãy số

a) Một hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi là số hạng thứ n của dãy số (u_n).
Đôi khi người ta gọi nó là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Mỗi hàm u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}, m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn

2. Cách cho một dãy số

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách sau:

Cách 1. Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát

Khi đó $u_n = f(n)$, trong đó f là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$. Đây là cách khá thông dụng (giống như hàm số) và nếu biết giá trị của n (hay chính là số thứ tự của số hạng) thì ta có thể tìm ngay được u_n.

Cách 2. Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả

Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Trong một số trường hợp, không thể tìm ngay được u_n với n tuỳ ý.

Cách 3. Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi (hay quy nạp), tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu)
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hoặc vài số hạng) đứng trước nó.

Chẳng hạn: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f\left(u_{n-1}\right), n \ge 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = f\left(u_{n-1}, u_{n-2}\right), n \ge 3 \end{cases}$

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

a) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
b) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
c) Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu

Phương pháp khảo sát tính đơn điệu của dãy số

PP1: Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$

- Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số tăng
- Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số giảm

PP2. Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, rồi so sánh với 1

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số tăng
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số giảm

4. Dãy số bị chặn

a) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn trên nếu $\exists M \in \mathbb{R}: u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
b) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn dưới nếu $\exists m \in \mathbb{R}: u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
c) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:
$\exists M, m \in \mathbb{R}: m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lưu ý

- Dãy số (u_n) là dãy số tăng thì nó bị chặn dưới
- Dãy số (u_n) là dãy số giảm thì nó bị chặn trên
- Nếu (u_n) là dãy số hữu hạn thì nó bị chặn
- Các dấu "=" nêu trên a), b), c) không nhất thiết phải xảy ra.

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Tìm năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n^2-3}{n}$ b) Dãy số (u_n) với $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$

c) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n\sqrt{4^n}$ d) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

e) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ f) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

HD✍Giải

a) $u_1 = -1; u_2 = \dfrac{5}{2}; u_3 = 5; u_4 = \dfrac{29}{4}; u_5 = \dfrac{47}{5}$

b) $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; u_2 = 1; u_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; u_4 = 0; u_5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $u_1 = -2; u_2 = 4; u_3 = -8; u_4 = 16; u_5 = -32$

d), e), f) tính tương tự

Bài 2.2. Tìm số hạng thứ ba và thứ năm của mỗi dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 0$ và $u_n = \dfrac{2}{u_{n+1}^2+1}$ với mọi $n \geq 2$

b) Dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ và $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$

HD✍Giải

a) Ta có: $u_2 = \dfrac{2}{u_1^2+1} = 2; u_3 = \dfrac{2}{u_2^2+1} = \dfrac{2}{5}; u_4 = \dfrac{2}{u_3^2+1} = \dfrac{50}{29}; u_5 = \dfrac{2}{u_4^2+1} = \dfrac{1682}{3341}$

b) Ta có $u_3 = u_2 - 2u_1 = -4$; $u_4 = u_3 - 2u_2 = -2$; $u_{5=} = u_4 - 2u_3 = 6$

Bài 2.3.

Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1; n \geq 1 \end{cases}$

a) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số

b) Dự đoán công thức u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

HD✍Giải

a) Năm số hạng đầu là: 1, 4, 9, 16, 25

b) Dự đoán công thức $u_n = n^2$ (*) với $n \in \mathbb{N}^*$ .Ta sẽ chứng minh công thức vừa nêu bằng phương pháp quy nạp

Hiển nhiên với $n = 1$, công thức đúng.

Giả sử đã có $u_k = k^2$ với $k \geq 1$. Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$u_{k+1} = u_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, tức là công thức (*) đúng với $n = k + 1$

Vậy $u_n = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 2.4.

Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3; n \geq 1 \end{cases}$

a) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số
b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n - 4$

HD✍Giải

a) Năm số hạng đầu là: $-1; 2; 5; 8; 11$.
b) Chứng minh $u_n = 3n - 4$ (*) bằng phương pháp quy nạp
Với $n = 1$ thì $u_1 = -1$ đúng
Giả sử đã có $u_k = 3k - 4$ với $k \geq 1$
Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có: $u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4$, tức là công thức (*) đúng với $n = k + 1$
Vậy $u_n = 3n - 4$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 2.5.

Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}; n \geq 1 \end{cases}$

a) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số
b) Dự đoán công thức u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

HD✍Giải

a) Năm số hạng đầu là: $3; \sqrt{10}; \sqrt{11}; \sqrt{12}; \sqrt{13}$
b) Viết $3 = \sqrt{9}$ và nhận xét

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{9} = \sqrt{1+8} \\ \sqrt{10} = \sqrt{2+8} \\ \sqrt{11} = \sqrt{3+8} \\ \sqrt{12} = \sqrt{4+8} \\ \sqrt{13} = \sqrt{5+8} \end{array}\right\}$$ Dự đoán $u_n = \sqrt{n+8}; n \in \mathbb{N}^*$ (1). Ta chứng minh (1) bằng quy nạp

Với $n = 1$, công thức (1) là đúng
Giả sử đả có $u_k = \sqrt{k+8}$ với $k \geq 1$. Theo công thức dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{(k+1)+8}$.

Như vậy công thức (1) đúng với $n = k + 1$. Vậy $u_n = \sqrt{n+8}; n \in \mathbb{N}^*$

Bài 2.6.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n^2 + \dfrac{5}{2}u_n + 1; n \geq 1 \end{cases}$

a) Tính u_2, u_3, u_4
b) Chứng minh rằng $u_{n+3} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

HD✍Giải

a) $u_2 = 2$; $u_3 = 0$; $u_4 = 1$. Nếu tính tiếp ta lại có $u_5 = 2$, $u_6 = 0$, $u_7 = 1$. Như vậy dãy số trên gồm các nhóm 3 số hạng (1, 2, 0) được nối tiếp nhau một cách vô hạn.
b) Ta chứng minh bằng quy nạp
Với $n = 1$, theo câu a) thì công thức đúng vì $u_4 = u_1 = 1$
Giả sử công thức đúng với $n = k$, $k \geq 1$ (giả thiết quy nạp), tức là $u_{k+3} = u_k$. Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $u_{k+4} = u_{k+1}$
Thật vậy, theo công thức của dãy số thì $u_{k+4} = u_{(k+3)+1} = -\dfrac{3}{2}u_{k+3}^2 + \dfrac{5}{2}u_{k+3} + 1$.

Sử dụng giả thiết quy nạp $u_{k+3} = u_k$, ta có: $u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1}$

Vậy công thức đã được chứng minh.

Bài 2.7. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n), với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,biết:

a) $u_n = \frac{1}{n} - 2$ b) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ c) $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ d) $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$

HD Giải

a) Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm

b) Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

c) Các số hạng đan dấu vì có chứa thừa số $(-1)^n$, nên dãy số không tăng và cũng không giảm.

d) Làm tương tự, ta có dãy đã cho là dãy số giảm

Bài 2.8. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n), với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,biết:

a) $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$ b) $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ c) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

HD Giải

a) Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1} - \frac{2^n-1}{2^n+1} = \frac{(2^{n+1}-1)(2^n+1) - (2^{n+1}+1)(2^n-1)}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)}$$

$$= \frac{2.2^{n+1} - 2.2^n}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} > 0$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

b) Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 5(n+1) - 7 - (n^3 - 3n^2 + 5n - 7)$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 + 5n + 5 - 7 - n^3 + 3n^2 - 5n + 7 = 3n^2 - 3n + 3 = 3\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng

c) Xét lập tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1+1}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} = \frac{3^n(n+2)}{3^{n+1}(n+1)} = \frac{(n+2)}{3(n+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(n+1)} < 1$$

Suy ra $u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy đã cho là dãy số giảm.

d) Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Từ đó suy ra dãy số đã cho là dãy số giảm.

Bài 2.9. Hãy xét tính đơn diệu của các dãy số sau

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ b) Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

c) Dãy số (w_n) với $w_n = \dfrac{3^n}{n^2}$ d) Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

e) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$ f) Dãy số (c_n) với $c_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

g) Dãy số (d_n) với $d_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$ h) Dãy số (e_n) với $e_n = \dfrac{n!}{n^2}$

HD Giải

a) Ta có $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, lập tỉ số $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{3} < 1$. Vì vậy (u_n) là một dãy số tăng

b) (v_n) là một dãy số giảm

c) Dễ thấy $w_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số $\dfrac{w_n}{w_{n+1}}$, ta có $\dfrac{w_n}{w_{n+1}} = \dfrac{3^n}{n^2} \cdot \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$.

Từ đó, suy ra:

- $\dfrac{w_n}{w_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} \Leftrightarrow n \geq 2$ (do $n \in \mathbb{N}^*$)
- $\dfrac{w_n}{w_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow n < \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} \Leftrightarrow n = 1$ (do $n \in \mathbb{N}^*$)

Như vậy, ta có $w_1 > w_2$, và $w_2 < w_3 < \ldots < w_n < w_{n+1}$
Vì vậy, (w_n) không là dãy tăng, cũng không là dãy giảm.

d) Viết lại công thức xác định số hang tổng quát của dãy số (a_n) dưới dạng $a_n = 3n - 5 + \dfrac{6}{n+1}$.

Từ đó, ta có với mọi $n \geq 1 : a_{n+1} - a_n = 3 + 6\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{3.\left[(n+1)(n+2) - 2\right]}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{3n(n+3)}{(n+1)(n+2)} > 0$

Vì vậy, (a_n) là một dãy số tăng.
e) Tương tự câu d), dãy (b_n) là một dãy số giảm

f) Viết lại công thức xác định (c_n) dưới dạng: $c_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$

Từ đó, do: $0 < n + \sqrt{n^2 + 1} < n + 1 + \sqrt{(n+1)^2 + 1}, (\forall n \geq 1)$

Suy ra $c_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} > \dfrac{1}{n + 1 + \sqrt{(n+1)^2 + 1}} = a_{n+1}, \forall n \geq 1$, nghĩa là dãy số (c_n) là một dãy số giảm.

g) Tương tự câu f), dãy số (d_n) là một dãy số giảm.

h) Xét tỉ số $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} < 1$. Nên dãy (e_n) là một dãy số giảm

Bài 2.10. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{na + 2}{n + 1}$, là dãy số tăng ? Là dãy số giảm ?

HD Giải

Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)a + 2}{n + 1 + 1} - \dfrac{na + 2}{n + 1} = \dfrac{a - 2}{(n+2)(n+1)}$

Vì $(n + 2)(n + 1) > 0$ nên:
- Nếu $a > 2$ thì H > 0, suy ra dãy (u_n) là dãy số tăng
- Nếu $a < 2$ thì H < 0, suy ra dãy (u_n) là dãy số giảm

Bài 2.11. Hãy xác định số thực a để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{an^2+1}{2n^2+3}$ là:

a) Một dãy số giảm b) Một dãy số tăng

HD Giải

Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng: $u_n = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2-3a}{2.(2n^2+3)}$

Tứ đó, ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-3a}{2}.\left(\dfrac{1}{2.(n+1)^2+3} - \dfrac{1}{2n^2+3}\right), \forall n \geq 1$ (1)

Dễ thấy, $\left(\dfrac{1}{2.(n+1)^2+3} - \dfrac{1}{2n^2+3}\right) < 0, \forall n \geq 1$

Vì thế, từ (1) suy ra:

a) (u_n) là một dãy số giảm $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{2}{3}$

b) (u_n) là một dãy số tăng $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{2}{3}$

Bài 2.12. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, dãy số nào bị chặn trên và bị chặn ?, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

a) $u_n = 2n^2 - 1$ b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$ c) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$ d) $u_n = \sin n + \cos n$

HD Giải

a) Dãy số bị chặn dưới vì $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và không bị chặn trên vì khi n lớn vô cùng thì $2n^2 - 1$ cũng lớn vô cùng

b) Dễ thấy $u_n > 0$,với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác, vì $n \geq 1$ nên $n^2 \geq 1$ và $2n \geq 2$.

Do đó $n(n+2) = n^2 + 2n \geq 3$, suy ra $\dfrac{1}{n(n+2)} \leq \dfrac{1}{3}$

Vậy dãy số bị chặn vì $0 < u_n \leq \dfrac{1}{3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Vì $n \geq 1$ nên $2n^2 - 1 > 0$, suy ra $\dfrac{1}{2n^2-1} > 0$ .Mặt khác, vì $n^2 \geq 1$, nên $2n^2 > 2$ *hay* $2n^2 - 1 \geq 1$, suy ra $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1} \leq 1$. Vậy $0 < u_n \leq 1$,với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là dãy số bị chặn.

d) Dãy số bị chặn vì $-\sqrt{2} \leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 2.13. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là dãy số giảm và bị chặn.

HD Giải

Ta có: $u_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3(3n+2)}$. Từ đó suy

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{3n+5} - \dfrac{1}{3n+2}\right) < 0, \forall n \geq 1$. Vì vậy ($u_n$) là dãy số giảm
- $\dfrac{2}{3} < u_n \leq 1, \forall n \geq 1$. Do đó ($u_n$) là dãy số bị chặn.

Vì thế, (u_n) là một dãy số giảm và bị chặn

Bài 2.14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$ là dãy số tăng và bị chặn

HD Giải

Ta viết lại công thức xác định u_n dưới dạng $u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}$. Từ đó, ta có:

- $u_{n+1} - u_n = \frac{24}{5}\left(\frac{1}{5n+7} - \frac{1}{5(n+1)+7}\right) > 0, \forall n \geq 1$. Vì vậy ($u_n$) là dãy số tăng
- $1 \leq u_n < \frac{7}{5}, \forall n \geq 1$ (do $0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}$). Do đó ($u_n$) là dãy số bị chặn.

Vì thế, (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn

Bài 2.15. Cho dãy số (u_n)với $u_n = 1 + (n-1).2^n$
a) Viết năm số hạng đầu của dãy số
b) Tìm công thức truy hồi
c) Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới

HD Giải

a) Năm số hạng đầu là: $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 17$, $u_4 = 49$, $u_5 = 129$
b) Tìm hiệu $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n$, suy ra $u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n$.

Vậy công thức truy hồi cần tìm là: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n; n \geq 1 \end{cases}$

c) Có $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0$, suy ra dãy số là dãy số tăng và bị chặn dưới.

Bài 2.16. Cho dãy số (s_n) với $S_n = \sin(4n-1)\frac{\pi}{6}$
a) Chứng minh rằng $S_n = S_{n+3}$, với mọi $n \geq 1$
b) Hãy tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

HD Giải

a) Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có

$$S_{n+3} = \sin[4(n+3)-1]\frac{\pi}{6} = \sin(4n-1+12)\frac{\pi}{6} = \sin\left[(4n-1)\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \sin(4n-1)\frac{\pi}{6} = S_n, \forall n \geq 1$$

b) Từ kết quả của câu a) ta có

$S_1 = S_4 = S_7 = S_{10} = S_{13}, S_2 = S_5 = S_8 = S_{11} = S_{14}, S_3 = S_6 = S_9 = S_{12} = S_{15}$

Từ đó suy ra: $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 = S_7 + S_8 + S_9 = S_{10} + S_{11} + S_{12} = S_{13} + S_{14} + S_{15}$

Do đó: $S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{15} = 5\left(S_1 + S_2 + S_3\right)$

Tính được $S_1 = 1, S_2 = -\frac{1}{2}, S_3 = -\frac{1}{2}$. Vậy $S = 0$

Bài 2.17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin(2n-1)\frac{\pi}{3}$
a) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+3}$,với mọi $n \geq 1$
b) Hãy tính tổng của 17 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

HD Giải

a) Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có

$$u_{n+3} = \sin[2(n+3)-1]\frac{\pi}{3} = \sin(2n-1+6)\frac{\pi}{3} = \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{3} + 2\pi\right] = \sin(2n-1)\frac{\pi}{3} = u_n, \forall n \geq 1$$

b) Từ kết quả của câu a) ta có

$u_1 = u_4 = u_7 = u_{10} = u_{13} = u_{16}$, $u_2 = u_5 = u_8 = u_{11} = u_{14} = u_{17}$, $u_3 = u_6 = u_9 = u_{12} = u_{15}$

Do đó: S = $u_1 + u_2 + \ldots + u_{17} = 5.(u_1 + u_2 + u_3) + u_1 + u_2$

Tính được $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = 0, u_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2.18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3; n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát

b) Tính số hạng thứ 100 của dãy số

HD Giải

a) Từ $u_{n+1} - u_n = n^3$, ta có:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

. . . .

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên và rút gọn, ta được: $u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$.

Sử dụng kết quả của bài 1.4, ta có: $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Vậy $u_n = 1 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}$

b) $u_{100} = 24\,502\,501$

Bài 2.19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \cos(3n+1)\frac{\pi}{6}$

a) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+4}$,với mọi $n \geq 1$

b) Hãy tính tổng của 27 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

HD Giải

a) Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có

$$u_{n+4} = \cos[3(n+4)+1]\frac{\pi}{6} = \cos(3n+1+12)\frac{\pi}{6} = \cos\left[(3n+1)\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \cos(3n+1)\frac{\pi}{6} = u_n, \forall n \geq 1$$

b) Kí hiệu S là tổng của 27 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Từ kết quả câu a) , ta được

$S = 6(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_1 + u_2 + u_3$. Tính được $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2.20. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6}$

a) Hãy tính u_1, u_2, u_3, u_4, và u_5

b) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+12}$ với mọi $n \geq 1$

HD Giải

a) Học sinh tự tính

b) Với n là một số nguyên dương tuỳ, ta có

$$u_{n+12} = \sin\frac{(n+12)\pi}{3} + \cos\frac{(n+12)\pi}{6} = \sin\left(\frac{n\pi}{3} + 4\pi\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6} = u_n$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = 4u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$

a) Hãy tính u_2, u_3, u_4, u_5 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = \frac{2^{2n+1} - 7}{3}$ với mọi $n \geq 1$

Bài 2.22. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ *và* $u_n = 2u_{n-1} + 3$ với mọi $n \geq 2$. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = 2^{n+1} - 3$

Bài 2.23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5.4^{n-1} + 3$

a) Chứng minh rằng $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với mọi $n \geq 1$

b) Dực vào kết quả của phần a), hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

§3. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, ($u$, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng

- u là số hạng đầu tiên
- d công sai và $d = u_{n+1} - u_n$

Đặt biệt khi $d = 0$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau

2. Số hạng tổng quát

Định lí 1:

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$, với $n \geq 2$ và từ đó suy ra: $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$

3. Tính chất

Định lí 2:

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, với $k \geq 2$ hoặc $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$

4. Tổng n số hạng đầu

Định lí 3.

Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Khi đó $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ hoặc $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

Lưu ý:

- Trong thực hành: a, b, c là một cấp số cộng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + c = 2b \\ a - b = b - c = \frac{1}{2}(a+c) \end{array}\right.$
- Khi giải các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, d, u_n, n, S_n, cần phải xác định ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng ? (với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) $u_n = 3n - 1$ b) $u_n = 2^n + 1$ c) $u_n = (n+1)^2 - n^2$ d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - u_n \end{cases}$

e) $u_n = 3^n$ f) $u_n = \dfrac{n}{2} - 1$ g) $u_n = \dfrac{7-3n}{2}$ h) $u_n = 5n - 2$

HD Giải

PP chung: Xét hiệu H = $u_{n+1} - u_n$

- Nếu H là một hằng số thì dãy số là một cấp số cộng
- Nếu H = $f(n)$ thì dãy số không phải là cấp số cộng

a) Xét H = $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$, suy ra $u_{n+1} = u_n + 3$

Vậy (u_n) là cấp số cộng và $d = 3$, $u_1 = 2$

b) Xét H = $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 = 2^n$. Vì 2^n không phải là hằng số nên dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

c) Ta có $u_n = 2n + 1$. Xét H = $u_{n+1} - u_n = 2$, nên dãy đã cho là cấp số cộng với $u_1 = 3$, $d = 2$

d) Ta có $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$, nên dãy đã cho không phải là cấp số cộng

e) Dãy không là cấp số cộng

f) Là cấp số cộng với $u_1 = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$

g) Dãy là cấp số cộng với $u_1 = 2$ và $d = -\frac{3}{2}$

h) Xét H = $u_{n+1} - u_n = -2$. Vậy dãy số là cấp số cộng vớ $u_1 = 3$, $d = -2$

Bài 3.2. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 . u_7 = 75 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$ g) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ h) $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$

HD Giải

Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$

a) Giải hệ $\begin{cases} u_1 - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$

b) $u_1 = 1$, $d = 3$

c) $u_1 = 36$, $d = -13$

d) $u_1 = 3$, $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$, $d = 2$

e) $u_1 = 1$, $d = 3$

f) Áp dụng công thức $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

Ta có hệ $\begin{cases} 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 0 \\ \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$

g) $u_1 = 0$, $d = 3$ hoặc $u_1 = -12$, $d = \frac{21}{5}$

h) $u_1 = 8$, $d = -3$

Bài 3.3. Cho dãy số (u_n),với $u_n = 9 - 5n$

a) Viết năm số hạng của dãy

b) Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số cộng và chỉ ra u_1 và d

c) Tính tổng của 100 số hạng đầu

HD Giải

a) Năm số hạng đầu là: $4; -1; -6; -11; -16$.

b) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 9 - 5(n + 1) - 9 + 5n = -5$, do đó $u_{n+1} = u_n - 5$, suy ra (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 4$, $d = -5$

c) Áp dụng công thức $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

Ta có $S_{100} = \frac{100[2.4 + (100-1)(-5)]}{2} = -24350$

Bài 3.4.

a) Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này
b) Viết năm số hạng xen giữa hai số 25 và 1 để được một cấp số cộng có bảy số hạng. Số hạng thứ 50 của cấp số này là bao nhiêu ?

HD✍Giải

a) Ta có $u_1 = 3$, $u_8 = 24$. Từ công thức $u_n = u_1 + (n-1).d$, suy ra $d = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{24-3}{8-1} = 3$.

Vậy 6 số hạng cần viết thêm là: 6, 9, 12, 15, 18, 21. Tính tổng $S_8 = \frac{8[2.3+(8-1)3]}{2} = 108$

b) Ta có $u_1 = 25$, $u_7 = 1$, $d = -4$. Vậy 5 số cần thêm là: 21, 17, 13, 9, 5
Tính $u_{50} = 25 + (50-1)(-4) = -171$

Bài 3.5. Chu vi của một đa giác là 158, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai d = 3cm. Biết cạnh lớn nhất là 44cm, tính số cạnh của đa giác đó.

HD✍Giải

Gọi cạnh nhỏ nhất là u_1 (cm) và số cạnh của đa giác là n
Ta có: $44 = u_1 + (n-1).3$ hay $u_1 = 47 - 3n$

Tổng các cạnh (tức là chu vi đa giác) là 158, ta có: $158 = \frac{n[44+47-3n]}{2} \Leftrightarrow 3n^2 - 91n + 316 = 0$

Giải phương trình trên với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có được $n = 4$

Bài 3.6. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm so đo ba góc đó ?

HD✍Giải

Kí hiệu A, B, C là số đo ba góc (tính theo đơn vị đô) của tam giác vuông đã cho. Không mất tính tổng quát giả sử $A \le B \le C$. Khi đó, từ giả thiết ta suy ra $C = 90$(độ) và A, B, C theo thứ tự đó là một cấp số cộng. Gọi d là công sai của cấp số cộng đó, ta có
$A = C - 2d$ và $B = C - d$. Suy ra $90 = A + B = 2C - 3d = 180 - 3C \Rightarrow d = 30$
Vậy: $A = 90 - 2.30 = 30$ (độ), $B = 60$ (độ)

Bài 3.7. Một Công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiên việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho Công ty là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng/quý. Hãy tính tổng số tiên lương một kĩ sư được nhận sau 3 năm làm việc cho Công ty?

HD✍Giải

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n (triệu đồng) là mức lương của mỗi người kĩ sư ở quý làm việc thứ n cho công ty. Theo giả thiết của bài, ta có: $u_1 = 4,5$ và $u_{n+1} = u_n + 0,3$, với mọi $n \ge 1$.
Do đó, dãy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 0,3$.
Vì mỗi năm có 4 quý nên 3 năm có 12 quý.
Như thế, theo yêu cầu của bài toán ta phải tính tồng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số công (u_n).

Ta có $u_{12} = 4,5 + (12-1).0,3 = 7,8$. Vậy $S_{12} = \frac{12[4,5+7,8]}{2} = 73,8$ (triệu đồng)

Bài 3.8. Khi kí hợp đồng dài hạn với các kĩ sư được tuyển dụng, Công ty liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn; cụ thể:
- Ở phương án 1: Người lao động được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu mỗi năm.
- Ở phương án 2: Người lao động được nhận 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 500 000 đồng mỗi quý.
Nếu em là người kĩ sư kí hợp đồng lao động với Công ty liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào ?

HD✍Giải

Tương tự như bài 3.7
Tổng số lương (triệu đồng) mà người kĩ sư được nhận sau n năm làm việc như sau:

Theo phương án 1, ta có: $S_1 = \dfrac{n[2.36+(n-1)3]}{2} = \dfrac{3n(n+23)}{2}$

Theo phương án 2, ta có $S_2 = \dfrac{4n[2.7+(4n-1)0,5]}{2} = 2n(2n+13,5)$

Suy ra $S_1 - S_2 = \dfrac{5n(3-n)}{2}$

Từ đó:

- $S_1 - S_2 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 3$
- $S_1 - S_2 < 0 \Leftrightarrow n > 3$

Vì thế:

Nếu dự định làm việc cho Công ty liên doanh A không quá 3 năm thì kí hợp đồng theo phương án 1

Nều dự định làm việc cho Công ty liên doanh A trên 3 năm thì nên kí hợp đồng theo phương án 2

Bài 3.9. Tìm x từ phương trình sau:

a) 1 + 6 + 11 + 16 + . . .+ x = 970, biết 1,6,11, . . . là cấp số cộng

b) 2 + 7 + 12 + 17 + . . .+ x = 245, biết 2, 7, 12, 17, . . . là cấp số cộng

c) (x + 1) + (x + 4) + (x + 7) +. . .+ (x + 28) = 155, biết 1,4,7,… là cấp số cộng

d) (2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + . . .+(2x + 96) = 1010, biết 1,6,11,. . . là cấp số cộng

HD Giải

a) Ta có cấp số cộng với $u_1 = 1$, $d = 5$ và $u_n = x$ và $S_n = 970$. Áp dụng công thức $S_n = \dfrac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$,

ta có: $970 = \dfrac{n[2.1+(n-1)5]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Leftrightarrow n = 20 \Rightarrow x = u_{20} = 1 + 19.5 = 96$

b) Ta có $u_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$ và $u_n = x$. Tương tự câu a), ta có

$245 = \dfrac{n[2.2+(n-1)5]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - n - 940 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Rightarrow x = u_{10} = 2 + 9.5 = 47$

c) Ta có cấp số cộng với $u_1 = x + 1$, $d = 3$, $u_n = x + 28$ và $S_n = 155$.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $x + 28 = x + 1 + (n-1).3$ => $n = 10$

Từ công thức $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$, ta có $155 = \dfrac{10(x+1+x+28)}{2} \Rightarrow x = 1$

d) Tương tư như câu c), $x = 1$

Bài 3.10. Tìm x để ba số sau lập thành cấp số cộng

a) $x^2 - x + 1$, $x - 2$, $1 - 2x$ b) $x^3 + x^2 + 1$, $x^2 + 1$, $x^2 - x + 1$ c) $10 - 3x$, $2x^2 + 3$, $7 - 4x$

HD Giải

a) $x^2 - x + 1$, $x - 2$, $1 - 2x$ lập thành cấp số cộng nên ta có: $x^2 - x + 1 + 1 - 2x = 2(x - 2)$. Giải phương trình, tìm được $x = 2$, $x = 3$.

b) Tương tự, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

c) Tương tự, $x = -1, x = \dfrac{11}{4}$

Bài 3.11. Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

HD Giải

Ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}\Leftrightarrow(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})=(\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{b})$$

$\Leftrightarrow b-a=c-b$ khi và chỉ khi a, b, c lập thành cấp số cộng

Cách khác: Nhận xét:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a-b}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\frac{1}{2}(a-c)}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, nên ta có: $a + c = 2b$ hoặc $a - b = b - c =\dfrac{1}{2}(a-c)$

Vậy ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cũng lập thành cấp số cộng.

Bài 3.12.
a) Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng: $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$
b) Cho ba số a^2, b^2, c^2, lập thành một cấp số cộng có công sai kác không. Chứng minh rằng ba số $\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

HD Giải

a) Ta có a, b , c lập thành cấp số cộng, ta có $a + c = 2b$.
VP = $(2b + c)^2 = (a + 2c)^2$
VT = $a^2 + 4c(a + c) = a^2 + 4ac + 4c^2 = (a + 2c)^2$
Từ đó, suy ra đpcm.

b) Ta nhận xét:

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{c+a-b-c}{(b+c)(c+a)}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}=\frac{a+b-c-a}{(b+c)(c+a)}=\frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), do điều kiện ba số a^2, b^2, c^2, lập thành một cấp số cộng, suy ra:

$\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{c+a}\Leftrightarrow \dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng

Bài 3.13. Một hội trường có 10 dãy ghế. Biết rằng mỗi dãy ghế sau nhiều hơn dãy ghế trước 20 ghế và dãy sau cùng có 280 ghế. Hỏi hội trường có bao nhiêu ghế ngồi ?

HD Giải

Số ghế ngồi ở mỗi dãy lập thành cấp số cộng (u_n), trong đó có $d = 20$, $u_n = 280$ và $n = 10$

Từ giả thiết : $u_{10} = u_1 + (10 - 1).20 = 280 \Rightarrow u_1 = 100$, từ đó: $S_{10}=\dfrac{10(100+280)}{2}=1900$

Vậy hội trường có 1900 ghế ngồi.

Bài 3.14.
a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Hãy tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

b) Cho cấp số cộng (u_n), có $u_4 + u_{97} = 101$. Hãy tình tổng của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

HD Giải

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có $33 = u_{17} = u_1 + 16d$. Suy ra $u_1 = 33 – 16d$
Do đó $65 = u_{33} = u_1 + 32d = 33 – 16d + 32d$. Suy ra $d = 2$ và suy ra $u_1 = 1$
Từ đó, ta có: $u_n = u_1 + (n – 1)d = 1 + (n – 1).2 = 2n – 1$.
b) Ta có $u_4 = u_1 + 3d$, $u_{97} = u_1 +96d = u_1 + 99d – 3d = u_{100} – 3d$. Từ đó, suy ra: $101 = u_4 + u_{97} = u_1 + u_{100}$
Do đó $S_{100} = \dfrac{100(u_1 + u_{100})}{2} = 50.101 = 5050$

Bài 3.15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$ với mọi $n \ge 1$

a) Chứng minh dãy số (v_n), mà $v_n = u_n^2$ với mọi $n \ge 1$, là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó
b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n)
c) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{1001}^2$

HD Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $n \ge 1$, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2$ *hay* $v_{n+1} = v_n + 2$. Do đó dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = u_1^2 = 1$ và công sai d = 2.
b) Từ định nghĩa dãy số (u_n) và dãy số (v_n) dễ dàng suy ra $u_n > 0$ và $v_n > 0$ vối mọi $n \ge 1$.
Từ đó, ta có $u_n = \sqrt{v_n}$ với mọi $n \ge 1$.
Từ kết quả phần a) suy ra: $v_n = 1 + (n – 1)2 = 2n – 1$ (với mọi $n \ge 1$).
Vì thế $u_n = \sqrt{2n-1}$ $(n \ge 1)$
c) $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{1001}^2 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{1001}$
$$= \frac{1001\left[2.1 + (1001-1).2\right]}{2} = 1002001$$

Bài 3.16. Cho dãy số (u_n) biết tổng của n số hạng đầu tiên được xác định bởi công thức sau:
$$S_n = \frac{n(7-3n)}{2}$$
a) Tính u_1, u_2 và u_3
b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n)
c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó

HD Giải

a) Ta có $u_1 = S_1 = 2$, $u_2 = (u_1 + u_2) – u_1 = S_2 – S_1 = 1 – 2 = – 1$,
$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) – u_1 – u_2 = S_3 – S_2 = – 4$
b) Đặt $S_0 = 0$, ta có số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:
$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(7-3n)}{2} - \frac{(n-1)\left[7-3(n-1)\right]}{2} = 5 - 3n$$
c) Ta có $u_{n+1} - u_n = -3, \forall n \ge 1$. Vì thế dãy số ($u_n$) là một cấp số cộng với công sai $d = – 3$.

Bài 3.17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + n$ với mọi $n \ge 1$.
Xét dãy số (v_n), mà $v_n = u_{n+1} – u_n$, với mọi $n \ge 1$.
a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương N, tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n) bằng $u_{N+1} – u_1$.
b) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó

HD Giải

a) Kí hiệu S_N là tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n).
Ta sẽ chứng minh $S_N = u_{N+1} – u_1$ (1) với mọi $n \ge 1$., bằng phương pháp qui nạp.

Với $N = 1$, ta có $S_1 = v_1 = u_2 - u_1$. Như vậy (1) đúng khi $N = 1$.
Giả sử đã có (1) đúng với $N = k$, $k \ge 1$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $N = k + 1$
Thật vậy, từ giả thiết qui nạp và định nghĩa dãy số (v_n), ta có
$S_{k+1} = S_k + v_{k+1} = (u_{k+1} - u_1) + (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{k+2} - u_1$.
Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $N \ge 1$

b) Từ định nghĩa dãy số (v_n) và hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $v_n = n$ với mọi $n \ge 1$.
Do đó $v_{n+1} - v_n = (n + 1) - n = 1$ với mọi $n \ge 1$. Vì thế dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.18. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết rằng: $u_{23} - u_{17} = 30$ *và* $u_{23}^2 + u_{17}^2 = 450$

Bài 3.19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 + u_{19} = 90$. Hãy tính tổng của 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó. (ĐS: $S = 1035$)

Bài 3.20. Có thể có một tam giác mà số đo các cạnh và chu vi của nó lập thành một cấp số cộng được không ?

Bài 3.21. Hãy tính các tổng sau đây:

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 102, số hạng thứ hai bằng 105 và số hạng cuối bằng 999.(ĐS: S = 165150)

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu bằng $\frac{1}{3}$, số hạng thứ hai bằng $-\frac{1}{3}$ và số hạng cuối bằng – 2007.(ĐS: S = -3 022 040)

Bài 3.22. Cho cấp số cộng tăng (u_n) có $u_1^3 + u_2^3 = 302094$ và tổng 15 số hạng đầu tiên bằng 585. Hãy tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.(ĐS: $d = 4, u_1 = 11$)

Bài 3.23. Tính u_{99}, S_{99} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_2 - 3u_4 + u_7 = -1 \\ u_3 + u_5 + u_6 = 18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2u_2 - 3u_4 + 4u_6 = -20 \\ S_7 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 - 3u_8 = -20 \\ u_3 . u_4 = 24 \end{cases}$

Bài 3.24. Tính u_{2012}, S_{2013} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 2u_3 - 3u_4 + 4u_5 = 35 \\ S_8 = 88 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_3 + 2u_5 - u_6 = 20 \\ S_5 - 18 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 . u_3 = 0 \end{cases}$

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, ($u$, q là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số nhân

- u là số hạng đầu tiên
- q công bội và $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Đặt biệt khi $q = 1$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau

2. Số hạng tổng quát

Định lí 1:
Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức : $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lí 2:
Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}, k \geq 2$ hoặc $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Định lí 3:
Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Khi đó: $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ *hay* $S_n = \dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}, q \neq 1$

Lưu ý:
- Trong thực hành: a, b, c là một cấp số nhân $\Leftrightarrow$ $b^2 = a.c$
- Khi giải các bài toán về cấp số nhân, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, q, u_n, n, S_n, cần phải xác định ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Chứng minh các dãy số (u_n) sau là cấp số nhân

a) $u_n = \dfrac{3}{5}.2^n$ b) $u_n = \dfrac{5}{2^n}$ c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

d) $u_n = (-5)^{2n+1}$ e) $u_n = (-1)^n.3^{3n+1}$ f) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{5}u_n \end{cases}$

HD Giải

PP chung: Xét thương $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu T là một hằng số thì dãy số là một cấp số nhân
- Nếu T = f(n) thì dãy số không phải là cấp số nhân

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{3}{5}.2^{n+1}\right):\left(\frac{3}{5}.2^n\right) = 2$. Vậy $u_{n+1} = u_n.2$, công bội q = 2, $u_1 = \frac{6}{5}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

b) Tương tự: $u_{n+1} = u_n.\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{5}{2}$

c) $u_{n+1} = u_n.\left(-\frac{1}{2}\right)$, $q = -\frac{1}{2}, u_1 = -\frac{1}{2}$

d) $u_{n+1} = u_n.25$, $q = 25$, $u_1 = -125$

e) $u_{n+1} = u_n(-27)$, $q = -27$, $u_1 = -81$

f) $u_{n+1} = u_n.\frac{7}{5}$, $q = \frac{7}{5}, u_1 = 1$

Bài 4.2.
a) Viết năm số xen giữa các số 1 và 729 để được một cấp số nhân có bảy số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.
b) Viết sáu số xen giữa các số – 2 và 256 để được một cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu ?
c) Viết bốn số xen giữa các số 5 và 160 để được một cấp số nhân.

HD Giải

a) Ta có $u_1 = 1$, $u_7 = 729$. Vì $u_7 = u_1.q^6$ nên $q^6 = \frac{u_7}{u_1} = 729 = 3^6 \Rightarrow q = \pm 3$

Năm số cần viết là: 3, 9, 27, 81, 243 hoặc –3, 9, –27, 81, - 243

Với $q = 3$, ta có $S_7 = \frac{u_1\left(1-3^7\right)}{1-3} = 1093$. Với $q = -3$, $S_7 = 547$

b) Ta có $u_1 = -2$, $u_8 = 256$. Vì $u_8 = u_1.q^7$ nên $q^7 = \frac{u_8}{u_1} = -128 = (-2)^7 \Rightarrow q = -2$

Sáu số cần viết là : 4, -8, 16, -32, 64, -128.. Ta có $u_{15} = -2\,(-2)^{14} = -32\,768$
c) Ta có $u_1 = 5$, $u_6 = 160$ suy ra $q = 2$. Vậy bốn số cần ghi là: 10, 20, 40, 80

Bài 4.3. Cho các cấp số nhân (u_n) với công bội q.
a) Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q
b) Biết $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1
c) Biết $u_1 = 3$, $q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?

HD Giải

Áp dụng các công thức, tìm được các giá trị theo ycbt

a) $q = 3$ b) $u_1 = \frac{9}{7}$ c) $n = 7$

Bài 4.4. Cấp số nhân (u_n) có : $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$
a) Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân
b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069
c) Số 12 288 là số hạng thứ mấy ?

HD Giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$ hay $u_2 = u_1.q$, $u_5 = u_1.q^4$ và $u_6 = u_1.q^5$. $S_n = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

a) Ta có $\begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$

b) Ta có $\dfrac{3\left(1-2^n\right)}{1-2} = 3069 \Rightarrow n = 10$

c) Tương tự có $n = 13$

Bài 4.5. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết

a) $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$

HD✍Giải

a) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ q = \pm 3 \end{cases}$. q = 3 có cấp số nhân: $\dfrac{1}{3};1;3;9;27$.

Với q = –3 có cấp số nhân là: $\dfrac{1}{3};-1;3;-9;27$

b) $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{200}{3} \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Ta có cấp số nhân: $-\dfrac{200}{3};-\dfrac{100}{3};-\dfrac{50}{3};-\dfrac{25}{3};-\dfrac{25}{6}$

c) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = -16 \end{cases} ;csn: -16,-8,-4,-2,-1. \\ \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} ;csn: 1,2,4,8,16 \end{array}\right.$ d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$, có csn: 1, 2, 4, 8, 16

Bài 4.6. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n), biết: $u_3 = -5$, $u_6 = 135$.

HD✍Giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Ta có $q^3 = \dfrac{u_6}{u_3} = -27 \Leftrightarrow q = -3$

Với q = -3, suy ra $u_1 = -\dfrac{5}{9}$. Vậy số hạng tổng quát: $u_n = -\dfrac{5}{9}(-3)^{n-1} = -5(-3)^{n-3}$

Bài 4.7. Số đo của bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm bốn góc đó, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

HD✍Giải

Kí hiệu A, B, C, D là số đo của bốn góc (tính theo độ) của tứ giác lồi đã cho. Không mất tính tổng quát, giả sử $A \le B \le C \le D$. Khi đó, từ giả thiết bài toán ta có $D = 8A$ và A, B, C, D theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó, ta có:

$$8A = D = A.q^3 \Leftrightarrow q = 2$$

Do đó: $360 = A + B + C + D = A.\dfrac{1-2^4}{1-2} = 15A \Leftrightarrow A = 24$ (độ)

Suy ra: $B = A.2 = 48$ (độ), $C = A.2^2 = 96$ (độ) và $D = 192$ (độ).

Bài 4.8. Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với các mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

HD✍Giải

Gọi dân số của tỉnh đó là N. Sau một năm, số dân tăng thêm là 1,4%.N.
Vậy số dân của tỉnh đó vào năm sau: N + 1,4%N = 101,4%N.

Số dân của tỉnh đó sau mỗi năm lập thành cấp số nhân: $N, \frac{101,4}{100}.N, \left(\frac{101,4}{100}\right)^2.N, ...$

G/S: N = 1,8 triệu người thì sau 5 năm số dân của tỉnh là: $\left(\frac{101,4}{100}\right)^5.1,8 \approx 1,9$ (triệu)

Và sau 10 năm thì sẽ là: $\left(\frac{101,4}{100}\right)^{10}.1,8 \approx 2,1$ (triệu)

Bài 4.9.

a) Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$

b) Tính tổng S = 1 + 11 + 111 + 1111 + … + 11…1 (*n* số)

HD✍Giải

a) Xét dãy số $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}$. Đây là dãy cấp số nhân với $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{3}$

Khi đó $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} = \dfrac{1\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

b) Ta có

$9S = 9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots9 = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots + (10^n - 1)$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - n = \frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$

$\Rightarrow S = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

Bài 4.10. Bốn số lập thành cấp số cộng. Lần lượt trừ mỗi số ấy cho 2, 6, 7, 2 ta được một cấp số nhân. Tìm các số đó.

HD✍Giải

Gọi bốn số cần tìm là *x*, *y*, *z*, *t*, ta có:
Cấp số cộng: *x*, *y*, *z*, *t*
Cấp số nhân: x – 2, y – 6, z – 7, t – 2. Từ đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + z = 2y \\ y + t = 2z \\ (y-6)^2 = (x-2)(z-7) \\ (z-7)^2 = (y-6)(t-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \\ z = 19 \\ t = 26 \end{cases}$$

Bài 4.11. Ba số *x* + 6*y*, 5*x* + 2*y*, 8*x* + *y* theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng; đồng thời, các số *x* – 1, *y* + 2, *x* – 3*y* theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Hãy tìm *x* và *y*.

HD✍Giải

Vì các số *x* + 6*y*, 5*x* + 2*y*, 8*x* + *y* theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, nên:

$2(5x + 2y) = x + 6y + 8x + y$ hay $x = 3y$ (1)

Vì các số *x* – 1, *y* + 2, *x* – 3*y* theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân, nên:

$(y + 2)^2 = (x - 1)(x - 3y)$ (2)

Thay (1) vào (2), tìm được $x = -6; y = -2$

Bài 4.12. Biết rằng ba số x, y, z lập thành cấp số nhân và ba số $x, 2y, 3z$ lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

HD✍Giải

Vì ba số x, y, z lập thành cấp số nhân nên thay các giá trị $y = xq$, $z = xq^2$ vào cấp số cộng $x, 2y, 3z$, ta được cấp số cộng : $x, 2xq, 3xq^2$.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có: $x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow 1 + 3q^2 = 4q$.

Giải phương trình : $3q^2 - 4q + 1 = 0$, ta được $q = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{3}$

Bài 4.13. Cho cấp số nhân a, b, c, d. Chứng minh rằng:

a) $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$

b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

c) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

HD✍Giải

Ta có : $b^2 = ac$, $c^2 = bd$, $ad = bc$

a) $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2$

$= a^2 - 2ad + d^2 = (a - d)^2$ (đpcm)

b) $(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (đpcm)

c) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = \dfrac{b^2c^2}{a} + \dfrac{a^2c^2}{b} + \dfrac{a^2b^2}{c} = \dfrac{acc^2}{a} + \dfrac{(b^2)^2}{b} + \dfrac{aa^2c}{c} = a^3 + b^3 + c^3$ (đpcm)

Bài 4.14. Tìm cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$ (1)

HD✍Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\left(q^4 - 1\right)}{q - 1} = 15 \\ \dfrac{u_1^2\left(q^8 - 1\right)}{q^2 - 1} = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1^4\left(q^4 - 1\right)^2}{(q - 1)^2} = 225 \\ \dfrac{u_1^2\left(q^8 - 1\right)}{q^2 - 1} = 85 \end{cases}$

Chia từng vế phương trình, ta được

$$\frac{\left(q^4 - 1\right)^2\left(q^2 - 1\right)}{\left(q - 1\right)^2\left(q^8 - 1\right)} = \frac{225}{85} \Leftrightarrow \frac{\left(q + 1\right)^2\left(q^2 + 1\right)}{q^4 + 1} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$$

Chia hai vế phương trình cho q^2, đặt $x = q + \dfrac{1}{q}; q \neq 0$,

Ta có: $14x^2 - 17x - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x = -\dfrac{9}{7} \end{array}\right.$

Với $x = -\dfrac{9}{7}$, ta có phương trình $q + \dfrac{1}{q} = -\dfrac{9}{7}$ vô nghiệm

Với $x = \dfrac{5}{2}$, ta có phương trình $q + \dfrac{1}{q} = \dfrac{5}{2}$. Giải tìm được $q = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$ tương ứng

$u_1 = 1$, $u_1 = 8$

Vậy hai cấp số nhân:

Với $u_1 = 1$, $q = 2$ có cấp số nhân: 1, 2, 4, 8, . . .

Với $u_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ có cấp số nhân 8, 4, 2, 1, . . .

Bài 4.15. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy số tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm hai cấp số đó.

HD Giải

Nếu cấp số cộng 3, u_2, u_3 thí cấp số nhân là 3, u_2, $\frac{9u_3}{5}$. Theo tính chất của cấp số, ta có $u_2 = \frac{3+u_3}{2}$ và

$u_2^2 = 3.\frac{9u_3}{5}$ hay

$$\left(\frac{3+u_3}{2}\right)^2 = \frac{27u_3}{5} \Leftrightarrow 5u_3^2 - 78u_3 + 45 = 0 \Leftrightarrow u_3 = 15(do\ u_3 > 3)$$

Vậy hai cấp số cần tìm: CSC: 3,9,15. CSN: 3,9,27

Bài 4.16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 2u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 5$ là cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

HD Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có

$u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$ với mọi $n \geq 1$ hay $v_{n+1} = 2v_n$ với mọi $n \geq 1$

Suy ra (v_n) là một cấp số nhân với $v_1 = u_1 + 5 = 1 + 5 = 6$ và công bội $q = 2$.

Từ đó, số hạng tổng quát của cấp số nhân (v_n) là: $v_n = 6.2^{n-1} = 3.2^n$

b) Từ kết quả câu a), ta có $u_n = v_n - 5 = 3.2^n - 5$

Bài 4.17.

a) Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2}{5}.3^{n-1}$ là cấp số nhân

b) Viết ba số xen giữa các số $\frac{1}{2}$ và 8 để được một cấp số nhân gồm năm số hạng

HD Giải

a) Lập tỉ số: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{5}.3^n}{\frac{2}{5}.3^{n-1}} = 3$. Suy ra $u_{n+1} = 3u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$

b) Giả sử cấp số nhân cần tìm là: $u_1 = \frac{1}{2}$, u_2, u_3, u_4, $u_5 = 8$. Gọi q là công bội

Ta có: $u_5 = 8 = \frac{1}{2}q^4 \Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 2$

Vậy, ta có hai cấp số nhân: $\frac{1}{2}$, 1, 3, 4, 8 và $\frac{1}{2}$, –1, 2, – 4, 8

Bài 4.18. Cho dãy số (u_n) mà tổng n số hạng đầu tiên của nó (kí hiệu là S_n) được tính theo công thức sau: $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$

a) Hãy tính u_1, u_2, và u_3

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số nhân. Hãy xác định công bội của CSN đó.

HD Giải

a) Ta có $u_1 = S_1 = 2$, $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = S_2 - S_1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$,

$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) - u_1 - u_2 = S_3 - S_2 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} = \frac{2}{9}$

b) Đặt $S_0 = 0$, ta có $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} - \frac{3^{n-1} - 1}{3^{n-2}} = \frac{2}{3^{n-1}}, \forall n \geq 1$

c) Ta có $u_{n+1} = \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}u_n$, với mọi $n \geq 1$.

Vì thế, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội bằng $\frac{1}{3}$

Bài 4.19. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}.u_n$ với mọi $n \geq 1$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), mà $v_n = \frac{u_n}{n}$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Tính tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + ... + \frac{u_{11}}{11}$

HD Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $n \geq 1$: $\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}.\frac{u_n}{n}$ *hay* $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 = \frac{1}{3}$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.

b) Ta có $v_n = \frac{1}{3}.\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $u_n = \frac{n}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$.

c) Ta có $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + ... + \frac{u_{11}}{11} = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{11} = \frac{1}{3}.\frac{1 - \frac{1}{3^{11}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^{11} - 1}{2.3^{11}} = \frac{88573}{177147}$

Bài 4.20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 6u_n - 1$ với mọi $n \geq 1$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), mà $v_n = u_n - \frac{1}{5}$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của CSN đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

c) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n)

HD Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $u_{n+1} - \frac{1}{5} = 6\left(u_n - \frac{1}{5}\right)$, với mọi $n \geq 1$ hay $v_{n+1} = 6v_n, \forall n \geq 1$. Vì thế dãy số ($v_n$) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ và công bội $q = 6$

b) Từ kết quả phần a) suy ra với mọi $n \geq 1: v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{4.6^{n-1}}{5}; u_n = v_n + \frac{1}{5} = \frac{4.6^{n-1} + 1}{5}$

c) Kí hiệu T_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và S_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n). Ta có $T_{10} = S_{10} + 10.\frac{1}{5} = \frac{4}{5}.\frac{1-6^{10}}{1-6} + 2 = 9674590$

Bài 4.21.

a) Cho cấp số nhân (u_n) có $8u_2 - 5\sqrt{5}.u_5 = 0$ và $u_1^3 + u_3^3 = 189$. Hãy tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

b) Cho cấp số nhân (u_n) có $3\sqrt{3}.u_2 + u_5 = 0$ và $u_3^2 + u_6^2 = 63$. Hãy tính tổng $S = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_{15}|$

c) Cho cấp số nhân với công bội $q \in (0;1)$. Hãy tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó, biết rằng $u_1 - u_3 = 3$ và $u_1^2 - u_3^2 = 5$

HD✍Giải

a) Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy $u_1.q \neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} 8u_2 - 5\sqrt{5}.u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q\left(8 - 5\sqrt{5}.q^3\right) = 0 \\ u_1^3.(1-q^6) = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1 = 5 \end{cases}.$$

Từ đó kí hiệu S là tổng cần tính, ta được $S = 5.\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{12}}{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{57645 + 23058.\sqrt{5}}{3125}$

b) Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy $u_1.q \neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}.u_2 + u_5 = 0 \\ u_3^2 + u_6^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q.\left(3\sqrt{3} + q^3\right) = 0 \\ u_1^2 q^4\left(1 + q^6\right) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\sqrt{3} \\ |u_1| = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vì dãy số (u_n) là cấp số nhân vớii công bội q nên dãy số $\left(|u_n|\right)$ là cấp số nhân với công bội $|q|$. Vì thế, kí hiệu S là tổng cần tính, ta được $S = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{15}}{1-\sqrt{3}}$

c) Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 = 3 \\ u_1^2 - u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1-q^2\right) = 3 \\ u_1^2\left(1-q^4\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ (do $q \in (0;1)$). Khi đó: $S = 2.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{25}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Bài 4.22.

a) Biết 1 + 3 + 5 + …+ u_n = 17161. Tìm n

b) Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều khác 0. CMR: $\dfrac{1}{u_1.u_2} + \dfrac{1}{u_2.u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n-1}.u_n} = \dfrac{n-1}{a_1.a_n}$

c) CMR trong một cấp số nhân ta có: $S_n.(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

HD✍Giải

a) Các số hạng 1, 3, 5, …, n lập thành cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.
Nên ta có, $S_n = n^2 = 17161$. Suy ra $n = 131$

b) Nếu công sai $d = 0$ thì có $u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n \Rightarrow$ Đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $d \neq 0$, ta có

$$\frac{1}{u_1.u_2} = \frac{1}{u_1(u_1+d)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1+d}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)$$

$$\frac{1}{u_2.u_3}=\frac{1}{u_2(u_2+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2+d}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)$$

…………

$$\frac{1}{u_{n-1}.u_n}=\frac{1}{u_{n-1}(u_n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_{n-1}+d}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}\right)$$

Khi đó

$$\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{n-1}.u_n}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_n}\right)=\frac{1}{d}.\frac{u_n-u_1}{u_1u_n}=\frac{n-1}{a_1.a_n}$$

c) Ta có

$$S_n.\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(\frac{u_1\left(1-q^{3n}\right)}{1-q}-\frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q}\right)$$

$$=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}\left(1-q^n\right)\left(q^{2n}-q^{3n}\right)=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}.q^{2n}\left(1-q^n\right)^2=\left[\frac{u_1q^n}{1-q}.\left(1-q^n\right)\right]^2$$

$$\left(S_{2n}-S_n\right)^2=\left[\frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q}-\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\right]^2=\left[\frac{u_1q^n}{1-q}.\left(1-q^n\right)\right]^2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.23. Chứng minh rằng ba số *a*, *b*, *c* lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=\left(ab+bc\right)^2$

HD Giải

Ta có

$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=\left(ab+bc\right)^2 \Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2=a^2b^2+2b^2ac+b^2c^2$

$\Leftrightarrow a^2c^2-2b^2ac+b^4=0 \Leftrightarrow \left(ac-b^2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow b^2=ac \Leftrightarrow$ *a*, *b*, *c* lập thành cấp số nhân

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 4.24. Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.(ĐS: $q=2, u_1=1$. Dãy số: 1, 2, 4, 8, 16, 32)

Bài 4.25. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $6u_2+u_5=1, u_3+2u_4=-1$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó. (ĐS: $q=-2, u_1=\frac{1}{4} \Rightarrow u_n=\frac{1}{4}.(-2)^{n-1}$)

Bài 4.26. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $8u_2-5\sqrt{5}.u_5=0$ và $u_1^3+u_3^3=189$. Hãy tìm tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.(ĐS: $q=\frac{2}{\sqrt{5}}, u_1=5 \Rightarrow S=\dfrac{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{12}}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$)

Bài 4.27. Tính u_9, S_9 của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_2+u_3=18 \\ u_3+u_4=36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2-u_4+u_5=10 \\ u_3-u_5+u_6=20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_{20}=8u_{17} \\ u_3+u_5=272 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6u_2+u_5=1 \\ 3u_3+2u_4=-1 \end{cases}$

ÔN TẬP CHƯƠNG III
DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC

1. **Phương pháp quy nạp toán học**

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

B1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$

B2. Giả thiết mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq 1$) (giả thiết quy nạp)

B3. Chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$

2. **Dãy số**

a) Định nghĩa dãy số

- Một hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Đôi khi người ta gọi nó là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

- Mỗi hàm u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}, m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn

b) Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu

Phương pháp khảo sát tính đơn điệu của dãy số

PP1: Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$

- Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số tăng
- Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số giảm

PP2. Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, rồi so sánh với 1

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số tăng
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số đã cho là dãy số giảm

c) Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn trên nếu $\exists M \in \mathbb{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn dưới nếu $\exists m \in \mathbb{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là: $\exists M, m \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. **Cấp số cộng, cấp số nhân**

	Cấp số cộng	Cấp số nhân
Định nghĩa	$u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$	$u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in \mathbb{N}^*$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d$, với $n \geq 2$	$u_n = u_1.q^{n-1}$, với $n \geq 2$
Tính chất	$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, k \geq 2$	$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}, k \geq 2$ $hay\ \lvert u_k \rvert = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$

Tổng *n* số hạng đầu	$S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Hay $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$
Trong thực hành	Ba số *a*, *b*, *c* lập thành CSC thì $2b = a + c$ hoặc $a-b=b-c=\dfrac{1}{2}(a+c)$	Ba số *a*, *b*, *c* lập thành CSN thì $b^2 = ac$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Dùng phương pháp qui nạp chứng minh rằng:

$$S_n = 1+5+9+\ldots+(4n-3) = n(2n-1), n \in \mathbb{N}^*$$

HD✍Giải

$S_n = 1+5+9+\ldots+(4n-3) = n(2n-1)$ (1), $n \in \mathbb{N}^*$

Với n = 1, dễ thấy (1) đúng

Giả sử (1) đúng với n = k ($k \geq 1$), tức là $S_k = 1+5+9+\ldots+(4k-3) = k(2k-1), k \geq 1$

Ta chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, nghĩa là $S_{k+1} = (k+1)(2k+1)$

Thật vậy, theo giả thiết qui nạp ta có

$S_{k+1} = 1+5+9+\ldots+(4k-3)+(4k+1)$

$= S_k + 4k+1 = k(2k-1)+4k+1 = 2k^2+3k+1 = 2(k+1)\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = (k+1)(2k+1)$

Vậy (1) được chứng minh

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (n-1).2^n + 1$.

Chứng minh rằng công thức truy hồi của dãy số (u_n) là: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n, n \geq 1 \end{cases}$

HD✍Giải

Dể thấy, với *n* = 1, ta có $u_1 = 1$

Từ côn thức u_n, ta có

$u_{n+1} = \big((n+1)-1\big).2^{n+1} + 1 = (n-1).2^{n+1} + 2^{n+1} + 1$

$= (n-1).2^n + 1 + (n-1).2^n + 2^{n+1} = u_n + (n-1+2).2^n = u_n + (n+1).2^n$ (đpcm).

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 5$ và $u_n = u_{n-1} - 2$ với mọi $n \geq 2$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

b) Hãy tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n)

HD✍Giải

Để ý thấy rằng (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công sai $d = -2$, ta được

a) $u_n = 7 - 2n$

b) $S_{100} = -9400$

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ với mọi $n \geq 1$

Chứng minh rằng (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

HD✍Giải

Trước hết, bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh $u_n = 3$ (1), với mọi $n \geq 1$

Hiển nhiên ta có (1) đúng khi *n* = 1

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k,\ k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 6} = \sqrt{3+6} = 3$, nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$. Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Từ đó suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng khi công sai $d = 0$, đồng thời là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 3u_n^2 - 10$ với mọi $n \geq 1$

Chứng minh rằng (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

HD✍Giải

Tương tự như bài 4.. Bằng phương pháp qui nạp, chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6$ và $u_{n+1} = 3u_n - 11$ với mọi $n \geq 1$

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có $u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2} + \dfrac{11}{2}$

HD✍Giải

Ta chứng minh $u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2} + \dfrac{11}{2}$ (1) với mọi $n \geq 1$ bằng phương pháp qui nạp

Với n = 1, ta có $u_1 = 6 = \dfrac{3^{1-1}}{2} + \dfrac{11}{2}$. Như vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với n = k , $k \geq 1$ (giả thiết quy nạp).

Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy và giả thiết quy nạp, ta có $u_{k+1} = 3u_k - 11 = 3\left(\dfrac{3^{k-1}}{2} + \dfrac{11}{2}\right) - 11 = \dfrac{3^k}{2} + \dfrac{11}{2}$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \geq 1$

Bài 7. Tìm cấp số cộng u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, biết rằng $u_1 + u_3 + u_5 = -12$ và $u_1.u_3.u_5 = 80$

HD✍Giải

Kí hiệu công sai của cấp số cộng là d. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1.u_3.u_5 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = -4 \\ u_1.(u_1 + 2d).(u_1 + 4d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2d - 4 \\ 16(d+2).(d-2) = 80 \end{cases}$$

Giải ra ta được $d = \pm 3$.

Vậy các cấp số cộng phải tìm là 2, -1, -4, -7, -10 và -10, -7, -4, -1, 2.

Bài 8. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của một số nhân (u_n), biết rằng: $u_4 - u_2 = -1\dfrac{13}{32}$ và $u_6 - u_4 = -\dfrac{45}{512}$.

HD✍Giải

Ta có: $$\begin{cases} u_4 - u_2 = -1\dfrac{13}{32} \\ u_6 - u_4 = -\dfrac{45}{512} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q^2 = -\dfrac{45}{32} \\ u_1q^5 - u_1q^3 = -\dfrac{45}{512} \end{cases} \Rightarrow q^2 = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow q = \pm\dfrac{1}{4}$$

Vậy $q = \dfrac{1}{4} \Rightarrow u_1 = 6$ và $q = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow u_1 = -6$

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

HD✍Giải

Đặt $x^2 = y, y \geq 0$. Ta có phương trình $y^2 - (3m+5)y + (m+1)^2 = 0$ (1)

Để phương trình có 4 nghiệm thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương $y_1, y_2 (y_1 < y_2)$. Bốn nghiệm đó là $-\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_1}$

Điều kiện để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng là $\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}=2\sqrt{y_1}$ *hay* $y_2=9y_1$

Mặt khác, kết hợp với định lí Vi-ét: $\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{b}{a}=3m+5 \\ y_1.y_2=\dfrac{c}{a}=(m+1)^2 \end{cases}$. Tìm được $m=5; m=-\dfrac{25}{19}$

Bài 10. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của bốn số đó bằng 22 và tổng bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

HD Giải

Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng. Do bốn số lập thành cấp số cộng nên ta có thể kí hiệu bốn số đó là $a-d, a, a+d, a+2d$. Khi đó theo giả thiết ta có:

$(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=4a+2d=22$

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=4a^2+4ad+6d^2=166$

Giải ra được $d=\pm 3$. Vậy bốn số cần tìm là: 10, 7, 4, 1 hoặc 1, 4, 7, 10

Bài 11. Ba số có tổng bằng $\dfrac{148}{9}$ và lập thành một cấp số nhân. Theo thứ tự đó, ba số ấy đồng thời là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

HD Giải

Nếu cấp số cộng có số hạng đầu là a, công sai là d thì ba số cần tìm theo thứ tự là $a, a+3d, a+7d$. Theo giả thiết ta có:

$a+(a+3d)+(a+7d)=3a+10d=\dfrac{148}{9}$ (1) $a(a+7d)=(a+3d)^2$ (2)

Giải (1) và (2). Tìm được $d=0; d=\dfrac{4}{3}$

Vậy ba số cần tìm là: $\dfrac{148}{27},\dfrac{148}{27},\dfrac{148}{27}$ hoặc $4,\dfrac{16}{3},\dfrac{64}{9}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 12. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ ba thì bằng nhau. Tìm các cấp số đó (ĐS: CSC: 5, 25, 45. CSN: 5, 15, 45).

Bài 13. Ba số có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để có tổng của chúng là 820 ?(ĐS: n = 20)

Bài 14. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; ba số $x, y-4, z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; đồng thời, các số $x, y-4, z-9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tìm x, y, z.

(ĐS: $(x,y,z)=(1,2,4)$ và $(x,y,z)=(4,2,1)$)

Bài 15. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; đồng thời, chúng lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ 3 và thứ 9 của một cấp số cộng. Hãy tìm ba số đó, biết rằng tổng của chúng là 13.

(ĐS: $(x,y,z)=(1,3,9)$ và $(x,y,z)=\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{13}{3},\dfrac{13}{3}\right)$)

Bài 16. Tính u_{20}, S_{20} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 4u_2-3u_4+2u_6=20 \\ S_5=25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2u_2-3u_4+4u_6=43 \\ S_7-63=0 \end{cases}$

Bài 17. Tính u_{25}, S_{25} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 2u_2 - 3u_4 + 4u_6 = 43 \\ S_7 = 63 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4u_1 - 2u_3 + 3u_6 - 13 = 0 \\ S_7 = 21 \end{cases}$

Bài 18. Tính S_{30} và tìm u_n của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_3 + u_7 = 26 \end{cases}$

Bài 19. Tính u_{50} và S_{93} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 4u_2 - 2u_4 + u_6 = -3 \\ u_2 + u_{99} = 289 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2u_3 + 3u_4 - u_5 = 19 \\ S_9 = 90 \end{cases}$

Bài 20. Tính u_{99} và S_{101} của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 3u_1 + u_2 + u_5 = 10 \\ S_4 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2u_1 - 3u_4 + 4u_5 = 9 \\ S_6 = 21 \end{cases}$

CHƯƠNG III. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN
PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{n+1} = 3^{2(n-1)}$. **B.** $u_{n+1} = 3^{2n} - 1$. **C.** $u_{n+1} = 9.3^n - 1$. **D.** $u_{n-1} = 3^n.3^{n-1}$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $S_n = n\left[u_1 + \dfrac{(n-1)d}{2}\right]$. **B.** $S_n = \dfrac{nu_1 + u_n}{2}$.

C. $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$. **D.** $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n), biết công thức số hạng tổng quát dưới đây. Tìm dãy số tăng.

A. $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + n}$. **C.** $u_n = (-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

Câu 4: Tìm công bội q của một số nhân $\left(u_n\right)$, biết rằng: $u_4 - u_2 = -1\dfrac{13}{32}$ và $u_6 - u_4 = -\dfrac{45}{512}$.

A. $q = \pm\dfrac{1}{2}$. **B.** $q = \pm 4$. **C.** $q = \pm\dfrac{1}{4}$. **D.** $q = 4; q = 2$.

Câu 5: Biết rằng viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 ta được một cấp số cộng có tám số hạng. Tính tổng S các số hạng của cấp số này.

A. $S = 10$. **B.** $S = 201$. **C.** $S = 100$. **D.** $S = 108$.

Câu 6: Tìm giá trị nào của tham số *a* để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{an^2 + 1}{2n^2 + 3}$ là dãy số giảm.

A. $a > 1$. **B.** $a < \dfrac{2}{3}$. **C.** $a \le \dfrac{3}{2}$. **D.** $a < 3$.

Câu 7: Biết ba số khác nhau a, b, c có tổng số là 30. Đọc theo thứ tự a, b, c ta được một cấp số cộng; đọc theo b, a, c ta được cấp số nhân. Tìm công sai *d* và công bội *q* của hai cấp số đó.

A. $d = 40, q = 3$. **B.** $d = 30, q = -2$. **C.** $d = 20, q = 2$. **D.** $d = -20, q = 2$.

Câu 8: Biết C_n^1, C_n^2, C_n^3 lập thành một cấp số cộng với $n \in \mathbb{N}, n > 3$. Tìm *n*.

A. $n = 9$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 5$.

Câu 9: Biết độ dài c, b, a các cạnh tam giác *ABC* vuông tại *A* theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm công bội *q* của cấp số nhân đó.

A. $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}}$. **B.** $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$. **C.** $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. **D.** $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Câu 10: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

A. $m = 2; m = -\dfrac{25}{19}$. **B.** $m = 5; m = -3$. **C.** $m = 1; m = -\dfrac{5}{9}$. **D.** $m = 5; m = -\dfrac{25}{19}$.

Câu 11: Cho cấp số cộng $-2, x, 6, y$. Tìm x, y.

A. $x = 2, y = 8$. **B.** $x = 2, y = 10$. **C.** $x = 1, y = 7$. **D.** $x = -6, y = -2$.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n), có $u_4 + u_{97} = 101$. Hãy tình tổng S của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S = 50$. **B.** $S = 5050$. **C.** $S = 505$. **D.** $S = 101$.

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_1 + u_6 = 17$. Tìm số hạng u_1 và công bội *d*.

A. $u_1 = 1; d = 4.$ **B.** $u_1 = 9; d = -3.$ **C.** $u_1 = 16; d = -3.$ **D.** $u_1 = 16; d = 2.$

Câu 14: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q}.$ **B.** $S_n = \dfrac{u_1\left(1+q^n\right)}{1-q}.$ **C.** $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}.$ **D.** $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.$

Câu 15: Một hội trường có 10 dãy ghế. Biết rằng mỗi dãy ghế sau nhiều hơn dãy ghế trước 20 ghế và dãy sau cùng có 280 ghế. Hỏi hội trường có bao nhiêu ghế ngồi ?

A. 1100 ghế ngồi. **B.** 3000 ghế ngồi. **C.** 1000 ghế ngồi. **D.** 1900 ghế ngồi.

Câu 16: Tìm giá trị nào của tham số *a* để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$ là dãy số giảm.

A. $a \leq 4.$ **B.** $a > 2.$ **C.** $a \geq 2.$ **D.** $a < 2.$

Câu 17: Cho ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $b^2 = ac.$ **B.** $c^2 = ab.$ **C.** $b = ac.$ **D.** $2b = a + c.$

Câu 18: Tìm công sai *d* của số cộng (u_n), biết rằng $u_1 + u_3 + u_5 = -12$ và $u_1.u_3.u_5 = 80.$

A. $d = 3; d = -2.$ **B.** $d = 3; d = 5.$ **C.** $d = \pm 3.$ **D.** $d = \pm 5.$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Tìm số hạng u_{1001}.

A. $u_{1001} = 4005.$ **B.** $u_{1001} = 4003.$ **C.** $u_{1001} = 3.$ **D.** $u_{1001} = 1.$

Câu 20: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n+1} = 3n - 1.$ **B.** $u_{n+1} = 3^n - 3.$ **C.** $u_{n-1} = \dfrac{1}{3}.3^n.$ **D.** $u_{n+1} = 3^n - 1.$

Câu 21: Biết số đo của bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm số đo của góc nhỏ nhất và công bội $q(q > 1)$, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

A. $24^0, q = 3.$ **B.** $48^0, q = 3.$ **C.** $26^0, q = 2.$ **D.** $24^0, q = 2.$

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -1$ và $u_n = 2n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2.$ Tính u_{11}.

A. $u_{11} = 2^{10}.11^{10}.$ **B.** $u_{11} = -2^{10}.11^{10}.$ **C.** $u_{11} = -2^{10}.11!.$ **D.** $u_{11} = 2^{10}.11!.$

Câu 23: Cho dãy số (u_n), biết công thức số hạng tổng quát dưới đây. Tìm dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}.$ **C.** $u_n = (-1)^n(2^n + 1).$ **D.** $u_n = \sin n.$

Câu 24: Cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Số 12288 là số hạng thứ mấy ?

A. Số hạng thứ 13. **B.** Số hạng thứ 9. **C.** Số hạng thứ 21. **D.** Số hạng thứ 15.

Câu 25: Biết ba góc của một tam giác lập thành cấp số cộng, góc lớn nhất gấp năm lần góc nhỏ nhất. Tìm công sai *d* ($d > 0$) của cấp số cộng đó.

A. $d = 20^0.$ **B.** $d = 10^0.$ **C.** $d = 40^0.$ **D.** $d = 30^0.$

Câu 26: Cho cấp số nhân $-4, x, 9.$ Tìm *x*.

A. $x = 36.$ **B.** $x = -36.$ **C.** $x = 6.$ **D.** $x = -6{,}5.$

Câu 27: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 150$ và $u_n = u_{n-1} - 3$ với mọi $n \geq 2.$ Tính tổng S của 100 số hạng đầu tiên.

A. $S = 59700.$ **B.** $S = 150.$ **C.** $S = 300.$ **D.** $S = 29850.$

Câu 28: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos(3n+1)\dfrac{\pi}{6}$ và $u_n = u_{n+4}$ với mọi $n \geq 1.$ TÍnh tổng *S* của 27 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

A. $S=-\frac{1}{2}.$ **B.** $S=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $S=\frac{1}{6}.$ **D.** $S=-1.$

Câu 29: Tìm giá trị nào của tham số *a* để dãy số (u_n), với $u_n=\frac{na+2}{n+1}$ là dãy số tăng. Là dãy số giảm ?

A. $a\geq 1.$ **B.** $a<2.$ **C.** $a>2.$ **D.** $a<3.$

Câu 30: Cho ba số $a,b,c(a<b<c)$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, biết tổng của chúng là 63 và tích của chúng là 1728. Tìm công bội *q* của cấp số nhân này.

A. $q=\frac{1}{4}.$ **B.** $q=4.$ **C.** $q=\frac{1}{3}.$ **D.** $q=3.$

Câu 31: Tính tổng S = 1 + 11 + 111 + 1111 + … + 11…1 (*n* số).

A. $S=\frac{10\left(10^n-1\right)}{9}-n.$ **B.** $S=\frac{10\left(10^n-1\right)-9n}{81}.$

C. $S=\frac{10\left(10^n-1\right)-n}{9}.$ **D.** $S=\frac{10^n-9n-1}{81}.$

Câu 32: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=3+3^n.$ **B.** $u_{n+1}=1+3^n.$ **C.** $u_{n+1}=3.3^n.$ **D.** $u_{n+1}=3(n+1).$

Câu 33: Cho các cấp số nhân (u_n), biết $u_1=3, q=-2.$ Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?

A. Số hạng thứ 3. **B.** Số hạng thứ 9. **C.** Số hạng thứ 7. **D.** Số hạng thứ 5.

Câu 34: Tính tổng $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}.$

A. $S=\frac{3}{2}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$ **B.** $S=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$ **C.** $S=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$ **D.** $S=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$

Câu 35: Biết bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của bốn số đó bằng 22 và tổng bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

A. 10, 9, 8, 7 hoặc 7, 8, 9, 10. **B.** 10, 8, 6, 4 hoặc 4, 6, 8, 10.
C. 10, 6, 2, -2 hoặc -2, 2, 6, 10. **D.** 10, 7, 4, 1 hoặc 1, 4, 7, 10.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $u_1u_2...u_{100}=u_{5050}.$ **B.** $u_1+u_2+...+u_{100}=\frac{u_{100}-1}{2}.$

C. $\frac{u_1+u_9}{2}=u_5.$ **D.** $\frac{u_2u_4}{2}=u_3.$

Câu 37: Cho cấp số cộng $6,x,-2,y.$ Tìm $x,y.$

A. $x=2,y=-6.$ **B.** $x=4,y=-6.$ **C.** $x=2,y=5.$ **D.** $x=4,y=6.$

Câu 38: Cho dãy số (u_n), biết công thức số hạng tổng quát dưới đây. Tìm dãy số bị chặn.

A. $u_n=\frac{n}{n+1}.$ **B.** $u_n=\sqrt{n^2+1}.$ **C.** $u_n=2^n+1.$ **D.** $u_n=n+\frac{1}{n}.$

Câu 39: Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n), biết $u_3=-5, u_6=135.$

A. $u_n=-5(-3)^{n-3}.$ **B.** $u_n=5(-3)^{n-3}.$ **C.** $u_n=5.3^{n-3}.$ **D.** $u_n=-3(-5)^{n-3}.$

Câu 40: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{2n}.

A. $u_{2n}=9^n.$ **B.** $u_{n+1}=3+3^n.$ **C.** $u_{n+1}=6n.$ **D.** $u_{n+1}=2.3^n.$

Câu 41: Biết rằng viết năm số xen giữa các số 1 và 729 theo thứ tự tăng dần ta được một cấp số nhân có bảy số hạng. Tính tổng S các số hạng của cấp số này.

A. $S=547.$ **B.** $S=657.$ **C.** $S=1020.$ **D.** $S=1093.$

Câu 42: Cho cấp số cộng (u_n). Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2}=u_5+u_{10}.$ **B.** $u_{10}.u_{30}=u_{20}.$ **C.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2}=u_{20}.$ **D.** $u_{90}+u_{210}=2u_{150}.$

Câu 43: Tính tổng $S=2+4+6+....+200.$

A. $S=10200.$ **B.** $S=11000.$ **C.** $S=10100.$ **D.** $S=12000.$

Câu 44: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

A. $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2u_n+1\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}-u_n=2\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n^3-1\end{cases}.$

Câu 45: Viết sáu số xen giữa các số – 2 và 256 để được một cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu ?

A. $u_{15}=-32768.$ **B.** $u_{15}=-327.$ **C.** $u_{15}=30786.$ **D.** $u_{15}=2768.$

Câu 46: Biết ba số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng; đồng thời, các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

A. $x=-6;y=-2.$ **B.** $x=3;y=-2.$ **C.** $x=6;y=2.$ **D.** $x=2;y=-5.$

Câu 47: Chu vi của một đa giác là 158, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai d = 3cm. Biết cạnh lớn nhất là 44cm, tính số cạnh của đa giác đó.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 48: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{2}$ và $u_n=u_{n-1}+2n$ với mọi $n\ge 2.$ Tính $u_{50}.$

A. $u_{50}=2548,5.$ **B.** $u_{50}=1274,5.$ **C.** $u_{50}=2550,5.$ **D.** $u_{50}=5096,5.$

Câu 49: Tính tổng $S=1+2+2^2+2^3+...+2^{64}.$

A. $S=2^{65}-1.$ **B.** $S=2^{63}-1.$ **C.** $S=2^{64}-1.$ **D.** $S=2^{64}+1.$

Câu 50: Cho số nhân (u_n), biết $u_2-u_4+u_5=10$ và $u_3-u_5+u_6=20.$ Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.

A. $u_1=1;q=2.$ **B.** $u_1=2;q=2.$ **C.** $u_1=-1;q=3.$ **D.** $u_1=2;q=4.$

Câu 51: Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_2=-2$ và $u_5=54.$ Tính tổng $S_{1000}.$

A. $S_{1000}=\frac{3^{1000}-1}{2}.$ **B.** $S_{1000}=\frac{1-3^{1000}}{6}.$ **C.** $S_{1000}=\frac{1-3^{1000}}{4}.$ **D.** $S_{1000}=\frac{3^{1000}-1}{6}.$

Câu 52: Cho a, b, c theo thứ tự là một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $b=\frac{1}{2}ac.$ **B.** $a-b=\frac{1}{2}(a+c).$ **C.** $a+c=2b.$ **D.** $b-c=\frac{1}{2}(a+c).$

Câu 53: Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Tìm số hạng $u_{17}.$

A. $u_{17}=4.$ **B.** $u_{17}=11.$ **C.** $u_{17}=235.$ **D.** $u_{17}=242.$

Câu 54: Cho cấp số nhân $-2,x,-18,y.$ Tìm $x,y.$

A. $x=6,y=-54.$ **B.** $x=-6,y=54.$ **C.** $x=-6,y=-54.$ **D.** $x=-10,y=-26.$

Câu 55: Biết bốn số theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Lần lượt trừ mỗi số ấy cho 2, 6, 7, 2 ta được một cấp số nhân. Tìm các số đó.

A. $3;10;17;24.$ **B.** $5;12;19;26.$ **C.** $4;12;20;28.$ **D.** $5;-2;-7;-14.$

Câu 56: Biết rằng viết năm số hạng xen giữa hai số 25 và 1 ta được một cấp số cộng có bảy số hạng. Số hạng u_{50} của cấp số này bằng bao nhiêu ?

A. $u_{50} = -211.$ **B.** $u_{50} = -171.$ **C.** $u_{50} = 102.$ **D.** $u_{50} = 171.$

Câu 57: Cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069 ?

A. 7. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 58: Tìm giá trị nào của tham số *a* để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{an^2+1}{2n^2+3}$ là dãy số tăng.

A. $a < 1.$ **B.** $a \geq \dfrac{2}{3}.$ **C.** $a < \dfrac{3}{2}.$ **D.** $a > \dfrac{2}{3}.$

Câu 59: Một Công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiên việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho Công ty là 4,5 triệu đồng/quý và kề từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng/quý. Hãy tính tổng số tiên lương một kĩ sư được nhận sau 3 năm làm việc cho Công ty?

A. $75,8$ (triệu đồng). **B.** $80,5$ (triệu đồng). **C.** $53,7$ (triệu đồng). **D.** $73,8$ (triệu đồng).

Câu 60: Cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công bội *q* của cấp số nhân.

A. $u_1 = 3; q = 2.$ **B.** $u_1 = 2; q = -3.$ **C.** $u_1 = 5; q = 3.$ **D.** $u_1 = -3; q = -2.$

Câu 61: Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 3$ và $u_2 = -6.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $u_5 = 24.$ **B.** $u_5 = -48.$ **C.** $u_5 = -24.$ **D.** $u_5 = 48.$

ĐÁP ÁN
CHƯƠNG III. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A			■														■			
B		■				■	■	■			■	■								
C				■									■					■	■	■
D	■				■				■	■				■	■	■				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A			■	■												■	■	■	■	■
B							■	■		■	■			■						
C		■			■	■			■			■	■							
D	■														■					

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A					■	■		■	■	■		■								■
B											■		■		■	■				
C			■	■			■							■						
D	■	■															■	■	■	

	61
A	
B	
C	
D	■